เอกสารคำสอน

วิชา

2110200 โครงสร้างดิสครีต

เรื่อง

ความรู้เบื้องต้นสำหรับคณิตศาสตร์ดิสครีต

โดย

ผศ. ดร.อติวงศ์ สุชาโต

ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์

คณะวิศวกรรมศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

คณิตศาสตร์ดิสครีต

คณิตศาสตร์ดิสครีต (Discrete Mathematics) เป็นแขนงวิชาคณิตศาสตร์ที่ศึกษาถึงสิ่ง (สมาชิกของปริภูมิที่เรากำลังสนใจ) ที่ "ไม่มีความต่อเนื่อง" คำว่า "ไม่มีความต่อเนื่อง" นี้น่าจะสามารถทำความเข้าใจได้สะดวกหากเปรียบเทียบกับตัวอย่างสมบัติของสิ่งที่ต่อเนื่อง เช่น *จำนวนจริง* (Real Number) เป็นสิ่งที่มีความต่อเนื่อง เนื่องจากเมื่อเรากำหนดจำนวนจริงใด ๆ มาสองจำนวน เราสามารถหาจำนวนจริงที่อยู่ระหว่างสองจำนวนนั้นได้เสมอ ในทางตรงกันข้าม หากสิ่งที่เราสนใจคือ *จำนวนเต็ม* (Integer) แทนที่จะเป็นจำนวนจริงทั้งหมด เราจะพบว่าจำนวนเต็มนั้นไม่มีสมบัติดังกล่าว นั่นคือ บางครั้งเราไม่สามารถหาจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่างจำนวนเต็มสองจำนวนที่กำหนดขึ้นมาได้ เช่นนี้เราจะกล่าวได้ว่าจำนวนเต็มนั้นไม่มีความต่อเนื่อง

เช่นเดียวกับคณิตศาสตร์แขนงอื่น ๆ คณิตศาสตร์ดิสครีตเป็นพื้นฐานสำหรับแก้ปัญหาในการประยุกต์ต่าง ๆ ที่หลากหลาย โดยความรู้คณิตศาสตร์ดิสครีตและการประยุกต์ใช้ความรู้ดังกล่าวมีความจำเป็นสำหรับการศึกษาในด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์สาขาต่าง ๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในสาขาที่เกี่ยวกับวิทยาการคอมพิวเตอร์ ตัวอย่างของวิชาในสาขาวิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์ซึ่งอาศัยพื้นฐานความรู้คณิตศาสตร์ดิสครีตอย่างมาก ได้แก่

- โครงสร้างข้อมูล (Data Structures)
- อัลกอริธึม (Algorithms)
- ทฤษฎีฐานข้อมูล (Database Theory)
- ทฤษฎีออโตมาตา (Automata Theory)
- ภาษารูปนัย (Formal Languages)
- ทฤษฎีคอมไพเลอร์ (Compiler Theory)
- ความมั่นคงคอมพิวเตอร์ (Computer Security)
- และ ระบบปฏิบัติการ (Operating Systems) เป็นต้น

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงความรู้เบื้องต้นของคณิตศาสตร์ดิสครีต เพื่อเป็นพื้นฐานที่จำเป็นในการศึกษาหัวข้ออื่น ๆ ในคณิตศาสตร์ดิสตรีตต่อไป โดยความรู้เบื้องต้นดังกล่าวได้แก่ ตรรกะและการพิสูจน์ เซ็ต และ ฟังก์ชัน

ตรรกะและการพิสูจน์

บทบาทหลักของ *ตรรกะ* (Logic) ในการศึกษาคณิตศาสตร์ดิสครีตหรือในคณิตศาสตร์สาขาอื่น ๆ คือ การกำหนดอย่างแน่นอนว่า *การอ้างเหตุผลทางคณิตศาสตร์* (Mathematical Argument) ชุดหนึ่ง ๆ นั้นมีความสมเหตุสมผลหรือไม่ ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท หรือ สมบัติทางคณิตศาสตร์ ว่าทฤษฎีบทหรือสมบัติเหล่านั้นเป็นจริงตามที่กล่าวอ้างหรือไม่นั้น มักจะต้องอาศัยกฎของตรรกะเพื่อแสดงว่าการอ้างเหตุผลต่าง ๆ ที่ใช้ในการพิสูจน์นั้นสมเหตุสมผล ควบคู่กับการอ้างถึงสัจพจน์ (ข้อความซึ่งยอมรับอยู่แล้วว่าถูกต้อง) อื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง เพื่อให้ไม่หลงเหลือข้อโต้แย้งใด ๆ เกี่ยวกับทฤษฎีบทหรือสมบัตินั้น

การศึกษาตรรกะเพื่อสรุปความสมเหตุสมผลของการอ้างเหตุผลทางคณิตศาสตร์ในที่นี้นั้น หัวข้อใหญ่ ๆ ที่เราจะเริ่มกล่าวถึงก่อนคือ นิยามเกี่ยวกับประพจน์และประพจน์ประกอบพร้อมทั้งค่าความจริงของประพจน์เหล่านั้น ตามด้วยวิธีการในการบ่งบอกว่าประพจน์ต่าง ๆ มีค่าความจริงเหมือนกันหรือไม่ โดยเราจะมองทั้งในมุมซึ่งประพจน์ถือว่าเป็นหน่วยเล็กที่สุดที่เราจะพิจารณา[1] และในมุมซึ่งประพจน์อาจจะเกิดจากการแทนค่าที่เฉพาะเจาะจงลงในตัวแปรของประโยคซึ่งมีตัวแปรติดเอาไว้[2] หลังจากที่เราสามารถวิเคราะห์เกี่ยวกับค่าความจริงของประพจน์ในมุมมองต่าง ๆ ได้แล้ว เราจะกล่าวถึงการประเมินความสมเหตุสมผลของข้อกล่าวอ้างทางคณิตศาสตร์ เพื่อนำไปสู่วิธีการต่าง ๆ ที่ใช้ในการพิสูจน์ต่อไป

ประพจน์ ประพจน์ประกอบ และ ค่าความจริง

ประพจน์ (Proposition) คือ ประโยคบอกเล่าซึ่งเป็น จริง (True) หรือเป็น *เท็จ* (False) อย่างใดอย่างหนึ่ง เราเรียกค่าจริงหรือเท็จของประพจน์ว่าเป็น *ค่าความจริง* (Truth Value) ของประพจน์นั้น

การแทนประพจน์นั้นมักใช้ตัวอักขระภาษาอังกฤษตัวเล็กหนึ่งอักขระแทนประพจน์หนึ่งประพจน์ โดยอักขระที่เป็นที่นิยมนั้นเริ่มตั้งแต่อักขระ p เป็นต้นไป ($p, q, r, s, \ldots$) ค่าความจริงที่เป็นจริงจะแทนด้วยอักขระ T ในขณะที่ค่าความจริงที่เป็นเท็จจะแทนด้วยอักขระ F

สัญลักษณ์ "≡" ถูกใช้เพื่อแสดงค่าความจริงของประพจน์ เช่น

- หากประพจน์ p เป็นจริง เราจะแสดงด้วยสัญลักษณ์ $p \equiv \mathrm{T}$
- หากประพจน์ q เป็นเท็จ เราจะแสดงด้วยสัญลักษณ์ $q \equiv \mathrm{F}$ เป็นต้น

ตารางความจริง (Truth Table) คือ ตารางซึ่งแสดงค่าความจริงที่เป็นไปได้ในทุก ๆ กรณีของประพจน์หนึ่ง ๆ หรือหากเป็นตารางความจริงที่เกี่ยวข้องกับประพจน์มากกว่าหนึ่งประพจน์ ตารางความจริงจะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างประพจน์เหล่านั้นในทุก ๆ กรณี

[1] ตรรกศาสตร์ที่มองในมุมมองนี้เรียกว่า ตรรกศาสตร์เชิงประพจน์ (Propositional Logic)

[2] ตรรกศาสตร์ที่มองในมุมมองนี้เรียกว่า ตรรกศาสตร์ภาคแสดง (Predicate Logic)

ตารางที่ 1 แสดงตัวอย่างของตารางความจริงของประพจน์หนึ่งประพจน์ ในขณะที่ตารางที่ 2 แสดงตารางความจริงซึ่งแสดงค่าความจริงในทุก ๆ กรณีที่เป็นไปได้เมื่อพิจารณาประพจน์สองประพจน์พร้อมกัน

p
T
F

ตารางที่ 1 ตารางความจริงของประพจน์ p ใด ๆ

p	Q
T	T
T	F
F	T
F	F

ตารางที่ 2 ตารางความจริงของประพจน์ p และ q ใด

ตัวปฏิบัติการตรรกะและประพจน์ประกอบ

ประพจน์ประกอบ (Compound Proposition) คือ ประพจน์ซึ่งสร้างจากการใช้ *ตัวปฏิบัติการตรรกะ* (Logical Operator) กับประพจน์อื่น ๆ มากกว่า 1 ประพจน์ขึ้นไป เนื่องจากประพจน์ประกอบก็เป็นประพจน์เช่นกัน ขอให้ผู้อ่านเข้าใจว่าเมื่อกล่าวถึงคำว่าประพจน์ ในที่นี้เรามักจะหมายรวมถึงประพจน์ประกอบด้วยเสมอ

ต่อไปนี้จะขอกล่าวถึงตัวปฏิบัติการตรรกะที่ใช้กันโดยทั่วไป

ตัวปฏิบัติการนิเสธ (Negation Operator) คือ ตัวปฏิบัติการตรรกะซึ่งให้ประพจน์ซึ่งมีค่าความจริงตรงกันข้ามกับประพจน์ตั้งต้น สัญลักษณ์ที่ใช้แสดงนิเสธของประพจน์ p ซึ่งเป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงข้ามกับ p เสมอ คือ $\neg p$

ตัวอย่างที่ 1

ให้ p เป็นประพจน์ที่กล่าวว่า “ค่าของ k มากกว่า 3” จงแสดงตัวอย่างคำกล่าวซึ่งสอดคล้องกับ $\neg p$

เราจะต้องหาประโยคบอกเล่าซึ่งมีค่าความจริงตรงกันข้ามกับ “ค่าของ k มากกว่า 3” เสมอ ตัวอย่างของประโยคดังกล่าวได้แก่ “ค่าของ k ไม่มากกว่า 3” หรือ “ค่าของ k น้อยกว่าหรือเท่ากับ 3” เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 2

ให้ p เป็นประพจน์ที่กล่าวว่า “ไม่มีพนักงานคนไหนเลยที่หยุดวันจันทร์” จงพิจารณาพร้อมให้เหตุผลประกอบว่าประพจน์ที่กล่าวว่า “มีพนักงาน 1 คนหยุดวันจันทร์” สอดคล้องกับ $\neg p$ หรือไม่

พิจารณากรณีที่มีพนักงานหยุดวันจันทร์เป็นจำนวนที่ไม่เท่ากับ 1 คน เช่น หากมีพนักงานที่หยุดวันจันทร์ 2 คน ประพจน์ทั้งสองจะมีค่าความจริงเป็นเท็จทั้งคู่ ดังนั้นประพจน์ทั้งสองจะเป็นนิเสธของกันและกันไม่ได้

ตัวปฏิบัติการเชื่อม (Conjunction Operator) คือ ตัวปฏิบัติการตรรกะซึ่งดำเนินการกับประพจน์สองประพจน์และให้ประพจน์ใหม่ซึ่งมีค่าความจริงเป็นจริงเมื่อประพจน์ตั้งต้นทั้งสองเป็นจริงทั้งคู่เท่านั้น นอกจากนั้นจะให้ค่าความจริงเป็นเท็จ

อติวงศ์ สุชาโต
ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประพจน์เชื่อม (Conjunction Proposition) ของ p และ q ซึ่งก็คือประพจน์ที่เกิดจากตัวปฏิบัติการเชื่อมที่ดำเนินการกับประพจน์ p และ q มีสัญลักษณ์ที่ใช้แทนคือ $p \wedge q$

ในภาษาธรรมชาติ เรามักจะอ่าน $p \wedge q$ ว่า p "และ" q

ตัวปฏิบัติการเลือก (Disjunction Operator) คือ ตัวปฏิบัติการตรรกะซึ่งดำเนินการกับประพจน์สองประพจน์และให้ประพจน์ใหม่ซึ่งมีค่าความจริงเป็นจริงเมื่ออย่างน้อยประพจน์ตั้งต้นหนึ่งประพจน์เป็นจริง และจะให้ค่าความจริงเป็นเท็จเมื่อประพจน์ตั้งต้นเป็นเท็จทั้งคู่

ประพจน์เลือก (Disjunction Proposition) ของ p และ q ซึ่งก็คือประพจน์ที่เกิดจากตัวปฏิบัติการเลือกที่ดำเนินการกับประพจน์ p และ q มีสัญลักษณ์ที่ใช้แทนคือ $p \vee q$

ในภาษาธรรมชาติ เรามักจะอ่าน $p \vee q$ ว่า p "หรือ" q

ตารางที่ 3 ตารางที่ 4 และ ตารางที่ 5 แสดงตารางความจริงของประพจน์ที่เกี่ยวข้องกับตัวปฏิบัติการตรรกะที่กล่าวมาข้างต้น

p	$\neg p$
T	F
F	T

ตารางที่ 3 ตารางความจริงของ p และ $\neg p$

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ตารางที่ 4 ตารางความจริงของ p, q และ $p \wedge q$

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ตารางที่ 5 ตารางความจริงของ p, q และ $p \vee q$

ตัวปฏิบัติการเงื่อนไข (Implication Operator) เป็นตัวปฏิบัติการตรรกะที่ใช้บ่งบอกความสัมพันธ์ระหว่างประพจน์ที่เป็นเงื่อนไข และ ประพจน์ที่เป็นผลลัพธ์ ค่าความจริงของประพจน์ประกอบที่ใช้ตัวปฏิบัติการเงื่อนไขจะเป็นเท็จ ในกรณีที่ประพจน์ที่เป็นผลลัพธ์เป็นเท็จ ในขณะที่ประพจน์ที่เป็นเงื่อนไขเป็นจริง นอกจากนั้นจะให้ค่าความจริงเป็นจริง

สัญลักษณ์สำหรับตัวปฏิบัติการเงื่อนไข เมื่อ p เป็นประพจน์ที่เป็นเงื่อนไข และ q เป็นประพจน์ที่เป็นผลลัพธ์ เขียนได้ว่า $p \rightarrow q$ ในภาษาธรรมชาติ เรามักจะอ่าน $p \rightarrow q$ ว่า "ถ้า" p "แล้ว" q

ตัวปฏิบัติการเงื่อนไขสองทาง (Biconditional Operator) เป็นตัวปฏิบัติการตรรกะซึ่งดำเนินการกับประพจน์สองประพจน์และให้ประพจน์ใหม่ซึ่งมีค่าความจริงเป็นจริงเมื่อประพจน์ทั้งสองมีค่าความจริงตรงกัน นอกจากนั้นจะให้ค่าความจริงเป็นจริงเป็นเท็จ

สัญลักษณ์สำหรับตัวปฏิบัติการเงื่อนไขสองทาง ที่ดำเนินการกับประพจน์ p และประพจน์ q เขียนได้ว่า $p \leftrightarrow q$ ในภาษาธรรมชาติ เรามักจะอ่าน $p \leftrightarrow q$ ว่า p "ก็ต่อเมื่อ" q

ตารางที่ 5 และ ตารางที่ 6 แสดงตารางความจริงของประพจน์ที่เกี่ยวข้องกับตะวปฏิบัติการเงื่อนไข และ ตัวปฏิบัติการเงื่อนไขสองทาง

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ตารางที่ 6 ตารางความจริงของของ p, q และ $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ตารางที่ 7 ตารางความจริงของประพจน์ p, q และ $p \leftrightarrow q$

ลำดับความสำคัญของตัวปฏิบัติการ

ในการสร้างประพจน์ประกอบซึ่งมีตัวปฏิบัติการตรรกะมากกว่าหนึ่งตัวนั้น เราจะประเมินค่าความจริงของประพจน์ประกอบโดยพิจารณาผลของตัวปฏิบัติการตรรกะตามลำดับ โดยเนินการตามข้อกำหนดของการใช้เครื่องหมายวงเล็บ เช่นเดียวกับข้อกำหนดของเครื่องหมายลงเล็บในพีชคณิต นั่นคือดำเนินการประเมินค่าความจริงในเครื่องหมายวงเล็บก่อน หากมีเครื่องหมายลงเล็บซ้อนกันก็ให้ดำเนินการจากข้างในออกข้างนอก อย่างไรก็ตามในกรณีซึ่งไม่มีเครื่องหมายวงเล็บกำหนดลำดับการดำเนินการชัดเจน เราจะต้องพิจารณาเปรียบเทียบ *ค่าการทำก่อน* (Precedence) ของตัวปฏิบัติการตรรกะที่เกี่ยวข้อง โดยดำเนินการตัวปฏิบัติการตรรกะชนิดที่อยู่เหนือกว่าตามตารางที่ 8 ก่อน

ชนิด	การทำก่อน
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

ตารางที่ 8 ตารางแสดงลำดับการดำเนินการของตัวปฏิบัติการตรรกะชนิดต่าง ๆ

ตัวอย่างที่ 3

จงเขียนประพจน์ $p \vee q \wedge r \vee s \rightarrow u \leftrightarrow v \rightarrow w \wedge \neg y$ ใหม่โดยใส่วงเล็บเพื่อแสดงลำดับการดำเนินการของตัวปฏิบัติการตรรกะที่ปรากฏในประพจน์อย่างชัดเจน

ในประพจน์ $p \vee q \wedge r \vee s \rightarrow u \leftrightarrow v \rightarrow w \wedge \neg y$ มีตัวปฏิบัติการตรรกะปรากฏอยู่ 8 ตัว เราจะพิจารณาใส่วงเล็บคร่อมการดำเนินการที่เกี่ยวข้องกับตัวปฏิบัติการตรรกะที่ดำเนินการจากก่อนไปหลังทีละชนิดดังนี้

ตัวปฏิบัติการชนิดแรกที่ดำเนินการคือตัวปฏิบัติการนิเสธ ดังนั้นเราจึงพิจารณาใส่วงเล็บแรกสุดคร่อม $\neg y$ ซึ่งได้ผลคือ $p \vee q \wedge r \vee s \rightarrow u \leftrightarrow v \rightarrow w \wedge \mathbf{(}\neg y\mathbf{)}$ สังเกตว่าเราแสดงวงเล็บที่เพิ่มเติมเข้าไปด้วยอักขระตัวหนาและขนาดใหญ่กว่าอักขระอื่น

ต่อมาพิจารณาดำเนินการตัวปฏิบัติการเชื่อม ได้ผลคือ $p \vee \mathbf{(}\, q \wedge r\, \mathbf{)} \vee s \rightarrow u \leftrightarrow v \rightarrow \mathbf{(}\, w \wedge (\neg y)\, \mathbf{)}$

ต่อมาพิจารณาดำเนินการตัวปฏิบัติการเลือก ได้ผลคือ $\mathbf{(}\, p \vee (\, q \wedge r\,) \vee s\, \mathbf{)} \rightarrow u \leftrightarrow v \rightarrow (\, w \wedge (\neg y)\,)$ สังเกตว่าตัวปฏิบัติการเลือกทั้งสองจะดำเนินการได้เมื่อค่าความจริงของ $(\, q \wedge r\,)$ ถูกระบุแล้ว นอกจากนั้นลำดับ

การดำเนินการระหว่างตัวปฏิบัติการเลือกทั้งสองนั้นไม่มีผลต่อค่าความจริงที่ได้ นั่นคือจะดำเนินการตัวใดก่อนก็ได้

ลำดับต่อมาคือการดำเนินการปฏิบัติการตัวเงื่อนไข ซึ่งทำให้ได้ผลคือ $\mathbf{(}\,(\,p\vee(\,q\wedge r\,)\vee s\,\mathbf{)}\rightarrow u\,)\leftrightarrow\mathbf{(}\,v\rightarrow(\,w\wedge(\neg y)\,)\,\mathbf{)}$ ณ ขั้นนี้เราจะพบว่ามีตัวปฏิบัติการเงื่อนไขสองทางที่ยังไม่ได้ดำเนินการเพียงตัวเดียว ดังนั้นประพจน์ที่ได้สุดท้ายนี้มีการแสดงลำดับการดำเนินการของตัวปฏิบัติการตรรกะอย่างชัดเจนด้วยเครื่องหมายวงเล็บอย่างชัดเจนแล้ว

ตัวอย่างที่ 4

เราสามารถประเมินค่าความจริงของประพจน์ $p\vee q\wedge r\vee s\rightarrow u\leftrightarrow v\rightarrow w\wedge\neg y$ เมื่อทราบเพียงว่า ค่าความจริงของ u เป็นจริง และค่าความจริงของ v เป็นเท็จ ได้หรือไม่ จงอธิบาย

เนื่องจากตัวปฏิบัติการเงื่อนไขสองทางเป็นตัวปฏิบัติการตรรกะที่จะถูกดำเนินการในลำดับสุดท้าย ดังนั้นประพจน์ในตัวอย่างนี้จะมีค่าความจริงขึ้นอยู่กับค่าความจริงของ $p_1\leftrightarrow p_2$ เมื่อ p_1 คือ $p\vee q\wedge r\vee s\rightarrow u$ และ p_2 คือ $v\rightarrow w\wedge\neg y$

พิจารณาประพจน์ $p\vee q\wedge r\vee s\rightarrow u$ ซึ่งเมื่อใส่วงเล็บเพื่อแสดงลำดับการดำเนินการให้ชัดเจนขึ้น ประพจน์ดังกล่าวจะแสดงได้ด้วย $(p\vee q\wedge r\vee s)\rightarrow u$ เราบอกได้ว่าเมื่อค่าความจริงของ u เป็นจริง ประพจน์นี้จะเป็นจริงเสมอ ดังนั้น p_1 เป็นจริง

ในขณะที่ p_2 ซึ่งคือ $v\rightarrow w\wedge\neg y$ เมื่อใส่วงเล็บเพื่อแสดงลำดับการดำเนินการให้ชัดเจนขึ้น ประพจน์ดังกล่าวจะแสดงได้ด้วย $v\rightarrow(w\wedge\neg y)$ เราบอกได้ว่าเมื่อค่าความจริงของ v เป็นเท็จ p_2 จะเป็นจริงเสมอ

เมื่อค่าความจริงของ p_1 และ p_2 เหมือนกัน $p_1\leftrightarrow p_2$ จึงเป็นจริง นั่นคือเราสามารถบอกค่าความจริงของประพจน์ในโจทย์ของตัวอย่างนี้ได้เพียงแค่ทราบว่า ค่าความจริงของ u เป็นจริง และค่าความจริงของ v เป็นเท็จ

สัจจะนิรันดร์ และ ข้อขัดแย้ง

ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงเสมอ เรียกว่า *สัจจะนิรันดร์* (Tautology) ส่วนประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จเสมอ เรียกว่า *ข้อขัดแย้ง* (Contradiction)

ตัวอย่างที่ 5

จงแสดงว่าประพจน์ต่อไปนี้ ประพจน์ใดบ้างเป็นสัจจะนิรันดร์ และ ประพจน์ใดบ้างเป็นข้อขัดแย้ง

$$p\vee\neg p,\ p\wedge\neg p,\ p\rightarrow\neg p,\ p\leftrightarrow\neg p$$

เนื่องจากประพจน์เลือก $p\vee\neg p$ จะมีค่าความจริงเป็นเท็จเมื่อทั้ง p และ $\neg p$ เป็นเท็จทั้งคู่ ซึ่งไม่มีทางเป็นไปได้เนื่องจากทั้งสองต้องมีค่าความจริงตรงข้ามกัน ดังนั้น $p\vee\neg p$ จึงเป็นสัจจะนิรันดร์

ส่วนประพจน์เชื่อม $p\wedge\neg p$ จะมีค่าความจริงเป็นจริงเมื่อทั้ง p และ $\neg p$ เป็นจริงทั้งคู่ ซึ่งไม่มีทางเป็นไปได้เนื่องจากทั้งสองต้องมีค่าความจริงตรงข้ามกัน ดังนั้น $p\wedge\neg p$ จึงเป็นข้อขัดแย้ง

หาก p เป็นจริง ค่าความจริงของประพจน์เงื่อนไข $p\rightarrow\neg p$ จะเป็นเท็จ ในขณะที่หาก p เป็นเท็จ ค่าความจริงของประพจน์เงื่อนไข $p\rightarrow\neg p$ จะเป็นจริง แสดงว่า $p\rightarrow\neg p$ เป็นจริงในบางกรณีและเป็นเท็จในบางกรณี ดังนั้น $p\rightarrow\neg p$ ไม่เป็นทั้งสัจจะนิรันดร์และข้อขัดแย้ง

และสุดท้ายเนื่องจากค่าความจริงของ p และ $\neg p$ จะตรงกันข้ามเสมอ ดังนั้นเงื่อนไขสองทาง $p\leftrightarrow\neg p$ จะมีค่าความจริงเป็นเท็จเสมอ นั่นคือ $p\leftrightarrow\neg p$ เป็นข้อขัดแย้ง

ตัวอย่างที่ 6

จงแสดงว่าประพจน์ $(p\rightarrow q)\vee(q\rightarrow r)$ เป็นสัจจะนิรันดร์หรือเป็นข้อขัดแย้งหรือไม่เป็นทั้งสองอย่าง

เมื่อ $q\equiv$T เราจะพบว่า $(p\rightarrow q)\equiv$T โดยไม่ขึ้นกับค่าความจริงของ p ซึ่งการที่ $(p\rightarrow q)\equiv$T ส่งผลให้ $(p\rightarrow q)\vee(q\rightarrow r)\equiv$T โดยไม่ขึ้นกับค่าความจริงของ p และ r

เมื่อ $q\equiv$F เราจะพบว่า $(q\rightarrow r)\equiv$T โดยไม่ขึ้นกับค่าความจริงของ r ซึ่งการที่ $(q\rightarrow r)\equiv$T ส่งผลให้ $(p\rightarrow q)\vee(q\rightarrow r)\equiv$T โดยไม่ขึ้นกับค่าความจริงของ p และ r เช่นเดียวกัน

ดังนั้นไม่ว่าค่าความจริงของ p และ r เป็นเช่นไร $(p\rightarrow q)\vee(q\rightarrow r)$ จะเป็นจริงเสมอทั้งเมื่อ q เป็นจริงหรือเท็จ ดังนั้นประพจน์นี้เป็นสัจจะนิรันดร์

การสมมูลกันเชิงตรรกะ

หากประพจน์สองประพจน์มีค่าความจริงเหมือนกันเสมอในทุก ๆ กรณี เราจะเรียกว่า ประพจน์ทั้งสองนั้น *สมมูลกันเชิงตรรกะ* (Logical Equivalent) หรือ *สมมูลกันเชิงประพจน์* (Propositional Equivelent)

ความสมมูลกันเชิงตรรกะอาจนิยามได้ดังนี้

ประพจน์ p และ q สมมูลกันเชิงตรรกะ เมื่อ $p\leftrightarrow q$ เป็นสัจจะนิรันดร์

โดยสามารถแสดงด้วยสัญลักษณ์ $p\equiv q$

การแสดงว่าประพจน์สองประพจน์สมมูลกันเชิงตรรกะหรือไม่นั้น เราอาจจะสามารถทำได้จากการสร้างตารางความจริงของทั้งสองประพจน์ เพื่อพิจารณาว่าค่าความจริงของทั้งสองประพจน์เหมือนกันในทุก ๆ กรณีที่สอดคล้องกันหรือไม่

ตัวอย่างที่ 7

จงสร้างตารางความจริงเพื่อแสดงว่า $p \rightarrow q$ กับ $\neg p \vee q$ สมมูลกันเชิงตรรกะหรือไม่

เราสามารถสร้างตารางความจริงที่เกี่ยวข้องกับประพจน์ทั้งสองได้ดังนี้

P	Q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

จากตารางจะพบว่า $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

ตัวอย่างที่ 8

จงสร้างตารางความจริงเพื่อแสดงว่า $p \leftrightarrow q$ กับ $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ สมมูลกันเชิงตรรกะหรือไม่

เราสามารถสร้างตารางความจริงที่เกี่ยวข้องกับประพจน์ทั้งสองได้ดังนี้

P	Q	$P \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

จากตารางจะพบว่า $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

การสร้างตารางความจริงเพื่อแสดงความสมมูลกันเชิงตรรกะนั้น ต้องอาศัยการแจกแจงกรณีตามค่าความจริงของประพจน์ที่เกี่ยวข้องให้ครบทุกกรณี ในบางครั้งการกระทำเช่นนี้อาจจะไม่สะดวกและใช้เวลาในการสร้างตารางนาน โดยเฉพาะอย่างยิ่งการสร้างตารางความจริงของประพจน์ประกอบซึ่งขึ้นอยู่กับค่าความจริงของประพจน์จำนวนมาก เนื่องจากตารางความจริงที่ขึ้นกับประพจน์ที่เป็นอิสระต่อกันจำนวน n ประพจน์นั้น จะมีจำนวนแถวของตาราง (ไม่นับหัวตาราง) เท่ากับ 2^n แถว ซึ่งจะทำให้ตารางความจริงมีขนาดใหญ่หาก n มีค่าสูง เช่น ตารางความจริงที่ขึ้นกับประพจน์ที่เป็นอิสระต่อกันเพียง 5 ประพจน์ จะต้องมีจำนวนแถวถึง 32 แถว

สิ่งที่เราสนใจเกี่ยวกับประพจน์หนึ่ง ๆ ในการแสดงความสมมูลกันเชิงตรรกะได้แก่ผลลัพธ์ค่าความจริงของประพจน์นั้น ว่ามีค่าความจริงเช่นเดียวกับค่าความจริงของอีกประพจน์หนึ่งที่เราจะเปรียบเทียบกันหรือไม่ ดังนั้น เราจึงสามารถแทนที่บางส่วนของประพจน์ที่เราต้องการหาค่าความจริงด้วยประพจน์ซึ่งสมมูลเชิงตรรกะกับส่วนที่ถูกแทนนั้นได้ โดยไม่กระทบต่อค่าความจริงที่เป็นผลลัพธ์ การกระทำเช่นนี้ช่วยให้เราสามารถทำให้ประพจน์ที่ซับซ้อนถูกเปลี่ยนรูปไปเป็นประพจน์ในรูปแบบที่ง่ายต่อการพิจารณามากขึ้น หรือหากเราสามารถเปลี่ยนรูปของประพจน์หนึ่งด้วยการแทนที่ดังกล่าวจนรูปของประพจน์นั้นตรงกับอีกประพจน์หนึ่งที่เราต้องการเปรียบเทียบค่าความจริงด้วย เราจะสามารถบอกได้ว่าประพจน์ทั้งสองนั้นสมมูลกันเชิงตรรกะได้โดยอัตโนมัติ

ตารางที่ 9 แสดงตัวอย่างรายการของการสมมูลกันเชิงตรรกะที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลาย โดยการอ้างการสมมูลกันเชิงตรรกะเหล่านี้มักทำโดยการอ้างอิงถึงชื่อเรียกของการสมมูลเชิงตรรกะเหล่านั้นโดยไม่ต้องมีการพิสูจน์อีกต่อไป

การสมมูลกัน	ชื่อเรียก
$p \wedge \mathrm{T} \equiv p$ $p \vee \mathrm{F} \equiv p$	กฎเอกลักษณ์ (Identity laws)
$p \vee \mathrm{T} \equiv \mathrm{T}$ $p \wedge \mathrm{F} \equiv \mathrm{F}$	กฎการครอบงำ (Domination laws)
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	กฎนิจพล (Idempotent laws)
$\neg(\neg p) \equiv p$	กฎการติดลบซ้อน (Double negation law)
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	กฎการสลับที่ (Commutative laws)
$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	กฎการเปลี่ยนหมู่ (Associative laws)
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	กฎการแจกแจง (Distributive laws)
$\neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	กฎของเดอมอร์แกน (De Morgan's laws)
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	กฎการดูดกลืน (Absorption laws)
$p \vee \neg p \equiv \mathrm{T}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathrm{F}$	กฎการติดลบ (Negation laws)

ตารางที่ 9 รายการการสมมูลกันเชิงตรรกะพร้อมชื่อเรียก

ความสมเหตุสมผลของการอ้างเหตุผล

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหรือสมบัติต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์นั้นเราจำเป็นจะต้องอ้างเหตุผลต่าง ๆ เพื่อแสดงว่าทฤษฎีบทหรือสมบัติต่าง ๆ ที่ได้รับการกล่าวอ้างนั้นเป็นจริง หากการให้เหตุผลนั้น ๆ ไม่มีทฤษฎีบทหรือสัจพจน์อื่น ๆ รองรับ เราต้องแน่ใจว่าเหตุผลนั้น ๆ สมเหตุสมผลและสามารถแสดงความสมเหตุสมผลนั้นให้เห็นจริงได้ ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงการแสดงความสมเหตุสมผลของการอ้างเหตุผลหนึ่ง ๆ

เริ่มต้นจากการพิจารณานิยามที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

ในตรรกศาสตร์ *การอ้างเหตุผล* (Argument) คือ ลำดับของประพจน์ ซึ่งประกอบด้วย ประพจน์ซึ่งเป็น *ข้อตั้ง* (Premise) และ ประพจน์สุดท้ายซึ่งเป็น *ข้อสรุป* (Conclusion) โดยการอ้างเหตุผลนั้นจะ *การอ้างเหตุผลอย่างสมเหตุสมผล* (Valid Argument) เมื่อหากทุก ๆ ข้อตั้งเป็นจริงแล้วข้อสรุปต้องเป็นจริง

หากประพจน์ที่เป็นข้อตั้งคือ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ส่วนประพจน์ที่เป็นข้อสรุปคือ q จากนิยาม การอ้างเหตุผลนี้จะเป็นอย่างสมเหตุสมผลเมื่อ $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q \equiv \mathrm{T}$ เราจะใช้สัญลักษณ์แทนการอ้างเหตุผลนี้คือ

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 9

จากนิยามข้างต้น จงระบุว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

"หากคุณทราบรหัสผ่านของผู้ดูแลระบบ คุณสามารถเข้าดูข้อมูลลับได้"
"คุณทราบรหัสผ่านของผู้ดูแลระบบ"
$\therefore$ "คุณสามารถเข้าดูข้อมูลลับได้"

ให้ p แทน "คุณทราบรหัสผ่านของผู้ดูแลระบบ" และ q แทน "คุณสามารถเข้าดูข้อมูลลับได้" เราสามารถเขียนประพจน์ที่เป็นข้อตั้งทั้งสองได้ว่า $p \rightarrow q$ และ p ส่วนข้อสรุปคือ q

เมื่อข้อตั้งเป็นจริง นั่นคือ $p \rightarrow q \equiv \mathrm{T}$ และ $p \equiv \mathrm{T}$ เราสามารถสรุปได้ว่า $q \equiv \mathrm{T}$ เนื่องจากเมื่อ $p \equiv \mathrm{T}$ หาก $q \equiv \mathrm{F}$ แล้ว $p \rightarrow q$ จะไม่สามารถเป็นจริงได้

ดังนั้นการอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผล

ตัวอย่างที่ 10

จงระบุว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

"หากคุณทราบรหัสผ่านของผู้ดูแลระบบ คุณสามารถเข้าดูข้อมูลลับได้"
"คุณไม่สามารถเข้าดูข้อมูลลับได้"
$\therefore$ "คุณไม่ทราบรหัสผ่านของผู้ดูแลระบบ"

ให้ p แทน "คุณทราบรหัสผ่านของผู้ดูแลระบบ" และ q แทน "คุณสามารถเข้าดูข้อมูลลับได้" เราสามารถเขียนประพจน์ที่เป็นข้อตั้งทั้งสองได้ว่า $p \rightarrow q$ และ $\neg q$ ส่วนข้อสรุปคือ $\neg p$

เมื่อข้อตั้งเป็นจริง นั่นคือ $p \rightarrow q \equiv \mathrm{T}$ และ $\neg q \equiv \mathrm{T}$ เราสามารถสรุปได้ว่า $\neg p \equiv \mathrm{T}$ เนื่องจากเมื่อ q เป็นเท็จแล้ว p ต้องเป็นเท็จด้วยจึงจะทำให้ $p \rightarrow q \equiv \mathrm{T}$ ได้

ดังนั้นการอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผล

ตัวอย่างที่ 11

จงระบุว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

"หากคุณทราบรหัสผ่านของผู้ดูแลระบบ คุณสามารถเข้าดูข้อมูลลับได้"
"คุณไม่ทราบรหัสผ่านของผู้ดูแลระบบ"
$\therefore$ "คุณไม่สามารถเข้าดูข้อมูลลับได้"

ให้ p แทน "คุณทราบรหัสผ่านของผู้ดูแลระบบ" และ q แทน "คุณสามารถเข้าดูข้อมูลลับได้" เราสามารถเขียนประพจน์ที่เป็นข้อตั้งทั้งสองได้ว่า $p \rightarrow q$ และ $\neg p$ ส่วนข้อสรุปคือ $\neg q$

เมื่อข้อตั้งทั้งสองเป็นจริง นั่นคือ $p \rightarrow q \equiv \mathrm{T}$ และ $\neg p \equiv \mathrm{T}$ จะพบว่า q เป็นได้ทั้งจริงหรือเท็จ ดังนั้น $\neg q$ ไม่จำเป็นต้องเป็นจริง ดังนั้นการอ้างเหตุผลนี้ไม่สมเหตุสมผล

กฎแห่งการอนุมาน

พิจารณานิยามต่อไปนี้

รูปแบบการอ้างเหตุผล (Argument Form) คือ การอ้างเหตุผลซึ่งประพจน์ในการอ้างเหตุผลนั้นติดตัวแปรเชิงตรรกะ (ตัวแปรที่จะถูกแทนค่าด้วยประพจน์) รูปแบบการอ้างเหตุผลจะสมเหตุสมผลเมื่อไม่ว่าจะแทนค่าประพจน์ใดลงในตัวแปรเหล่านั้น จะทำให้เกิดการอ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผลเสมอ

รูปแบบการอ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผลที่อยู่ในรูปแบบง่าย ๆ เพื่อใช้ในขั้นตอนการแสดงความสมเหตุสมผลของการอ้างเหตุผลที่ซับซ้อนกว่า เรียกว่า *กฎแห่งการอนุมาน* (Rules of Inference) ตารางที่ 10 แสดงรายการของกฎแห่งการอนุมานที่ใช้กันโดยทั่วไป

กฎแห่งการอนุมาน	ชื่อเรียก
p $p \rightarrow q$ $\therefore q$	Modus ponens
$\neg q$ $p \rightarrow q$ $\therefore \neg p$	Modus tollens
$p \rightarrow q$ $q \rightarrow r$ $\therefore p \rightarrow r$	Hypothetical syllogism
$p \vee q$ $\neg p$ $\therefore q$	Disjunctive syllogism
p $\therefore p \vee q$	Addition
$p \wedge q$ $\therefore$ p	Symplification
p q $\therefore p \wedge q$	Conjunction
$p \vee q$ $\neg p \vee r$ $\therefore q \vee r$	Resolution

ตารางที่ 10 รายการกฎแห่งการอนุมานพร้อมชื่อเรียก

อติวงศ์ สุชาโต
ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตัวอย่างที่ 12

จงใช้กฎแห่งการอนุมานเพื่อแสดงว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผล

"หากโปรแกรม A ทำงานได้เร็วกว่าโปรแกรม B เราจะเลือกใช้โปรแกรม A"

"หากเราเลือกใช้โปรแกรม A หรือโปรแกรม C เราจะต้องใช้งบประมาณครึ่งหนึ่งของงบทั้งหมด"

"โปรแกรม A ทำงานได้เร็วกว่าโปรแกรม B"

$\therefore$ "เราต้องใช้งบประมาณครึ่งหนึ่งของงบทั้งหมด"

ให้ p แทน "โปรแกรม A ทำงานได้เร็วกว่าโปรแกรม B" q แทน "เราเลือกใช้โปรแกรม A" r แทน "เราเลือกใช้โปรแกรม C" และ s แทน "เราต้องใช้งบประมาณครึ่งหนึ่งของงบทั้งหมด"

ข้อตั้งของการอ้างเหตุผลนี้คือ $p \rightarrow q$, $(q \vee r) \rightarrow s$, และ p ส่วนข้อสรุปคือ s

ขั้นตอน	สิ่งที่อนุมานได้	เหตุผล
1.	q	Modus ponens โดยใช้ข้อตั้ง $p \rightarrow q$ และ p
2.	$q \vee r$	Addition โดยใช้ q จาก 1.
3.	s	Modus ponens โดยใช้ข้อตั้ง $(q \vee r) \rightarrow s$ และ $(q \vee r)$ จาก 2.

จากขั้นตอนข้างต้น เราสามารถอนุมานข้อสรุปได้จริง ดังนั้นการอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผล

ตรรกศาสตร์ภาคแสดง

หากเรากล่าวถึงประโยคหนึ่งประโยคซึ่งในประโยคนั้นมีค่าบางอย่างที่แปรเปลี่ยนไปเป็นค่าต่าง ๆ ได้ หรือ อาจกล่าวได้ว่าเป็นประโยคที่ติดตัวแปร (Variable) ประโยคนั้นจะยังไม่มีสมบัติของประพจน์ เนื่องจากยังไม่มีการเฉพาะเจาะจงค่าตัวแปรเหล่านั้น ยกตัวอย่างเช่น ประโยคที่ว่า "x เป็นประเทศที่มีลักษณะเป็นเกาะ" โดยที่ x สามารถถูกแทนค่าด้วยประเทศใด ๆ ในโลกได้ หรืออีกนัยหนึ่งคือ เอกภพสัมพัทธ์ของคือเซตของประเทศในโลก ประโยค "x เป็นประเทศที่มีลักษณะเป็นเกาะ" ไม่เป็นประพจน์เนื่องจากเรายังไม่สามารถระบุค่าความจริงของประโยคนี้ได้

หากเราแทนค่า x ด้วยค่าที่อยู่ในเอกภพสัมพันธ์ที่เราสนใจ ประโยคที่เกิดขึ้นจากการแทนค่าจะเป็นประพจน์ เช่น "ประเทศญี่ปุ่นเป็นประเทศที่มีลักษณะเป็นเกาะ" เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง และ "ประเทศไทยเป็นประเทศที่มีลักษณะเป็นเกาะ" เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ เป็นต้น

สาขาของตรรกศาสตร์ที่มองว่าประพจน์สามารถเกิดจากการแทนค่าประโยคที่ติดตัวแปรอยู่นั้น เรียกว่า *ตรรกศาสตร์ภาคแสดง* (Predicate Logic) ซึ่งต่างจาก *ตรรกศาสตร์เชิงประพจน์* (Propositional Logic) ที่เรากล่าวถึงเรื่อยมาในบทนี้ ซึ่งมองว่าหน่วยย่อยที่สุด (Atomic Unit) ของประพจน์ประกอบใด ๆ ก็คือประพจน์

ประโยคที่ติดค่าของตัวแปรอยู่นั้นเรียกว่า *ฟังก์ชันเพรดิเคต* (Predicate Function) ตารางที่ 11 แสดงตัวอย่างฟังก์ชันเพรดิเคตและประพจน์ที่เกิดจากการแทนค่าฟังก์ชันเหล่านั้น

ฟังก์ชันเพรดิเคต	ตัวอย่างการแทนค่า
$P(x)$: "x ชอบเรียนคณิตศาสตร์"	P(ประพันธ์) = "ประพันธ์ชอบเรียนคณิตศาสตร์" P(ประพนธ์) = "ประพนธ์ชองเรียนคณิตศาสตร์"
$Q(x)$: "x เป็นจำนวนตรรกยะ"	$Q(2/3)$ = "2/3 เป็นจำนวนตรรกยะ" $Q(\pi)$ = "π เป็นจำนวนตรรกยะ"
$R(x,y)$: "$S(x,y) \wedge T(y) \rightarrow U(x)$" $S(x,y)$: "x และ y เป็นจำนวนเต็มบวก" $T(y)$: "y ไม่เท่ากับ 0" $U(x,y)$: "$xy > 0$"	$R(2,3)$ = "หาก 2 และ 3 เป็นจำนวนเต็มบวก และ y ไม่เท่ากับ 0 แล้ว $2 \cdot 3 > 0$"

ตารางที่ 11 ตัวอย่างฟังก์ชันเพรดิเคตและประพจน์ที่เกิดจากการแทนค่าตัวแปรในฟังก์ชัน

ตัวบ่งปริมาณ

การสร้างประพจน์จากฟังก์ชันภาคแสดงนอกจากจะสามารถทำได้โดยการแทนค่าตัวแปรด้วยค่าเฉพาะเจาะลงแล้วยังสามารถทำได้โดยการใช้ *ตัวบ่งปริมาณ* (Quantifier) เพื่อสร้างประพจน์ที่มุ่งกล่าวถึง "จำนวน" สิ่งที่อยู่ในความสนใจ ที่เมื่อใช้สิ่งเหล่านั้นแทนค่าตัวแปรในฟังก์ชันภาคแสดงนั้นแล้วทำให้เกิดประพจน์ที่เป็นจริง ตัวอย่างของการระบุ "จำนวน" ได้แก่ "บางสิ่ง" "ทุก ๆ สิ่ง" "หลายสิ่ง" "สองสามสิ่ง" เป็นต้น

ในที่นี้เราจะกล่าวถึงการบ่งปริมาณสองแบบ คือ การบ่งปริมาณสำหรับทุกตัว และ การบ่งปริมาณสำหรับตัวมีจริง

การบ่งปริมาณสำหรับทุกตัว (Universal Quantifier) ของ $P(x)$ คือประโยคที่กล่าวว่า "$P(x)$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x ในโดเมนที่สนใจ" ใช้สัญลักษณ์คือ $\forall x P(x)$ ดังนั้นตามคำกล่าวนี้ $\forall x P(x)$ จะเป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงเมื่อแทนค่า x ด้วย x_o ที่เป็นไปได้แต่ละตัว ทุก ๆ ตัว (x_o เป็นสมาชิกของโดเมนที่เราสนใจ) แล้วประพจน์ $P(x_o)$ เป็นจริงเสมอ

การบ่งปริมาณสำหรับตัวมีจริง (Existential Quantifier) ของ $P(x)$ คือประโยคที่กล่าวว่า "มีค่า x ในโดเมนที่สนใจซึ่ง $P(x)$" ใช้สัญลักษณ์คือ $\exists x P(x)$ ดังนั้นตามคำกล่าวนี้ $\exists x P(x)$ จะเป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงเมื่อ เราสามารถแทนค่า x ด้วย x_o อย่างน้อยหนึ่งตัว แล้วประพจน์ $P(x_o)$ เป็นจริง

การระบุโดเมนที่เราสนใจนั้นสามารถทำได้โดยการระบุเงื่อนไขลงไปยังสัญลักษณ์ตัวบ่งปริมาณเช่น $\exists x \neq 0\ P(x)$ เป็นการบ่งบอกว่าค่า x ที่เราสนใจนั้นไม่เท่ากับ 0 และ $\forall x \in A\ P(x)$ เป็นการบ่งบอกว่าเราสนใจค่า x ที่เป็นสมาชิกของเซ็ต A เท่านั้น

ตัวอย่างที่ 13

หาก $P(x)$ เป็นฟังก์ชันเพรดิเคตที่กล่าวว่า "$x \geq k + 5$" เมื่อ k เป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง จงแสดงประโยคที่สอดคล้องกับ $\forall x \in Z\ P(x)$ และที่สอดคล้องกับ $\exists x \in Z\ P(x)$ โดย Z เป็นเซตของจำนวนเต็ม

ประโยคที่สอดคล้องกับ $\forall x \in Z\ P(x)$ ได้แก่ "จำนวนเต็มทุกจำนวน $\geq k + 5$"

ประโยคที่สอดคล้องกับ $\exists x \in Z\ P(x)$ ได้แก่ "มีจำนวนเต็มบางจำนวนซึ่ง $\geq k + 5$"

ตัวอย่างที่ 14

หาก $P(x)$ เป็นฟังก์ชันเพรดิเคตที่กล่าวว่า "$x^2 > 0 \rightarrow x > 0$" จงแสดงค่าความจริงของ $\forall x\in Z\ P(x)$, $\exists x\in Z\ P(x)$, $\forall x\in Z^+\ P(x)$ และ $\exists x\in Z^+\ P(x)$ เมื่อ Z เป็นเซตของจำนวนเต็ม และ Z^+ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

> พิจารณา x ซึ่งเป็นจำนวนเต็มติดลบ เช่น $x = -5$ เราจะพบว่า $P(-5)$ ซึ่งคือ "$25 > 0 \rightarrow -5 > 0$" มีค่าความจริงเป็นเท็จ ดังนั้น $\forall x\in Z\ P(x)$ จึงมีค่าความจริงเป็นเท็จ
>
> หากให้ x เป็นจำนวนเต็มบวก เช่น $x = 3$ เราจะพบว่า $P(3)$ ซึ่งคือ "$9 > 0 \rightarrow 3 > 0$" มีค่าความจริงเป็นจริง ดังนั้น $\exists x\in Z\ P(x)$ และ $\exists x\in Z^+\ P(x)$ จึงมีค่าความจริงเป็นจริง เนื่องจากอย่างน้อยเราสามารถบอกได้ว่าสมาชิกตัวหนึ่งใน Z และ Z^+ ($x = 3$) ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง
>
> ต่อมาพิจารณา $\forall x\in Z^+\ P(x)$ เนื่องจาก $x\in Z^+$ เราบอกได้ว่าผลของประโยคเงื่อนไข "$x^2 > 0 \rightarrow x > 0$" ซึ่งคือประพจน์ "$x > 0$" เป็นจริงเสมอ ดังนั้น $P(x)$ เป็นจริงเสมอสำหรับ $x\in Z^+$ นั่นคือ $\forall x\in Z^+\ P(x)$ เป็นจริง

ตัวบ่งปริมาณซ้อนกัน

ตัวบ่งปริมาณมากกว่า 1 ตัวสามารถนำมาซ้อนกันเพื่อสร้างประพจน์ได้ เช่น $\forall x\exists yP(x,y)$, $\forall x\forall yP(x,y)$, $\exists x\forall yP(x,y)$ และ $\forall x\exists y\exists z\ P(x,y,z)$ เป็นต้น การตีความประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณซ้อนกันอยู่นั้น เราจะตีความจากด้านในออกสู่ด้านนอก เช่น $\forall x\exists yP(x,y)$ มีความหมายตรงกับ $\forall x(\exists yP(x,y))$ หรือ $\forall x(Q(x,y))$ โดย $Q(x,y)$ คือ $\exists yP(x,y)$ นั่นเอง

ประพจน์ $\forall x\forall yP(x,y)$ และประพจน์ $\forall y\forall xP(x,y)$ จะเป็นจริงเมื่อค่าของ $x = x_o$ และ $y = y_o$ ทุก ๆ การจับคู่ที่เป็นไปได้ทำให้ $P(x_o, y_o)$ เป็นจริงเสมอ ในทางตรงกันข้าม หากมี $x = x_o$ และ $y = y_o$ คู่หนึ่งซึ่งทำให้ $P(x_o ,y_o)$ เป็นเท็จ ค่าความจริงของประพจน์ $\forall x\forall yP(x,y)$ และประพจน์ $\forall y\forall xP(x,y)$ จะเป็นเท็จทันที

ประพจน์ $\exists x\exists yP(x,y)$ และประพจน์ $\exists y\exists xP(x,y)$ จะเป็นจริงเสมอหากมีค่า $x = x_o$ และ $y = y_o$ อย่างน้อยคู่หนึ่งซึ่งทำให้ $P(x_o ,y_o)$ เป็นจริง แต่หากไม่มีค่าของ $x = x_o$ และ $y = y_o$ คู่ใดเลยที่ทำให้ $P(x_o , y_o)$ เป็นจริง ประพจน์ $\exists x\exists yP(x,y)$ และประพจน์ $\exists y\exists xP(x,y)$ จะมีค่าความจริงเป็นเท็จ

ประพจน์ $\forall x\exists yP(x,y)$ มีค่าความจริงเป็นจริงเมื่อไม่ว่าค่า $x = x_o$ จะเป็นเท่าใดก็ตาม จะปรากฏค่าของ $y = y_o$ อย่างน้อยหนึ่งค่าที่ทำให้ $P(x_o , y_o)$ เป็นจริง มิฉะนั้น $\forall x\exists yP(x,y)$ จะมีค่าความจริงเป็นเท็จ

ส่วนประพจน์ $\exists x\forall yP(x,y)$ นั้นจะมีค่าความจริงเป็นจริงเมื่อมีค่า $x = x_o$ บางค่า ที่ไม่ว่าจะใช้ค่า $y = y_o$ ใด ก็จะทำให้ $P(x_o , y_o)$ เป็นจริงเสมอ มิฉะนั้นแล้ว $\exists x\forall yP(x,y)$ จะมีค่าความจริงเป็นเท็จ

ตัวอย่างที่ 15

ให้ $P(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันเพรดิเคตที่สอดคล้องกับคำกล่าวที่ว่า "$x + y = z^2$" และ $Q(x,y,z)$ สอดคล้องกับ "$x^2 + y^2 = z^2$" จงพิจารณาค่าความจริงของ $\forall x\in R\ \forall y\in R\ \exists z\in R\ P(x,y,z)$ และ $\forall x\in R\ \forall y\in R\ \exists z\in R\ Q(x,y,z)$

> จาก $x + y = z^2$ เราบอกได้ว่าค่าของ z เท่ากับ ค่าบวกหรือลบของรากที่สองของ $x + y$ ซึ่งหาก $x + y$ มีค่าเป็นจำนวนติดลบแล้ว z ที่สอดคล้องกับ $x + y = z^2$ จะต้องเป็นจำนวนจินตภาพเท่านั้น ดังนั้นจึงไม่มีค่า $z\in R$ ใดที่ทำให้ $P(x,y,z)$ ในกรณีที่ $x + y < 0$ เป็นจริงได้ ดังนั้น $\forall x\in R\ \forall y\in R\ \exists z\in R\ P(x,y,z)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ค่าของ $x^2 + y^2 \geq 0$ เสมอเมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ ดังนั้นสำหรับจำนวนจริง $x = x_o$ และ $y = y_o$ ใด ๆ จะมีค่าจำนวนจริง z ซึ่งมีค่าเท่ากับบวกหรือลบรากที่สองของ ${x_o}^2 + {y_o}^2$ ซึ่งทำให้ $Q(x,y,z)$ เป็นจริงเสมอ นั่นคือ $\forall x\in R\ \forall y\in R\ \exists z\in R\ Q(x,y,z)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

การสมมูลกันเชิงตรรกะสำหรับประพจน์ที่ใช้ตัวบ่งปริมาณ

ประพจน์ที่ใช้ตัวบ่งปริมาณจะสมมูลเชิงประพจน์กันก็ต่อเมื่อประพจน์เหล่านั้นมีค่าความจริงเหมือนกันไม่ว่าค่าตัวแปรในฟังก์ชันเพรดิเคตจะถูกแทนด้วยค่าใดและไม่ว่าโดเมนที่สนใจของค่าตัวแปรจะเป็นเช่นไร

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 16

จงแสดงว่า $\forall x\ (\ P(x)\wedge Q(x)\ ) \equiv \forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x)$

เรียก $\forall x\ (\ P(x)\wedge Q(x)\ )$ ว่า $R(x)$ และเรียก $\forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x)$ ว่า $S(x)$ เราจะแสดงว่า $R(x) \leftrightarrow S(x) \equiv$ T ไม่ว่าโดเมนของตัวแปร x ที่เราสนใจจะเป็นอย่างไรก็ตาม

เพื่อสรุปว่า $R(x) \leftrightarrow S(x) \equiv$ T เราจะแสดงให้ได้ว่า $R(x) \rightarrow S(x) \equiv$ T และ $S(x) \rightarrow R(x) \equiv$ T

หาก $R(x)$ เป็นจริง ค่าของตัวแปร x ในโดเมนใด ๆ ก็ตามที่เราสนใจ จะต้องทำให้ $P(x)\wedge Q(x)$ เป็นจริงเสมอ นั่นคือ ค่าของ x ใด ๆ จะต้องทำให้ $P(x)$ เป็นจริง ($\forall x\ P(x) \equiv$ T) และในขณะเดียวกันต้องทำให้ $Q(x)$ เป็นจริงด้วย ($\forall x\ Q(x) \equiv$ T) ดังนั้นเงื่อนไขนี้จึงทำให้ $S(x)$ เป็นจริงเช่นกันเมื่อ $R(x)$ เป็นจริง นั่นคือเราบอกได้ว่า $R(x) \rightarrow S(x) \equiv$ T

ต่อไปสมมติให้ $S(x)$ เป็นจริง นั่นคือ $\forall x\ P(x) \equiv$ T และ $\forall x\ Q(x) \equiv$ T ดังนั้น $P(x)\wedge Q(x) \equiv$ T สำหรับทุก ๆ ค่า x ในโดเมนที่สนใจ ($\forall x\ (\ P(x)\wedge Q(x)\ ) \equiv$ T) เราจึงสรุปได้ว่า $S(x) \rightarrow R(x) \equiv$ T

จากที่แสดงแล้วว่า $R(x) \rightarrow S(x) \equiv$ T และ $S(x) \rightarrow R(x) \equiv$ T เราสามารถบอกได้ว่า $R(x) \leftrightarrow S(x) \equiv$ T นั่นคือ $\forall x\ (\ P(x)\wedge Q(x)\ ) \equiv \forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x)$ นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 17

จงแสดงว่า $\exists x\ (\ P(x)\wedge Q(x)\ ) \equiv \exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$

หาก $\exists x\ (\ P(x)\wedge Q(x)\ ) \equiv$ T เราบอกได้ว่ามีค่า $x = x_o$ อย่างน้อยหนึ่งค่าที่ทำให้ $P(x_o)\wedge Q(x_o) \equiv$ T ซึ่งแสดงได้ว่า $P(x_o) \equiv$ T และ $Q(x_o) \equiv$ T ดังนั้น $\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x) \equiv$ T เราจึงสรุปได้ว่า $\exists x\ (\ P(x)\wedge Q(x)\ ) \rightarrow \exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x) \equiv$ T

หาก $\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x) \equiv$ T เราบอกได้ว่ามีค่า $x = x_o$ อย่างน้อยหนึ่งค่าที่ทำให้ $P(x_o) \equiv$ T และ $Q(x_o) \equiv$ T ดังนั้นค่า $x = x_o$ เดียวกันนี้ทำให้ $P(x_o)\wedge Q(x_o) \equiv$ T นั่นคือ $\exists x\ (\ P(x)\wedge Q(x)\ ) \equiv$ T เราจึงสรุปได้ว่า $\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x) \rightarrow \exists x\ (\ P(x)\wedge Q(x)\ ) \equiv$ T

จาก $\exists x\ (\ P(x)\wedge Q(x)\ ) \rightarrow \exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x) \equiv$ T และ $\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x) \rightarrow \exists x\ (\ P(x)\wedge Q(x)\ ) \equiv$ T เราบอกได้ว่า $\exists x\ (\ P(x)\wedge Q(x)\ ) \leftrightarrow \exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x) \equiv$ T นั่นคือ $\exists x\ (\ P(x)\wedge Q(x)\ ) \equiv \exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$

ตัวอย่างที่ 18

จงแสดงว่า $\neg\forall x\ P(x) \equiv \exists x\ \neg P(x)$

สมมติให้ $\neg\forall x\ P(x) \equiv$ T (นั่นคือ $\forall x\ P(x) \equiv$ F) ซึ่งหมายความว่ามีค่า $x = x_o$ อย่างน้อยหนึ่งค่าที่ทำให้ $P(x_o) \equiv$ F ดังนั้น $\neg P(x_o) \equiv$ T นั่นคือ $\exists x\ \neg P(x) \equiv$ T เพราะฉะนั้นเราบอกได้ว่า $\neg\forall x\ P(x) \rightarrow \exists x\ \neg P(x) \equiv$ T

สมมติให้ $\exists x\ \neg P(x) \equiv$ T ซึ่งหมายความว่ามีค่า $x = x_o$ อย่างน้อยหนึ่งค่าที่ทำให้ $P(x_o) \equiv$ F นั่นคือ $\forall x\ P(x) \equiv$ F ซึ่งก็คือ $\neg\forall x\ P(x) \equiv$ T นั่นเอง เพราะฉะนั้นเราบอกได้ว่า $\exists x\ \neg P(x) \rightarrow \neg\forall x\ P(x) \equiv$ T

จาก $\neg\forall x\ P(x) \rightarrow \exists x\ \neg P(x) \equiv$ T และ $\exists x\ \neg P(x) \rightarrow \neg\forall x\ P(x) \equiv$ T เราบอกได้ว่า $\neg\forall x\ P(x) \leftrightarrow \exists x\ \neg P(x)$ ซึ่งก็คือ $\neg\forall x\ P(x) \equiv \exists x\ \neg P(x)$ นั่นเอง

การสมมูลกันเชิงตรรกะในตัวอย่างข้างต้น อาจกล่าวเป็นคำพูดได้ว่า นิเสธของประพจน์ที่ใช้ตัวบ่งปริมาณสำหรับทุกตัวสมมูลเชิงตรรกะกับประพจน์ที่ใช้ตัวบ่งปริมาณสำหรับตัวมีจริงซึ่งใช้ฟังก์ชันเพรดิเคตที่ตรงกันข้ามกับประพจน์ตั้งต้น นอกจากนี้แล้ว เรายังสามารถแสดงในทำนองเดียวกันด้วยว่า นิเสธของประพจน์ที่ใช้ตัวบ่งปริมาณสำหรับตัวมีจริงสมมูลเชิงตรรกะกับประพจน์ที่ใช้ตัวบ่งปริมาณสำหรับทุกตัวซึ่งใช้ฟังก์ชันเพรดิเคตที่ตรงกันข้ามกับประพจน์ตั้งต้น หรือ $\neg\exists x\ P(x) \equiv \forall x\ \neg P(x)$

ตัวอย่างที่ 19

กำหนดโดเมนที่สนใจสำหรบค่าตัวแปร x และ y เป็นเซตใด ๆ และให้ $P(x,y)$ และ $Q(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเพรดิเคตที่ติดตัวแปร x และ y ดังกล่าว จงแสดงให้เห็นว่า คำกล่าวที่ว่า “สำหรับค่า x ใด ๆ จะมีค่า y จะมีค่า y อย่างน้อยหนึ่งตัวเสมอซึ่งทำให้ $P(x,y)$ และ $Q(x,y)$” มีค่าความจริงตรงกันข้ามกับคำกล่าวที่ว่า “สำหรับ x บางค่า ค่า y ใด ๆ จะทำให้ $\neg P(x,y)$ หรือ $\neg Q(x,y)$”

จากโจทย์เราต้องแสดงว่า $\neg\forall x\ \exists y\ (\ P(x,y) \wedge Q(x,y)\ ) \equiv \exists x \forall y\ (\neg P(x,y) \vee \neg Q(x,y))$

ซึ่งสามารถแสดงเป็นขั้นตอนซึ่งใช้สมมูลเชิงตรรกะที่เป็นผลจากตัวอย่างที่แสดงมาแล้วข้างต้นได้ดังนี้

$\neg\forall x\ \exists y\ (\ P(x,y) \wedge Q(x,y)\ )$

$\equiv \exists x\ (\neg\exists y\ (\ P(x,y) \wedge Q(x,y)\ ))$

$\equiv \exists x\ \forall y\ (\neg\ (\ P(x,y) \wedge Q(x,y)\ ))$

$\equiv \exists x\ \forall y\ (\neg P(x,y) \vee \neg Q(x,y)\ ))$ (เนื่องจากกฎของเดอมอร์แกน)

กฎแห่งการอนุมานที่เกี่ยวข้องกับประพจน์ที่ใช้ตัวบ่งปริมาณ

การแสดงความสมเหตุสมผลของการอ้างเหตุผลโดยทั่ว ๆ ไปนั้นมักจะต้องเกี่ยวข้องกับประพจน์ที่ใช้ตัวบ่งปริมาณเสมอ ๆ ประพจน์ดังกล่าวอาจจะปรากฏในข้อตั้งหรือข้อสรุปก็ได้ เราได้กล่าวไปก่อนหน้าแล้วว่ากฎของการอนุมานมักจะถูกนำมาใช้ประกอบขั้นตอนการแสดงความสมเหตุสมผลของการอ้างเหตุผลได้ ในตรรกศาสตร์ภาคแสดงมีกฎแห่งการอนุมานที่สำคัญนอกเหนือจากกฎแห่งการอนุมานในตรรกศาสตร์เชิงประพจน์ซึ่งเราได้กล่าวไว้ก่อนหน้านี้ กฎดังกล่าวถูกแสดงไว้ในตารางที่ 12 ข้างล่างนี้

กฎแห่งการอนุมาน	ชื่อเรียก
$\forall x\ P(x)$ $\therefore\ P(x_o)$	Universal Instantiation
$P(x_o)$ สำหรับค่า x_o ใด ๆ $\therefore\ \forall x\ P(x)$	Universal Generalization
$\exists x\ P(x)$ $\therefore\ P(x_o)$ สำหรับค่า x_o บางค่า	Existential Instantiation
$P(x_o)$ สำหรับค่า x_o บางค่า $\therefore\ \exists x\ P(x)$	Existential Generalization

ตารางที่ 12 กฎแห่งการอนุมานในตรรกศาสตร์ภาคแสดง

เรามักจะต้องใช้กฎแห่งการอนุมานทั้งจากตรรกศาสตร์เชิงประพจน์และตรรกศาสตร์ภาคแสดงร่วมกันในการแสดงความสมเหตุสมผลของการอ้างเหตุผล ดังเช่นในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 20

จงใช้กฎแห่งการอนุมานเพื่อแสดงว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผล

"ผู้ใช้สามารถเข้าสู่ระบบได้ก็ต่อเมื่อผู้ใช้ใส่รหัสถูกต้องหรือใช้บัญชีผู้เยี่ยมชม"
"ผู้ใช้ที่ใช้บัญชีผู้เยี่ยมชมไม่สามารถเข้าถึงเขตหวงห้ามได้ โดยการเข้าถึงเขตหวงห้ามได้นั้นต้องเข้าสู่ระบบก่อน"
"หากใส่รหัสผิดผู้ใช้สามารถทดลองใส่ใหม่ได้อีกเพียงครั้งเดียว"
"นายสมชายใส่รหัสผิดในครั้งแรก"
"นายสมชายสามารถเข้าถึงเขตหวงห้ามได้"

$\therefore$ นายสมชายใส่รหัสถูกต้องในครั้งที่สอง

ให้ P(x) แทน "x ใส่รหัสถูกต้อง"
Q(x) แทน "x ใช้บัญชีผู้เยี่ยมชม"
R(x) แทน "x สามารถเข้าสู่ระบบ"
S(x) แทน "x สามารถเข้าถึงเขตหวงห้ามได้"
T(x) แทน "x ใส่รหัสผิดในครั้งแรก"
U(x) แทน "x ได้ใส่รหัสครั้งที่สอง"
W(x) แทน "x ใส่รหัสครั้งที่สองได้ถูกต้อง"
โดย x เป็นสมาชิกของเซตของผู้ใช้ระบบทั้งหมด

พิจารณาข้อตั้ง "ผู้ใช้สามารถเข้าสู่ระบบได้ก็ต่อเมื่อผู้ใช้ใส่รหัสถูกต้องหรือใช้บัญชีผู้เยี่ยมชม" เราสามารถแทนได้ว่า $\forall x(\ R(x)\leftrightarrow(P(x)\vee Q(x))\ )$ ซึ่งก็คือ $\forall x(\ R(x) \rightarrow P(x)\vee Q(x)\ )$ และ $\forall x(\ P(x)\vee Q(x) \rightarrow R(x)\ )$

ข้อตั้ง "ผู้ใช้ที่ใช้บัญชีผู้เยี่ยมชมไม่สามารถเข้าถึงเขตหวงห้ามได้ โดยการเข้าถึงเขตหวงห้ามได้นั้นต้องเข้าสู่ระบบก่อน" ประกอบด้วยสองส่วนคือ "ผู้ใช้ที่ใช้บัญชีผู้เยี่ยมชมไม่สามารถเข้าถึงเขตหวงห้ามได้" ซึ่งแทนได้ว่า $\forall x(Q(x)\rightarrow\neg S(x))$ และ "การเข้าถึงเขตหวงห้ามได้นั้นต้องเข้าสู่ระบบก่อน" หรืออาจเขียนใหม่ว่า "หากเข้าถึงเขตหวงห้ามได้แล้วแสดงว่าเข้าสู่ระบบได้" ซึ่งแทนได้ว่า$\forall x(S(x)\rightarrow R(x))$

ข้อตั้ง “หากใส่รหัสผิดผู้ใช้สามารถทดลองใส่ใหม่ได้อีกเพียงครั้งเดียว” สามารถตีความได้ว่า “หากใส่รหัสผิดในครั้งแรกจะสามารถใส่รหัสครั้งที่สองได้” และ “หากใส่รหัสในครั้งที่สองผิดจะไม่สามารถเข้าสู่ระบบได้” ซึ่งแทนได้ว่า $\forall x(T(x)\rightarrow U(x))$ และ$\forall x(\neg W(x)\rightarrow \neg R(x))$ ตามลำดับ

ข้อตั้ง “นายสมชายใส่รหัสผิดในครั้งแรก” และ “นายสมชายสามารถเข้าถึงเขตหวงห้ามได้” สามารถแทนได้ด้วย $T(\text{สมชาย})$ และ $S(\text{สมชาย})$

ข้อสรุปที่ว่า “นายสมชายใส่รหัสถูกต้องในครั้งที่สอง” สามารถแทนได้ว่า $U(\text{สมชาย})\wedge W(\text{สมชาย})$

ขั้นตอน	สิ่งที่อนุมานได้	เหตุผล
1.	$Q(\text{สมชาย})\rightarrow \neg S(\text{สมชาย})$	Universal instantiation โดยใช้ข้อตั้ง $\forall x(Q(x)\rightarrow \neg S(x))$
2.	$\neg Q(\text{สมชาย})$	Modus tollens โดยใช้ $Q(\text{สมชาย})\rightarrow \neg S(\text{สมชาย})$ จาก 1. และ $S(\text{สมชาย})$ จากข้อตั้ง
3.	$S(\text{สมชาย})\rightarrow R(\text{สมชาย})$	Universal instantiation โดยใช้ข้อตั้ง $\forall x(S(x)\rightarrow R(x))$
4.	$R(\text{สมชาย})$	Modus ponens โดยใช้ $S(\text{สมชาย})\rightarrow R(\text{สมชาย})$ จาก 3. และและ $S(\text{สมชาย})$ จากข้อตั้ง
5.	$R(\text{สมชาย}) \rightarrow P(\text{สมชาย})\vee Q(\text{สมชาย})$	Universal instantiation โดยใช้ข้อตั้ง $\forall x(R(x) \rightarrow P(x)\vee Q(x))$
6.	$P(\text{สมชาย})\vee Q(\text{สมชาย})$	Modus ponens โดยใช้ $R(\text{สมชาย}) \rightarrow P(\text{สมชาย})\vee Q(\text{สมชาย})$ จาก 5. และ $R(\text{สมชาย})$ จาก 4.
7.	$P(\text{สมชาย})$	Disjunctive syllogism โดยใช้ $\neg Q(\text{สมชาย})$ จาก 2. และ $P(\text{สมชาย})\vee Q(\text{สมชาย})$ จาก 6.
8.	$T(\text{สมชาย})\rightarrow U(\text{สมชาย})$	Universal instantiation โดยใช้ข้อตั้ง $\forall x(T(x)\rightarrow U(x))$
9.	$U(\text{สมชาย})$	Modus ponens โดยใช้ $T(\text{สมชาย})\rightarrow U(\text{สมชาย})$ จาก 8. และ $T(\text{สมชาย})$ จากข้อตั้ง
10.	$\neg W(\text{สมชาย})\rightarrow \neg R(\text{สมชาย})$	Universal instantiation โดยใช้ข้อตั้ง $\forall x(\neg W(x)\rightarrow \neg R(x))$
11.	$W(\text{สมชาย})$	Modus tollens โดยใช้ $R(\text{สมชาย})$ จาก 4. และ $\neg W(\text{สมชาย})\rightarrow \neg R(\text{สมชาย})$ จาก 10.
12.	$U(\text{สมชาย})\wedge W(\text{สมชาย})$	Conjunction โดยใช้ $U(\text{สมชาย})$ จาก 9. และ $W(\text{สมชาย})$ จาก 11.

จากขั้นตอนข้างต้น เราสามารถอนุมานข้อสรุปได้จริง ดังนั้นการอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผล

วิธีการพิสูจน์

ในคณิตศาสตร์ *การพิสูจน์* (Proof) คือการแสดงให้เห็นอย่างแน่ชัดว่าประพจน์ที่ต้องได้รับการพิสูจน์นั้นมีค่าความจริงเป็นจริงเสมอ ตามข้อกำหนดของประพจน์นั้น

ประพจน์ที่ยังไม่ได้รับการพิสูจน์นั้นเรียกว่า *ข้อความคาดการณ์* (Conjecture) หลังจากที่ข้อความคาดการณ์หนึ่ง ๆ ได้รับการพิสูจน์แล้ว เราอาจจะเรียกประพจน์นั้นว่าเป็น *ทฤษฎีบท* (Theorem) ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการพิสูจน์อื่น ๆ ได้ต่อไป

ทฤษฎีบทที่ได้รับการพิสูจน์โดยมีเป้าหมายเพื่อใช้ในขั้นตอนการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์อื่น มักจะถูกเรียกว่า *บทตั้ง* (Lemma)

ในขั้นตอนย่อย ๆ ของการพิสูจน์นั้น การจะสรุปสิ่งใดจะต้องมีการยืนยันข้อสรุปในแต่ละขั้นนั้นให้ชัดเจน ซึ่งการยืนยันความถูกต้องของข้อสรุปมักจะอ้างถึงสิ่งต่าง ๆ เช่น สัจพจน์ (Axiom) หรือ นิยาม (Definition)ซึ่งถูกกำหนดไว้หรือได้รับการยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องมีการพิสูจน์ บทตั้งซึ่งสามารถแสดงการพิสูจน์ได้ หรือ ใช้กฎการอนุมานเพื่อแสดงว่าข้อสรุปบางอย่างสมเหตุสมผล เป็นต้น

วิธีที่นิยมใช้ในการพิสูจน์มีอยู่หลายวิธี ในที่นี้เราจะกล่าวถึง

- การพิสูจน์ตรง (Direct Proof)
- การพิสูจน์โดยการแย้งสลับที่ (Proof by Contraposition)
- การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง (Proof by Contradiction)
- การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Proof by Mathematical Induction)

การพิสูจน์ตรง

ทฤษฎีบทหนึ่ง ๆ นั้นมักจะสามารถเขียนเป็นประพจน์ในรูปแบบ $p \rightarrow q$ วิธีการพิสูจน์ตรงสำหรับประพจน์ $p \rightarrow q$ เริ่มจากการสมมติให้ p เป็นจริง และ แสดงให้เห็นว่าในกรณีดังกล่าว q จะต้องมีค่าความจริงเป็นจริงด้วย หากแสดงได้ เราก็จะบอกได้ทันทีว่า $p \rightarrow q$ เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 21

จงพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

“สำหรับจำนวนเต็ม m และ n ใด ๆ หาก m เป็นจำนวนคู่ และ n เป็นจำนวนคู่แล้ว m+n จะเป็นจำนวนคู่เช่นกัน”

ให้ p เป็นประพจน์ที่กล่าวว่า “m เป็นจำนวนคู่ และ n เป็นจำนวนคู่” และ q เป็นประพจน์ที่กล่าวว่า “m+n เป็นจำนวนคู่” เราจะใช้การพิสูจน์ตรงเพื่อแสดงว่า $p \rightarrow q$ เป็นจริง

ให้ p เป็นจริง ไม่ว่าจะ m และ n จะเป็นจำนวนคู่ใด ๆ เราสามารถแสดง m และ n ในรูป m = 2k และ n = 2l เมื่อ k และ l เป็นจำนวนเต็มที่เหมาะสมกับค่า m และ n นั้น

เมื่อนำ m และ n มาบวกกันเราจะได้ว่า m + n = 2k + 2l = 2(k+l) ซึ่งหารสองลงตัวเสมอเนื่องจาก k และ l เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นเราบอกได้ว่า m + n เป็นจำนวนคู่ นั่นคือ q เป็นจริง

จากการสมมติให้ p เป็นจริงแล้วแสดงให้เห็นได้ว่า q เป็นจริงด้วย ดังนั้น $p \rightarrow q$ เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 22

จงพิสูจน์ว่า "หาก x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ ค่าของ x น้อยกว่า y ก็ต่อเมื่อ ค่าเฉลี่ยของ x และ y นั้นมากกว่า x"

ให้ p เป็นประพจน์ที่กล่าวว่า "x น้อยกว่า y" และ q เป็นประพจน์ที่กล่าวว่า "ค่าเฉลี่ยของ x และ y มากกว่า x" สิ่งที่เราต้องการพิสูจน์คือ $p\leftrightarrow q$

เนื่องจาก $p\leftrightarrow q \equiv (p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$ เราต้องทำการพิสูจน์ทั้ง $p\rightarrow q$ และ $q\rightarrow p$

<u>พิสูจน์ $p\rightarrow q$</u> สมมติให้ p เป็นจริง นั่นคือ $x < y$ ดังนั้นค่าเฉลี่ยของ x และ y ซึ่งก็คือ $(x + y)/2$ จะต้องมีค่ามากกว่า $(x + x)/2$ ซึ่งก็คือ x นั่นเอง ดังนั้น q เป็นจริง

<u>พิสูจน์ $q\rightarrow p$</u> สมมติให้ q เป็นจริง นั่นคือ $(x + y)/2 > x$ ดังนั้น $(y + y)/2 = y$ จึงมีค่ามากกว่า x ด้วย ดังนั้น p จึงเป็นจริง

เนื่องจากทั้ง $p\rightarrow q$ และ $q\rightarrow p$ เป็นจริง ดังนั้น $p\leftrightarrow q$ เป็นจริง

การพิสูจน์โดยการแย้งสลับที่

ในวิธีนี้การพิสูจน์ประพจน์ $p\rightarrow q$ จะทำโดยการพิสูจน์ประพจน์แย้งสลับที่ (Contrapositive) ของ $p\rightarrow q$ ในรูป $\neg q\rightarrow\neg p$ ซึ่งสมมูลเชิงตรรกะกับ $p\rightarrow q$ แทน โดยเริ่มจากการสมมติให้ $\neg q$ เป็นจริง แล้วแสดงให้เห็นว่าค่าความจริงของ $\neg p$ จะต้องเป็นจริงด้วยเสมอ

ตัวอย่างที่ 23

จงพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

"สำหรับจำนวนเต็ม m และ n ใด ๆ หาก m+n จะเป็นจำนวนคู่แล้ว m และ n เป็นจำนวนคู่ทั้งคู่ หรือ เป็นจำนวนคี่ทั้งคู่"

ให้ p เป็นประพจน์ที่กล่าวว่า "m+n เป็นจำนวนคู่" q เป็นประพจน์ที่กล่าวว่า "m เป็นจำนวนคู่และ n เป็นจำนวนคู่" และ r เป็นประพจน์ที่กล่าวว่า "m เป็นจำนวนคี่และ n เป็นจำนวนคี่" ทฤษฎีบทนี้จะตรงกับ $p\rightarrow(q \vee r)$ ซึ่งมีประพจน์แย้งสลับที่คือ $\neg(q \vee r) \rightarrow\neg p$ ซึ่งสมมูลกับ $(\neg q \wedge\neg r) \rightarrow\neg p$

ให้ $(\neg q \wedge\neg r)$ เป็นจริง เราบอกได้ว่า $\neg q$ เป็นจริงและ$\neg r$ เป็นจริง นั่นคือ m และ n ไม่สามารถเป็นจำนวนคู่พร้อมกันได้และในขณะเดียวกันก็ไม่สามารถเป็นจำนวนคี่พร้อมกัน ดังนั้น m และ n ตัวใดตัวหนึ่งต้องเป็นจำนวนคู่ ในขณะที่อีกตัวต้องเป็นจำนวนคี่ ดังนั้น m+n สามารถเขียนได้ในรูป (2k+1)+2l เมื่อ k และ l เป็นจำนวนเต็มที่เหมาะสมกับค่า m และ n

เนื่องจาก m+n = (2k+1)+2l = 2(k+l)+1 เราจะบอกได้ว่า m+n เป็นจำนวนคี่เนื่องจาก k และ l เป็นจำนวนเต็ม นั่นคือ p เป็นเท็จ หรือ $\neg p$ เป็นจริงนั่นเอง

เมื่อ $\neg(q \vee r)$ เป็นจริงแล้ว $\neg p$ เป็นจริงด้วย ดังนั้น $\neg(q \vee r)\rightarrow \neg p$ จึงเป็นจริง นั่นคือ $p\rightarrow(q \vee r)$ เป็นจริง

การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง

การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้งใช้หลักการที่ว่า หากประพจน์หนึ่ง ๆ ไม่สามารถจะมีค่าความจริงเป็นเท็จได้ ประพจน์นั้นจะต้องเป็นจริงเสมอ ดังนั้นในการพิสูจน์ $p \rightarrow q$ เราจะเริ่มจากการสมมติว่า $p \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ หรือ $\neg(p \rightarrow q)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

เนื่องจาก $\neg(p \rightarrow q)$ สมมูลเชิงตรรกะกับ $p \wedge \neg q$ การที่ค่าความจริงของ $\neg(p \rightarrow q)$ จะเป็นจริงได้นั้น ค่าของ p และ $\neg q$ จะต้องเป็นจริงพร้อมกัน หากเราสามารถได้ว่ากรณีดังกล่าวไม่สามารถเกิดขึ้นได้ เราก็จะบอกได้ว่า $\neg(p \rightarrow q)$ จะต้องเป็นเท็จเสมอ นั่นคือ $p \rightarrow q$ ก็จะต้องเป็นจริงเสมอโดยปริยาย

ตัวอย่างที่ 24

เราได้แสดงการพิสูจน์ประพจน์ที่ว่า “สำหรับจำนวนเต็ม m และ n ใด ๆ หาก m เป็นจำนวนคู่ และ n เป็นจำนวนคู่แล้ว m+n จะเป็นจำนวนคู่เช่นกัน” ด้วยวิธีการพิสูจน์ตรงมาแล้ว ในที่นี้จงใช้การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้งเพื่อพิสูจน์ประพจน์ดังกล่าวอีกครั้งหนึ่ง

> ให้ p เป็นประพจน์ที่กล่าวว่า “m เป็นจำนวนคู่ และ n เป็นจำนวนคู่” และ q เป็นประพจน์ที่กล่าวว่า “m+n เป็นจำนวนคู่” เราเริ่มจากการสมมติว่า $\neg(p \rightarrow q)$ ซึ่งก็คือ $p \wedge \neg q$ เป็นจริง
>
> การที่ $p \wedge \neg q$ จะเป็นจริงได้ ทั้ง p และ $\neg q$ จะต้องสามารถเป็นจริงพร้อมกันได้
>
> เมื่อ p เป็นจริง m และ n จะสามารถเขียนในรูป m = 2k และ n = 2l เมื่อ k และ l เป็นจำนวนเต็มที่เหมาะสมกับค่า m และ n นั้น ดังนั้น m+n = 2(k+l) ซึ่งเป็นจำนวนคู่ ผลดังกล่าวจะขัดแย้งกับ $\neg q$ ดังนั้น $p \wedge \neg q$ ไม่สามารถมีค่าความจริงเป็นจริงได้ ดังนั้น $p \rightarrow q$ จึงเป็นจริงเสมอ

ตัวอย่างที่ 25

จงใช้การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้งเพื่อแสดงว่า “หากกล่องใบหนึ่งมีสิ่งของอยู่ 3 ประเภท แต่ละประเภทมีอยู่เป็นจำนวนมากกว่า 4 ชิ้น และถ้าหยิบสิ่งของ 4 ชิ้นออกมากล่องใบนั้นพร้อม ๆ กัน เราสามารถบอกได้ทันทีว่า ในบรรดาสิ่งของ 4 ชิ้นที่หยิบออกมานั้น จะต้องมีอย่างน้อยคู่หนึ่งซึ่งเป็นสิ่งของประเภทเดียวกัน”

> ให้ข้อความที่กำหนดในโจทย์เป็นประพจน์ p ในการพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง เราเริ่มจากการสมมติให้สิ่งที่เราต้องการพิสูจน์ให้เป็นเท็จ นั่นคือสมมุติให้ $\neg p$ ซึ่งได้แก่ประพจน์ “หากกล่องใบหนึ่งมีสิ่งของอยู่ 3 ประเภท แต่ละประเภทมีอยู่เป็นจำนวนมากกว่า 4 ชิ้น และถ้าหยิบสิ่งของ 4 ชิ้นออกมากล่องใบนั้นพร้อม ๆ กัน เราสามารถบอกได้ทันทีว่า ในบรรดาสิ่งของ 4 ชิ้นที่หยิบออกมานั้น จะไม่มีสิ่งของชิ้นใดเลยที่เป็นประเภทเดียวกัน” เป็นจริง
>
> เราจะพบว่า หากไม่มีสิ่งของชิ้นใดเลยที่เป็นประเภทเดียวกัน แสดงว่าใน 4 ชิ้นนั้นนแต่ละประเภทมีได้มากที่สุดเพียงประเภทละชิ้นเดียว แต่สิ่งของมีเพียง 3 ประเภท จึงไม่สามารถมี 4 ชิ้นได้ ประพจน์ $\neg p$ จึงเป็นข้อขัดแย้ง ดังนั้นเราสรุปได้ว่า p เป็นจริง

การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction) เป็นวิธีการพิสูจน์แบบหนึ่งซึ่งโดยทั่วไปมักจะใช้เพื่อการพิสูจน์ข้อความซึ่งค่าความจริงขึ้นอยู่กับตัวแปรตัวหนึ่ง เพื่อแสดงว่าข้อความนั้นเป็นจริงเสมอเมื่อค่าของตัวแปร

นั้นเป็นจำนวนเต็มใด ๆ ที่มีค่าตั้งแต่ค่าจำนวนเต็มตั้งต้นค่าหนึ่ง ยกตัวอย่างเช่น การพิสูจน์ข้อความซึ่งกล่าวว่า “$P(n)$ เป็นจริงเสมอ สำหรับจำนวนเต็ม n ใด ๆ ตั้งแต่ 0 ขึ้นไป”

วิธีการพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ประกอบด้วย 2 ขั้นตอน ขั้นตอนแรกเรียกว่า ***ขั้นพื้นฐาน*** (Basic Step) และขั้นตอนถัดไปเรียกว่า ***ขั้นอุปนัย*** (Inductive Step)

ขั้นพื้นฐานของการพิสูจน์ประพจน์ $P(n)$ สำหรับ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ตั้งแต่ n_o ขึ้นไป มีวัตถุประสงค์เพื่อแสดงว่า $P(n = n_o)$ เป็นจริง และเมื่อแสดงได้ว่า $P(n = n_o)$ เป็นจริงแล้ว การดำเนินการในขั้นอุปนัยจะกระทำเพื่อบ่งบอกให้ได้ว่าประพจน์ $P(n=k) \rightarrow P(n=k+1)$ เป็นจริงสำหรับจำนวนเต็ม k ใด ๆ ตั้งแต่ n_o ขึ้นไป เมื่อสามารถแสดงผลดังกล่าวในทั้งสองขั้นได้แล้วเราสามารถสรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ตั้งแต่ n_o ขึ้นไป

<u>เหตุใดการพิสูจน์ด้วยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จึงเป็นจริง</u>

ในที่นี้เราจะไม่กล่าวถึงการพิสูจน์ความถูกต้องของการพิสูจน์ตามวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ แต่ขอให้ผู้อ่านลองพิจารณาค่าความจริงของ $P(n = n_o)$ และ $P(n = k)$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k ซึ่งมีมากกว่า n_o เพียงเล็กน้อยดู ดังนี้

1. เริ่มจาก $P(n = n_o)$ เป็นจริง เนื่องจากการพิสูจน์ตามขั้นพื้นฐาน
2. เนื่องจากในขั้นอุปนัยเราแสดงว่า $P(n=k) \rightarrow P(n=k+1)$ เป็นจริงสำหรับจำนวนเต็ม k ใด ๆ ตั้งแต่ n_o ขึ้นไป ดังนั้นหาก $P(n = n_o)$ เป็นจริง เราสามารถบอกได้ว่า $P(n = n_o+1)$ จะต้องเป็นจริงด้วย
3. ในทำนองเดียวกัน หาก $P(n = n_o+1)$ เป็นจริง เราสามารถบอกได้ว่า $P(n = n_o+2)$ จะต้องเป็นจริงด้วย

จากขั้นตอนการพิจารณาข้างต้น เราจะเห็นว่าหากเรากระทำซ้ำในขั้นตอนที่ 3 โดยเพิ่มค่าของ n ขึ้นไปทีละ 1 เราสามารถบอกได้ว่า $P(n = n_o+3)$ เป็นจริง $P(n = n_o+4)$ เป็นจริง เช่นนี้ไปเรื่อย ๆ อย่างไรก็ตามหากผู้อ่านต้องพึงระลึกว่าวิธีการอธิบายข้างต้นมิใช่การพิสูจน์ว่าวิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์เป็นจริง หากแต่เราแสดงไว้ในที่นี้เพื่อให้ผู้อ่านคล้อยตามตรรกะของวิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์เท่านั้น

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ เพื่อให้คุ้นเคยกับขั้นตอนของวิธีการพิสูจน์ตามวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ตัวอย่างที่ 26

จงแสดงว่า $\sum_{i=0}^{n} i = \left(\frac{n}{2}\right)(n+1)$ สำหรับจำนวนเต็มไม่ติดลบ n ใด ๆ (n = 0, 1, 2, …)

ใช้วิธีการพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ โดยนิยาม $P(n)$ เป็น $\sum_{i=0}^{n} i = \left(\frac{n}{2}\right)(n+1)$

<u>ขั้นพื้นฐาน</u>: แทนค่า n = 0 ลงใน $P(n)$ เราได้ว่า 0 = 0 ดังนั้น $P(n=0)$ เป็นจริง

<u>ขั้นอุปนัย:</u> ต้องการพิสูจน์ว่า $P(n=k) \rightarrow P(n=k+1)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็ม k ใด ๆ ตั้งแต่ 0 ขึ้นไป

สมมติให้ $P(n=k)$ เป็นจริง นั่นคือ $\sum_{i=0}^{k} i = \left(\frac{k}{2}\right)(k+1)$

เราจะต้องแสดงว่า $P(n=k+1)$ เป็นจริงด้วย หรืออีกนัยหนึ่งคือ

$$\sum_{i=0}^{k+1} i = \left(\frac{k+1}{2}\right)((k+1)+1)$$

เนื่องจาก $\sum_{i=0}^{k+1} i = \sum_{i=0}^{k} i + (k+1)$ เราแสดงได้ว่า

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k+1} i &= \sum_{i=0}^{k} i + (k+1)\\ &= \left(\frac{k}{2}\right)(k+1) + (k+1)\\ &= \left(\frac{k^2+k+2k+2}{2}\right)\\ &= \left(\frac{(k^2+2k+1)+(k+1)}{2}\right)\\ &= \left(\frac{(k+1)^2+(k+1)}{2}\right)\\ &= \left(\frac{k+1}{2}\right)((k+1)+1)\end{aligned}$$

แสดงว่า $P(n=k+1)$ เป็นจริง เมื่อสมมติว่า $P(n=k)$ เป็นจริง ดังนั้น $P(n=k) \rightarrow P(n=k+1)$ เป็นจริง

จากผลการแสดงในขั้นพื้นฐานและขั้นอุปนัยเราสรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับค่า n เป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบใด ๆ

ตัวอย่างที่ 27

จงแสดงว่า $1+r+r^2+\ldots+r^n = \sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ (n = 1, 2, 3, …) และ r เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ใช้วิธีการพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ โดยนิยาม $P(n)$ เป็น $\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

<u>ขั้นพื้นฐาน</u>: แทนค่า n = 1 ลงใน P(n) เราได้ว่า $1+r = \frac{1-r^2}{1-r} = \frac{(1-r)(1+r)}{1-r} = 1+r$ ดังนั้น $P(n=0)$ เป็นจริง

<u>ขั้นอุปนัย:</u> ต้องการพิสูจน์ว่า $P(n=k) \rightarrow P(n=k+1)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็ม k ใด ๆ ตั้งแต่ 1 ขึ้นไป

เราต้องแสดงให้ได้ว่า $\sum_{i=0}^{k+1} r^i = \frac{1-r^{k+2}}{1-r}$ เป็นจริงเช่นกัน หาก $\sum_{i=0}^{k} r^i = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$ เป็นจริง

พิจารณาขั้นตอนการจัดพจน์ของ $\sum_{i=0}^{k+1} r^i$ ดังต่อไปนี้

$$\sum_{i=0}^{k+1} r^i = \sum_{i=0}^{k} r^i + r^{k+1}$$
$$= \frac{1-r^{k+1}}{1-r} + r^{k+1}$$
$$= \frac{1-r^{k+1}+r^{k+1}-r^{k+2}}{1-r}$$
$$= \frac{1-r^{k+2}}{1-r}$$

เราจะพบว่า $\sum_{i=0}^{k+1} r^i = \frac{1-r^{k+2}}{1-r}$ เป็นจริง เมื่อ $\sum_{i=0}^{k} r^i = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$ เป็นจริง นั่นคือ $P(n=k) \rightarrow P(n=k+1)$ เป็นจริง

จากผลการแสดงในขั้นพื้นฐานและขั้นอุปนัยเราสรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับค่า n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

การแบ่งกรณีเพื่อพิสูจน์

ในบางครั้งการพิสูจน์ $\forall x \in A(P(x))$ อาจจะกระทำได้ง่ายยิ่งขึ้นหากเราแบ่งเซต A เป็นเซตย่อย ๆ ซึ่งเซตย่อยดังกล่าวจะต้องยูเนียนกันได้เซต A แล้วค่อยแสดงว่า $P(x) \equiv \mathbf{T}$ สำหรับกรณีที่ x เป็นสมาชิกแต่ละเซตย่อยเหล่านั้นทุก ๆ เซตย่อย นั่นคือ หาก $A = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$ แล้วเราสามารถพิสูจน์ $\forall x \in A(P(x))$ โดยการพิสูจน์ประพจน์ $\forall i \in \{1,2,\ldots,N\}\left(\forall x \in A_i(P(x))\right)$ การแบ่งกรณีดังนี้มักจะมีประโยชน์เมื่อสูตรหรือความสัมพันธ์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์นั้นอาจมีความแตกต่างกันสำหรับค่า x ที่แตกต่างกันในเซต A แต่สูตรหรือความสัมพันธ์เหล่านั้นเหมือนกันสำหรับ x ทุก ๆ ค่าในแต่ละเซตย่อยของเซต A นั้น

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 28

จงแสดงว่า $|a||b| = |ab|$ เมื่อ $(a,b) \in R \times R$

พิจารณานิยามของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงใด ๆ ซึ่งกล่าวว่า $|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$ เราจะเห็นว่าหากพิจารณาค่าบวกลบของ a และ b เราอาจแบ่งกรณีของ $(a,b) \in R \times R$ ได้ดังนี้

<u>กรณีที่ 1</u> $a > 0, b > 0$ จะพบว่า $ab > 0$ ดังนั้น $|ab| = ab = |a||b|$

<u>กรณีที่ 2</u> $a > 0, b < 0$ จะพบว่า $ab < 0$ ดังนั้น $|ab| = a(-b) = -ab = |a||b|$

<u>กรณีที่ 3</u> $a < 0, b > 0$ จะพบว่า $ab < 0$ ดังนั้น $|ab| = (-a)b = -ab = |a||b|$

<u>กรณีที่ 4</u> $a < 0, b < 0$ จะพบว่า $ab > 0$ ดังนั้น $|ab| = (-a)(-b) = ab = |a||b|$

<u>กรณีที่ 5</u> $a = 0$ หรือ $b = 0$ จะพบว่า $|ab| = |a||b| = 0$

การที่ $(a,b) \in R \times R$ ต้องตกอยู่ในกรณีใดกรณีหนึ่งจากกรณีที่ 1 ถึงกรณีที่ 5 ดังแสดงข้างต้น เราจะสรุปได้ว่า $|a||b| = |ab|$ เสมอ

วิธีการพิสูจน์แบบเฉพาะอื่น ๆ

การพิสูจน์การมีจริง

วิธีง่าย ๆ วิธีหนึ่งซึ่งมักจะสามารถใช้ในการพิสูจน์ว่า $\exists x P(x)$ เป็นจริงได้ คือ การหาค่า $x = x_o$ สักค่าหนึ่งซึ่งทำให้ $P(x = x_o)$ เป็นจริง วิธีนี้เรียกว่า *การพิสูจน์การมีจริง* (Existence Proof) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 29

จงหาค่าความจริงของประพจน์ “มีจำนวนเต็มบวกบางจำนวนซึ่งสามารถแสดงในรูปของผลบวกของจำนวนเต็มยกกำลังสองที่แตกต่างกันสองจำนวนได้มากกว่าสองแบบ”

หากเราทดลองพิจารณาจำนวนเต็มต่าง ๆ ไปเรื่อย ๆ อย่างน้อยเราจะพบว่า

$325 = 1^2 + 18^2 = 6^2 + 17^2 = 10^2 + 15^2$

นั่นคือ 325 สามารถแสดงในรูปของผลบวกของจำนวนเต็มยกกำลังสองที่แตกต่างกันสองจำนวนได้มากกว่าสองแบบ ดังนั้นประพจน์ในที่นี้เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 30

จงแสดงว่า “มีจำนวนอตรรกยะ x และ y บางจำนวน (x และ y อาจเป็นค่าเดียวกันก็ได้) ซึ่ง x^y เป็นจำนวนตรรกยะ” (Rosen)

ในตัวอย่างนี้ การหาจำนวนอตรรกยะคู่หนึ่งที่มีสมบัติดังกล่าวอาจจะเป็นการยาก ดังนั้นในที่นี้ขอให้ลองพิจารณาวิธีการดังนี้

เนื่องจากเราทราบว่า $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ ลองพิจารณาค่าของ x^y เมื่อทั้ง x และ y มีค่าเป็นจำนวนอตรรกยะ $\sqrt{2}$ ทั้งคู่ นั่นคือ $x^y = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ซึ่งเป็นการยากที่เราจะสรุปว่าจำนวนดังกล่าวเป็นจำนวนอตรรกยะหรือไม่ อย่างไรก็ตามเราสามารถบอกได้อย่างถูกต้องว่า $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ จะต้องเป็นจำนวนตรรกยะ หรือไม่ก็เป็นจำนวนอตรรกยะ อย่างใดอย่างหนึ่ง

<u>กรณีที่ 1</u> หาก $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ เป็นจำนวนตรรกยะ แสดงว่าเราสามารถหาจำนวนอตรรกยะ x และ y ซึ่ง x^y เป็นจำนวนตรรกยะได้เรียบร้อยแล้ว

<u>กรณีที่ 2</u> หาก $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ ให้พิจารณาค่า x และ y คู่ใหม่ดังนี้คือ $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ และ $y = \sqrt{2}$ เราจะได้ว่า $x^y = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ เป็นจำนวนตรรกยะ ซึ่งในเงื่อนไขนี้แสดงว่าเราสามารถหาจำนวนอตรรกยะ x และ y ซึ่ง x^y เป็นจำนวนตรรกยะได้แล้ว โดยที่ $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ และ $y = \sqrt{2}$

จากกรณีทั้งสอง จะเห็นว่าเรามิได้สรุปว่า $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ เป็นจำนวนตรรกยะหรือไม่ แต่ไม่ว่า $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ จะตกอยู่ในกรณีใด เราก็สามารถแสดงจำนวนอตรรกยะ x และ y ตามเงื่อนไขที่ต้องการได้ ดังนั้นเราจึงสรุปได้ว่าประพจน์ "มีจำนวนอตรรกยะ x และ y บางจำนวนซึ่ง x^y เป็นจำนวนตรรกยะ" เป็นจริง

จากตัวอย่างข้างต้น เราจะสังเกตได้ว่า ถึงแม้เราจะไม่สามารถระบุค่าตัวแปรเพรดิเคตที่ทำให้ประพจน์เป็นจริงได้อย่างเฉพาะเจาะจง เราก็ยังสามารถบอกว่ามีค่าบางค่าที่ทำให้ประพจน์นั้นเป็นจริง ในกรณีเช่นนี้เราจะเรียกการพิสูจน์ที่ได้ว่าเป็นแบบ *ไม่สร้างเสริม* (Non-constructive) ในทางตรงกันข้างถ้าเราสามารถระบุค่าของตัวแปรเพรดิเคตที่ทำให้ประพจน์เป็นจริงได้ การพิสูจน์นั้นจะเรียกว่าเป็นแบบ *สร้างเสริม* (Constructive)

การพิสูจน์โดยตัวอย่างแย้ง

สำหรับการแสดงว่าประพจน์ $\forall x P(x)$ เป็นเท็จ มักจะสามารถทำได้โดยการหาค่า $x = x_o$ สักค่าหนึ่งซึ่งทำให้ $P(x = x_o)$ เป็นเท็จ วิธีนี้เรียกว่า *การพิสูจน์โดยตัวอย่างแย้ง* (Proof by Counterexample) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 31

จงหาค่าความจริงของประพจน์ "สำหรับจำนวนเต็ม x ใด ๆ แล้ว $\sqrt[3]{x} \geq \sqrt[5]{x}$ "

หากเราพิจารณาค่า x ที่เป็นจำนวนลบ เช่น $x = -8$ เราจะพบว่า $\sqrt[3]{-8} = -2$ ในขณะที่ $\sqrt[5]{-8} \approx -1.516$ ดังนั้น $\sqrt[3]{-8} < \sqrt[5]{-8}$ ซึ่งแสดงว่าประพจน์ที่กำหนดในตัวอย่างนี้เป็นเท็จ

เซต ฟังก์ชัน และ ความสัมพันธ์

เซต

เซต (Set) เป็นโครงสร้างดิสครีตที่เรียบง่ายที่สุดอย่างหนึ่ง ซึ่งถูกนิยามไว้เพื่อบ่งบอกความเป็นกลุ่มเดียวกันของ *สมาชิก* (Element) จำนวนหนึ่ง ในบางแห่งอาจจะนิยมนิยามเซตว่าเป็นกลุ่มของ *วัตถุ* (Object) เพื่อให้เข้าใจได้ง่าย โดยคำว่าวัตถุนี้หมายถึงการคำนามทั่ว ๆ ไปที่เราไม่ต้องการระบุประเภทของมันอย่างเฉพาะเจาะจง การตั้งชื่อเซตในทางคณิตศาสตร์มักจะนิยมใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ และการบรรยายสมาชิกของเซตนั้นจะใช้สัญลักษณ์วงเล็บปีกกา { } ร่วมกับการแจกแจงสมาชิกแต่ละตัวโดยใช้ *ลำดับ* (Sequence) ในการแสดง หรือ คำบรรยายสมบัติของวัตถุที่เป็นสมาชิกของเซตนั้น ๆ เช่น

$A = \{1, 2, 3\}$ เป็นการแสดงเซตที่เรียกว่า A ซึ่งมีสมาชิก 3 ตัวคือ 1, 2 และ 3 และเราจะกล่าวว่า $1 \in A$ (อ่านว่า 1 เป็นสมาชิกของเซต A), $2 \in A$ และ $3 \in A$ วัตถุอื่น ๆ นอกเหนือจาก 1, 2 และ 3 ไม่เป็นสมาชิกของ A (หรือเรียกโดยภาษาพูดว่า ไม่อยู่ใน A) เช่น $4 \notin A$ เป็นต้น

$B = \{x \mid x \in Z^+$ และ $x \% 3 = 0\}$ เป็นการแสดงเซตที่เรียกว่า B ซึ่งมีสมาชิกเป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งหากสามลงตัว โดย Z^+ เป็นสัญลักษณ์ที่เป็นที่ยอมรับกันเพื่อใช้แสดงเซตของจำนวนเต็มบวก

ตารางที่ 13 แสดงสัญลักษณ์ที่นิยมใช้ในการแทนเซตที่พบได้บ่อย

สัญลักษณ์	ความหมาย
R	เซตของจำนวนจริงทั้งหมด
R^+	เซตของจำนวนจริงบวกทั้งหมด
R^-	เซตของจำนวนจริงลบทั้งหมด
Z	เซตของจำนวนเต็มทั้งหมด
Z^+	เซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด
Z^-	เซตของจำนวนเต็มลบทั้งหมด
Q	เซตของจำนวนตรรกยะทั้งหมด
Q^+	เซตของจำนวนตรรกยะบวกทั้งหมด
Q^-	เซตของจำนวนตรรกยะลบทั้งหมด
N	เซตของจำนวนธรรมชาติ (Natural number) ซึ่งได้แก่ {0, 1, 2, 3, … }

ตารางที่ 13 เซตที่พบบ่อยและสัญลักษณ์ที่นิยมใช้แทนเซตเหล่านั้น

สิ่งหนึ่งที่เซตต่างจากลำดับ คือ เซตไม่ได้ระบุถึงการเรียงลำดับของสมาชิกในเซตนั้น เซตระบุถึงความเป็นสมาชิกเท่านั้น เซตสองเซตใด ๆ จะเท่ากันก็ต่อเมื่อเซตทั้งสองนั้นมีสมาชิกที่เหมือนกันทั้งหมดเท่านั้น การเขียนว่า $A = B$ แสดงว่าสมาชิกของเซตทั้งสองนั้นเหมือนกันทั้งหมด หรืออาจนิยามได้ว่า

$$A = B \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

เซตที่ไม่มีสมาชิกเลยเรียกว่า *เซตว่าง* (Empty set) ซึ่งใช้สัญลักษณ์คือ ϕ

ตัวอย่างที่ 32

จงเขียนแสดงเซตดังคำบรรยายต่อไปนี้โดยใช้สัญลักษณ์ที่เหมาะสม

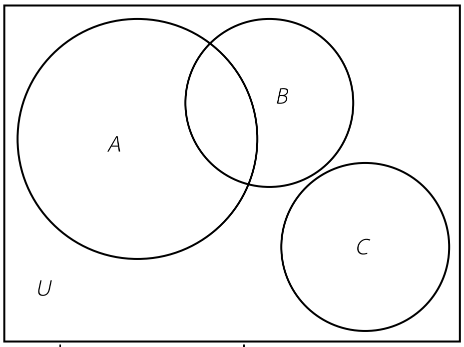
"เซต A เป็นเซตของจำนวนเต็มคู่บวกซึ่งมีค่ามากกว่า 2"

จากคำบรรยาย เราสามารถเขียนแสดงเซต A ได้คือ $A = \{x \in Z^+ \mid x > 2$ และ $x \% 2 = 0\}$

แผนภาพเวนน์

แผนภาพเวนน์ (Venn diagram) เป็นแผนภาพที่ใช้ในการแสดงควสามสัมพันธ์ของเซตต่าง ๆ โดยในแผนภาพจะใช้รูปร่างปิดหนึ่งรูปเพื่อแสดงเซตแต่ละเซต โดยพื้นที่ที่ถูกปิดล้อมโดยรูปร่างปิดนั้นจะแทนบริเวณซึ่งสอดคล้องกับสมาชิกของเซต ๆ นั้น บริเวณทั้งหมดในขอบเขตของแผนภาพเวนน์จะสอดคล้องกับเซตที่เรียกว่า *เอกภพ* (Universe) ซึ่งการที่เซตนี้ครอบคลุมพื้นที่ทั้งหมด สื่อให้เห็นถึงการที่วัตถุทุกชิ้นที่เป็นที่สนใจในขณะนั้นเป็นสมาชิกของเอกภพทั้งหมด

รูปที่ 1 แสดงตัวอย่างของแผนภาพเวนน์ซึ่งแสดงเซตจำนวน 3 เซตคือ A, B และ C โดยการที่รูปร่างปิดที่สอดคล้องกับ A และ B มีบริเวณที่ซ้อนทับกันสื่อให้เห็นว่ามีวัตถุบางชิ้นที่เป็นทั้งสมาชิกของ A และ B ในขณะที่ไม่มีสมาชิกตัวใดเลยของ C ที่เป็นสมาชิกของ A หรือ B บริเวณทั้งหมดของแผนภาพสอดคล้องกับเซต U ซึ่งก็คือเอกภพที่สนใจในขณะนั้น



รูปที่ 1 แผนภาพเวนน์ที่แสดงเซต A, B และ C

เซตย่อย เซตกำลัง และ ขนาดของเซต

หากสมาชิกทุก ๆ ตัวของเซต B เซตหนึ่ง เป็นสมาชิกของเซต A ด้วย เราจะเรียกว่า B เป็น *เซตย่อย* (Subset) ของ A และใช้สัญลักษณ์ในการแสดงคือ $B \subseteq A$ (อ่านว่าเซต B เป็นเซตย่อยของเซต A)

นิยามของเซตย่อยสามารถแสดงได้ด้วยประพจน์ดังต่อไปนี้

$$B \subseteq A \leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

ขอให้สังเกตว่าการที่ $B \subseteq A$ นั้น รวมถึงกรณีซึ่ง $A = B$ ด้วยเช่นกัน

หาก $B \subseteq A$ และ $A \neq B$ เราจะเรียกว่า B เป็น *เซตย่อยแท้* (Proper subset) ของ A

วัตถุใด ๆ ก็ตามสามารถเป็นสมาชิกของเซตได้ รวมถึงเซตเอง เช่น $\{\phi, 1, \{1, 2\}\}$ เป็นเซตซึ่งมีสมาชิก 3 ตัวคือ เซตว่าง, เลขจำนวนเต็ม 1, และเซตของ 1 และ 2 เป็นต้น

หากมีเซต A เซตหนึ่ง และ เซต S อีกเซตหนึ่ง ซึ่งเซตย่อยที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ A เป็นสมาชิกของ S และไม่มีสมาชิกของ S ตัวใดเลยที่ไม่เป็นเซตย่อยของ A เราจะกล่าวได้ว่า S เป็น *เซตกำลัง* (Power set) ของเซต A และใช้สัญลักษณ์แทนคือ $P(A)$

ขอให้สังเกตเพิ่มเติมว่า

- จากนิยามของเซตย่อย จะเห็นว่าเซตว่างเป็นเซตย่อยของทุก ๆ เซต
- ดังนั้นเซตว่างเป็นสมาชิกของเซตกำลังของเซตใด ๆ เสมอ

ตัวอย่างที่ 33

จงพิสูจน์ว่า ϕ เป็นเซตย่อยของเซตใด ๆ

ให้ p เป็นประพจน์ที่กล่าวว่า เซต B เป็นเซตว่าง หรือ $B = \phi$ และ q เป็นประพจน์ที่กล่าวว่า สำหรับทุก ๆ เซต A แล้ว $\forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$ หรือ $\forall A(\forall x(x \in B \rightarrow x \in A))$ เราจะพิสูจน์ $p \rightarrow q$ ด้วยการพิสูจน์ตรง

เมื่อสมมติให้ p เป็นจริง เราจะสามารถแทนค่า $B = \phi$ ลงใน q นั่นคือ $\forall A(\forall x(x \in \phi \rightarrow x \in A))$ จะเห็นว่า $x \in \phi \equiv F$ เสมอไม่ว่า x จะเป็นค่าใด ดังนั้น $\forall A(\forall x(x \in \phi \rightarrow x \in A)) \equiv T$

จากการพิสูจน์ตรง เราสรุปได้ว่า ϕ เป็นเซตย่อยของเซตใด ๆ จริง

ขนาดของเซต

จำนวนสมาชิกของเซต A เซตหนึ่ง เรียกว่า *ขนาด* (Cardinality) ของ A ซึ่งใช้สัญลักษณ์คือ $|A|$ ตัวอย่างของความจริงที่ควรระลึกเกี่ยวกับขนาดของเซต ได้แก่

- $|\phi| = 0$
- หาก $B \subseteq A$ แล้ว $|B| \leq |A|$
- หาก $B \subset A$ แล้ว $|B| < |A|$
- หาก $|A| = n$ แล้ว $|P(A)| = 2^n$

ตัวอย่างที่ 34

จงแสดงเซตย่อยของ $A = \{0, 1\}$ มาเป็นจำนวน 4 เซต

ϕ, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$

เซตทั้ง 4 เป็นเซตย่อยของ A เนื่องจากไม่มีสมาชิกตัวใดเลยในแต่ละเซตนั้นที่ไม่เป็นสมาชิกของ A

ผู้อ่านจะได้ศึกษาเรื่องเทคนิคการนับต่อไป หลังจากศึกษาเรื่องดังกล่าวแล้วผู้อ่านควรจะสามารถพิสูจน์ให้เห็นจริงได้ว่าเซตย่อยทั้งหมดของ A มีเพียงแค่ 4 เซตนี้เท่านั้น

ตัวอย่างที่ 35

หากเซตย่อยของ $A = \{0, 1\}$ มีเพียง 4 เซตซึ่งเป็นคำตอบของตัวอย่างที่แล้วเท่านั้น จงแสดง $P(A)$

เราสามารถแสดงเซตกำลังของ A ได้คือ $P(A) = \{ \phi, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\} \}$

n–สิ่งอันดับ

โครงสร้างดิสครีตที่มีไว้เพื่อบ่งบอกการรวมกลุ่มกันของสมาชิกพร้อมทั้งกำหนดการเรียงลำดับของสมาชิกเหล่านั้นด้วย ได้แก่ *n–สิ่งอันดับ* (*n*-Tuple) โดยที่ในการใช้งาน n จะถูกแทนที่ด้วยเลขจำนวนเต็มบวก เช่น 2–สิ่งอันดับ (หรือคู่อันดับ), 3–สิ่งอันดับ, และ 4–สิ่งอันดับ เป็นต้น เราใช้สัญลักษณ์ ( ) เพื่อแสดงสมาชิกและการเรียงลำดับของสมาชิก โดยเรียงลำดับสมาชิกทั้งหมดจากก่อนไปหลังภายในวงเล็บ แล้วคั่นสมาชิกแต่ละตัวด้วยเครื่องหมายจุลภาค เช่น (1, 2, 3, 5, 7, 11) เป็นตัวอย่างของ 6–สิ่งอันดับสิ่งหนึ่ง

สิ่งของที่เป็นสมาชิกของ n–สิ่งอันดับ อาจจะปรากฏซ้ำในตำแหน่งต่าง ๆ ได้ เช่น (2, 2) เป็นคู่อันดับซึ่งทั้งสองตำแหน่งเป็นจำนวนเต็ม 2 ทั้งคู่

n–สิ่งอันดับสองสิ่งที่เท่ากันจะต้องมีสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันเท่ากันเสมอ เช่น $(a, b) = (a, b)$ แต่ $(a, b) \neq (b, a)$

ผลคูณคาร์ทีเซียน

ผลคูณคาร์ทีเซียนของ A และ B คือ เซตซึ่งสมาชิกเป็นคู่อันดับ (a, b) ที่เป็นไปได้ทั้งหมด โดย $a \in A$ และ $b \in B$ เราใช้สัญลักษณ์ $A \times B$ แทนเซตดังกล่าว เราสามารถนิยาม $A \times B$ ได้ดังนี้

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

ตัวอย่างที่ 36

ให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{4, 5\}$ จงหา $A \times B$

$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$

ตัวอย่างผลคูณคาร์ทีเซียนที่เราน่าจะเคยพบมาบ่อยครั้งแล้วในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ได้แก่ $\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ ซึ่งก็คือเซตของคู่อันดับของจำนวนจริงทั้งหมดที่เป็นไปได้ เป็นต้น

ตัวปฏิบัติการทางเซต

ยูเนียน (Union) เป็นตัวปฏิบัติการทางเซตซึ่งเมื่อกระทำบนเซตสองเซตแล้วให้ผลเป็นเซตใหม่ ซึ่งมีสมาชิกเป็นสมาชิกของเซตตั้งต้นเซตใดเซตหนึ่งหรือทั้งสองเซตที่เป็นไปได้ทั้งหมด สัญลักษณ์ที่ใช้สำหรับตัวปฏิบัติการนี้คือ $\cup$ ยูเนียนของ A และ B สามารถแสดงโดย

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B \}$$

อินเตอร์เซกชัน (Intersection) เป็นตัวปฏิบัติการทางเซตซึ่งเมื่อกระทำบนเซตสองเซตแล้วให้ผลเป็นเซตใหม่ ซึ่งมีสมาชิกเป็นสมาชิกซึ่งปรากฏในทั้งสองเซตพร้อมกัน ทุก ๆ ตัวที่เป็นไปได้ สัญลักษณ์ที่ใช้สำหรับตัวปฏิบัติการนี้คือ $\cap$ อินเตอร์เซกชันของ A และ B สามารถแสดงโดย

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

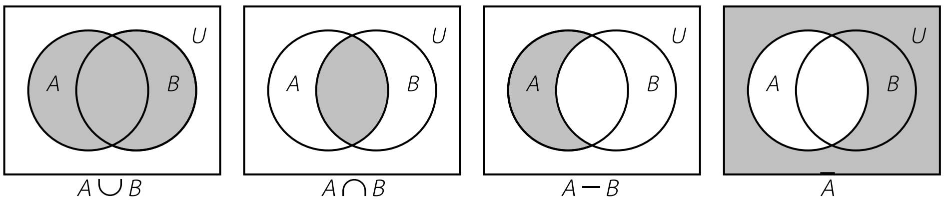
ผลต่าง (Difference) เป็นตัวปฏิบัติการทางเซตซึ่งเมื่อกระทำบนเซตสองเซต ซึ่งเซตหนึ่งเป็นตัวตั้งและอีกเซตหนึ่งเป็นตัวลบ ซึ่งให้ผลเป็นเซตใหม่ซึ่งมีสมาชิกเป็นสมาชิกซึ่งปรากฏเซตตัวตั้งแต่ไม่เป็นสมาชิกของเซตตัวลบ ผลต่างของ A และ B สามารถแสดงโดย

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

ส่วนเติมเต็ม (Complement) เป็นตัวปฏิบัติการทางเซตซึ่งเมื่อกระทำบนเซตหนึ่ง ๆ แล้วให้ผลเป็นเซตใหม่ ซึ่งมีสมาชิกทุกตัวในเอกภพที่ไม่ได้อยู่ในเซตตั้งต้น โดยในที่นี้คำว่าเอกภพ U หมายถึงเซตที่มีวัตถุทุกสิ่งที่เราสนใจในขณะนั้น สมาชิกของเซตตั้งต้นจะไม่เป็นสมาชิกของเซตใหม่นี้ ส่วนเติมเต็มของเซต A ใด ๆ สามารถเขียนได้ว่า $\overline{A}$ โดย

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

รูปที่ 2 แผนภาพเวนน์ซึ่งบริเวณที่แรเงาสอดคล้องกับ $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, และ $\overline{A}$



รูปที่ 2 แผนภาพเวนน์ซึ่งบริเวณที่แรเงาสอดคล้องกับ $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, และ $\overline{A}$

ตัวอย่างที่ 37

ให้ $A = \{x \mid x \in Z^+ \wedge x \leq 100\}$, $B = \{x \mid x \in Z \wedge x\%2 = 0\}$, และ $C = \{x \mid x = 8i; i = 0,1,2,3,4,5\}$ จงแสดงเซตที่สอดคล้องกับ $(A \cap B) - \overline{(A \cap C)}$

$(A \cap B) = \{x \mid x \in Z^+, x \leq 100, x\%2 = 0\} = \{2,4,6,8,...,100\}$

$(A \cap C) = \{8,16,24,32,40\}$ ดังนั้น $\overline{(A \cap C)} = \{x \mid x \notin \{8,16,24,32,40\}\}$

$\therefore (A \cap B) - \overline{(A \cap C)} = \{8,16,24,32,40\}$

ตารางสมาชิกภาพ

ตารางสมาชิกภาพ (Membership table) ของนิพจน์ที่เกิดจากการนำเซตมากกว่าหนึ่งเซตมากระทำกันผ่านตัวปฏิบัติการทางเซต คือ ตารางซึ่งในแต่ละแถวแสดงว่าหากวัตถุหนึ่ง ๆ มีความเป็นสมาชิกของเซตแต่ละเซตในนิพจน์

นั้นที่สอดคล้องกับแถวนั้นแล้ว วัตถุนั้นจะเป็นสมาชิกที่เป็นผลลัพธ์ของนิพจน์ดังกล่าวหรือไม่ ลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 38

จงสร้างตารางสมาชิกภาพที่สอดคล้องกับ $A \cup B,\ A \cap B,\ A - B$ และ $B - A$

ใช้สัญลักษณ์ 0 แทนการไม่เป็นสมาชิกของเซต และ 1 แทนการเป็นสมาชิกของเซต เราสามารถแสดงตารางสมาชิกภาพของนิพจน์ทั้งสี่ได้ดังนี้

A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$A - B$	$B - A$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0

ตารางที่ 14 ตารางสมาชิกภาพของ $A \cup B,\ A \cap B,\ A - B$ และ $B - A$

วิธีหนึ่งในการแสดงเท่ากันของเซตสองเซตนั้น สามารถทำได้โดยใช้ตารางสมาชิกภาพ เพื่อแสดงให้เห็นว่าตารางสมาชิกภาพของทั้งสองเซตนั้นให้ผลลัพธ์ความเป็นสมาชิกของวัตถุหนึ่งในกรณีต่าง ๆ เหมือนกัน

ตัวอย่างที่ 39

จงแสดงว่า $A - B = A \cap \overline{B}$

เขียนตารางสมาชิกภาพของเซตที่เกี่ยวข้อง ซึ่งจะได้ตารางที่มี 4 แถวแทนกรณีทั้งหมดที่เป็นไปได้สำหรับวัตถุหนึ่ง ๆ จะเป็นหรือไม่เป็นสมาชิกของ A และ B ได้ดังนี้

A	B	$A - B$	$\overline{B}$	$A \cap \overline{B}$
0	0	0	1	0
0	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0

ตารางที่ 15 ตารางสมาชิกภาพของ $A - B$ และ $A \cap \overline{B}$

จากตารางจะเห็นว่า $A - B$ และ $A \cap \overline{B}$ เท่ากันเนื่องจากวัตถุที่จะเป็นสมาชิกของทั้งสองได้จะต้องเป็นสมาชิกของ A แต่ไม่เป็นสมาชิกของ B เท่านั้น หรืออาจกล่าวได้ว่า $A - B = A \cap \overline{B} = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$

เอกลักษณ์ของเซต

มีกฎอยู่จำนวนหนึ่งซึ่งกล่าวเกี่ยวกับการเท่ากันของเซต ซึ่งกฎเหล่านี้เป็นที่ยอมรับกันในวงกว้าง เราสามารถนำมาใช้ประโยชน์ในการอ้างอิงได้เลยโดยมิต้องแสดงให้เห็นจริง กฎเหล่านี้เรียกว่า *เอกลักษณ์ของเซต* (Set identity) ซึ่งเอกลักษณ์ที่พบบ่อยถูกนำมาแสดงในตารางที่ 16 ข้างล่างนี้

เอกลักษณ์	ชื่อเรียก
$A \cup \phi = A$ $A \cap U = A$	กฎเอกลักษณ์ (Identity laws)
$A \cup U = U$ $A \cap \phi = \phi$	กฎการครอบงำ (Domination laws)
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	กฎนิจพล (Idempotent laws)
$\overline{(\overline{A})} = A$	กฎการเติมเต็ม (Complementation law)
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	กฎการสลับที่ (Commutative laws)
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	กฎการเปลี่ยนหมู่ (Associative laws)
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	กฎการแจกแจง (Distributive laws)
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	กฎของเดอมอร์แกน (De Morgan's laws)
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	กฎการดูดกลืน (Absorption laws)
$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \phi$	กฎการเติมเต็ม (Complement laws)

ตารางที่ 16 เอกลักษณ์ของเซต

ตัวอย่างที่ 40

จงพิสูจน์กฎการสลับที่ ข้อที่กล่าวเกี่ยวกับยูเนียน

กฎการสลับที่ข้อที่กล่าวเกี่ยวกับยูเนียนคือ สำหรับเซต A และเซต B ใด ๆ แล้ว $A \cup B = B \cup A$

จากนิยามของยูเนียนเราแสดงได้ว่า $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

และเนื่องจาก $x \in A \vee x \in B \equiv x \in B \vee x \in A$ จากกฎการสลับที่ที่ได้กล่าวถึงในเรื่องการสมมูลกันของประพจน์ เราจึงบอกได้ว่า $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} = \{x \mid x \in B \vee x \in A\} = B \cup A$

ตัวอย่างที่ 41

จงใช้เอกลักษณ์ของเซตเพื่อแสดงว่า $A \cap \overline{(B \cup C)} = \overline{C} \cap \overline{\left(\overline{A} \cup B\right)}$

$A \cap \overline{(B \cup C)} = A \cap \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right)$	โดยกฎของเดอมอร์แกน
$= \left(A \cap \overline{B}\right) \cap \overline{C}$	โดยกฎการเปลี่ยนหมู่
$= \overline{\left(\overline{A} \cup B\right)} \cap \overline{C}$	โดยกฎของเดอมอร์แกน
$= \overline{C} \cap \overline{\left(\overline{A} \cup B\right)}$	โดยกฎการสลับที่

ฟังก์ชัน

ความหมายโดยทั่ว ๆ ไปของ *ฟังก์ชัน* (Function) ก็คือ *การกำหนดค่า* (Assignment) ซึ่งในที่นี้เราจะสนใจเฉพาะเจาะจงไปที่ *ฟังก์ชันจากเซต A ไปยังเซต B*, $f : A \rightarrow B$, ซึ่งก็คือการกำหนดค่าผลลัพธ์หนึ่งค่าซึ่งเป็นสมาชิกของ B ให้กับค่าตั้งต้นซึ่งเป็นสมาชิกแต่ละตัวของ A โดยการกำหนดค่านี้ต้องกระทำกับสมาชิกของ A ทุก ๆ ตัวให้ครบถ้วน

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B เราจะใช้สัญลักษณ์ $f(a) = b$ แทนการที่เราระบุว่าผลลัพธ์ $b \in B$ ถูกกำหนดให้กับค่าตั้งต้น $a \in A$ หรือมิฉะนั้นเรายังสามารถระบุรายละเอียดของการกำหนดค่าโดยการใช้เซตของคู่อันดับ (a,b) ซึ่งมีค่า $a \in A$ และ $b \in B$ ที่สอดคล้องกับการกำหนดค่าโดยฟังก์ชันนั้น ๆ ก็ได้

หาก f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B โดย $f(a) = b$ เราจะเรียก:

- A ว่าเป็น *โดเมน* (Domain) ของ f
- B ว่าเป็น โคโดเมน (Codomain) ของ f
- b ว่าเป็น *ภาพ* (Image) ของ a
- a ว่าเป็น *บุพภาพ* (Pre-image) ของ b
- และ เซตซึ่งมีสมาชิกคือ b ที่เป็นไปได้ทั้งหมดตาม f ว่าเป็น *พิสัย* (Range) ของ f

---

ตัวอย่างที่ 42

หากกำหนดฟังก์ชันจาก $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ไปยัง $\mathbf{Z}$ ฟังก์ชันหนึ่งซึ่งให้ค่าผลลัพธ์ของฟังก์ชันเป็นสองเท่าของค่าตั้งต้นเสมอ จงแสดงเซตของคู่อันดับที่สอดคล้องฟังก์ชันดังกล่าว

กำหนดให้เรียกฟังก์ชันนี้ว่า f เนื่องจากฟังก์ชันดังกล่าวเป็นฟังก์ชันจาก A เราจะต้องระบุค่าผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับสมาชิกของ A ให้ครบทุกตัวและผลลัพธ์นั้นจะต้องเป็นสมาชิกของ B ด้วย

จากข้อกำหนดของฟังก์ชันเราระบุได้ว่า $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, และ $f(3) = 6$

ดังนั้น $f = \{(0,0),(1,2),(2,4),(3,6)\}$

ตัวอย่างที่ 43

หากกำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbf{R}$ ไปยัง $\mathbf{R}$ ซึ่งให้ค่าผลลัพธ์ของฟังก์ชันเป็นสองเท่าของค่าตั้งต้นเสมอ จงแสดงเซตที่สอดคล้องฟังก์ชันดังกล่าว

ในที่นี้จำนวนสมาชิกของโดเมนซึ่งคือเซตของจำนวนจริงมีจำนวนเป็นอนันต์ เราจึงไม่สามารถแจกแจงคู่อันดับทั้งหมดที่สอดคล้องกับ f ได้ ดังนั้นเราจะใช้วิธีการบรรยายสมบัติของสมาชิกของเซตแทน ดังนี้

$f = \{(a,b) \mid a \in R \wedge b = 2a\}$

ตัวอย่างที่ 44

กำหนด $f : A \rightarrow \mathbf{Z} = \{(1,-1),(2,5),(3,9)\}$ จงระบุเซต A โดเมน โคโดเมน และ พิสัย ของ f

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง Z เราจึงบอกได้ตามนิยามว่าโดเมนของ f คือ A และโคโดเมนของ f คือ $\mathbf{Z}$ โดย $A = \{1, 2, 3\}$ เนื่องจากบุพภาพทั้งหมดที่ระบุในฟังกชันนี้คือ 1, 2, และ 3 เท่านั้น

พิสัยของ f คือเซตของภาพทั้งหมดที่เป็นไปได้ นั่นคือ {−1, 5, 9}

ตัวอย่างที่ 45

กำหนด $f : \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ โดย $f(x) = x^2$ จงระบุ โดเมน โคโดเมน และ พิสัย ของ f

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันจาก R ไปยัง R เราจึงบอกได้ทันทีตามนิยามว่าโดเมนและโคโดเมนของ f คือ R

และเนื่องจากการยกกำลังสองของจำนวนจริงใด ๆ จะให้ผลเป็นจำนวนไม่ติดลบเท่านั้น ดังนั้นพิสัยของ f ในที่นี้คือ $\boldsymbol{R}^+ \cup \{0\}$

การบวกและคูณฟังก์ชัน

ฟังก์ชันสองฟังก์ชันที่มีโคโดเมนเป็น $\boldsymbol{R}$ และมีโดเมน A เดียวกันสามารถนำมาบวกและคูณกันได้

โดยหาก $f_1(a) = b_1$ และ $f_2(a) = b_2$ เมื่อ $a \in A$ ผลบวกของ f_1 และ f_2 ซึ่งใช้สัญลักษณ์คือ $f_1 + f_2$ จะเป็นฟังก์ชันซึ่ง

$$(f_1 + f_2)(a) = b_1 + b_2$$

และผลคูณของ f_1 และ f_2 ซึ่งใช้สัญลักษณ์คือ $f_1 f_2$ จะเป็นฟังก์ชันซึ่ง

$$(f_1 f_2)(a) = b_1 b_2$$

ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและฟังก์ชันทั่วถึง

ฟังก์ชัน $f : A \rightarrow B$ เป็น *ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง* (One-to-one function, Injective function, Injection) ก็ต่อเมื่อ หาก $f(a_1)$ เท่ากับ $f(a_2)$ แล้ว a_1 ต้องเท่ากับ a_2 สำหรับทุก ๆ ค่า a_1 และ $a_2 \in A$ ซึ่งตรงกับประพจน์ต่อไปนี้

$$f : A \rightarrow B \text{ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง } \leftrightarrow \forall a_1 \forall a_2 \big(f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2 \big)$$

ซึ่งสมมูลกับประพจน์ข้างล่างนี้เช่นกัน

$$f : A \rightarrow B \text{ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง } \leftrightarrow \forall a_1 \forall a_2 \big(f(a_1) \neq f(a_2) \rightarrow a_1 \neq a_2 \big)$$

ฟังก์ชัน $f : A \rightarrow B$ เป็น *ฟังก์ชันทั่วถึง* (Onto function, Surjective function, Surjection) ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ ค่า $b \in B$ จะมีค่า $a \in A$ ซึ่ง $f(a) = b$ นั่นคือ

$$f : A \rightarrow B \text{ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง } \leftrightarrow \forall b \exists a \big(f(a) = b \big)$$

ฟังก์ชันใด ๆ ที่เป็นทั้งฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและฟังก์ชันทั่วถึง เราจะเรียกว่า *ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง* (One-to-one correspondence, Bijection)

ตัวอย่างที่ 46

จงแสดงว่า $f(x) = x^2$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จาก ***R*** ไปยัง ***R***

ใช้การแสดงตัวอย่างแย้งโดยการเลือกค่า $a_1 \in \boldsymbol{R}$ และ $a_2 \in \boldsymbol{R}$ ที่เหมาะสม เพื่อพิสูจน์ว่า $\forall a_1 \forall a_2 \big(f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2\big)$ เป็นเท็จ

พิจารณา $a_1 = 1 \in \boldsymbol{R}$ และ $a_2 = -1 \in \boldsymbol{R}$ จะพบว่า $1^2 = (-1)^2 \rightarrow 1 = -1$ เป็นเท็จ ดังนั้น $f(x) = x^2$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จาก ***R*** ไปยัง ***R***

สังเกตว่าหากเปลี่ยนโดเมนจาก ***R*** เป็นเซตอื่นบางเซต เช่น $\boldsymbol{R}^+$ จะพบว่า $f(x) = x^2$ จะมีสมบัติเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ผู้อ่านจะได้ทดลองพิสูจน์ข้อความดังกล่าวเป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่างที่ 47

จงแสดงว่า $f(x) = mx + c$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง จาก ***R*** ไปยัง ***R*** เมื่อ m และ c เป็นค่าคงที่จำนวนจริงใด ๆ

ใช้การพิสูจน์ตรงเพื่อพิสูจน์ว่า $f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2$ เป็นจริงสำหรับค่า $a_1 \in \boldsymbol{R}$ และ $a_2 \in \boldsymbol{R}$ ใด ๆ เพื่อแสดงว่า $f(x) = mx + c$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เริ่มจากสมมติให้ $f(a_1) = f(a_2)$ เป็นจริง นั่นคือ $ma_1 + c = ma_2 + c$ ดังนั้น $a_1 = a_2$ เป็นจริง เราจึงสรุปได้ว่า $f(x) = mx + c$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จาก *R* ไปยัง *R*

สำหรับจำนวนจริง b ใด ๆ $f(a) = b = ma + c$ ซึ่งแสดงว่าค่า a ที่ทำให้ $f(a) = b$ นั้นคือ $a = \frac{b-c}{m}$ ซึ่งเป็นจำนวนจริงเสมอ ดังนั้นเรากล่าวได้ว่าสำหรับทุก ๆ ค่า b ที่เป็นจำนวนจริงใด ๆ เราสามารถหาค่า a ซึ่งเป็นจำนวนจริง (อยู่ในโดเมนของ *f*) ซึ่งทำให้ $f(a) = b$ ได้เสมอ นั่นคือ $\forall b \in \boldsymbol{R} \exists a \in \boldsymbol{R} \big(f(a) = b\big)$ เป็นจริง เราจึงสรุปได้ว่า $f(x) = mx + c$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง จาก ***R*** ไปยัง ***R***

เนื่องจากเราสามารถแสดงได้ว่า $f(x) = mx + c$ เป็นทั้งฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและฟังก์ชันทั่วถึง จาก *R* ไปยัง *R* เราจึงสรุปได้ว่าฟังก์ชันดังกล่าวเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง

ฟังก์ชันผกผันและฟังก์ชันประกอบ

หาก *f* เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง จาก *A* ไปยัง *B* โดยหาก *f*(*a*) = *b* สำหรับค่า $a \in A$ ใด ๆ แล้ว เราจะนิยาม *ฟังก์ชันผกผัน* (Inverse function) ของ *f* ว่าเป็นฟังก์ชัน f^{-1} ซึ่ง $f^{-1}(b) = a$

เราจะไม่นิยามฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันที่ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง หรือ อาจกล่าวว่า ฟังก์ชันที่ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงนั้นไม่มีฟังก์ชันผกผัน

ตัวอย่างที่ 48

จงหาฟังก์ชันผกผันของ $f(x) = mx + c$

แทนค่าตั้งต้น $a = x$ และค่าผลลัพธ์ $b = mx + c$ ลงในนิยามของฟังก์ชันผกผัน $f^{-1}(b) = a$ เราจะได้ว่า $f^{-1}(mx + c) = x$

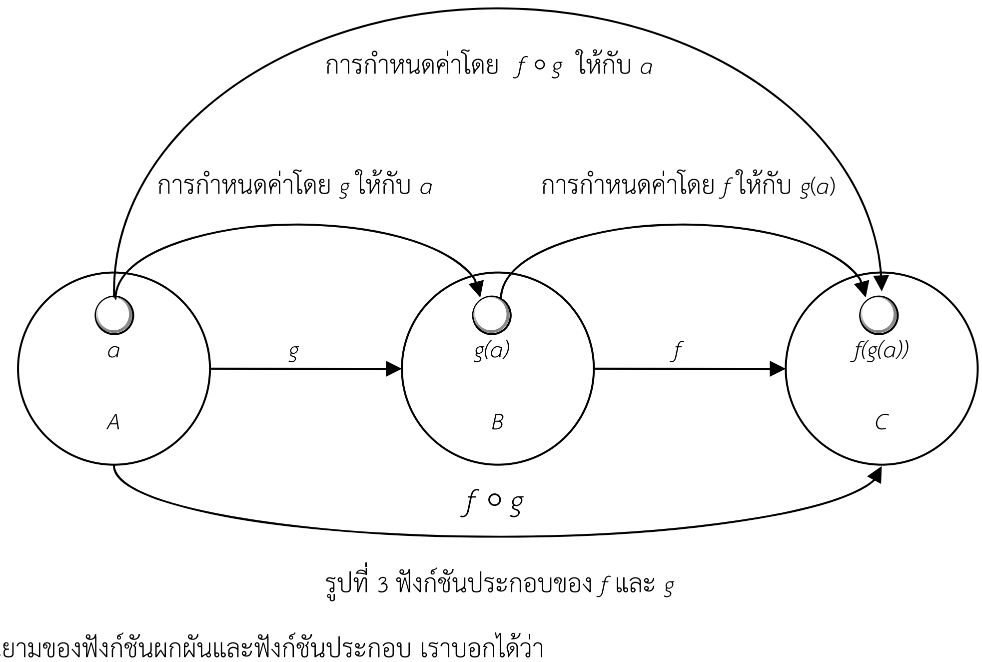
ให้ $mx + c = y$ หรือ $x = \dfrac{y - c}{m}$ เราจะแสดงได้ว่า $f^{-1}(y) = \dfrac{y - c}{m}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ทำให้ $f^{-1}(mx + c) = x$ หรือก็คือฟังก์ชันผกผันของ $f(x) = mx + c$ นั่นเอง

มีหลายครั้งที่ผลลัพธ์ที่ได้จากฟังก์ชัน g ฟังก์ชันหนึ่งถูกนำไปใช้เป็นค่าตั้งต้นของฟังก์ชัน f อีกฟังก์ชันหนึ่งเพื่อให้ฟังก์ชันนั้นกำหนดค่าผลลัพธ์สุดท้ายต่อไป เราสามารถนิยามการกำหนดค่าด้วยฟังก์ชันทั้งสองต่อกันนี้ด้วย *ฟังก์ชันประกอบ* (Composite function) ตามนิยามต่อไปนี้

> ให้ g เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และ f เป็นฟังก์ชันจาก B ไป C ฟังก์ชันประกอบของ f และ g สามารถแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $f \circ g$ มีนิยามคือ $(f \circ g)(a) = f(g(a))$

ฟังก์ชันประกอบของ f และ g จะไม่ถูกนิยามหากพิสัยของ g ไม่เป็นเซตย่อยของโดเมนของ f

รูปที่ 3 แสดงฟังก์ชันประกอบของ f และ g พร้อมทั้งเซตที่เกี่ยวข้อง



รูปที่ 3 ฟังก์ชันประกอบของ f และ g

จากนิยามของฟังก์ชันผกผันและฟังก์ชันประกอบ เราบอกได้ว่า

> หาก f สามารถหาฟังก์ชันผกผันได้และ $f(a) = b$ แล้ว $(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a$ และ $(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b$

ตัวอย่างที่ 49

จงแสดงฟังก์ชันประกอบของ f_1 และ f_2 เมื่อ $f_1(x) = x + 5$ และ $f_2(x) = x^2 + 2x + 3$ โดยทั้งสองฟังก์ชันมีโดเมนคือ *R* พร้อมทั้งระบุพิสัยของ f_2

เนื่องจาก $f_2(x) = x^2 + 2x + 3 = (x^2 + 2x + 1) + 2 = (x+1)^2 + 2$ ซึ่งมีค่าเป็นจำนวนจริงบวกที่มากกว่าหรือเท่ากับ 2 เสมอ ดังนั้นพิสัยของ f_2 คือ $\{a \mid a \in R \wedge a \geq 2\}$

เนื่องจากพิสัยของ f_2 เป็นเซตย่อยของโดเมนของ f_1 เราจึงสามารถหา $f_1 \circ f_2$ ได้

$(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x)) = f_1(x^2 + 2x + 3) = (x^2 + 2x + 3) + 5 = x^2 + 2x + 8$

ความสัมพันธ์

ความสัมพันธ์ (Relation) เป็นโครงสร้างที่ใช้บ่งบอกสัมพันธภาพ (Relationship) ระหว่างวัตถุต่าง ๆ ความสัมพันธ์เป็นเซตของ *n*-สิ่งอันดับ ซึ่งเซตดังกล่าวเป็นเซตย่อยของผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต *n* เซต ยกตัวอย่างเช่น R_1 = {(x1, 1.5), (x2, 0.35), (y,0.987)} เป็นความสัมพันธ์ซึ่งบ่งบอกสัมพันธภาพระหว่างชื่อตัวแปรกับค่าของตัวแปรนั้น หรือ R_2 = {(กร, 0001, 02-218-9998), (กิ่งแก้ว, 0002, 02-271-5647), (ขนิษฐา, 0003, 089-001-0008), (คมฤทธิ์, 0004, 085-134-8970)} เป็นความสัมพันธ์ซึ่งบ่งบอกสัมพันธภาพระหว่างชื่อบุคคล รหัสประจำตัว และ หมายเลขโทรศัพท์

ความสัมพันธ์ทวิภาค (Binary relation) จาก *A* ไป *B* เป็นความสัมพันธ์ซึ่งเป็นเซตย่อยของ $A \times B$

หาก $(a,b) \in R$ เราจะกล่าวว่า *a* สัมพันธ์กับ *b* โดย R

พึงสังเกตว่าความสัมพันธ์เป็นกรณีทั่วไปของฟังก์ชัน

เมื่อเรากล่าวถึง *ความสัมพันธ์บนเซตเซตหนึ่ง* (Relation on a set) เรากำลังหมายถึงความสัมพันธ์จากเซตนั้นไปยังตนเอง ตามนิยามดังนี้

ความสัมพันธ์บนเซต *A* คือ ความสัมพันธ์จาก *A* ไปยัง *A*

ดังนั้นความสัมพันธ์บนเซต *A* เป็นเซตย่อยของ $A \times A$

ตัวอย่างที่ 50

กำหนด $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{2,3,4\}$ ความสัมพันธ์ใดบ้างต่อไปนี้เป็นความสัมพันธ์จาก *A* ไปยัง *B* และความสัมพันธ์ใดบ้างเป็นความสัมพันธ์บน *A*

$R_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$, $R_2 = \{(1,1),(2,3),(3,1)\}$, $R_3 = \{(1,2),(1,3),(3,2)\}$

พิจารณาตำแหน่งแรกของคู่อันดับแต่ละตัวที่เป็นสมาชิกของทั้งสามความสัมพันธ์ เราพบว่าคู่อันดับทุก ๆ ตัวมีตำแหน่งแรกเป็นสมาชิกของ *A* ทั้งสิ้น

พิจารณาตำแหน่งหลังของคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ R_1 เราพบว่า ตำแหน่งหลังของ (3,4) ไม่เป็นสมาชิกของ *A* ดังนั้น R_1 ไม่ใช่ความสัมพันธ์บน *A* ในขณะที่ตำแหน่งหลังของทุกคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ R_1 เป็นสมาชิกของ *B* ทั้งสิ้น ดังนั้น R_1 เป็นความสัมพันธ์จาก *A* ไปยัง *B*

พิจารณาตำแหน่งหลังของคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ R_2 เราพบว่า ตำแหน่งหลังของ (1,1) และ (3,1) ไม่เป็นสมาชิกของ B ดังนั้น R_2 ไม่ใช่ความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B ในขณะที่ตำแหน่งหลังของทุกคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ R_2 เป็นสมาชิกของ A ทั้งสิ้น ดังนั้น R_1 เป็นความสัมพันธ์บน A

พิจารณาในทำนองเดียวกันเราจะบอกได้ว่า R_3 เป็นทั้งความสัมพันธ์บน A และ ความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B

สมบัติของความสัมพันธ์

ความสัมพันธ์จากเซต A ใดซึ่งสมาชิกทุก ๆ ตัวของ A สัมพันธ์กับตัวเองเสมอ เราจะบอกว่าความสัมพันธ์นั้นมีสมบัติ *สะท้อน* (Reflexive) ซึ่งสามารถนิยามได้ดังนี้

ความสัมพันธ์ R บนเซต A มีสมบัติสะท้อน $\leftrightarrow \forall a \in A((a,a) \in R)$

สำหรับความสัมพันธ์ซึ่ง หากสมาชิกตัวใดสัมพันธ์กับสมาชิกอีกตัวแล้ว ในทางกลับกันต้องเป็นจริงด้วย นั่นคือสมาชิกตัวหลังจะต้องสัมพันธ์กับสมาชิกตัวแรกเช่นกัน เราจะบอกว่าความสัมพันธ์นั้นมีสมบัติ *สมมาตร* (Symmetric) ซึ่งสามารถนิยามได้ดังนี้

ความสัมพันธ์ R บนเซต A มีสมบัติสมมาตร $\leftrightarrow \forall a \in A \forall b \in A((a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R)$

ความสัมพันธ์ซึ่งหากสมาชิกตัวใดสัมพันธ์กับสมาชิกอีกตัวที่แตกต่างกันแล้ว ในทางกลับกันไม่เป็นจริงเสมอ เราจะบอกว่าความสัมพันธ์นั้นมีสมบัติ *ต่อต้านการสมมาตร* (Antisymmetric) ซึ่งสามารถนิยามได้ดังนี้

ความสัมพันธ์ R บนเซต A มีสมบัติต่อต้านการสมมาตร $\leftrightarrow \forall a \in A \forall b \in A((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \rightarrow a = b)$

ความสัมพันธ์ที่มีสมบัติ *ส่งผ่าน* (Transitive) สามารถนิยามได้ดังนี้

ความสัมพันธ์ R บนเซต A มีสมบัติส่งผ่าน $\leftrightarrow \forall a \in A \forall b \in A \forall c \in A((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R)$

ตัวอย่างที่ 51

ให้ความสัมพันธ์ $R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,1)\}$ เป็นความสัมพันธ์บนเซต $A = \{1, 2\}$ จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ดังกล่าวมีสมบัติสะท้อน สมบัติสมมาตร สมบัติต่อต้านการสมมาตร และ สมบัติส่งผ่าน หรือไม่

เนื่องจากทั้ง (1,1) และ (2,2) เป็นสมาชิกของ R_1 ดังนั้น R_1 มีสมบัติสะท้อน

พิจารณา

$$\big((1,1) \in R_1 \rightarrow (1,1) \in R_1\big) \wedge \big((1,2) \in R_1 \rightarrow (2,1) \in R_1\big) \wedge \big((2,2) \in R_1 \rightarrow (2,2) \in R_1\big) \wedge \big((2,1) \in R_1 \rightarrow (1,2) \in R_1\big)$$

$$\equiv (T \rightarrow T) \wedge (T \rightarrow T) \wedge (T \rightarrow T) \wedge (T \rightarrow T)$$

$$\equiv T$$

เราจะเห็นว่าเป็นไปตามนิยามของสมบัติสมมาตร ดังนั้น R_1 มีสมบัติสมมาตร

สำหรับสมบัติต่อต้านการสมมาตร เราสามารถสังเกตได้ว่า $\left((1,2) \in R \wedge (2,1) \in R \rightarrow 1 = 2\right) \equiv F$ ดังนั้น R_1 ไม่มีสมบัติต่อต้านการสมมาตร

สำหรับการพิจารณาสมบัติส่งผ่าน เราทำการพิจารณาว่า มีค่า a, b, และ c จาก A แบบใดหรือไม่ที่ทำให้ $\left((a,b) \in R_1 \wedge (b,c) \in R_1 \rightarrow (a,c) \in R_1\right)$ เป็นเท็จ โดยการพิจารณาค่า a, b, และ c ที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่ทำให้ $(a,b) \in R_1 \wedge (b,c) \in R_1$ เป็นจริง แล้วพิจารณาต่อไปว่า $(a,c) \in R_1$ เป็นเท็จได้หรือไม่

ค่า a, b, และ c ที่จะทำให้ $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R$ เป็นจริงนั้นสามารถพิจารณาจากทุกคู่อันดับที่มีตำแหน่งหลังเท่ากับตำแหน่งแรกของคู่ลำดับอื่น ๆ ในทุก ๆ กรณี

เราจะเห็นว่า

หาก $(a,b) = (1,1)$ และ $(b,c) = (1,1)$ แล้ว $\left((1,1) \in R_1 \wedge (1,1) \in R_1 \rightarrow (1,1) \in R_1\right) \equiv T \rightarrow T \equiv T$

หาก $(a,b) = (1,2)$ และ $(b,c) = (2,2)$ แล้ว $\left((1,2) \in R_1 \wedge (2,2) \in R_1 \rightarrow (1,2) \in R_1\right) \equiv T \rightarrow T \equiv T$

หาก $(a,b) = (1,2)$ และ $(b,c) = (2,1)$ แล้ว $\left((1,2) \in R_1 \wedge (2,1) \in R_1 \rightarrow (1,1) \in R_1\right) \equiv T \rightarrow T \equiv T$

หาก $(a,b) = (2,2)$ และ $(b,c) = (2,1)$ แล้ว $\left((2,2) \in R_1 \wedge (2,1) \in R_1 \rightarrow (2,1) \in R_1\right) \equiv T \rightarrow T \equiv T$

ดังนั้น R_1 มีสมบัติส่งผ่าน

ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวน

ในส่วนนี้เราจะกล่าวถึงความรู้เบื้องต้นบางเรื่องซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของ *ทฤษฎีจำนวน* อันเป็นศาสตร์ที่มีความสำคัญในหลายสาขาของวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ โดยเรื่องที่เราจะกล่าวถึงในวิชานี้ได้แก่ ทฤษฎีบทต่าง ๆ เกี่ยวกับการหารจำนวนเต็ม และ ความรู้เกี่ยวกับจำนวนเฉพาะและตัวหารร่วมมาก

นิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆ เกี่ยวกับการหาร

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $a \neq 0$ เราจะกล่าวว่า “*a หาร b ลงตัว*” (a divides b) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม c ซึ่ง $b = ac$

เมื่อ a หาร b ลงตัว เราจะกล่าวว่า

- a เป็น *ตัวประกอบ* ของ b (Factor) และ
- b เป็น *จำนวนเท่า* (Multiple) ของ a

โดยสัญลักษณ์ที่ใช้บ่งบอกว่า a หาร b ลงตัว คือ $a \mid b$

ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม แล้ว

ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid (b + c)$

ถ้า $a \mid b$ แล้ว $a \mid (bc)$

ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid c$ แล้ว $a \mid c$

ตัวอย่างที่ 52

จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid (b + c)$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม

ใช้การพิสูจน์แบบตรง โดยกำหนดให้ $a \mid b$ และ $a \mid c$ นั่นคือ มีจำนวนเต็ม m และ n ซึ่งทำให้ $b = ma$ และ $c = na$ ดังนั้น $b + c = ma + na = (m + n) a$

เนื่องจาก $m + n$ เป็นจำนวนเต็ม เราจึงสรุปจากนิยามได้ว่า $a \mid (b + c)$

ตัวอย่างที่ 53

จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a \mid b$ แล้ว $a \mid (bc)$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม

ใช้การพิสูจน์แบบตรง โดยกำหนดให้ $a \mid b$ นั่นคือ มีจำนวนเต็ม m ซึ่งทำให้ $b = ma$ ดังนั้น $bc = (mc) a$

เนื่องจาก mc เป็นจำนวนเต็ม เราจึงสรุปจากนิยามได้ว่า $a \mid (bc)$

ตัวอย่างที่ 54

จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid c$ แล้ว $b \mid c$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม

ใช้การพิสูจน์แบบตรง โดยกำหนดให้ $a \mid b$ และ $b \mid c$ นั่นคือ มีจำนวนเต็ม m และ n ซึ่งทำให้ $b = ma$ และ $c = nb$ ดังนั้น $c = n (ma) = (nm) a$

เนื่องจาก nm เป็นจำนวนเต็ม เราจึงสรุปจากนิยามได้ว่า $a \mid c$

อัลกอริธึมการหาร

ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม และ d เป็นจำนวนเต็มบวกแล้วจะมีจำนวนเต็ม q และ r อย่างละตัว โดยที่ $0 \leq r < d$ ซึ่งทำให้ $a = dq + r$

จากอัลกอริธึมการหาร เราเรียก

- a ว่า *ตัวตั้งหาร* (Dividend),
- d ว่า *ตัวหาร* (Divider),
- q ว่า *ผลหาร* (Quotient), และ
- r ว่า *เศษเหลือ* (Remainder)

และ เราใช้สัญลักษณ์แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนทั้งสี่คือ $q = a$ **div** d และ $r = a$ **mod** d (อ่านว่า “เอ มอดุโลดี”)

ตัวอย่างที่ 55

จงหาผลหารและเศษเหลือ เมื่อ 99 ถูกหารด้วย 13

เนื่องจาก $99 = 13 \cdot 7 + 8$ ดังนั้น ผลหารคือ 7 และเศษเหลือคือ 8

ตัวอย่างที่ 56

จงหาผลหารและเศษเหลือ เมื่อ −99 ถูกหารด้วย 13

เนื่องจาก $-99 = 13 \cdot (-8) + 5$ ดังนั้น ผลหารคือ −8 และเศษเหลือคือ 5

ตัวอย่างที่ 57

จงหาผลหารและเศษเหลือ เมื่อ 1 ถูกหารด้วย 13

เนื่องจาก $0 = 13 \cdot (0) + 1$ ดังนั้น ผลหารคือ 0 และเศษเหลือคือ 1

สมภาค

หลายครั้งในการคำนวณ เราสนใจเฉพาะเศษเหลือจากการหารเท่านั้น เราจึงมีนิยามเกี่ยวกับ *สมภาค* (Congruence) ซึ่งกล่าวโดยเฉพาะสำหรับการที่จำนวนมีเศษเหลือจากการหารเท่ากัน ดังนี้

สำหรับ a และ b เป็นจำนวนเต็ม และ m เป็นจำนวนเต็มบวก

a *มีสมภาคกับ* (congruent to) b มอดุโล m ก็ต่อเมื่อ $m \mid (a - b)$

โดยใช้สัญลักษณ์คือ $a \equiv b \pmod{m}$

หรือเราอาจกล่าวด้วยนิยามที่สมมูลกับนิยามข้างต้นได้ว่า

อติวงศ์ สุชาโต
ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$a \equiv b \pmod{m} \leftrightarrow a \textbf{ mod } m = b \textbf{ mod } m$

ตัวอย่างที่ 58

จงแสดงว่า 14 มีสมภาคกับ 5 มอดุโล 3 หรือไม่

เนื่องจาก 14 **mod** 3 = 2 ซึ่งมีค่าเท่ากับ 5 **mod** 3 ดังนั้น $14 \equiv 5 \pmod{3}$

ตัวอย่างที่ 59

จงแสดงว่า 8 มีสมภาคกับ 25 มอดุโล 6 หรือไม่

เนื่องจาก 8 **mod** 6 = 2 แต่ 25 **mod** 6 = 1 ดังนั้น 8 ไม่มีสมภาคกับ 25 มอดุโล 6

ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก $a \equiv b \pmod{m}$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่งทำให้ $a = b + km$

พิสูจน์

1. พิสูจน์ว่าถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ แล้วจะมีจำนวนเต็ม k ซึ่งทำให้ $a = b + km$
   1.1. กำหนดให้ $a \equiv b \pmod{m}$ ดังนั้น $m \mid (a-b)$ ซึ่งแสดงว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่งทำให้ $(a-b) = km$
   1.2. จำนวนเต็ม k จาก 1.1 จะเป็นจำนวนเต็มซึ่งทำให้ $a = b + km$
2. พิสูจน์ว่าถ้ามีจำนวนเต็ม k ซึ่งทำให้ $a = b + km$ แล้ว $a \equiv b \pmod{m}$
   2.1. เนื่องจาก $a = b + km$ ดังนั้น $(a-b) = km$ ซึ่งแสดงว่า $m \mid (a-b)$
   2.2. จากนิยามของสมภาค $m \mid (a-b)$ แสดงว่า $a \equiv b \pmod{m}$
3. จากขั้นตอนทั้งสองข้างต้นเราพิสูจน์ได้ว่า $a \equiv b \pmod{m}$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่งทำให้ $a = b + km$ สำหรับจำนวนเต็ม m

ตัวอย่างที่ 60

จงแสดงว่าสำหรับจำนวนเต็ม a และจำนวนเต็มบวก m แล้ว $a \equiv (\, a \textbf{ mod } m\,) \pmod{m}$

ให้ $a \textbf{ mod } m = r$ จากอัลกอริธึมการหาร แสดงว่า $a = mk + r$ โดย k เป็นจำนวนเต็ม (ผลหาร)

เนื่องจาก k เป็นจำนวนเต็ม และ $a \textbf{ mod } m = r$ ดังนั้นเราได้แสดงว่า มีจำนวนเต็ม k ซึ่งทำให้ $a = (\, a \textbf{ mod } m\,) + km$ นั่นก็คือ $a \equiv (\, a \textbf{ mod } m\,) \pmod{m}$

ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ และ $c \equiv d \pmod{m}$ แล้ว

$a + c \equiv b + d \pmod{m}$ และ

$ac \equiv bd \pmod{m}$

พิสูจน์ ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ และ $c \equiv d \pmod{m}$ แล้ว $a + c \equiv b + d \pmod{m}$

1. ให้ $a \equiv b \pmod{m}$ และ $c \equiv d \pmod{m}$ ดังนั้น $m \mid (a-b)$ และ $m \mid (c-d)$
2. จาก 1. เนื่องจาก $m \mid (a-b)$ และ $m \mid (c-d)$ แสดงได้ว่า $m \mid (a-b) + (c-d)$ นั่นก็คือ $m \mid (a + c) - (b + d)$
3. จากนิยามของสมภาค และ ผลจาก 2. เราได้แสดงว่า $a + c \equiv b + d \pmod{m}$

หรืออาจจะพิสูจน์โดยอ้างถึงทฤษฎีบทที่พิสูจน์มาแล้วก่อนหน้านี้ ดังนี้

1. ให้ $a \equiv b \pmod{m}$ และ $c \equiv d \pmod{m}$ ดังนั้น มีจำนวนเต็ม p และ q ซึ่งทำให้ $a = b + pm$ และ $c = d + qm$
2. จาก 1. เราสามารถแสดงได้ว่า $(a + c) = (b + d) + (p + q)m$
3. เนื่องจาก $p + q$ เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $a + c \equiv b + d \pmod{m}$

พิสูจน์ ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ และ $c \equiv d \pmod{m}$ แล้ว $ac \equiv bd \pmod{m}$

1. ให้ $a \equiv b \pmod{m}$ และ $c \equiv d \pmod{m}$ ดังนั้น มีจำนวนเต็ม p และ q ซึ่งทำให้ $a = b + pm$ และ $c = d + qm$
2. จาก 1. เราสามารถแสดงได้ว่า $ac = (b + pm) + (d + qm) = bd + (dp + bq + pqm)m$
3. เนื่องจาก $dp + bq + pqm$ เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $ac \equiv bd \pmod{m}$

ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม และ m เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$(a + b) \textbf{ mod } m = ((a \textbf{ mod } m) + (b \textbf{ mod } m)) \textbf{ mod } m$

และ

$(ab) \textbf{ mod } m = ((a \textbf{ mod } m)(b \textbf{ mod } m)) \textbf{ mod } m$

พิสูจน์

จากที่แสดงในตัวอย่างก่อนหน้านี้แล้ว เราบอกได้ว่า $a \equiv (a \textbf{ mod } m) \pmod{m}$ และ $b \equiv (b \textbf{ mod } m) \pmod{m}$

ดังนั้น $a + b \equiv ((a \textbf{ mod } m) + (b \textbf{ mod } m)) \pmod{m}$ ซึ่งแสดงว่าเศษเหลือจากการหารด้วย m ของทั้ง $a + b$ และ $(a \textbf{ mod } m) + (b \textbf{ mod } m)$ มีค่าเท่ากัน หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ

$$(a + b) \textbf{ mod } m = ((a \textbf{ mod } m) + (b \textbf{ mod } m)) \textbf{ mod } m$$

ในทำนองเดียวกัน $ab \equiv ((a \textbf{ mod } m)(b \textbf{ mod } m)) \pmod{m}$ ซึ่งแสดงว่าเศษเหลือจากการหารด้วย m ของทั้ง ab และ $(a \textbf{ mod } m)(b \textbf{ mod } m)$ มีค่าเท่ากัน หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ

$$(ab) \textbf{ mod } m = ((a \textbf{ mod } m)(b \textbf{ mod } m)) \textbf{ mod } m$$

จำนวนเฉพาะ

จำนวนเต็มบวก p ที่มากกว่า 1 จะเป็น *จำนวนเฉพาะ* (Prime) ก็ต่อเมื่อ ตัวประกอบที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ p เป็นได้เพียง 1 และ p เท่านั้น ส่วนจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 แต่ไม่ใช่จำนวนเฉพาะ จะถูกเรียกว่า *จำนวนประกอบ* (Composite)

ทฤษฎีบทพื้นฐานของเลขคณิต

จำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 ทุกจำนวนนั้น สามารถเขียนในรูปจำนวนเฉพาะหรือไม่ก็สามารถเขียนอยู่ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะตั้งแต่ 2 จำนวนขึ้นไปได้หนึ่งรูปแบบ โดยให้ตัวประกอบจำนวนเฉพาะเหล่านั้นเรียงลำดับแบบไม่ลดลง

การแยกตัวประกอบตามทฤษฎีข้างต้นนั้น เรียกว่า *การแยกตัวประกอบจำนวนเฉพาะ* (Prime factorization)

ตัวอย่างที่ 61

จงแสดงการแยกตัวประกอบจำนวนเฉพาะของ 60, 61 และ 62

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

$61 = 61$ (เป็นจำนวนเฉพาะ)

$62 = 2 \cdot 31$

ถ้า n เป็นจำนวนประกอบแล้ว n มีตัวหารที่เป็นจำนวนเฉพาะที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ $\sqrt{n}$

พิสูจน์

1. ให้ n เป็นจำนวนประกอบ และให้ x เป็นตัวประกอบจำนวนเฉพาะของ n ที่มีขนาดเล็กที่สุด และ x มีค่ามากกว่า $\sqrt{n}$ นั่นคือเราสมมติว่า n ไม่มีตัวหารที่เป็นจำนวนเฉพาะที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ $\sqrt{n}$ เลย
2. เนื่องจาก ดังนั้น n มีตัวประกอบจำนวนเฉพาะ x ซึ่ง $1 < x < n$ และสมมติว่าเราไม่สามารถหา
3. เนื่องจาก x เป็นตัวหารของ n เราจะเขียนได้ว่า $n = xy$ โดยที่ y ก็เป็นตัวหารของ n เช่นกัน
4. แต่เนื่องจาก $x > \sqrt{n}$ ดังนั้น $y < \sqrt{n}$ ถึงจะทำให้ $n = xy$ ได้ และหาก y เป็นจำนวนเฉพาะ y จะเป็นตัวประกอบจำนวนเฉพาะของ n ที่มีค่าน้อยกว่า $\sqrt{n}$ หรือหาก y เป็นจำนวนประกอบ y ก็จะต้องมีตัวประกอบจำนวนเฉพาะที่น้อยกว่าค่าของ y นั่นก็คือ น้อยกว่า $\sqrt{n}$ ซึ่งตัวประกอบนี้ก็เป็นตัวประกอบของ n
5. จาก 4. ทำให้เราสามารถสรุปโดยการพิสูจน์ด้วยข้อขัดแย้งว่าทฤษฎีบทดังกล่าวข้างต้นเป็นจริง

หรือหากเราพิจารณาการแย้งสลับที่ของทฤษฎีบทข้างต้น เราจะกล่าวได้ว่า

ถ้าจำนวนเต็ม n ไม่มีตัวหารที่เป็นจำนวนเฉพาะที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ $\sqrt{n}$ แล้ว n เป็นจำนวนเฉพาะ

ตัวอย่างที่ 62

จงแสดงว่า 31 และ 51 เป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่ หากทราบว่าจำนวนเฉพาะที่อยู่ในช่วง 1 ถึง 10 คือ 2, 3, 5 และ 7

จำนวนเฉพาะที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ $\sqrt{31}$ คือ 2, 3, และ 5 เท่านั้นและทั้งสามหาร 31 ไม่ลงตัว ดังนั้น 31 ไม่มีตัวหารที่เป็นจำนวนเฉพาะที่ที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ $\sqrt{31}$ ทำให้สรุปได้ว่า 31 เป็นจำนวนเฉพาะ

เนื่องจากเราสามารถแยกตัวประกอบจำนวนเฉพาะของ 51 ได้ว่า $3 \cdot 17$ ดังนั้น 51 ไม่ใช่จำนวนเฉพาะ

จำนวนเฉพาะมีอยู่อย่างไม่จำกัด

พิสูจน์

1. ใช้การพิสูจน์ด้วยข้อขัดแย้ง โดยการสมมติให้จำนวนเฉพาะทั้งหมดมีอยู่เพียง n จำนวน กำหนดให้จำนวนเฉพาะทั้ง n เรียกว่า $p_1, p_2, \ldots, p_n$
2. ให้ $x - 1$ เป็นจำนวนซึ่งมีการแยกตัวประกอบจำนวนเฉพาะเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะทั้งหมดอย่างละหนึ่งตัว นั่นคือ $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$
3. จากทฤษฎีบทพื้นฐานของเลขคณิต x อาจจะเป็นจำนวนเฉพาะ หรือ x อาจจะเป็นจำนวนประกอบซึ่งต้องมีตัวประกอบที่เป็นจำนวนเฉพาะ
4. จาก 3. หาก x เป็นจำนวนเฉพาะ จะขัดแย้งกับข้อสมมติที่กำหนดว่าจำนวนเฉพาะมีเพียง $p_1, p_2, \ldots, p_n$
5. เนื่องจากไม่มีตัวใดเลยใน $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ซึ่งหาร $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ ลงตัว ดังนั้น จาก 3. หาก x เป็นจำนวนประกอบซึ่งต้องมีตัวประกอบที่เป็นจำนวนเฉพาะแล้ว แสดงว่าจะต้องมีจำนวนเฉพาะอื่นนอกเหนือจากจำนวนเฉพาะใน $p_1, p_2, \ldots, p_n$
6. จากการพิสูจน์ด้วยข้อขัดแย้งทำให้เราสรุปได้ว่า จำนวนเฉพาะมีอยู่อย่างไม่จำกัด

ตัวหารร่วมมากและตัวคูณร่วมน้อย

ตัวหารร่วมมาก

พิจารณานิยามต่อไปนี้

ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จำนวนเต็ม d ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ $d \mid a$ และ $d \mid b$ เรียกว่า *ตัวหารร่วมมาก* (Greatest common divisor)

สัญลักษณ์ที่ใช้แสดงตัวหารร่วมมากของ a และ b คือ $\gcd(a, b)$

ตัวอย่างที่ 63

จงหา $\gcd(24, 60)$ และ $\gcd(8, 2056)$

ตัวประกอบทั้งหมดที่แตกต่างกันของ 24 ได้แก่ 1, 2, 3, 4, 6, 12 และ 24

ตัวประกอบที่ใหญ่ที่สุดของ 24 ซึ่งก็คือ 24 นั้นหาร 60 ไม่ลงตัว ดังนั้นจึงพิจารณาตัวประกอบที่ใหญ่รองลงมาคือ 12 ซึ่งหาร 60 ลงตัว ดังนั้นตัวหารร่วมมากของ 24 และ 60 ก็คือ 12 นั่นเอง

ตัวประกอบทั้งหมดที่แตกต่างกันของ 8 ได้แก่ 1, 2, 4, และ 8 และเนื่องจาก 8 หาร 2056 ลงตัว ดังนั้น 8 เป็นจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดที่หาร 8 และ 2056 ลงตัว ดังนั้นตัวหารร่วมมากของ 8 และ 2056 ก็คือ 8 นั่นเอง

ความเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

ความเป็นจำนวนเฉพาะหากพิจารณาเปรียบเทียบกันระหว่างจำนวนเต็มสามารถนิยามได้ดังนิยามต่อไปนี้

จำนวนเต็ม a และ b เป็น *จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กัน* (Relatively prime) ก็ต่อเมื่อ ตัวหารร่วมมากของจำนวนทั้งสองคือ 1

และ

จำนวนเต็ม $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็น *จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กันทุกคู่* (Pairwise relatively prime) ก็ต่อเมื่อ $\gcd(a_i, a_j) = 1$ สำหรับทุก i , j ซึ่ง $1 \leq i < j \leq n$

ตัวอย่างที่ 64

จงแสดงว่า 27 และ 50 เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กัน

เนื่องจาก 27 มีตัวหารที่เป็นไปได้คือ 1, 3, 9, และ 27 ขณะที่ 50 มีตัวหารที่เป็นไปได้คือ 1, 2, 5, 10, 25, และ 50 ดังนั้น $\gcd(27, 50) = 1$

ตัวอย่างที่ 65

จงแสดงว่า 7, 27 และ 50 เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กันทุกคู่หรือไม่

จากตัวอย่างก่อนหน้านี้ เราแสดงแล้วว่า $\gcd(27, 50) = 1$ เพื่อแสดงว่าจำนวนทั้งสามเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กันทุกคู่ เราต้องหา $\gcd(7, 27)$ และ $\gcd(7, 50)$ เพิ่มเติม เนื่องจากตัวหารของ 7 มีเพียง 1 และ 7 เท่านั้น และ 7 หารทั้ง 27 และ 50 ไม่ลงตัว ดังนั้น $\gcd(7, 27)$ และ $\gcd(7, 50)$ ต่างก็คือ 1

ดังนั้น 7, 27 และ 50 เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กันทุกคู่

การหาตัวหารร่วมมากจากการแยกตัวประกอบจำนวนเฉพาะ

วิธีการหนึ่งในการหาตัวหารร่วมมากนั้น สามารถกระทำได้จากการพิจารณาตัวประกอบจำนวนเฉพาะของจำนวนที่กำลังพิจารณา ดังวิธีการต่อไปนี้

ให้ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ เป็นตัวประกอบจำนวนเฉพาะทั้งหมดของจำนวนเต็ม a และ b

หากเขียน a และ b ในรูปการแยกตัวประกอบจำนวนเฉพาะ $a = p_1^{a1} \cdot p_2^{a2} \cdot \cdots \cdot p_n^{an}$ และ $b = p_1^{b1} \cdot p_2^{b2} \cdot \cdots \cdot p_n^{bn}$ โดยที่ กำลังของ p_i ใด ๆ ก็คือ จำนวนตัวประกอบ p_i ใน a และ b ซึ่งมีค่าเป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ 0 ขึ้นไปตามแต่กรณี

แล้วจะบอกได้ว่า

$$\gcd(a,b) = p_1^{\min(a1,b1)} \cdot p_2^{\min(a2,b2)} \cdot \cdots \cdot p_n^{\min(an,bn)}$$

สังเกตว่าสำหรับ p_i ใด ๆ ที่อาจจะไม่ได้เป็นตัวประกอบของ a หรือไม่ได้เป็นตัวประกอบของ b เราสามารถระบุการยกกำลังของ p_i สำหรับการแยกตัวประกอบจำนวนเฉพาะของจำนวนนั้น ๆ เป็น 0

ตัวอย่างที่ 66

จงหา gcd (1134 ,1536)

$567 = 2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot7 = 2^1\cdot3^4\cdot7^1$ และ $1536 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3 = 2^9\cdot3^1 = 2^9\cdot3^1\cdot7^0$

ดังนั้น $\gcd(567, 1536) = 2^{\min(1,9)}\cdot3^{\min(4,1)}\cdot7^{\min(1,0)} = 2^1\cdot3^1\cdot7^0 = 6$

ตัวคูณร่วมน้อย

พิจารณานิยามต่อไปนี้

ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก จำนวนเต็ม d ที่เล็กที่สุดที่ทำให้ $a \mid d$ และ $b \mid d$ เรียกว่า *ตัวคูณร่วมน้อย* (Least common multiple)

สัญลักษณ์ที่ใช้แสดงตัวคูณร่วมน้อยของ a และ b คือ lcm (a , b)

ให้ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ เป็นตัวประกอบจำนวนเฉพาะทั้งหมดของจำนวนเต็ม a และ b

หากเขียน a และ b ในรูปการแยกตัวประกอบจำนวนเฉพาะ $a = p_1^{a1} \cdot p_2^{a2} \cdot \cdots \cdot p_n^{an}$ และ $b = p_1^{b1} \cdot p_2^{b2} \cdot \cdots \cdot p_n^{bn}$ โดยที่ กำลังของ p_i ใด ๆ ก็คือ จำนวนตัวประกอบ p_i ใน a และ b ซึ่งมีค่าเป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ 0 ขึ้นไปตามแต่กรณี

แล้วจะบอกได้ว่า

$$\gcd(a,b) = p_1^{\max(a1,b1)} \cdot p_2^{\max(a2,b2)} \cdot \cdots \cdot p_n^{\max(an,bn)}$$

ตัวอย่างที่ 67

จงหา lcm (120 , 176)

$120 = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5 = 2^3\cdot3^1\cdot5^1$ และ $176 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot11 = 2^4\cdot11^1$

ดังนั้น $\mathrm{lcm}(120, 176) = 2^{\max(3,4)}\cdot3^{\max(1,0)}\cdot5^{\max(1,0)}\cdot11^{\max(0,1)} = 2^4\cdot3^1\cdot5^1\cdot11^1 = 2640$

ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$ab = \gcd(a, b)\cdot\mathrm{lcm}(a, b)$$

ตัวอย่างที่ 68

จงหา gcd (120 , 176)

จากตัวอย่างที่ผ่านมาเราทราบว่า lcm (120 , 176) = 2640 ดังนั้น gcd (120 , 176) = (120·176)/2640 = 8

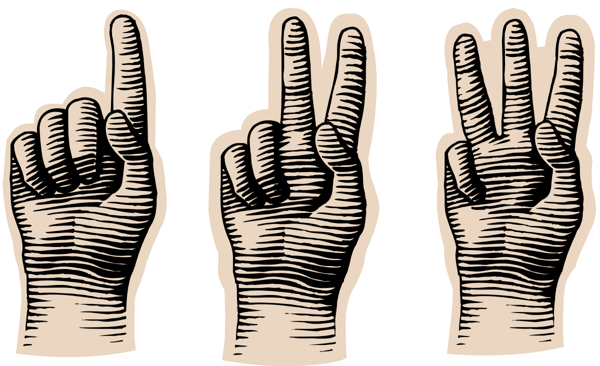
เอกสารคำสอน

วิชา

2110200 โครงสร้างดิสครีต

เรื่อง

การนับ



โดย

ผศ. ดร.อติวงศ์ สุชาโต

ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์

คณะวิศวกรรมศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

อติวงศ์ สุชาโต
ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การนับ

การนับ (Counting) เป็นการหาจำนวนสิ่งของ (Object) ที่มีสมบัติที่ต้องการ หรือ การหาจำนวนวิธีในการกระทำสิ่งใดสิ่งหนึ่งภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด การนับเป็นส่วนสำคัญของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เชิงการจัด (Combinatorics) ซึ่งเป็นการศึกษาเกี่ยวกับการจัดเรียงสิ่งของที่มีลักษณะเป็นดีสครีต (Discrete) ตัวอย่างการใช้วิธีการนับเพื่อแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับคอมพิวเตอร์ ได้แก่ การหาความซับซ้อนของอัลกอริธึม การออกแบบโครงสร้างเครือข่าย และ การหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง ๆ เป็นต้น

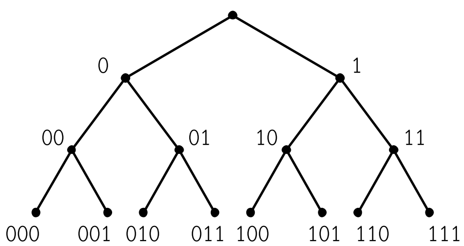
วิธีการนับขั้นพื้นฐานที่สุดนั้น ก็คือ การเพิ่มจำนวนที่นับเข้าไปทีละหนึ่งจนครบตามจำนวนสิ่งของที่ต้องการนับ ยกตัวอย่างเช่น หากเราต้องการนับจำนวนสายบิต (Bit String) ที่มี 3 หลักที่แตกต่างกันทั้งหมด เราสามารถทำได้โดยสร้างรายการ (List) ของสายบิตความยาว 3 หลักทั้งหมดออกมา แล้วนับจำนวนสายบิตในรายการนั้น เช่น ในที่นี้เราได้รายการดังกล่าวคือ 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 ซึ่งจำนวนสายบิตที่สนใจก็คือ 8 สาย เป็นต้น

เนื้อหาในเรื่องการนับนี้ เราจะศึกษาวิธีการและทฤษฎีต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง ที่สามารถนำมาใช้ช่วยหาคำตอบของปัญหาการนับในรูปแบบต่าง ๆ ได้อย่างสะดวกและรวดเร็วยิ่งขึ้น

แผนภูมิต้นไม้

แผนภูมิต้นไม้ (Tree Diagram) เป็นแผนภูมิอย่างง่ายแบบหนึ่งที่สามารถนำมาใช้ในการสร้างรายการของสิ่งของที่ต้องการนับได้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีที่สิ่งของที่ต้องการนับนั้น มีวิธีการสร้างที่ประกอบด้วยหลายขั้นตอน โดยผลลัพธ์ของแต่ละขั้นตอนนั้นอาจจะส่งผลกระทบต่อจำนวนวิธีในขั้นตอนอื่น ๆ หลังจากขั้นตอนนั้น

รูปที่ 1 แสดงตัวอย่างแผนภูมิต้นไม้ที่สามารถใช้ในการสร้างรายการของสายบิตความยาว 3 หลักทั้งหมดได้ โดยในที่นี้เรามองว่าการสร้างสายบิตความยาว 3 หลักนั้นเกิดจากการเลือกใช้ 0 หรือ 1 สำหรับบิตแรก การเลือก 0 หรือ 1 สำหรับบิตที่สอง และ การเลือก 0 หรือ 1 สำหรับบิตสุดท้ายตามลำดับ การสร้างแผนภูมิต้นไม้ที่สอดคล้องกับลำดับการสร้างดังกล่าวเริ่มจากจุดยอดที่เป็นรากของต้นไม้ (จุดยอดบนสุดที่แสดงในรูปที่ 1) แล้วสร้างจุดยอดในระดับที่หนึ่งที่เชื่อมต่อลงมาจากราก ตามจำนวนความเป็นไปได้ทั้งหมดในขั้นตอนที่หนึ่ง ซึ่งก็คือการเลือก 0 หรือ 1 สำหรับบิตแรก ดังนั้นจุดยอดในระดับนี้จึงมีสองจุดคือ จุดยอด 0 และ จุดยอด 1 ต่อไปให้พิจารณาสร้างจุดยอดในระดับถัดไปต่อจากจุดยอดทั้งสองนี้ โดยพิจารณาความเป็นไปได้ของขั้นตอนที่สอง นั่นก็คือ การเลือก 0 หรือ 1 สำหรับบิตที่สอง สร้างต้นไม้โดยการเติมจุดยอดในทำนองเดียวกันนี้ต่อไปเรื่อยจนครบตามขั้นตอนที่เรากำหนด นั่นคือเมื่อเลือก 0 หรือ 1 สำหรับบิตสุดท้ายเสร็จแล้ว จากนั้นเราสามารถนับผลลัพธ์ที่แตกต่างกันได้จากจำนวนจุดยอดที่ไม่มีจุดยอดใดต่อลงไป (หรือเรียกว่า ใบของต้นไม้)

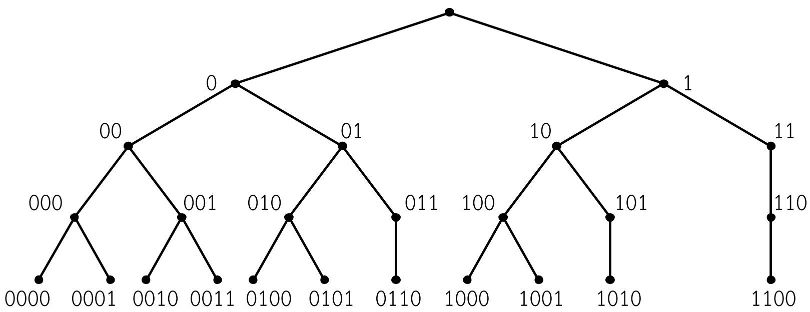


รูปที่ 1 ตัวอย่างแผนภูมิต้นไม้สำหรับการนับจำนวนสายบิตความยาว 3 หลัก

ตัวอย่างที่ 1

จงสร้างแผนภูมิต้นไม้ที่แสดงสายบิตที่มีความยาว 4 หลักที่เป็นไปได้ทั้งหมด โดยที่สายบิตเหล่านั้นมี 1 ไม่เกิน 2 ตัว และนับจำนวนสายบิตที่เป็นไปได้ทั้งหมดในเงื่อนไขนี้

แบ่งขั้นตอนการสร้างสายบิตความยาว 4 หลักเป็น 4 ขั้นตอน คือ การเลือกใช้ 0 หรือ 1 ในแต่ละหลัก จากหลักแรกไปจนถึงหลักที่ 4 สร้างแผนภูมิต้นไม้โดยการเติมจุดยอดต่อลงไปเป็นระดับ ๆ ให้สอดคล้องกับการเติม 0 และ 1 ลงไปยังหลักต่าง ๆ ของสายบิต โดยมีข้อแม้ว่าเมื่อใดก็ตามที่จุดยอดหนึ่งมีตัวเลข 1 ครบสองตัวแล้ว การเติมจุดยอดต่อลงไปจากจุดยอดนั้นสามารถเติมได้แค่ตัวเลข 0 เท่านั้น ทำเช่นนี้จนครบ 4 หลัก เราจะได้แผนภูมิต้นไม้ดังรูปที่ 2 ดังนั้นจำนวนสายบิตที่เป็นไปได้ทั้งหมดภายใต้เงื่อนไขในตัวอย่างนี้คือ 11 สาย

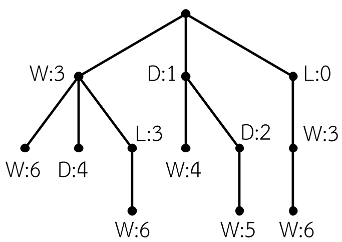


รูปที่ 2 แผนภูมิต้นไม้สำหรับจำนวนสายบิตความยาว 4 หลักที่มี 1 ไม่เกิน 2 ตัว

ตัวอย่างที่ 2

ในการแข่งขันฟุตบอลระหว่างทีมแดงและทีมน้ำเงิน จะทำการแข่งขันกันทั้งหมด 2 เกม โดยในแต่ละเกมนั้นผู้ชนะจะได้ 3 คะแนน ผู้แพ้ไม่ได้คะแนน หากผลของเกมนั้นเสมอทั้งสองทีมจะได้คะแนนเท่ากัน คือ 2 คะแนน หลังจากจบเกมทั้งสอง ทีมที่ชนะการแข่งขันคือทีมที่มีคะแนนจากทั้งสองเกมมากกว่า หากแข่งทั้งสองเกมแล้วคะแนนเท่ากันจะต้องแข่งขันกันในเกมที่สาม โดยในเกมที่สามนี้กติกาการแข่งขันกำหนดว่าจะต้องมีผู้ชนะ ซึ่งผู้ชนะจะได้คะแนนเช่นเดียวกับเกมอื่น ๆ ดังนั้นผู้ชนะในเกมที่สามนี้ก็จะเป็นผู้ชนะการแข่งขันในกรณีนี้ จงสร้างแผนภูมิต้นไม้ที่แสดงผลการแข่งขันที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่ทีมแดงจะเป็นผู้ชนะการแข่งขัน และหาจำนวนผลการแข่งขันที่แตกต่างกันดังกล่าว

สร้างแผนภูมิต้นไม้โดยให้จุดยอดที่ระดับที่ n แสดงผลการแข่งขันและคะแนนรวมจากการแข่งขันในเกมที่ n ในรูปแบบ X:Y โดยค่าของ X เป็น W หากทีมแดงชนะ D หากเสมอ และ L หากทีมแดงแพ้ ในขณะที่ Y แสดงคะแนนรวมหลังจากเกมที่ n แผนภูมิต้นไม้ที่ได้เป็นดังแสดงในรูปที่ 3



รูปที่ 3 แผนภูมิต้นไม้แสดงผลการแข่งขันที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่ทีมแดงจะเป็นผู้ชนะการแข่งขัน

จากแผนภูมิต้นไม้จำนวนผลการแข่งขันที่แตกต่างกันดังกล่าวเท่ากับ 6 แบบ

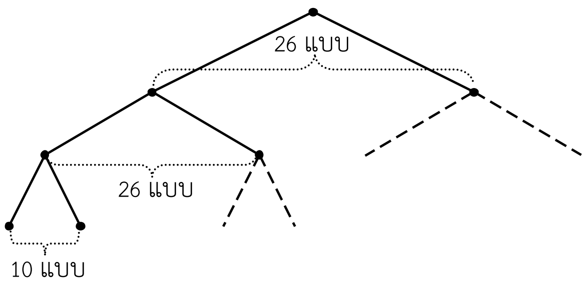
กฎการคูณสำหรับการนับ

สำหรับแผนภูมิต้นไม้ที่จำนวนจุดยอดในแต่ละชั้นที่ต่อลงมาจากจุดยอดในชั้นก่อนหน้านั้นหนึ่งจุดยอดเป็นจำนวนที่เท่ากันหมด ไม่ว่าจะต่อลงมาจากจุดยอดไหน และเป็นเช่นนี้เสมอไม่ว่าจะอยู่ในระดับใด โดยในแต่ละระดับ จำนวนจุดยอดที่ต่อลงมาจากจุดยอดหนึ่งในระดับก่อนหน้า ไม่จำเป็นจะต้องเท่ากับในระดับอื่นๆ (ดังเช่นแผนภูมิต้นไม้ในตัวอย่างการหาจำนวนสายบิตความยาว 3 หลักที่แสดงข้างต้น) หรืออาจกล่าวว่า จำนวนจุดยอดที่ต่อลงมาจากจุดยอดหนึ่งในระดับที่ k มีค่าเท่ากับ n_k เสมอ สำหรับทุกๆ จุดยอดในระดับที่ k แต่ n_k อาจจะแตกต่างกันไปสำหรับค่า k ที่แตกต่างกัน เราสามารถคำนวณหาจำนวนสิ่งของหรือวิธีในรายการที่สอดคล้องกับต้นไม้นั้นได้โดยการคูณจำนวนจุดยอดที่ต่อลงมาจากจุดยอดจุดหนึ่งในแต่ละชั้นเข้าด้วยกัน พิจารณาตัวอย่างที่ 3

ตัวอย่างที่ 3

ในระบบคอมพิวเตอร์ระบบหนึ่ง ผู้ใช้สามารถตั้งนามแฝงของตนโดยใช้อักขระจำนวน 3 ตำแหน่ง โดยที่ในแต่ละตำแหน่งใน 2 ตำแหน่งแรกนั้นสามารถเลือกใช้อักขระตัวใดตัวหนึ่งจากอักษรภาษาอังกฤษตัวใหญ่ A-Z (26 ตัว) ส่วนอักขระในตำแหน่งสุดท้าย สามารถเลือกใช้อักขระตัวใดตัวหนึ่งจาก 0-9 (10 ตัว) จงหาจำนวนนามแฝงที่แตกต่างกันทั้งหมดตามกฎในระบบนี้

การสร้างนามแฝงในระบบนี้สามารถมองได้ว่าเกิดจาก 3 ขั้นตอน เริ่มจากการเลือกอักขระ 1 ตัวจาก 26 แบบ ต่อมาเลือกอักขระ 1 ตัวจาก 26 แบบเช่นเดียวกับขั้นแรก และ ขั้นตอนสุดท้ายคือเลือกอักขระ 1 ตัวจาก 10 แบบ หากสร้างรายการของจำนวนนามแฝงทั้งหมดโดยแผนภูมิต้นไม้ โดยจุดยอดในแต่ละระดับคือ จำนวนแบบของความเป็นไปได้ในขั้นตอนที่สอดคล้องกับระดับนั้น เราจะได้แผนภูมิต้นไม้ดังรูปที่ 4



รูปที่ 4 แผนภูมิต้นไม้สำหรับการนับจำนวนนามแฝงที่แตกต่างกันในระบบ

เนื่องจากจุดยอดในระดับที่ 1 มี 26 จุดยอด ซึ่งแต่ละจุดยอดนั้นมีจุดยอดในระดับที่ 2 อีก 26 จุดยอด และแต่ละจุดยอดในระดับที่ 2 นี้มีจุดยอดที่ต่อลงมาอีก 10 จุดยอด ดังนั้นจำนวนใบของแผนภูมิต้นไม้นี้มีทั้งหมด $26\times26\times10$ ใบ นั่นก็คือ จำนวนนามแฝงทั้งหมดสามารถหาได้จากการคูณจำนวนแบบของความเป็นไปได้ในแต่ละขั้นตอนเข้าด้วยกัน

ตัวอย่างข้างต้นแสดงให้เห็นว่า

หากการสร้างสิ่งของที่แตกต่างกันนั้นสามารถแบ่งได้เป็นขั้นตอน m ขั้นตอนต่อเนื่องกัน โดยที่ขั้นตอนที่ 1 สามารถทำได้ n_1 แบบ และในแต่ละแบบของขั้นตอนที่ k-1 สามารถทำขั้นตอนที่ k ได้ n_k แบบ โดยที่ k = 2, 3, …, m เราจะสามารถคำนวณจำนวนสิ่งของที่แตกต่างกันได้เท่ากับ $n_1\times n_2\times\ldots\times n_m$ แบบ

เราจะอ้างถึงคำกล่าวข้างต้นนี้ว่า *กฎการคูณ* (Product Rule)

ตัวอย่างที่ 4

จงหาจำนวนฟังก์ชันที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากเซตที่มีสมาชิก m ตัว ไปยังเซตที่มีสมาชิก n ตัว

ฟังก์ชัน f จากเซต A ไปยังเซต B สามารถสร้างได้จากการเลือกสมาชิกของเซต B ให้กับค่าของ $f(a_i)$ เมื่อ a_i คือ สมาชิกตัวที่ i ของเซต A สำหรับทุก ๆ ค่า i ที่เป็นไปได้ เนื่องจากจำนวนวิธีในการเลือกค่าของแต่ละ $f(a_i)$ มีเท่ากับจำนวนสมาชิกของเซต B ซึ่งเท่ากับ n แบบ และ a_i มีทั้งสิ้น m ตัว ดังนั้นจำนวนฟังก์ชันที่เป็นไปได้ทั้งหมดในกรณีนี้สามารถคำนวณได้จากการคูณ n เข้าด้วยกัน m ครั้ง ซึ่งได้ผลลัพธ์คือ n^m

---

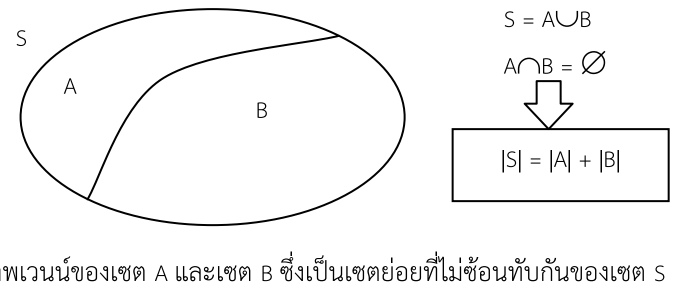
ตัวอย่างที่ 5

จงหาจำนวนฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากเซตที่มีสมาชิก m ตัว ไปยังเซตที่มีสมาชิก n ตัว โดยที่ $n \geq m$

ฟังก์ชัน f จากเซต A ไปยังเซต B สามารถสร้างได้จากการเลือกสมาชิกของเซต B ให้กับค่าของ $f(a_i)$ เมื่อ a_i คือ สมาชิกตัวที่ i ของเซต A สำหรับทุก ๆ ค่า i ที่เป็นไปได้ โดยข้อจำกัดของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งคือ เมื่อสมาชิกตัวใดของเซต B ถูกเลือกเป็นค่าของ $f(a_i)$ ตัวใดแล้วจะไม่สามารถถูกเลือกให้กับสมาชิกของเซต A ตัวอื่นได้ หากเริ่มจาก $f(a_1)$ จำนวนวิธีในการเลือกสมาชิกของเซต B ให้กับ $f(a_1)$ คือ n หลังจากที่เลือกสมาชิกของเซต B ตัวหนึ่งให้กับ a_1 แล้ว จะเหลือจำนวนสมาชิกของเซต B ให้เลือกใช้อีกเพียง n-1 แบบ ในทำนองเดียวกันนี้ เมื่อเลือกค่าของฟังก์ชันไป k ค่าแล้วจะเหลือสมาชิกของเซต B ให้เลือกใช้เพียง n-k แบบ ดังนั้นหาก a_i มีทั้งสิ้น m ตัว จำนวนฟังก์ชันที่เป็นไปได้ทั้งหมดในกรณีนี้สามารถคำนวณได้จากผลคูณ n(n-1)(n-2)...(n-m+1) หรือ n!/(n-m)!

การนับโดยการแบ่งกรณี

การนับสิ่งของนั้นอาจจะกระทำได้ง่ายขึ้นหากมีการแบ่งสิ่งที่ต้องการนับเป็นกลุ่ม ๆ หรือ กรณีต่าง ๆ ก่อน แล้วนับจำนวนในแต่ละกรณี ก่อนที่จะนำมารวมกันเพื่อหาจำนวนทั้งหมดต่อไป ยกตัวอย่างเช่น หากเราต้องการนับจำนวนสมาชิกของเซต S โดยที่สมาชิกทุกตัวของเซต S นั้นสามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณีคือ กรณีที่สมาชิกตัวนั้นเป็นสมาชิกของเซต A และกรณีที่สมาชิกตัวนั้นเป็นสมาชิกของเซต B โดยที่ทั้งสองเซ็ตนั้นไม่มีส่วนที่ทับซ้อนกัน ดังตัวอย่างที่แสดงในรูปที่ 5 จำนวนสมาชิกของ S สามารถหาได้จากการนับสมาชิกของ A และ B แยกกันก่อน แล้วจึงนำมาบวกกันในภายหลัง



รูปที่ 5 แผนภาพเวนน์ของเซต A และเซต B ซึ่งเป็นเซตย่อยที่ไม่ซ้อนทับกันของเซต S และ $S = A \cup B$

ในทำนองเดียวกัน หากเซต S สามารถแบ่งออกเป็นเซตย่อย m เซต ได้แก่ $A_1, A_2, \ldots, A_m$ โดยที่ $S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ และ ไม่มีเซต A_i ใดซ้อนทับกันเลย เราสามารถใช้สมบัติของเซตเพื่อแสดงได้ว่า $|S| = |A_1|+|A_2|+\ldots+|A_m|$ ดังนั้นเราสามารถสรุปได้ว่า

หากสิ่งของที่ต้องการนับสามารถแบ่งออกเป็นกรณีต่าง ๆ ได้ m กรณี โดยที่สิ่งของแต่ละสิ่งจะตกอยู่ได้ในเพียงกรณีเดียวเท่านั้น และทั้ง m กรณีครอบคลุมสิ่งของทั้งหมด หากจำนวนสิ่งของในกรณีที่ k คือ n_k โดยที่ k = 1, 2, …, m เราจะสามารถหาจำนวนสิ่งของทั้งหมดได้จาก $n_1+n_2+\ldots+n_m$

เราจะอ้างถึงคำกล่าวนี้ว่า *กฎการบวก* (Sum Rule)

ตัวอย่างที่ 6

หากการตั้งนามแฝงในตัวอย่างที่ 3 นั้นสามารถใช้อักขระได้ตั้งแต่ 3 ถึง 6 ตำแหน่ง โดยที่อักขระในทุกตำแหน่งยกเว้นตำแหน่งสุดท้ายเลือกมาจาก A-Z ในขณะที่อักขระในตำแหน่งสุดท้ายเลือกมาจาก 0-9 จำนวนนามแฝงที่เป็นไปได้ทั้งหมดจะเป็นเท่าไร

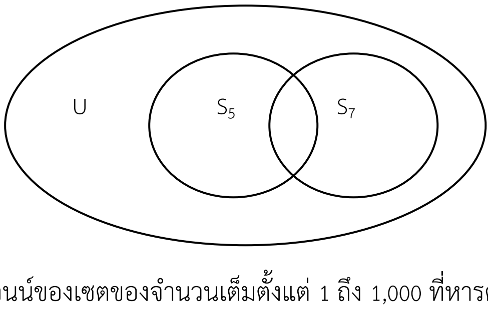
เราสามารถแบ่งนามแฝงที่เป็นไปได้ทั้งหมดเป็น 4 กรณี คือ นามแฝงที่มีความยาว 3, 4, 5, และ 6 ตำแหน่ง ให้จำนวนนามแฝงในกรณีที่ยาว k ตำแหน่งเป็น n_k จากกฎการคูณเราจะคำนวณได้ว่า $n_3 = 26\times26\times10$, $n_4 = 26\times26\times26\times10$, $n_5 = 26\times26\times26\times26\times10$ และ $n_6 = 26\times26\times26\times26\times26\times10$ ดังนั้นเมื่อเรารวมจำนวนในกรณีทั้งสี่เข้าด้วยกันจากกฎการบวก เราจะได้ว่าจำนวนนามแฝงที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ $n_3+ n_4+ n_5+ n_6 = 26\times26\times10 + 26\times26\times26\times10 + 26\times26\times26\times26\times10 + 26\times26\times26\times26\times26\times10$ แบบ

เราสามารถใช้แผนภาพเวนน์มาประกอบการนับจำนวนสิ่งของเมื่อเราแบ่งการนับสิ่งของเหล่านั้นออกเป็นกรณีต่าง ๆ เพื่อความสะดวกหากกรณีต่าง ๆ ที่แบ่งนั้นมีความซับซ้อน โดยเฉพาะอย่างยิ่งหากมีการทับซ้อนกันของกรณีต่าง ๆ เราไม่สามารถใช้กฎการบวกได้โดยตรง แต่เราจะต้องคำนึงถึงการทับซ้อนเหล่านั้นด้วย ซึ่งในกรณีเหล่านี้การรวมจำนวนการนับในกรณีย่อยต่าง ๆ เข้าด้วยกันนั้นจะเหมือนกับการคำนวณจำนวนสมาชิกในยูเนียนของเซตต่าง ๆ ที่สอดคล้องกับกรณีที่แบ่งนั้น พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 7

จงหาจำนวนของตัวเลขตั้งแต่ 1 ถึง 1,000 ที่หารด้วย 5 หรือ 7 ลงตัว

ให้ U เป็นเซตของจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 1,000 S_5 เป็นเซตของจำนวนเต็มใน U ที่หารด้วย 5 ลงตัว และ S_7 เป็นเซตของจำนวนเต็มใน U ที่หารด้วย 7 ลงตัว ในที่นี้เราไม่สามารถใช้กฎการบวกที่บวกรวมจำนวนใน S_5 และ S_7 เข้าด้วยกันได้ เนื่องจากมีบางจำนวนซึ่งเป็นสมาชิกของทั้งสองเซต จำนวนเหล่านั้นก็คือจำนวนเต็มที่หารด้วยทั้ง 5 และ 7 ลงตัว การบวกรวมด้วยกฎการบวกโดยตรงจะทำให้ได้คำตอบที่มากกว่าความเป็นจริงไป เนื่องจากจำนวนเต็มแต่ละจำนวนที่หารด้วยทั้ง 5 และ 7 ลงตัวจะถูกนับสองครั้ง



รูปที่ 6 แผนภาพเวนน์ของเซตของจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 1,000 ที่หารด้วย 5 หรือ 7 ลงตัว

ดังนั้นการจะหาจำนวนสมาชิกของ $S_5\cup S_7$ เราใช้สมบัติ $|S_5\cup S_7| = |S_5| + |S_7| - |S_5\cap S_7|$ โดยที่ $|S_5|$ เท่ากับ $\lfloor 1000/5 \rfloor = 200$ และ $|S_7|$ เท่ากับ $\lfloor 1000/7 \rfloor = 142$ ส่วน $|S_5\cap S_7|$ ก็คือจำนวนตัวเลขที่หารด้วย 35 ลงตัว

ซึ่งก็คือ $\lfloor 1000/35 \rfloor = 28$ ดังนั้นจำนวนของตัวเลขตั้งแต่ 1 ถึง 1,000 ที่หารด้วย 5 หรือ 7 ลงตัว คือ 200 + 142 – 28 = 314 จำนวน

เราจะกล่าวถึงกรณีทั่วๆ ไปของการหาจำนวนสมาชิกของยูเนียนของเซตในหัวข้อ หลักการการเพิ่มเข้า-ตัดออก (Inclusion-Exclusion Principle)

หลักการรังนกพิราบ

หลักการรังนกพิราบ (The Pigeonhole Principle) กล่าวว่า

ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้าสิ่งของตั้งแต่ k+1 ชิ้นขึ้นไปถูกใส่ลงไปในกล่อง k กล่องแล้ว จะต้องมีอย่างน้อยหนึ่งกล่องที่มีสิ่งของมากกว่า 1 ชิ้น

พิสูจน์

(1) สมมติว่าหลักการรังนกพิราบเป็นเท็จ นั่นคือ หลังจากการใส่สิ่งของ k+1 ชิ้นขึ้นไปถูกใส่ลงไปในกล่อง k กล่องแล้ว ไม่มีกล่องใดเลยที่มีสิ่งของมากกว่า 1 ชิ้น

(2) จาก (1) เรากล่าวได้ว่าจำนวนสิ่งของจะมีได้มากที่สุดไม่เกิน k ชิ้น ซึ่งขัดแย้งกับข้อกำหนดที่ว่ามีสิ่งของ k+1 ชิ้นขึ้นไป ดังนั้นการสมมติใน (1) จึงเป็นไปไม่ได้ นั่นหมายความว่า หลักการรังนกพิราบเป็นจริง

เราสามารถใช้หลักการรังนกพิราบในการให้เหตุผลเพื่อยืนยันคำตอบของปัญหาการนับบางปัญหาได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 8

จงหาจำนวนคนที่น้อยที่สุด ที่ทำให้ในกลุ่มคนเหล่านี้มีอย่างน้อยหนึ่งคู่ที่เกิดวันและเดือนเดียวกัน (อาจจะต่างปี)

จากหลักการรังนกพิราบ สมมติให้สิ่งของที่ถูกใส่ลงในกล่องเดียวกันคือ คนที่เกิดในวันและเดือนเดียวกัน จำนวนกล่องทั้งหมดจะมี k = 366 กล่องซึ่งเป็นจำนวนวันมากที่สุดที่แตกต่างกันได้ในหนึ่งปี เราต้องการให้มีอย่างน้อยหนึ่งกล่องที่มีสิ่งของมากกว่าหนึ่งชิ้น เพื่อแทนความที่คนอย่างน้อยหนึ่งคู่เกิดวันและเดือนเดียวกัน ดังนั้นสิ่งของจึงต้องมีอย่างน้อย k+1 = 367 ชิ้น นั่นคือ จำนวนคนที่น้อยที่สุดที่ทำให้เกิดสิ่งที่เราต้องการในตัวอย่างนี้อย่างแน่นอนคือ 367 คน

ตัวอย่างที่ 9

จะต้องเลือกเลขจำนวนเต็มมาอย่างน้อยกี่จำนวน ที่จะทำให้มีอย่างน้อยหนึ่งคู่ที่เมื่อหารด้วย 17 แล้วเหลือเศษเท่ากัน

จากหลักการรังนกพิราบ สมมติให้สิ่งของที่ถูกใส่ลงในกล่องเดียวกันคือ จำนวนเต็มที่เหลือเศษเท่ากันเมื่อถูกหารด้วย 17 เนื่องจากเศษเหลือจากการหารด้วย 17 มีทั้งหมด 17 แบบ คือ จำนวนเต็มตั้งแต่ 0 ถึง 16 ดังนั้นจำนวนกล่องทั้งหมดจะมี k = 17 กล่อง หากเราต้องการจำนวนเต็มอย่างน้อยหนึ่งคู่ที่อยู่ในกล่องเดียวกัน เราจะต้องใช้จำนวนเต็มอย่างน้อย k+1 = 18 จำนวน

หลักการรังนกพิราบนั้นนอกจากจะกล่าวเกี่ยวกับกรณีที่มีสิ่งของที่มีจำนวนมากกว่าจำนวนกล่องอย่างน้อย 1 ชิ้นแล้ว ยังกล่าวถึงกรณีทั่วไปเกี่ยวกับการใส่สิ่งของจำนวน N ชิ้นลงในกล่อง k กล่องดังนี้

> ถ้าสิ่งของจำนวน N ชิ้น ถูกใส่ลงในกล่องจำนวน k กล่องแล้ว จะมีกล่องอย่างน้อยหนึ่งกล่อง ซึ่งจะมีสิ่งของอยู่อย่างน้อย $\lceil N/k \rceil$ ชิ้น

พิสูจน์

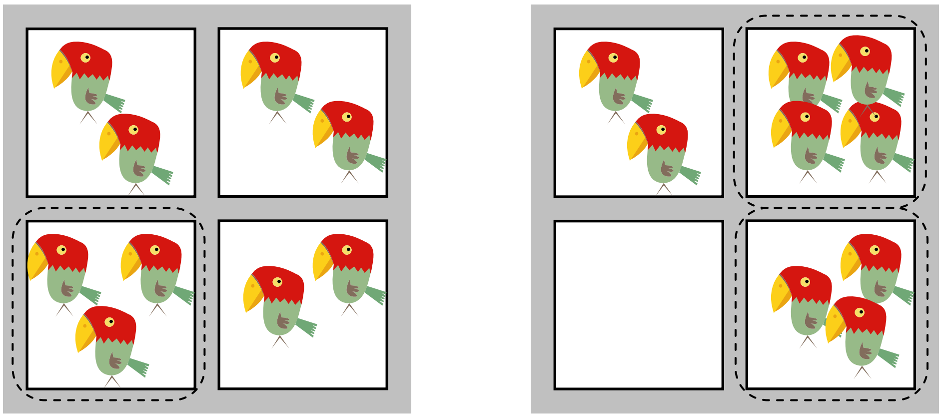
(1) สมมติให้กรณีทั่วไปของหลักการรังนกพิราบเป็นเท็จ นั่นคือ เมื่อใส่สิ่งของจำนวน N ชิ้นลงในกล่องจำนวน k กล่องแล้ว ไม่มีกล่องใดเลยที่มีของอย่างน้อย $\lceil N/k \rceil$ ชิ้น นั่นคือ ทุกกล่องมีสิ่งของได้มากที่สุดเพียง $\lceil N/k \rceil - 1$ ชิ้นในแต่ละกล่อง

(2) จาก (1) จำนวนสิ่งของที่มากที่สุดที่เป็นไปได้คือ $k \times (\lceil N/k \rceil - 1)$

(3) เนื่องจาก $\lceil N/k \rceil < N/k + 1$ ดังนั้น $k \times (\lceil N/k \rceil - 1) < k \times ((N/k+1) - 1) = N$

(4) จาก (2) และ (3) แสดงให้เห็นว่า จำนวนสิ่งของที่มากที่สุดที่เป็นไปได้นั้นน้อยกว่า N ดังนั้นการสมมติใน (1) จึงเป็นไปไม่ได้ นั่นหมายความว่า หลักการรังนกพิราบเป็นจริง

รูปที่ 7 แสดงตัวอย่างการใส่สิ่งของ N = 9 ชิ้น ลงในกล่องจำนวน k = 4 กล่อง จำนวนสองแบบ



มีหนึ่งกล่องที่มีอย่างน้อย $\lceil 9/4 \rceil = 3$ ชิ้น　　มีมากกว่า 1 กล่องที่มีอย่างน้อย $\lceil 9/4 \rceil = 3$ ชิ้น

รูปที่ 7 ภาพแสดงตัวอย่างการใส่สิ่งของ N = 9 ชิ้น ลงในกล่องจำนวน k = 4 กล่อง

ตัวอย่างที่ 10

จะต้องเลือกเลขจำนวนเต็มมาอย่างน้อยกี่จำนวน ที่จะทำให้มีอย่างน้อย 3 จำนวนที่เมื่อหารด้วย 9 แล้วเหลือเศษเท่ากัน

จากหลักการรังนกพิราบ สมมติให้สิ่งของที่ถูกใส่ลงในกล่องเดียวกันคือ จำนวนเต็มที่เหลือเศษเท่ากันเมื่อถูกหารด้วย 9 ดังนั้นจำนวนกล่องคือ k = 9 กล่อง เราต้องหาจำนวนเต็ม N ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $\lceil N/9 \rceil = 3$ เราจะได้ว่าจะต้องเลือกเลขจำนวนเต็มมาอย่างน้อย N = 19 จำนวน

การเรียงสับเปลี่ยน

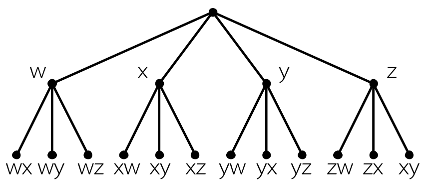
ปัญหาการนับหลายปัญหาสามารถแก้ด้วยการนับจำนวนการเรียงลำดับสิ่งของซึ่งเป็นสมาชิกจากเซต ๆ หนึ่ง ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ผลจากการเรียงลำดับวิธีหนึ่ง ๆ นั้น เราเรียกว่า *การเรียงสับเปลี่ยน* (Permutation) ในที่นี้เราจะศึกษาถึงการนับจำนวนการเรียงสับเปลี่ยนที่เป็นไปทั้งหมด โดยใช้สมาชิกจากเซต ๆ หนึ่ง

ให้ S เป็นเซตที่มีสมาชิก n ตัว ลำดับ (Sequence) ที่ประกอบด้วยสมาชิกของเซต S จำนวน r ตัว ($r \leq n$) ลำดับหนึ่ง โดยที่ไม่มีการซ้ำกันของสมาชิก จะถูกเรียกว่าเป็น *การเรียงสับเปลี่ยน r ตัว* (r-Permutation) ของเซต S นั้น หาก r = n หรืออีกนัยหนึ่งคือ หากสมาชิกทุกตัวใน S ปรากฏอยู่ในลำดับนั้น เราจะเรียกลำดับนั้นแค่ว่าเป็น การเรียงสับเปลี่ยน (ไม่ต้องระบุ r) ของเซต S วิธีหนึ่ง

ตัวอย่างที่ 11

ให้ S = {w, x, y, z} จงเขียนแผนภูมิต้นไม้ที่แสดงการเรียงสับเปลี่ยน 2 ตัวของ S ที่เป็นไปได้ทั้งหมด และนับจำนวนการเรียงสับเปลี่ยน 2 ตัวเหล่านั้น

สร้างแผนภูมิต้นไม้โดยให้จุดยอดในระดับที่ k แสดงสมาชิกของ S ที่ถูกเลือกมาเป็นสมาชิกในตำแหน่งที่ k ของการเรียงสับเปลี่ยน เราสามารถเขียนแผนภูมิต้นไม้ได้ดังรูปที่ 8 จากจำนวนใบของต้นไม้ เราบอกได้ว่าจำนวนการเรียงสับเปลี่ยน 2 ตัวเท่ากับ 12 วิธี คือ {wx, wy, wz, xw, xy, xz, yw, yx, yz, zw, zx, zy}



รูปที่ 8 แผนภูมิต้นไม้แสดงการเรียงสับเปลี่ยน 2 ตัวของเซต S = {w, x, y, z}

จากตัวอย่างข้างต้น เราสามารถสังเกตได้ว่า การนับจำนวนการเรียงสับเปลี่ยนที่เป็นไปได้ของเซต ๆ หนึ่งนั้นสามารถกระทำได้โดยการใช้กฎการคูณ เช่น ในตัวอย่างดังกล่าว จำนวนวิธีในการเลือกสมาชิกในตำแหน่งแรกของการเรียงสับเปลี่ยน 2 ตัวเป็นได้ 4 วิธี ในแต่ละวิธีสามารถมีวิธีในการเลือกสมาชิกในตำแหน่งที่สองได้อีกเพียง 3 ตัว ดังนั้นจากกฎการคูณ จำนวนเรียงสับเปลี่ยน 2 ตัวของเซต S ทั้งหมดคือ $4 \times 3 = 12$ วิธี

จำนวนการเรียงสับเปลี่ยน r ตัวของเซตที่มีสมาชิก n ตัวนั้น ใช้สัญลักษณ์แทนคือ P(n, r) ซึ่งหาได้จาก

$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = n!/(n-r)!$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $1 \leq r \leq n$

การพิสูจน์สูตรของ P(n, r) ข้างต้นสามารถทำได้โดยง่าย โดยอาศัยการอธิบายด้วยกฎการคูณ ผู้อ่านควรลองพิสูจน์ด้วยตนเอง

ตัวอย่างที่ 12

ในโรงแรมขนาดเล็กแห่งหนึ่งมีจำนวนห้องพัก 20 ห้อง ในคืนหนึ่งมีแขกเข้าพักจนห้องเต็มทั้งหมด จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดห้องพักให้แขกในคืนนี้

> มีห้องพัก 20 ห้อง สมมติให้เป็นห้องหมายเลข 1-20 เรียงกันไป วิธีในการจัดห้องพักให้แขก 20 กลุ่มนี้สามารถทำได้โดยการ จัดเรียงลำดับแขกทั้ง 20 กลุ่มนี้เพื่อมอบหมายเลขห้องพักให้ ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดก็คือ จำนวนการเรียงสับเปลี่ยนของสมาชิก 20 ตัว ซึ่งก็คือ $P(20, 20) = 20!$

ตัวอย่างที่ 13

จงหาจำนวนคำความยาว 3 ตัวอักษรที่เป็นไปได้ทั้งหมด โดยแต่ละอักษรในคำนั้นนำมาจากอักษรใดอักษรหนึ่งจากคำว่า MATHEMATICS และมีข้อกำหนดว่าอักษรทั้ง 3 ตัวจะต้องไม่ซ้ำกัน

> ในคำว่า MATHEMATICS มีอักษรที่แตกต่างกันทั้งหมด 8 ตัว คือ M, A, T, H, E, I, C, และ S ดังนั้นการสร้างลำดับความยาว 3 อักษร จากเซตที่มีสมาชิก 8 ตัว จึงมีวิธีที่แตกต่างกันได้ทั้งหมดเท่ากับ $P(8, 3) = 8!/3! = 8\times7\times6\times5\times4 = 6{,}720$ วิธี

การเรียงสับเปลี่ยนแบบมีการซ้ำของสมาชิก

หากตำแหน่งต่าง ๆ ของการเรียงสับเปลี่ยนสามารถใช้สมาชิกที่ซ้ำกันได้ จำนวนสิ่งที่แตกต่างกันที่สามารถนำมาใช้ในแต่ละตำแหน่งจะแตกต่างจากกรณีที่การเรียงสับเปลี่ยนไม่ยอมให้มีการซ้ำกันของสมาชิก เมื่อเราสร้างลำดับความยาว r ด้วยการเลือกสมาชิกที่จะใช้สำหรับตำแหน่งต่าง ๆ ต่อเนื่องกันไปเริ่มจากตำแหน่งแรก หากมีสิ่งของให้เลือกใช้จำนวน n สิ่ง ถ้าไม่ยอมให้มีการซ้ำของสมาชิกในแต่ละตำแหน่ง จำนวนวิธีในการเลือกใช้สมาชิกในตำแหน่งต่าง ๆ จะลดลงไปเรื่อย ๆ เนื่องจากสมาชิกบางตัวถูกใช้ไปในตำแหน่งก่อนหน้าแล้ว ในทางตรงกันข้าม ถ้าไม่มีข้อจำกัดที่สมาชิกแต่ละตัวสามารถใช้ได้เพียงครั้งเดียว จำนวนวิธีในการเลือกใช้สมาชิกในตำแหน่งต่าง ๆ จะเป็น n เสมอ ดังนั้นจากกฎการคูณ จำนวนการเรียงสับเปลี่ยน r ตัวที่สามารถใช้สมาชิกที่ซ้ำกันได้ ของเซตที่มีสมาชิก n ตัว ก็คือ n^r

ตัวอย่างที่ 14

ตะกร้าใบหนึ่งมีลูกบอลอยู่ 5 สี สีละ 20 ลูก โดยที่ลูกบอลทุกลูกที่มีสีเดียวกันถือว่าเหมือนกันทั้งหมด หากหยิบลูกบอลขึ้นมาทีละ 1 ลูก จำนวน 3 ครั้ง จงหาจำนวนวิธีที่เป็นไปได้ทั้งหมดของผลลัพธ์ในการหยิบลูกบอล หากลำดับการหยิบมีความสำคัญต่อผลลัพธ์

> ผลลัพธ์แต่ละแบบของการหยิบลูกบอลในที่นี้ คือ ลำดับของสีลูกบอลที่ได้ และเนื่องจากลูกบอลแต่ละสีมีจำนวนมากกว่า 3 ลูก ดังนั้นจำนวนสีที่เป็นไปได้ในแต่ละตำแหน่งจึงเป็น 5 วิธีเสมอ จากกฎการคูณจำนวนวิธีที่เป็นไปได้ทั้งหมดของผลลัพธ์ในการหยิบลูกบอล ในที่นี้จึงเท่ากับ $5 \times 5 \times 5 = 125$ วิธี

การจัดหมู่

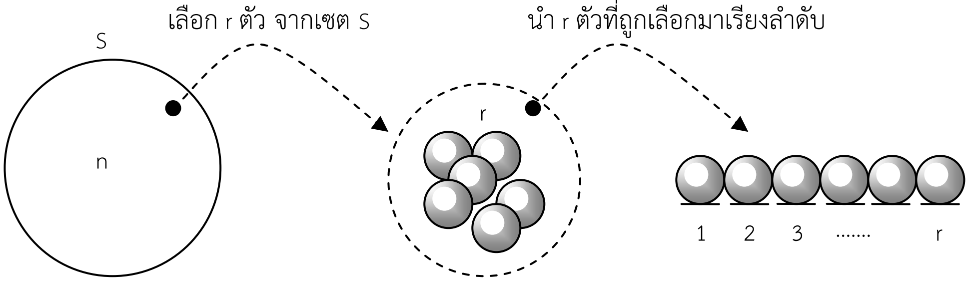
เช่นเดียวกับการเรียงสับเปลี่ยน *การจัดหมู่* (Combination) ซึ่งก็คือ การเลือกสมาชิกในจำนวนที่ต้องการจำนวนหนึ่งจากเซต ๆ หนึ่ง นั้นก็สามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาการนับได้อย่างกว้างขวาง โดยทั่วไปแล้วเราสนใจที่จะนับจำนวนวิธีที่เป็นไปทั้งหมดในการเลือกสมาชิกในจำนวนที่กำหนดจากเซตที่เราทราบจำนวนสมาชิกของมัน

ให้ S เป็นเซตที่มีสมาชิก n ตัว *การจัดหมู่ r ตัว* (r-Combination) ของเซต S แบบหนึ่ง ๆ นั้นก็คือ เซตย่อยเซตหนึ่งของเซต S โดยที่เซตย่อยนั้นมีสมาชิก r ตัว จำนวนการจัดหมู่ r ตัวที่เป็นไปทั้งหมดของเซต S ที่มีสมาชิก n ตัวสามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ C(n, r) ซึ่งหาได้จาก

$C(n, r) = n! / r!(n-r)!$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบ และ $0 \leq r \leq n$

พิสูจน์

(1) ให้ S เป็นเซตที่มีสมาชิก n ตัว เราจะเริ่มจากการพิจารณาวิธีการสร้างการเรียงสับเปลี่ยน r ตัว จากเซต S นี้ โดยใช้วิธีการสร้างที่ประกอบด้วย 2 ขั้นตอน ขั้นตอนแรกคือ เลือกสมาชิก r ตัวออกมาจากเซต S และขั้นตอนที่สองคือ สร้างลำดับความยาว r จากสมาชิกที่ถูกเลือกขึ้นมาในขั้นตอนแรก ดังแสดงในรูปที่ 9



รูปที่ 9 การสร้างการเรียงสับเปลี่ยน r ตัว

(2) จากขั้นตอนการสร้างการเรียงสับเปลี่ยน r ตัวใน (1) เนื่องจากทั้งสองขั้นตอนย่อยกระทำต่อเนื่องกัน เราสามารถบอกได้ว่า จำนวนการเรียงสับเปลี่ยน r ตัวที่เป็นไปได้ทั้งหมด เกิดจากการคูณกันของจำนวนวิธีที่เป็นไปได้ทั้งหมดในการเลือกสมาชิก r ตัวในขั้นตอนแรก กับ จำนวนวิธีในการสร้างลำดับในขั้นตอนที่สอง

(3) จำนวนวิธีในการเลือกสมาชิก r ตัวจากเซตที่มีสมาชิก n ตัวก็คือ C(n, r) โดยนิยาม

(4) จำนวนวิธีในการสร้างลำดับความยาว r จากสมาชิก r ตัวคือ $P(r, r) = r!$

(5) เราทราบว่าผลลัพธ์จากการคูณจำนวนวิธีใน (3) และ (4) คือ $P(n, r) = n!/(n-r)!$ ดังนั้นเราจะได้ว่า $C(n,r) \times r! = n!/(n-r)!$ นั่นคือ $C(n, r) = n!/r!(n-r)!$

ตัวอย่างที่ 15

ให้ S เป็นเซตที่มีสมาชิก 20 ตัว จงหาจำนวนเซตย่อยทั้งหมดของ S ที่มีสมาชิก 3 ตัว

จากนิยาม การจัดหมู่ r ตัวแบบหนึ่งของเซต S ก็คือ เซตย่อยเซตหนึ่งของเซต S โดยที่เซตย่อยนั้นมีสมาชิก r ตัว ดังนั้นจำนวนเซตย่อยทั้งหมดที่มีสมาชิก 3 ตัวของ S ก็คือ จำนวนการจัดหมู่ 3 ตัวของเซต S ซึ่งมีค่าเท่ากับ C(20, 3)

ตัวอย่างที่ 16

นิสิตในชั้นเรียนหนึ่งมี 100 คน ผู้สอนต้องการเลือกคณะตัวแทนจากนิสิตในชั้นเรียนนี้จำนวน 10 คน โดยให้หนึ่งคนเป็นหัวหน้าคณะ หากไม่มีการแบ่งแยกหน้าที่ระหว่างตัวแทนทั้ง 9 ที่ไม่ใช่หัวหน้าคณะ จงหาว่าสามารถมีคณะตัวแทนดังกล่าวแตกต่างกันได้กี่วิธี

เราสามารถมองว่าขั้นตอนการสร้างคณะตัวแทนประกอบด้วยสองขั้นตอน ขั้นตอนแรกคือ เลือกนิสิต 10 คนขึ้นมาจาก 100 คนซึ่งทำได้ C(100, 10) วิธี หลังจากนั้นจึงเลือกหัวหน้าหนึ่งคนจาก 10 คนที่ถูกเลือกขึ้นมา ซึ่งทำได้ C(10, 1) หรือ 10 วิธี ดังนั้นจำนวนคณะตัวแทนจะสามารถมีแตกต่างกันได้ C(100, 10) × 10 = 100!/9!90! วิธี

ในตัวอย่างนี้ เราอาจจะใช้ขั้นตอนการสร้างคณะตัวแทนที่แตกต่างจากขั้นตอนในข้างต้นได้ เช่น ขั้นตอนแรกอาจจะเป็นการเลือกผู้แทนที่ไม่ใช่หัวหน้าจำนวน 9 คน จากนิสิต 100 คน ซึ่งทำได้ C(100, 9) วิธี หลังจากนั้นจึงเลือกหัวหน้าคณะตัวแทน 1 คน จากนิสิตที่เหลือจำนวน 91 คน ซึ่งทำได้ C(91, 1) หรือ 91 วิธี ดังนั้นจำนวนคณะตัวแทนสามารถมีแตกต่างกันได้ C(100, 9) × C(91, 1) = (100! / 9! 91!) × 91 = 100!/9!90! วิธี เช่นเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 17

จงหาจำนวนสายบิตความยาว 10 หลัก ที่มีเลข 1 ไม่เกิน 3 ตำแหน่ง

จำนวนสายบิตที่เราจะนับในตัวอย่างนี้สามารถแบ่งออกเป็นกรณีต่าง ๆ ที่ไม่ทับซ้อนกันได้ 4 กรณี คือ กรณีต่าง ๆ ที่สายบิตความยาว 10 หลักที่มีเลข 1 จำนวน k ตัว (n_k) โดย k = 0, 1, 2, 3 สายบิตความยาว 10 หลักที่มีเลข 1 จำนวน k ตัวสามารถสร้างได้จากการเลือกจากทั้ง 10 หลัก ออกมา k หลักเพื่อให้เป็นเลข 1 ส่วนหลักที่เหลือเป็น 0 ดังนั้น n_k = C(10, k)

จากกฎการบวกเราจึงสรุปได้ว่าจำนวนสายบิตตามเงื่อนไขที่กำหนดคือ C(10, 0) + C(10, 1) + C(10, 2) + C(10, 3)

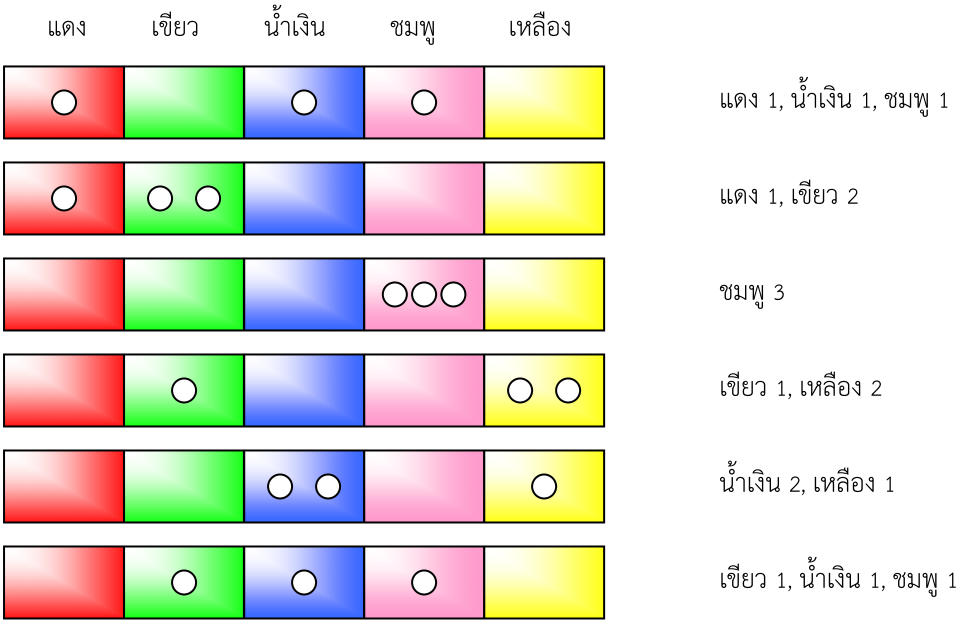
การจัดหมู่แบบมีการซ้ำของสมาชิก

หากในแต่ละการจัดหมู่นั้นยอมให้มีการซ้ำกันของสมาชิกได้ จำนวนการจัดหมู่ r ตัวของเซตที่มีสมาชิก n ตัวก็จะมีจำนวนทั้งหมดมากกว่าการจัดหมู่ที่ไม่ยอมให้มีการซ้ำได้ ก่อนที่เราจะสรุปสูตรของการหาจำนวนการจัดหมู่ r ตัวของเซตที่มีสมาชิก n ตัว ซึ่งยอมให้มีการซ้ำได้ ลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 18

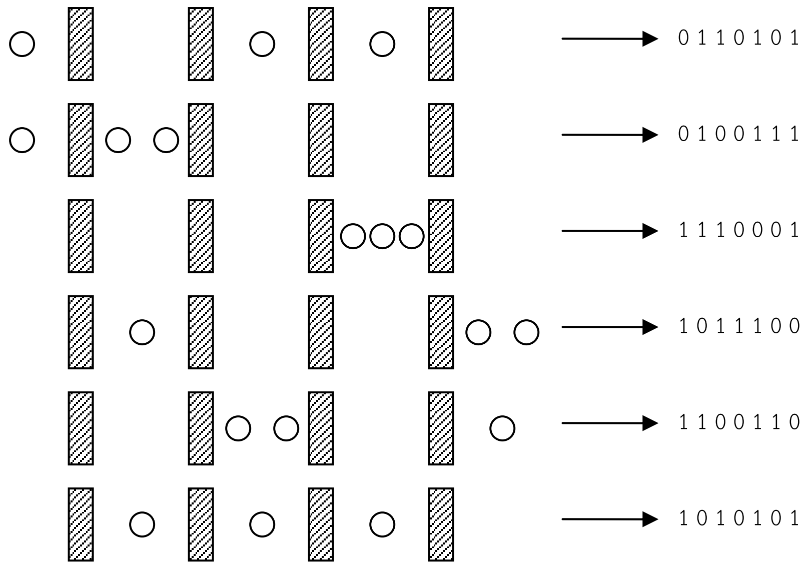
ในกล่องใบหนึ่งมีลูกบอลเล็ก ๆ อยู่เป็นจำนวนมาก โดยลูกบอลทั้งหมดนี้แบ่งออกเป็น 5 สี แดง เขียว น้ำเงิน ชมพู เหลือง สมมติว่าจำนวนลูกบอลแต่ละสีมีจำนวนมากเพียงพอ (จำนวนไม่จำกัด) และลูกบอลสีเดียวกันไม่มีความแตกต่างกัน จงหาจำนวนวิธีที่เป็นไปได้ทั้งหมด ในการสุ่มหยิบลูกบอลจำนวน 3 ลูกออกมาจากกล่องใบนี้

ปัจจัยที่มีผลทำให้ผลการหยิบลูกบอล 3 ลูกในที่นี้ที่แตกต่างกัน คือ จำนวนลูกบอลที่หยิบได้ในแต่ละสี โดยผลรวมทั้งหมดจะต้องเป็น 3 ลูกเท่านั้น รูปที่ 10 แสดงตัวอย่างผลการหยิบที่แตกต่างกัน โดยในรูปนี้ ในแต่ละวิธีที่ได้ ลูกบอลจะถูกใส่ในช่องสี่เหลี่ยมตามสีของลูกบอลนั้น



รูปที่ 10 ตัวอย่างผลการหยิบลูกบอล 3 ลูกจากกล่องที่มีลูกบอล 5 สี

จากตัวอย่างของวิธีในรูปที่ 10 หากเราพิจารณาความเหมือนและความแตกต่างของแต่ละวิธี เราจะเห็นว่าวิธีที่เป็นไปได้ทั้งหมดนั้นเหมือนกันตรงที่มีช่อง 5 ช่องและมีลูกบอล 3 ลูก สิ่งที่แตกต่างกันคือ การแบ่งกลุ่มของลูกบอลไปยังช่องที่สอดคล้องกับสีต่าง ๆ ดังนั้นเราสามารถมองได้ว่าแต่ละวิธีนั้นเป็นการเรียงลำดับของลูกบอล 3 ลูก และ เส้นแบ่งระหว่างช่องทั้ง 5 (ซึ่งมีจำนวนเท่ากับ 5 – 1 = 4 เส้น) หรือ หากเราแทนเส้นแบ่งด้วยตัวเลข 1 และลูกบอลด้วยตัวเลข 0 ปัญหาการนับวิธีที่เป็นไปได้ทั้งหมดในที่นี้ก็ตรงกับการนับจำนวนสายบิตความยาว 7 หลัก (จำนวนรวมของลูกบอลและเส้นแบ่ง) ที่เป็นไปได้ทั้งหมด โดยมีตัวเลข 0 อยู่ 3 หลัก (จำนวนลูกบอล) และ มีตัวเลข 1 อยู่ 4 หลัก (จำนวนเส้นแบ่ง) รูปที่ 11 แสดงวิธีการมองการเรียงลำดับตัวเลขในสายบิตดังกล่าว



รูปที่ 11 การแสดงผลการหยิบลูกบอล 3 ลูกจากกล่องที่มีลูกบอล 5 สี โดยสายบิตความยาว 7 หลัก

สายบิตที่ต้องการในที่นี้อาจจะสามารถสร้างได้โดยเลือกตำแหน่งของตัวเลข 0 ทั้ง 3 ตัวจากตำแหน่งที่เป็นไปได้ทั้งหมด 7 ตำแหน่ง ส่วนอีก 4 ตำแหน่งที่เหลือจะต้องเป็นตำแหน่งของเลข 0 ดังนั้นจำนวนสายบิตทั้งหมดคือ C(7, 3) ซึ่งก็เป็นจำนวนวิธีที่เป็นไปได้ทั้งหมด ในการสุ่มหยิบลูกบอลจำนวน 3 ลูกออกมาจากกล่องที่มีลูกบอลอยู่ 5 สีเช่นกัน

จากตัวอย่างข้างต้น เราสามารถสรุปสูตรสำหรับจำนวนการจัดหมู่ r ตัว จากเซตที่มีสมาชิก n ตัวซึ่งยอมให้มีการซ้ำกันของสมาชิกในการจัดหมู่ได้ ดังนี้

จำนวนการจัดหมู่ r ตัว จากเซตที่มีสมาชิก n ตัวซึ่งยอมให้มีการซ้ำกันได้ เท่ากับ C(r + (n-1), r) หรือ C(r + (n-1), n-1)

การพิสูจน์สูตรข้างต้นสามารถทำได้เช่นเดียวกับวิธีทำใน

ตัวอย่างที่ 18 โดยสมมติให้ r คือจำนวนลูกบอลที่เลือก และ n คือ จำนวนประเภทของลูกบอล ผู้อ่านควรลอง ดัดแปลงการบรรยายในวิธีทำของ

ตัวอย่างที่ 18 เพื่อพิสูจน์สูตรของจำนวนการจัดหมู่ r ตัว จากเซตที่มีสมาชิก n ตัวซึ่งยอมให้มีการซ้ำกันได้ ด้วยตนเอง

ตัวอย่างที่ 19

ร้านเบเกอรีร้านหนึ่งมีโปรโมชันแบบเหมาจ่าย โดยให้ลูกค้าสามารถเลือกซื้อขนมปังชนิดต่างๆ ในร้านได้ในราคาเดียวคือ 4 ชิ้น 100 บาท ไม่จำกัดจำนวนชิ้นและชนิดของขนมปัง ร้านเบเกอรีนี้มีขนมปังอยู่ 20 ชนิด จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการเลือกซื้อขนมปังในร้านนี้ด้วยเงิน 100 บาท โดยกำหนดว่าขนมปังทุกชิ้นที่เป็นชนิดเดียวกันนั้นไม่มีความแตกต่างกัน และ ขนมปังแต่ละชนิดมีจำนวนไม่จำกัด

จำนวนวิธีในการเลือกขนมปัง 4 ชิ้น จาก 20 ประเภท ก็คือ จำนวนการจัดหมู่ 4 ตัวแบบยอมให้มีสมาชิกซ้ำกันได้ โดยเลือกจากเซตที่มีสมาชิก 20 ตัว ดังนั้นจำนวนดังกล่าวคือ $C(4 + (20 - 1), 4) = C(23, 4)$ วิธี

ตัวอย่างที่ 20

ในการชิงโชคครั้งหนึ่ง การจับรางวัลกระทำโดยการจับคูปองที่ผู้เข้าร่วมการชิงโชคนำมาหย่อนไว้ในกล่อง ในขณะที่แจกรางวัลประเภทหนึ่งซึ่งมีอยู่ด้วยกัน 5 รางวัล (เหมือนกันหมด) ปรากฏว่ามีผู้เข้าร่วมหย่อนคูปองเพียง 10 คน ซึ่งใน 10 คนนี้ มีอยู่ 2 คนซึ่งแต่ละคนหย่อนคูปองเพียงใบเดียว ส่วนอีก 8 คนนั้นหย่อนคูปองคนละมากกว่า 5 ใบ หากการจับทั้ง 5 รางวัลนี้ทำในคราวเดียว และ อนุญาตให้แต่ละคนสามารถรับรางวัลประเภทนี้มากกว่า 1 รางวัลได้ จงหาจำนวนผลการจับรางวัลที่เป็นไปได้ทั้งหมด

สมมติให้บุคคลที่หย่อนคูปองเพียงคนละใบคือ A และ B เนื่องจากจำนวนรางวัลที่ A และ B แต่ละคนจะได้นั้นไม่เกิน 1 รางวัล ส่วนคนที่เหลือนั้นแต่ละคนสามารถได้รับรางวัลได้มากที่สุดทั้ง 5 รางวัล ดังนั้นเราสามารถแบ่งผลการจับรางวัลตามการได้รับรางวัลของ A และ B ได้เป็น 4 กรณีคือ

กรณีที่ 1: ทั้ง A และ B ไม่ได้รางวัลเลย

กรณีที่ 2: A ได้รางวัล 1 รางวัล ขณะที่ B ไม่ได้

กรณีที่ 3: B ได้รางวัล 1 รางวัล ขณะที่ A ไม่ได้

กรณีที่ 4: ทั้ง A และ B ได้คนละ 1 รางวัล

ในกรณีที่ 1 ทั้ง A และ B ไม่ได้รางวัลเลย ดังนั้นผลการจับรางวัลจะมาจากการเลือกคูปอง 5 ใบ ($r = 5$) จากคูปองของคน 8 คน ($n = 8$) ดังนั้นจำนวนผลที่แตกต่างกันคือ $C(5 + (8-1), 5) = C(12, 5)$

ในกรณีที่ 2 A ได้รับรางวัล ในขณะที่ B ไม่ได้รางวัลเลย ดังนั้นผลการจับรางวัลจะมาจากการได้คูปอง 1 ใบซึ่งเป็นของ A (1 วิธี) และการเลือกคูปองอีก 4 ใบ ($r = 4$) จากคูปองของคน 8 คน ($n = 8$) ดังนั้นจำนวนผลที่แตกต่างกันคือ $1 \times C(4 + (8-1), 4) = C(11, 4)$

ในกรณีที่ 3 B ได้รับรางวัล ในขณะที่ A ไม่ได้รับ ดังนั้นผลการจับรางวัลจะมาจากการได้คูปอง 1 ใบซึ่งเป็นของ B (1 วิธี) และการเลือกคูปองอีก 4 ใบ ($r = 4$) จากคูปองของคน 8 คน ($n = 8$) ดังนั้นจำนวนผลที่แตกต่างกันจะเท่ากับในกรณีที่ 2 คือ $1 \times C(4 + (8-1), 4) = C(11, 4)$

ในกรณีที่ 4 ทั้ง A และ B ได้รับรางวัล ดังนั้นคูปอง 2 ใบจะต้องได้มาจากของ A และ B (1 วิธี) ส่วนคูปองอีก 3 ใบที่เหลือ ($r = 3$) ต้องเลือกมาจากคูปองของคน 8 คน ($n = 8$) ดังนั้นจำนวนผลที่แตกต่างกัน คือ $1 \times C(3 + (8-1), 3) = C(10, 3)$

จากกฎการบวก เมื่อเรารวมกรณีทั้งหมดเข้าด้วยกันจะได้ว่า จำนวนผลการจับรางวัลทั้งหมดเท่ากับ $C(12,5) + 2C(11,4) + C(10,3)$ วิธี

ตัวอย่างที่ 21

จงหาจำนวนค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ (x, y, z) ภายใต้ข้อจำกัดว่า $x + y + z = 10$ โดยที่ r เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ x, y, และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ติดลบ

หากให้ x, y และ z เป็นสิ่งของ 3 ประเภท เราสามารถมองได้ว่า ค่าของ x, y, และ z ที่แตกต่างกันภายใต้ข้อจำกัด $x + y + z = r$ ก็คือ ผลการเลือกสิ่งของออกมา r ชิ้น จากทั้ง 3 ประเภทนี้ โดยแต่ละประเภทมีจำนวนให้เลือกมากเพียงพอ (มากกว่าหรือเท่ากับ r) เนื่องจากค่าของ x, y, และ z จะต้องรวมกันเป็น r ซึ่ง

สอดคล้องกับการที่จำนวนของสิ่งของที่ถูกเลือกทั้งสามประเภทจะต้องเป็น r ดังนั้นจำนวนค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ (x, y, z) ในที่นี้คือ C(r + (3-1), r) = C(r+2, r) = (r+2)(r+1)/2 แบบ

ตัวอย่างที่ 22

จงหาจำนวนค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ (x, y, z) ภายใต้ข้อจำกัดว่า x + y + z = 10 โดยที่ x, y, และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ติดลบ และ $x \geq 2$

x, y, และ z จะต้องรวมกันเป็น 10 พอดี ดังนั้นเราสามารถมองได้ว่าค่าของ x, y และ z ก็คือจำนวนสิ่งของ 3 ประเภท ที่ถูกเลือกขึ้นมาในการเลือกสิ่งของ 10 ชิ้น แต่ x จะต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 2 ดังนั้น ใน 10 ชิ้นนั้นจะต้องเป็นของประเภท x แน่ ๆ แล้ว 2 ชิ้น ส่วนอีก 8 ชิ้นนั้นได้มาจากการเลือกเพิ่มเติมขึ้นมาจากของสิ่งของทั้งสามประเภท ดังนั้นจำนวนค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ (x, y, z) ในที่นี้คือ C(8 + (3-1), 8) = C(10, 8) แบบ

ตัวอย่างที่ 23

จงหาค่าของตัวแปร k หลังจากการวนซ้ำในรหัสเทียม (Pseudocode) ต่อไปนี้เสร็จสิ้น กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกจำนวนหนึ่ง

```
k := 0
for i1 = 1 to n
     for i2 = 1 to i1
            for i3 = 1 to i2
                   :
                   for im = 1 to im-1
                          k := k + 1
```

จากรหัสเทียมข้างต้น ค่าของตัวแปร k หลังจากการวนซ้ำนั้น จะเท่ากับจำนวนครั้งที่ข้อความสั่ง (Statement) ที่เพิ่มค่า k ถูกกระทำการ ในแต่ละครั้งที่ข้อความสั่งดังกล่าวถูกกระทำการ ค่าของ $(i_1, i_2, .., i_m)$ จะเปลี่ยนไปเรื่อย ๆ จากครั้งแรกคือ (0, 0, 0, ..., 0) ไปจนถึง (n, n, n, .., n) ผ่านทุก ๆ ค่าที่เป็นไปได้ โดยมีเงื่อนไขว่า $1 \leq i_m \leq i_{m-1} \leq ... \leq i_2 \leq i_1 \leq n$ ดังนั้นการหาค่าของ k ก็คือ การหาค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ $(i_1, i_2, .., i_m)$ ภายใต้เงื่อนไขที่กล่าวมา

หากเราเลือกตัวเลข m ตัว $a_1, a_2, ..., a_m\text{-}1, a_m$ จากเซตของจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง n โดยยอมให้มีการซ้ำได้เพื่อเป็นค่าของ i_k ต่าง ๆ โดยที่ $a_m \leq a_{m-1} \leq ... \leq a_2 \leq a_1$ เราจะได้ว่าค่า a_k จะต้องถูกใช้เป็นค่าของ i_k โดยอัตโนมัติ นั่นคือ จำนวนค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ $(i_1, i_2, .., i_m)$ ภายใต้เงื่อนไขในที่นี้คือ จำนวนวิธีในการเลือกตัวเลข m ตัวจากเซตที่มีสมาชิก n ตัวโดยยอมให้มีการซ้ำได้ ซึ่งมีค่าเท่ากับ C(m+(n-1), m) ดังนั้นค่าของ k หลังจากเสร็จสิ้นการกระทำการของรหัสเทียมข้างต้นก็คือ C(m+(n-1), m)

การใช้การนับเพื่อพิสูจน์ทฤษฎีบท

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท หรือ สมบัติบางอย่าง เราอาจจะสามารถให้เหตุผลโดยการใช้เทคนิคที่ใช้ในการแก้ปัญหาการนับมาประกอบการพิสูจน์ได้ ยกตัวอย่างเช่น หากเราต้องการพิสูจน์นิพจน์สองนิพจน์ที่เท่ากัน หากเราสามารถแสดงว่านิพจน์ทั้งสองนั้นเป็นคำตอบของปัญหาการนับเดียวกัน เราก็สามารถพิสูจน์ได้ว่านิพจน์ทั้งสองนั้นเท่ากันจริง การพิสูจน์เช่นนี้ เรียกว่า *การพิสูจน์เชิงการจัด* (Combinatorial Proof)

ตัวอย่างที่ 24

จงแสดงว่า C(n, r) เท่ากับ C(n, n-r) เสมอ เมื่อ n และ r เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \geq r$ โดยใช้การพิสูจน์เชิงการจัด

(1) หากเรามีเซต S เซตหนึ่งที่มีสมาชิกทั้งหมด n ตัว เราสามารถบอกได้ว่า C(n, r) เป็นจำนวนเซตย่อยของ S ที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยเซตย่อยแต่ละเซตนั้นมีสมาชิก r ตัว

(2) ในการสร้างเซตย่อย A ของ S แต่ละแบบ เมื่อเราเลือกสมาชิก r ตัวออกมาจาก S เพื่อเป็นสมาชิกของเซตย่อย A นั้น จะมีสมาชิกของ S อีก n-r ตัวซึ่งไม่ได้ถูกเลือก เราสามารถสร้างเซต B จากสมาชิกทั้ง n-r ตัว ที่ไม่ได้ถูกเลือกนี้ ดังนั้น B จะเป็นเซตย่อยที่มีสมาชิก n-r ตัวของ S

(3) เนื่องจากการสร้างเซต A แต่ละแบบจะได้เซต B ที่แตกต่างกันออกไป และ ไม่มีเซตย่อยที่มีขนาด n-r ตัว ของ S เซตใดเลยที่ไม่สามารถเกิดจากวิธีการใน (2) ดังนั้นจำนวนเซตย่อยของ S ที่มีสมาชิก r ตัวจะเท่ากับจำนวนเซตย่อยของ S ที่มีสมาชิก n-r ตัวเสมอ

(4) จำนวนเซตย่อยของ S ที่มีสมาชิก เท่ากับ C(n, n-r)

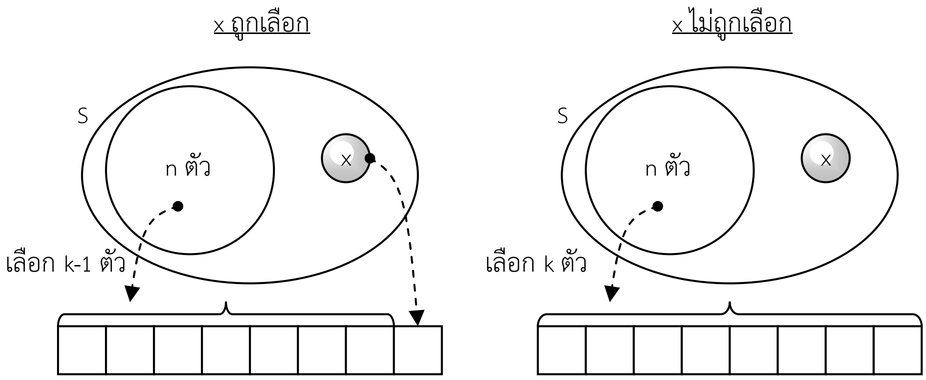
(5) จาก (3) และ (4) เราสรุปได้ว่า C(n, r) = C(n, n-r)

ตัวอย่างที่ 25

จงแสดงว่า C(n+1, k) = C(n, k-1) + C(n, k) โดยวิธีการพิสูจน์เชิงการจัด เมื่อ n และ k เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n \geq k$

(1) ให้ S เป็นเซตที่มีสมาชิก n+1 ตัว C(n+1, k) คือ จำนวนวิธีในการเลือกสมาชิก k ตัวออกมาจาก S

(2) สมมติให้สมาชิกตัวหนึ่งของ S คือ x จำนวนวิธีในการเลือกสมาชิก k ตัวออกมาจาก S สามารถแบ่งได้เป็นสองกรณีที่ไม่ทับซ้อนกันคือ กรณีที่หนึ่ง x เป็นหนึ่งในสมาชิก k ตัวที่ถูกเลือก และ กรณีที่สอง x ไม่ได้เป็นหนึ่งในสมาชิก k ตัวที่ถูกเลือก พิจารณารูปที่ 12



รูปที่ 12 การเลือกสมาชิก k ตัวจากทั้งหมด n+1 ตัวในกรณีที่ x ถูกเลือกและไม่ถูกเลือก

(3) ให้ n_1 เป็นจำนวนวิธีในกรณีที่หนึ่ง หลังจากเลือก x เป็นหนึ่งในสมาชิก k ตัวที่ถูกเลือกแล้ว จำนวนวิธีในการเลือกอีก k-1 ตัวจาก n ตัว (สมาชิกทั้งหมด n+1 ตัว หัก x ออกไปหนึ่งตัว เหลือ n ตัว) คือ C(n, k-1) ดังนั้น n_1 = C(n, k-1)

(4) ให้ n_2 เป็นจำนวนวิธีในกรณีที่สอง ถ้า x ไม่ได้เป็นหนึ่งในสมาชิก k ตัวที่ถูกเลือก เราจำเป็นจะต้องเลือกทั้ง k ตัวมาจากสมาชิก n ตัวที่เหลือ ดังนั้นจำนวนวิธีในกรณีนี้คือ n_2 = C(n, k)

(5) จากกฎการบวก จำนวนวิธีในการเลือกสมาชิก k ตัวออกมาจาก S หรือ C(n+1, k) จึงเท่ากับ C(n, k-1) + C(n, k)

เอกลักษณ์ที่ได้รับการพิสูจน์ใน ตัวอย่างที่ 25 ข้างต้นนี้เรียกว่า *เอกลักษณ์ของปาสกาล* (Pascal's Identity)

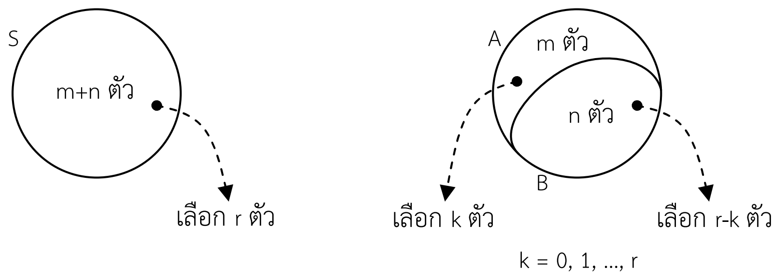
ตัวอย่างที่ 26

จงแสดงว่า C(m+n, r) = $\sum_{k=0}^{r}$C(m, r-k)C(n, k) โดยวิธีการพิสูจน์เชิงการจัด เมื่อ m, n, และ r เป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบ และ ค่าของ r ไม่เกินค่าของ m และ n

(1) ให้ S เป็นเซตที่มีสมาชิก m+n ตัว C(m+n, r) คือ จำนวนวิธีในการเลือกสมาชิก r ตัวออกมาจาก S

(2) สมมติให้ S แบ่งออกเป็นสองส่วน คือ A และ B โดยที่ A มีสมาชิก m ตัว และ B มีสมาชิก n ตัว การได้มาซึ่งสมาชิก r ตัวสามารถแบ่งออกเป็นกรณีต่าง ๆ คือ ตามจำนวนสมาชิกที่เลือกมาจากแต่ละเซต ในแต่ละกรณีหากเราให้ k เป็นจำนวนสมาชิกที่ถูกเลือกมาจาก A เราจะได้ว่าจะต้องเลือกสมาชิกอีก r-k ตัวออกมาจาก B เพื่อให้สมาชิกที่ถูกเลือกรวมเป็น r ตัวตามต้องการ ในแต่ละกรณีของ k จะมีวิธีในการเลือกได้ C(m, r-k)C(n, k) เมื่อแจกแจงกรณีทั้งหมดค่าของ r จะเป็นจำนวนเต็มได้ตั้งแต่ 0 (เลือกทั้ง r ตัวจาก B) จนถึง r (เลือกทั้ง r ตัวจาก A) พิจารณารูปที่ 13

(3) จากกฎการบวก C(m+n, r) จะเท่ากับผลรวมจากกรณีทั้งหมดใน (2) นั่นคือ $\sum_{k=0}^{r}$ C(m, r-k)C(n, k) นั่นเอง



รูปที่ 13 การเลือกสมาชิก r ตัวจากทั้งหมด m+n ตัว

สัมประสิทธิ์และทฤษฎีบททวินาม

จำนวนการจัดหมู่ C(n, r) นั้น มีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า *สัมประสิทธิ์ทวินาม* (Binomial Coefficient) เนื่องจาก C(n, r) ที่ค่า r ต่าง ๆ นั้นสอดคล้องกับสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่าง ๆ ของ *การกระจายทวินาม* (Binomial Expansion) $(x+y)^n$ เพื่อให้เห็นตัวอย่างชัดเจน ลองพิจารณาการกระจาย $(x+y)^3$ ดังต่อไปนี้

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y)$$

หากเราทำการคูณทั้งสามวงเล็บเข้าด้วยกัน โดยแสดงแต่ละพจน์ที่ได้โดยการเขียนเรียงลำดับพจน์ที่ได้มาจากวงเล็บที่หนึ่งตามด้วยพจน์จากวงเล็บที่สองและตามด้วยพจน์จากวงเล็บสุดท้าย เราจะเขียนได้ว่า

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y) = xxx + xxy + xyx + yxx + xyy + yxy + yyx + yyy$$

เนื่องจาก x จากทั้งสามวงเล็บนั้นเหมือนกัน เช่นเดียวกับ y จากทั้งสามวงเล็บ เราจึงสามารถรวมพจน์ที่มีจำนวน x และ y เท่ากันเข้าด้วยกันได้ นั่นคือ

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

พิจารณาสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ทางด้านขวาของสมการข้างบน เราจะเห็นว่า สัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์เท่ากับจำนวนความเป็นไปได้ในการสร้างพจน์เหล่านั้นให้มีจำนวนของ x และ จำนวนของ y ที่สอดคล้องกับพจน์เหล่านั้น

นั่นคือ สัมประสิทธิ์ของ x^3 คือ 1 เนื่องจากการได้มาซึ่งผลคูณของ x สามพจน์นั้นมีเพียงหนึ่งวิธีคือ ต้องใช้พจน์ x จากทุกวงเล็บ สัมประสิทธิ์ของ x^2y คือ 3 ซึ่งก็คือจำนวนความเป็นไปได้ทั้งหมดของการคูณจากทั้งสามวงเล็บ โดยใช้พจน์ x จากสองวงเล็บและพจน์ y จากที่เหลือ หรือ จำนวนความเป็นไปได้ในการเลือกสิ่งของ 2 สิ่งออกมาจากจำนวนทั้งหมด 3 สิ่ง ซึ่งตามนิยามแล้วก็คือ C(3, 2) นั่นเอง ในทำนองเดียวกัน สัมประสิทธิ์ของ xy^2 คือ 3 และสุดท้าย เนื่องจากการได้มาซึ่งผลคูณของ y สามพจน์นั้นมีเพียงหนึ่งวิธีคือ ต้องใช้พจน์ y จากทุกวงเล็บ นั่นคือมีเพียง C(3, 3) วิธี (หรือ C(3, 0) วิธีหากมองว่าเป็นการไม่เลือก x จากวงเล็บใดเลย)

จากข้อสังเกตข้างต้นนี้เราสามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทได้คือ

ทฤษฎีบททวินาม

ให้ x และ y เป็นจำนวนใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{n-k}y^k$$

$$= C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1}y + C(n,2)x^{n-2}y^2 + \ldots + C(n,n-1)xy^{n-1} + C(n,n)y^n$$

เราสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบททวินามได้โดยใช้วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

พิสูจน์

(1) ให้ P(n) แทนทฤษฎีบททวินามสำหรับ $(x+y)^n$

(2) P(1) คือ $(x+y)^1 = C(1, 0)x + C(1, 1)y = x + y$ ซึ่งเป็นจริง

(3) สมมติให้ P(n) เป็นจริงสำหรับ n ซึ่งเป็นจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ขึ้นไป นั่นคือ

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{n-k}y^k$$

(4) $(x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y)$ ดังนั้นจาก (3) เราได้ว่า $(x+y)^n (x+y)$ เขียนได้เป็น

$$= \left[\sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{n-k}y^k\right] \times (x+y)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{n-k+1}y^k + \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{n-k}y^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{n-k+1}y^k + \sum_{m=1}^{n+1} C(n,m-1)x^{n-m+1}y^m$$

$$= C(n,0)x^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\left[C(n,i)x^{n-i+1}y^i + C(n,i-1)x^{n-i+1}y^i\right] + c(n,n)y^{n+1}$$

$$= C(n,0)x^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\left[(C(n,i) + C(n,i-1))x^{n-i+1}y^i\right] + c(n,n)y^{n+1}$$

(5) เนื่องจาก C(n, i) + C(n, i – 1) = C(n+1, i) ตามเอกลักษณ์ของปาสกาล ดังนั้นผลจาก (4) สามารถเขียนได้ว่า

$$(x+y)^{n+1} = C(n,0)x^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\left[C(n+1,i)x^{n-i+1}y^{i}\right] + c(n,n)y^{n+1}$$

(6) และ เนื่องจาก C(n, 0) = 1 = C(n+1, 0) และ C(n, n) = 1 = C(n+1, n+1) เราสามารถแทน C(n, 0) และ C(n, n) ใน (5) ด้วย C(n+1, 0) และ C(n+1, n+1) ตามลำดับ นั่นคือ เราจะได้ว่า

$$(x+y)^{n+1} = C(n+1,0)x^{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\left[C(n+1,i)x^{n-i+1}y^{i}\right] + c(n+1,n+1)y^{n+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1}\left[C(n+1,k)x^{n+1-k}y^{k}\right]$$

(7) จาก (6) เราได้พิสูจน์ว่า P(n) → P(n+1) เป็นจริงสำหรับ n = 1, 2, 3, … ในขณะเดียวกันเราได้แสดงใน (2) ว่า P(1) เป็นจริง ดังนั้นจากอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เราสรุปได้ว่า P(n) ซึ่งแทนทฤษฎีบททวินาม เป็นจริงสำหรับ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

เรามักใช้ทฤษฎีทบทวินามในการหาค่าสัมประสิทธิ์ของการกระจายทวินาม โดยที่มิต้องทำการคูณพจน์ต่าง ๆ เข้าด้วยกันโดยตรง ดังตัวอย่างต่าง ๆ ข้างล่างนี้

ตัวอย่างที่ 27

จงหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ $a^{25}b^{25}$ ของการกระจาย $(a+b)^{50}$

การได้มาซึ่งพจน์ที่มีการคูณกันของ a จำนวน 25 พจน์และ b อีก 25 พจน์ เกิดจากการเลือก a มา 25 พจน์จากพจน์ (a+b) ที่คูณกันอยู่ทั้งหมด 50 พจน์ และ เลือก b มา 25 พจน์จากพจน์ (a+b) ที่เหลือ 25 พจน์ ซึ่งวิธีทั้งหมดในการเลือกดังกล่าวคือ C(50, 25) × C(25, 25) หรือ C(50, 25) ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของพจน์ $a^{25}b^{25}$ ของการกระจาย $(a+b)^{50}$ คือ C(50, 25)

ตัวอย่างที่ 28

จงหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ $a^{12}b^{38}$ ของการกระจาย $(2a+3b)^{50}$

จำนวนวิธีในการเลือก a จำนวน 12 พจน์จาก (2a+3b) ที่คูณกันอยู่ 50 พจน์ คือ C(50, 12) ส่วนจำนวนวิธีในการเลือก b จำนวน 38 พจน์จาก (2a+3b) ที่เหลือ 38 พจน์คือ C(38, 38) หรือเพียงวิธีเดียว ดังนั้นจำนวนวิธีในการได้มาซึ่งพจน์ $a^{12}b^{38}$ คือ C(50, 12) วิธี อย่างไรก็ตามสัมประสิทธิ์ของพจน์ $a^{12}b^{38}$ ในแต่ละวิธีคือ $2^{12}3^{38}$ ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของผลรวมจากทุกวิธีคือ $2^{12}3^{38}$ × C(50, 12)

ตัวอย่างที่ 29

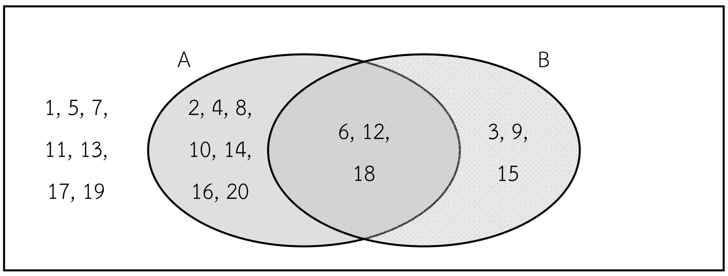
จงหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ $a^{91}b^{9}$ ของการกระจาย $(a - b)^{100}$

เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของ b ก่อนการกระจายคือ -1 ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของพจน์ $a^{91}b^{9}$ ในแต่ละวิธีคือ $(-1)^{9}$ ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของผลรวมจากทุกวิธีคือ –C(100, 91)

หลักการการเพิ่มเข้า-ตัดออก

จากที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นเกี่ยวกับการแก้ปัญหาการนับโดยการแบ่งกรณีว่า หากเราสามารถแบ่งกรณีของสิ่งที่เราต้องการจะนับตามเงื่อนไขบางอย่างแล้วทำให้กรณีเหล่านั้นไม่ซ้อนทับกัน หรือ อาจกล่าวได้ว่าหากแบ่งเป็นกรณีต่าง ๆ แล้วแต่ละสิ่งที่เรานับนั้นจะสอดคล้องกับกรณีเพียงกรณีเดียวเท่านั้น เราสามารถใช้กฎการบวกเพื่อรวมจำนวนสิ่งที่เราจะนับในกรณีต่าง ๆ เข้าด้วยกันได้ อย่างไรก็ตามหากกรณีต่าง ๆ ที่เราเลือกใช้นั้นซ้อนทับกัน การรวมผลการนับในกรณีต่าง ๆ เข้าด้วยกันนั้นต้องคำนึงว่า ไม่มีบางสิ่งที่เราจะนับนั้นถูกรวมจนมีจำนวนที่เกินความเป็นจริง ยกตัวอย่างเช่น หากเราต้องการนับจำนวนตัวเลขจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 20 ที่หารด้วย 2 หรือ 3 ลงตัว เราอาจจะแบ่งกรณีออกเป็นสองกรณีคือ ตัวเลขที่หารด้วย 2 ลงตัว ซึ่งมีทั้งหมด $\lfloor 20/2 \rfloor = 10$ จำนวน ได้แก่ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 และ 20 และ ตัวเลขที่หารด้วย 3 ลงตัว ซึ่งมีทั้งหมด $\lfloor 20/3 \rfloor = 6$ จำนวน ได้แก่ 3, 6, 9, 12, 15 และ 18 จะเห็นว่ามีอยู่ 3 จำนวน คือ 6, 12, และ 18 ซึ่งอยู่ในทั้งสองกรณี ดังนั้นหากต้องการนับจำนวนทั้งหมดของทั้งสองเงื่อนไข เราจึงต้องนับ 6, 12, และ 18 จากเพียงกรณีเดียว หรือ หักทั้งสามจำนวนออกจากผลรวมของจำนวนสมาชิกของทั้งสองกรณี นั่นคือ จำนวนตัวเลขจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 20 ที่หารด้วย 2 หรือ 3 ลงตัว เท่ากับ $10 + 6 - 3 = 13$ จำนวน

หากเราแสดงการแบ่งกรณีข้างต้นด้วยเซต โดยให้เอกภพของเราคือ เซตของเลขจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 20 ให้ A เป็นเซตของจำนวนที่หารด้วย 2 ลงตัว ให้ B เป็นเซตของจำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว เราจะได้ว่าจำนวนตัวเลขที่เราต้องการจะนับนั้นก็คือ $|A\cup B|$ พิจารณาแผนภาพเวนน์ในรูปที่ 14 เราจะบอกได้ว่า $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$ ซึ่งผลลัพธ์ก็คือ 13 จำนวน



รูปที่ 14 แผนภาพเวนน์สำหรับจำนวนตั้งแต่ 1 ถึง 20 ที่หารด้วย 2 (สมาชิกของ A) หรือ 3 (สมาชิกของ B) ลงตัว

ลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ สำหรับสูตรของการหาจำนวนสมาชิกของยูเนียนของ 3 เซต

ตัวอย่างที่ 30

จงแสดงว่าสำหรับเซต A, B, และ C ใด ๆ $|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$

(1) สมมติให้ $A\cup B\cup C$ มีสมาชิก k ตัว หรือ $|A\cup B\cup C| = k$

(2) ความเป็นสมาชิกที่เป็นไปได้ทั้งหมดหากเราพิจารณาเซต A, B, และ C สามารถเป็นได้ดังตารางข้างล่างนี้ โดยที่ 1 แสดงการเป็นสมาชิกของเซตที่สอดคล้องกับคอลัมน์นั้น ในขณะที่ 0 แสดงการไม่เป็นสมาชิกของเซตดังกล่าว เช่น กรณีที่ 1 ในตารางหมายถึงสมาชิกที่มิได้เป็นสมาชิกของทั้งสามเซตเลย กรณีที่ 2 หมายถึงสมาชิกที่เป็นสมาชิกของเซต A เท่านั้น และ กรณีที่ 8 หมายถึงสมาชิกที่เป็นสมาชิกของทั้งเซต A เซต B และ เซต C เป็นต้น ให้สังเกตว่าสมาชิกตัวหนึ่ง ๆ ในเอกภพของเราจะตกอยู่ในกรณีใดกรณีหนึ่งใน 8 กรณีนี้เท่านั้น

	A	B	C
กรณีที่ 1	0	0	0
กรณีที่ 2	1	0	0
กรณีที่ 3	0	1	0
กรณีที่ 4	0	0	1
กรณีที่ 5	1	1	0
กรณีที่ 6	1	0	1
กรณีที่ 7	0	1	1
กรณีที่ 8	1	1	1

ตารางที่ 1 ตารางแสดงความเป็นสมาชิกของเซต 3 เซต

(3) สมาชิกตัวใดที่มีความเป็นสมาชิกตามตารางที่ 1 อยู่ในกรณีที่ 1 จะไม่เป็นสมาชิกของ $A \cup B \cup C$ ดังนั้นเราจะต้องแสดงว่า สมาชิกตัวใด ๆ ในกรณีที่ 1 นี้ หากมีสมาชิกตัวนั้น ๆ เพียงตัวเดียวแล้ว ผลรวมของพจน์ทางขวามือจะต้องเป็น 0 นั่นคือ สมาชิกตัวนั้น ๆ ไม่ได้ถูกนับรวมเข้าไปใน $|A \cup B \cup C|$ ด้วยการคำนวณพจน์ $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

หากมีสมาชิกตัวดังกล่าว เพียงตัวเดียวแล้ว $|A| = |B| = |C| = |A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = |A \cap B \cap C| = 0$
ดังนั้น $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 0$ จริง

(4) สมาชิกในเอกภพที่เราสนใจนี้จะถูกนับเป็นหนึ่งในสมาชิกของ $A \cup B \cup C$ เมื่อสมาชิกตัวนั้นอยู่ในกรณีที่ 2 ถึงกรณีที่ 7 กรณีใดกรณีหนึ่ง ดังนั้นเราจะต้องแสดงว่า หากมีสมาชิกตัวนั้น ๆ เพียงตัวเดียวแล้ว ผลรวมของพจน์ทางขวามือจะต้องเป็น 1 นั่นคือ สมาชิกตัวนั้น ๆ ไม่ว่าจะมีความเป็นสมาชิกในกรณีใด จะถูกนับใน $|A \cup B \cup C|$ เพียงหนเดียวเท่านั้นในการคำนวณพจน์ $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

พิจารณาตารางแสดงความเป็นสมาชิกข้างล่างนี้

	A	B	C	$A \cap B$	$A \cap C$	$B \cap C$	$A \cap B \cap C$	ค่าของ $\lvert A\rvert+\lvert B\rvert+\lvert C\rvert-\lvert A \cap B\rvert-\lvert A \cap C\rvert-\lvert B \cap C\rvert+\lvert A \cap B \cap C\rvert$
กรณีที่ 2	1	0	0	0	0	0	0	1+0+0-0-0-0+0 = 1
กรณีที่ 3	0	1	0	0	0	0	0	0+1+0-0-0-0+0 = 1
กรณีที่ 4	0	0	1	0	0	0	0	0+0+1-0-0-0+0 = 1
กรณีที่ 5	1	1	0	1	0	0	0	1+1+0-1-0-0+0 = 1
กรณีที่ 6	1	0	1	0	1	0	0	1+0+1-0-1-0+0 = 1
กรณีที่ 7	0	1	1	0	0	1	0	0+1+1-0-0-1+0 = 1
กรณีที่ 8	1	1	1	1	1	1	1	1+1+1-1-1-1+1 = 1

ตารางที่ 2 ตารางแสดงความเป็นสมาชิกของเซตที่เกี่ยวข้อง และ ค่าของ $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$ ในแต่ละกรณี

จากตารางที่ 1ตารางที่ 2 จะเห็นว่าสมาชิกแต่ละตัวในกรณีที่ 2 ถึงกรณีที่ 7 นั้น จะทำให้ผลลัพธ์ของการคำนวณ |A| + |B| + |C| – |A⋂B| – |A⋂C| – |B⋂C| + |A⋂B⋂C| เป็น 1 เสมอ

(5) จากผลใน (3) และ (4) จะเห็นว่าเมื่อเรารวมผลลัพธ์ของการคำนวณ |A| + |B| + |C| – |A⋂B| – |A⋂C| – |B⋂C| + |A⋂B⋂C| ของสมาชิกทุกตัวจากทั้ง 8 กรณีเข้าด้วยกัน ผลลัพธ์ที่ได้ก็คือ จำนวนสมาชิกทั้งหมดที่อยู่ในกรณีที่ 2 ถึง 7 ซึ่งก็คือ |A⋃B⋃C| นั่นเอง

สูตรสำหรับการคำนวณจำนวนสมาชิกของยูเนียนของเซต

หลักการการเพิ่มเข้า-ตัดออก (Inclusion-Exclusion Principle) กล่าวถึงสูตรของกรณีทั่วไปของการหาจำนวนสมาชิกของยูเนียนของเซตจำนวน n เซต เมื่อ n เป็นเลขจำนวนเต็มบวก ซึ่งสูตรดังกล่าวสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n\right| = \sum_{i_1}\left|A_{i_1}\right| - \sum_{\substack{i_1, i_2,\\ i_1 \neq i_2}}\left|A_{i_1} \cap A_{i_2}\right| + \ldots + (-1)^n \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_n,\\ i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_n}}\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n}\right|$$

โดยที่ $i_k = 1, 2, \ldots, n$ และ $k = 1, 2, \ldots, n$

เอกลักษณ์ทั้งสองข้างล่างนี้แสดงตัวอย่างการประยุกต์ใช้หลักการการเพิ่มเข้า-ตัดออก กับยูเนียนของเซตจำนวน 3 และ 4 เซต

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup A_3\right| = \left|A_1\right| + \left|A_2\right| + \left|A_3\right| - \left|A_1 \cap A_2\right| - \left|A_1 \cap A_3\right| - \left|A_2 \cap A_3\right| + \left|A_1 \cap A_2 \cap A_3\right|$$

$$\begin{aligned}
&\left|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4\right| \\
&= \left|A_1\right| + \left|A_2\right| + \left|A_3\right| + \left|A_4\right| \\
&- \left|A_1 \cap A_2\right| - \left|A_1 \cap A_3\right| - \left|A_1 \cap A_4\right| - \left|A_2 \cap A_3\right| - \left|A_2 \cap A_4\right| - \left|A_3 \cap A_4\right| \\
&+ \left|A_1 \cap A_2 \cap A_3\right| + \left|A_1 \cap A_2 \cap A_4\right| + \left|A_1 \cap A_3 \cap A_4\right| + \left|A_2 \cap A_3 \cap A_4\right| \\
&- \left|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\right|
\end{aligned}$$

การพิสูจน์สูตรการหาจำนวนสมาชิกของยูเนียนในหลักการการเพิ่มเข้า-ตัดออกนี้ สามารถทำได้ในทำนองเดียวกันกับในตัวอย่างที่ 30 โดยแสดงว่าสมาชิกแต่ละตัวหากเป็นสมาชิกของ $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$ แล้ว สมาชิกตัวนั้นจะทำให้ผลลัพธ์จากการคำนวณพจน์ทางด้านขวาของหลักการการเพิ่มเข้า-ตัดออกเป็น 1 ส่วนสมาชิกที่มิได้เป็นสมาชิกของ $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$ จะทำให้ผลลัพธ์จากการคำนวณพจน์ทางด้านขวาของหลักการการเพิ่มเข้า-ตัดออกเป็น 0

การพิสูจน์ดังกล่าวสามารถทำได้ดังนี้

(1) พิจารณาสมาชิก x ตัวหนึ่ง ให้สมาชิก x ตัวนี้เป็นสมาชิกของเซตที่เราสนใจจำนวน r เซตพอดี (จากทั้งหมด n เซต ซึ่งก็คือ $A_1, A_2, \ldots, A_n$) โดยที่ r มีค่าเป็นจำนวนเต็มได้ตั้งแต่ 0 ถึง n

(2) เรียกเซต A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) ต่าง ๆ จำนวน r เซตเฉพาะที่มี x เป็นสมาชิกนี้ว่า $B_1, B_2, .., B_r$ และเซตที่เหลือ n-r เซตที่ไม่มี x เป็นสมาชิกว่า $B_{r+1}, B_{r+2}, .., B_n$

(3) หาก r เท่ากับ 0 นั่นคือ x ไม่ได้เป็นสมาชิกของเซตใดเลย ดังนั้นผลลัพธ์ของพจน์ทางขวาของสูตรเป็น 0 แน่นอน หาก r ไม่เท่ากับ 0 เราจะแสดงว่าผลลัพธ์ของพจน์ทางด้านขวาของสูตรจะเป็น 1 เสมอ

(4) พิจารณาพจน์ $\sum_{i_1}\left|A_{i_1}\right|$ เมื่อเรามองเฉพาะสมาชิก x ตัวนี้ เนื่องจาก x เป็นสมาชิกของเซตจำนวน r เซต พจน์ดังกล่าวซึ่งเป็นผลบวกของพจน์ย่อย n พจน์ จะมีพจน์ที่มีค่าเท่ากับ 1 จำนวน r พจน์ ซึ่งก็คือพจน์ที่ตรงกับเซต $B_1, B_2, .., B_r$ ส่วนที่เหลือ n-r พจน์จะมีค่าเป็น 0 หรืออาจกล่าวได้ว่าสมาชิก x ตัวนี้จะทำให้ $\sum_{i_1}\left|A_{i_1}\right|$ มีค่าเท่ากับ C(r, 1) ซึ่ง C(r, 1) นี้ได้มาจากการมองว่าเรามีวิธีในการเลือกเซตทีละเซตมาจาก เซต r เซตที่มี x ตัวนี้เป็นสมาชิกได้ C(r, 1) แบบ

(5) ต่อไปลองพิจารณาพจน์ $\sum_{\substack{i_1,i_2,\\ i_1\neq i_2}}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\right|$ สำหรับ x ตัวนี้ พจน์นี้เป็นผลรวมของพจน์ย่อยที่เป็นจำนวนสมาชิก (พิจารณาเฉพาะ x ตัวเดียว) ของอินเตอร์เซกชันของเซตสองเซตจำนวนทั้งหมด C(n, 2) พจน์ จำนวนสมาชิกของอินเตอร์เซกชันเหล่านี้จะมีค่าเป็น 1 เมื่อทั้งสองเซตที่มาอินเตอร์เซกกันนั้นจะต้องมี x เป็นสมาชิกทั้งคู่ มิฉะนั้นจะมีค่าเป็น 0 ดังนั้นจากพจน์ย่อย C(n, 2) พจน์นี้จะมีอยู่ C(r, 2) ซึ่งมีค่าเป็น 1 เนื่องจาก C(r, 2) เป็นจำนวนวิธีที่เป็นไปได้ทั้งหมด ในการเลือกเซต 2 เซตออกมาจาก $B_1, B_2, .., B_r$

(6) ในทำนองเดียวกับ (4) และ (5) เราสามารถบอกได้ว่าพจน์ $\sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_m,\\ i_1\neq i_2\neq\ldots\neq i_m}}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_m}\right|$ ต่าง ๆ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวกที่ไม่เกิน r แต่ละพจน์จะมีค่าเท่ากับ C(r, m) เมื่อพิจารณาเฉพาะ x ตัวเดียว

(7) หาก r มีค่าน้อยกว่า n (นั่นคือ x มิได้เป็นสมาชิกของทั้ง n เซต) พจน์ทางขวามือของสูตรที่เป็นผลรวมของจำนวนสมาชิกของอินเตอร์เซกชันกันของเซตจำนวนตั้งแต่ r+1 เซต จนถึง n เซตนั้น จะมีค่าเป็น 0 ทั้งหมด เนื่องจาก x เป็นสมาชิกของ r เซต จึงเป็นไปไม่ได้ที่อินเตอร์เซกชันของเซตจำนวนมากกว่า r เซตจะมี x เป็นสมาชิก หาก r เท่ากับ n ทุกพจน์ทางขวามือของสูตรจะสามารถถูกคำนวณได้ตาม (6)

(8) จาก (6) และ (7) เราจะได้ว่า

$$\sum_{i_1}\left|A_{i_1}\right|-\sum_{\substack{i_1,i_2,\\ i_1\neq i_2}}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\right|+\ldots+(-1)^n\sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_n,\\ i_1\neq i_2\neq\ldots\neq i_n}}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_n}\right|$$

$$=C(r,1)-C(r,2)+C(r,3)-\ldots+(-1)^r C(r,r)$$

(9) จากทฤษฎีบททวินามเราบอกได้ว่า

$$(1+(-1))^r=C(r,0)+C(r,1)(-1)+C(r,2)(-1)^2+\ldots+C(r,r)(-1)^r$$

ดังนั้น

$$0=C(r,0)-C(r,1)+C(r,2)+\ldots+(-1)^r C(r,r)$$

หรือ

$$C(r,1)+C(r,2)+\ldots+(-1)^r C(r,r)=C(r,0)=1$$

(10) จาก (8) และ (9) เราได้แสดงว่า สำหรับสมาชิก x ใด ๆ ที่เป็นสมาชิกของ $A_1, A_2, \ldots A_n$ อย่างน้อย 1 เซต ผลลัพธ์ทางขวามือของสูตรการคำนวนจำนวนสมาชิกของยูเนียนของเซตทั้ง n เซตนั้นในหลักการการเพิ่มเข้า-ตัดออก จะมีค่าเท่ากับ 1 เสมอ ดังนั้นเมื่อพิจารณาผลรวมที่เกิดจาก x ที่เป็นไปได้ทุก ๆ ตัว ผลลัพธ์ที่ได้จะเท่ากับจำนวน x เหล่านั้น หรือ ก็คือจำนวนสมาชิกของ $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$ นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 31

ในการสำรวจความสามารถในการใช้ระบบปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ของกลุ่มตัวอย่างกลุ่มหนึ่ง ผู้สำรวจให้บุคคลในกลุ่มตัวอย่างแต่ละคนกรอกแบบสอบถามซึ่งให้ระบุความสามารถในการใช้ระบบปฏิบัติการ 4 ระบบคือ ระบบ A, B, C และ D ผู้ทำการสำรวจสรุปผลเป็นข้อ ๆ ดังนี้

- ผู้ที่มีความสามารถในการใช้ระบบ A คิดเป็นร้อยละ 40 เช่นเดียวกับระบบ B ในขณะที่ผู้ที่มีความสามารถในการใช้ระบบ C มีมากที่สุด คิดเป็นร้อยละ 45 ส่วนระบบ D มีผู้ที่มีความสามารถในการใช้เพียงร้อยละ 30
- ผู้ที่มีความสามารถในการใช้ระบบปฏิบัติการได้อย่างน้อยสองระบบจากทั้ง 4 ระบบนี้ คิดเป็นร้อยละ 20 ในแต่ละคู่ของระบบที่เป็นไปได้ ทุกๆ คู่ (เช่น ร้อยละ 20 สามารถใช้ทั้งระบบ A และ B เป็นต้น)
- หากพิจารณากลุ่มของระบบปฏิบัติการทีละ 3 ระบบ ผู้ที่มีความสามารถในการใช้ระบบปฏิบัติการได้ทั้งกลุ่มคิดเป็นร้อยละ 15 ในแต่ละกล่มที่เป็นไปได้ทั้งหมด (เช่น ร้อยละ 15 สามารถใช้ทั้งระบบ A, B และ C เป็นต้น)
- ร้อยละ 22 ของกลุ่มตัวอย่าง ไม่สามารถใช้ระบบปฏิบัติการใดๆ ได้เลย

ให้พิจารณาความน่าเชื่อถือของผลการสำรวจเหล่านี้

เซต A, B, C และ D เป็นเซตที่มีสมาชิกเป็นบุคคลในกลุ่มตัวอย่างที่สามารถใช้ระบบปฏิบัติการ A, B, C และ D ได้ตามลำดับ หากคิดว่าร้อยละ 1 ของบุคคลในกลุ่มตัวอย่างคือสมาชิกหนึ่งตัวในเอกภพ จากผลการสำรวจที่รายงานเราแสดงได้ว่า

$|A| = |B| = 40, |C| = 45, |D| = 30$

$|A\cap B| = |A\cap C| = |A\cap D| = |B\cap C| = |B\cap D| = |C\cap D| = 20$

$|A\cap B\cap C| = |A\cap B\cap D| = |A\cap C\cap D| = |B\cap C\cap D| = 15$

$|(A\cup B\cup C\cup D)'| = 22$ หรือ $|A\cup B\cup C\cup D| = 100 - 22 = 78$

จากหลักการเพิ่มเข้า-ตัดออกสำหรับยูเนียนของเซต 4 เซต เราเขียนได้ว่า

$$|A\cup B\cup C\cup D| = |A|+|B|+|C|+|D| - (|A\cap B|+|A\cap C|+|A\cap D|+|B\cap C|+|B\cap D|+|C\cap D|)$$
$$+ (|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|+|B\cap C\cap D|) - |A\cap B\cap C\cap D|$$

แทนค่าจากผลการสำรวจ

$78 = 40+40+45+30 - (20+20+20+20+20+20) + (15+15+15+15) - |A\cap B\cap C\cap D|$

$78 = 155 - 120 + 60 - |A\cap B\cap C\cap D|$

หากผลเชื่อถือได้ เราจะบอกได้ว่า

$|A\cap B\cap C\cap D| = 17$

อย่างไรก็ตาม $|A\cap B\cap C\cap D|$ จะต้องมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ $|A\cap B\cap C|$, $|A\cap B\cap D|$, $|A\cap C\cap D|$ และ $|B\cap C\cap D|$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 15 ดังนั้น $|A\cap B\cap C\cap D|$ จึงไม่สามารถมีค่าเท่ากับ 17 ดังนั้นเราจะสรุปได้ว่ารายงานผลการสำรวจดังกล่าวไม่น่าเชื่อถือ ด้วยเหตุผลความไม่สอดคล้องกันของจำนวนสมาชิกในเซตต่างๆ ดังกล่าว

ตัวอย่างที่ 32

จงใช้หลักการการเพิ่มเข้า-ตัดออกเพื่อหาจำนวนวิธีการแบ่งสิ่งของ 10 ชิ้นที่แตกต่างกัน ลงในกล่องที่แตกต่างกันทั้งหมด 3 กล่อง โดยที่มีกล่องว่างอย่างน้อยหนึ่งกล่อง

เอกภพที่เราสนใจในที่นี้ประกอบด้วยวิธีทั้งหมดในการแบ่งสิ่งของ 10 ชิ้นที่แตกต่างกันลงในกล่องทั้ง 5 ดังกล่าว ให้ A_i เป็นเซตของวิธีการแบ่งสิ่งของซึ่งไม่มีสิ่งของถูกใส่ลงในกล่องที่ i โดยที่ i = 1, 2, หรือ 3 ดังนั้นสิ่งที่เราต้องการจะหาคือ $|A_1\cup A_2\cup A_3|$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^{10}$ เนื่องจากกล่องหนึ่งจะต้องว่าง ดังนั้นจึงมีเพียงสองกล่องเท่านั้นที่สามารถมีสิ่งของได้ ดังนั้นมี 2 วิธีในการเลือกใส่สิ่งของแต่ละชิ้นลงในกล่อง จากกฎการคูณจำนวนวิธีทั้งหมดจึงมี 2^{10} วิธีสำหรับของ 10 ชิ้น

$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1$ เนื่องจากกล่องสองกล่องจะต้องว่าง ดังนั้นของทั้ง 10 ชิ้นจึงจะต้องอยู่ในกล่องที่เหลือเพียงวิธีเดียว

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$ เนื่องจากเป็นไปไม่ได้ที่กล่องทั้งสามจะว่างทั้งหมด

ดังนั้น $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 3\times 2^{10} - 3 = 3(2^{10} - 1)$ วิธี

การประยุกต์หลักการการเพิ่มเข้า-ตัดออกเพื่อการนับจำนวน

ในการนับจำนวนสิ่งของต่าง ๆ สิ่งของที่เราสนใจเหล่านั้นอาจจะมีสมบัติที่แตกต่างกัน โดยที่สิ่งของแต่ละชิ้นนั้นอาจจะมีสมบัติเพียงอย่างเดียว มีสมบัติหลายอย่างพร้อมกัน หรือ ไม่มีสมบัติใดเลย เช่น หากเราสนใจที่จะนับจำนวนเต็ม การหารด้วยเลขที่กำหนดเลขหนึ่งลงตัว หรือ การเป็นจำนวนที่อยู่ในช่วงช่วงหนึ่งที่กำหนด ก็เป็นสมบัติของจำนวนเต็มแต่ละตัวเหล่านั้น สมมติว่าเรากำหนดสมบัติที่เกี่ยวข้องจำนวน n อย่าง และเรียกสมบัติแต่ละอย่างว่า P_i โดยที่ i = 1, 2, … , n หากเรากำหนดอีกว่าสิ่งของชิ้นใดมีสมบัติ P_i สิ่งของชิ้นนั้นจะต้องเป็นสมาชิกของเซต A_i เราสามารถใช้สูตรของการหาจำนวนสมาชิกของยูเนียนของเซตโดยหลักการการเพิ่มเข้า-ตัดออก ดังกล่าว เพื่อนำมานับจำนวนสิ่งของที่มีสมบัติอย่างใดอย่างหนึ่ง อย่างน้อยหนึ่งอย่าง ได้อย่างเป็นระบบ

หากเราต้องการนับจำนวนสิ่งของที่มีสมบัติทุกอย่างพร้อม ๆ กัน เราจะต้องหาจำนวนสมาชิกของเซตที่เป็นอินเตอร์เซกชันของเซตต่าง ๆ ที่ตรงกับสมบัติเหล่านั้น หากเราต้องการใช้ประโยชน์จากสูตรการหาจำนวนสมาชิกของยูเนียนของเซตโดยหลักการการเพิ่มเข้า-ตัดออก ในกรณีเช่นนี้เรามักจะสมมติเซตต่าง ๆ ที่จะใช้ในสูตรขึ้นมาโดยที่สมาชิกของแต่ละเซตเป็นสิ่งของที่มีสมบัติตรงข้ามกับสมบัติแต่ละอย่างที่เราต้องการ ยกตัวอย่างเช่น หากเราต้องการนับจำนวนสิ่งของซึ่งมีสมบัติ Q_i สำหรับ i ทั้งหมด n อย่าง โดย i = 1, 2, … , n ให้ B_i เป็นเซตซึ่งสมาชิกของเซต B_i ใด ๆ มี

สมบัติ Q_i ดังนั้นสิ่งของที่เราต้องการนับคือ สมาชิกของ $B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n$ จากการปฏิบัติการของเซต ให้ U เป็นเอกภพของสิ่งของทั้งหมด เราสามารถบอกได้ว่า

$$|B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n| = |((B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n)')'| = |((B_1)' \cup (B_2)' \cup ... \cup (B_n)')'| = |U| - |(B_1)' \cup (B_2)' \cup ... \cup (B_n)'|$$

หากเราให้เซต A_i เท่ากับ $(B_i)'$ ตามนิยามแล้วสิ่งของที่ไม่มีสมบัติ Q_i สำหรับแต่ละค่าของ i ก็จะเป็นสมาชิกของเซต A_i และ หากเรานิยามสิ่งของที่ไม่มีสมบัติ Q_i ว่าเป็นสิ่งของที่มีสมบัติ P_i เราจะได้ว่า จำนวนสิ่งของที่มีสมบัติ Q_i ทั้งหมดทุกค่า i คือ

$$|B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n| = |U| - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n|$$

โดยที่ |U| คือ จำนวนสิ่งของทั้งหมด และ $|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n|$ โดยที่ A_i คือเซตของสมาชิกที่มีสมบัติ P_i (หรือสมบัติที่ตรงข้ามกับ Q_i) ซึ่งค่าของ $|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n|$ สามารถหาได้จากสูตรการหาจำนวนสมาชิกของยูเนียนของเซต

เพื่อให้ง่ายในการเขียน เราจะกำหนดสัญกรใหม่สำหรับพจน์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับสูตรการหาจำนวนสมาชิกของยูเนียนของเซต ดังนี้

ให้ $N(P_1'P_2'... P_n')$ แทนจำนวนสมาชิกที่ไม่มีสมบัติใด ๆ ตั้งแต่ P_1 ถึง P_n เลย นั่นคือ

$$N(P_1'P_2'... P_n') = |U| - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n|$$

และ

$$N(P_1'P_2'...P_n') = N - (\sum_{i_1} N(P_i) - \sum_{i_1 i_2} N(P_{i_1}P_{i_2}) + ... + (-1)^n \sum_{i_1 i_2 ... i_n} N(P_{i_1}P_{i_2}...P_{i_n}))$$

$$N(P_1'P_2'...P_n') = N - \sum_{i_1} N(P_i) + \sum_{i_1 i_2} N(P_{i_1}P_{i_2}) - ... + (-1)^{n+1} \sum_{i_1 i_2 ... i_n} N(P_{i_1}P_{i_2}...P_{i_n}))$$

โดยที่ N คือจำนวนสมาชิกทั้งหมดในเอกภพ และ $N(P_1P_2... P_r)$ คือ จำนวนสมาชิกที่มีสมบัติ $P_1, P_2, .., P_r$ เมื่อ $r \leq n$ หรือ เท่ากับ $| A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_r |$

สังเกตว่าสูตรของ $N(P_1'P_2'... P_n')$ มิได้มีอะไรที่เพิ่มเติมขึ้นมาจากหลักการเพิ่มเข้า-ตัดออกที่เรากล่าวถึงมาก่อนหน้านี้ สูตรนี้เป็นเพียงการเขียนสิ่งเดิมในสัญกรใหม่เท่านั้น

ตัวอย่างที่ 33

จงหาจำนวนคำตอบที่เป็นไปได้ทั้งหมดของสมการ x + y + z = 12 เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบ โดยที่ $x \leq 5$, $y \leq 6$ และ $z \leq 10$

ให้เอกภพที่เราสนใจในที่นี้ประกอบด้วยคำตอบทั้งหมด ที่ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบ กำหนดสมบัติต่างๆ ของคำตอบให้ตรงกันข้ามกับสิ่งที่เราต้องการ เนื่องจากเราต้องการใช้สูตรการหาจำนวนสมาชิกของยูเนียนเพื่อหาจำนวนสมาชิกที่มีสมบัติต่าง ๆ พร้อมกันทั้งหมด

นั่นคือกำหนดให้ P_1 คือสมบัติของคำตอบซึ่ง $x \geq 6$

P_2 คือสมบัติของคำตอบซึ่ง $y \geq 7$

P_3 คือสมบัติของคำตอบซึ่ง $z \geq 11$

ดังนั้นสิ่งที่เราต้องการนับคือ $N(P_1'P_2'P_3')$ จำนวนคำตอบซึ่งค่า x มีค่าไม่เกิน 5 ค่า y มีค่าไม่เกิน 6 และค่า z มีค่าไม่เกิน 10

คำนวณหาพจน์ต่างๆ ที่จำเป็น

N จำนวนคำตอบทั้งหมดมีค่าเท่ากับ $C(12 + (3 - 1), 12) = C(14, 12)$

$N(P_1)$ จำนวนคำตอบซึ่ง $x \geq 6$ มีค่าเท่ากับ $C(6 + (3 - 1), 6) = C(8, 6)$

$N(P_2)$ จำนวนคำตอบซึ่ง $y \geq 7$ มีค่าเท่ากับ $C(5 + (3 - 1), 5) = C(7, 5)$

$N(P_3)$ จำนวนคำตอบซึ่ง $z \geq 11$ มีค่าเท่ากับ $C(1 + (3 - 1), 1) = C(3, 1)$

$N(P_1 P_2)$ จำนวนคำตอบซึ่ง $x \geq 6$ และ $y \geq 7$ มี 0 วิธี เนื่องจากลำพัง $x + y$ ก็ต้องมีค่าอย่างน้อย 13 แล้ว เช่นเดียวกับ $N(P_1 P_3)$, $N(P_2 P_3)$ และ $N(P_1 P_2 P_3)$ ซึ่งมีค่าเป็น 0 ทั้งหมด

ดังนั้น $N(P_1'P_2'P_3') = C(14, 12) - (C(8, 6)+ C(7, 5)+ C(3, 1))$

ตัวอย่างที่ 34

โครงการหนึ่งมีสมาชิกโครงการอยู่ 3 คน ในโครงการนี้มีงานอยู่ 7 อย่าง จงหาจำนวนวิธีในการมอบหมายงานทั้ง 7 อย่างนี้ให้กับสมาชิกทั้ง 3 คน โดยที่แต่ละคนจะต้องได้รับมอบหมายงานอย่างน้อย 7 อย่าง

ให้เอกภพที่เราสนใจในที่นี้ประกอบด้วยวิธีการมอบหมายงาน 7 อย่างให้กับสมาชิก 3 คน กำหนดให้ P_i คือสมบัติของวิธีการมอบหมายซึ่งสมาชิกคนที่ i ไม่ได้รับมอบหมายงานใดเลย ($i = 1, 2, 3$) ดังนั้นสิ่งที่เราต้องการนับคือ $N(P_1'P_2'P_3')$ จำนวนวิธีมอบหมายซึ่งไม่มีสมบัติ P_i ใด ๆ เลย ซึ่งก็คือวิธีมอบหมายงายซึ่งสมาชิกทั้ง 3 คนต้องได้รับมอบหมายงานอย่างน้อยหนึ่งอย่างนั่นเอง

คำนวณหาพจน์ต่างๆ ที่จำเป็น

$N = 3^7$ เนื่องจากงานแต่ละอย่างจาก 7 อย่างสามารถมอบหมายได้ 3 แบบ

$N(P_1) = N(P_2) = N(P_3) = 2^7$ เนื่องจากงานแต่ละอย่างจาก 7 อย่างในแต่ละกรณีสามารถมอบหมายให้คนได้แค่ 2 คน

$N(P_1 P_2) = N(P_1P_3) = N(P_2P_3) = 1$ เนื่องจากในแต่ละกรณีนั้นไม่สามารถมอบหมายงานให้คนสองคนได้ จึงเหลือเพียงการมอบหมายงานทั้งหมดให้คน ๆ เดียวเพียงวิธีเดียว

ดังนั้น $N(P_1'P_2'P_3') = 3^7 - 2^7 - 2^7 - 2^7 + 1 = 3^7 - 3\times2^7 + 1$ วิธี

ตัวอย่างที่ 35

จงหาสูตรคำนวณจำนวนฟังก์ชัน 1 ต่อ 1 จากเซตที่มีสมาชิก m ตัว ไปยังเซตที่มีสมาชิก n ตัว

เอกภพในที่นี้คือเซตของฟังก์ชันที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากเซตที่มีสมาชิก m ตัว ไปยังเซตที่มีสมาชิก n ตัว ดังนั้นจำนวนสมาชิกทั้งหมดในเอกภพคือ $N = n^m$

กำหนดให้ P_i คือสมบัติของฟังก์ชันซึ่งสมาชิกตัวที่ i ($i = 1, 2, \ldots , n$) ของโคโดเมน (Codomain) มิได้ถูกใช้เป็นภาพ (Image) ของสมาชิกตัวใดของโดเมน (Domain) เลย หรืออีกนัยหนึ่งคือ สมาชิกตัวที่ i นั้นมิได้อยู่ในเรนจ์ (Range) ของฟังก์ชัน ดังนั้นฟังก์ชันที่มีสมบัติ 1 ต่อ 1 จะต้องเป็นฟังก์ชันซึ่งไม่มีสมบัติ P_i ใด ๆ เหล่านี้เลย นั่นคือ จำนวนฟังก์ชัน 1 ต่อ 1 ในที่นี้คือ $N(P_1'P_2'\ldots P_n')$

จากสูตร

$$N(P_1'P_2'...P_n') = N - \sum_{i_1} N(P_{i_1}) + \sum_{i_1 i_2} N(P_{i_1}P_{i_2}) - ... + (-1)^{n+1} \sum_{i_1 i_2 ... i_n} N(P_{i_1}P_{i_2}...P_{i_n}))$$

คำนวณพจน์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องดังนี้

$N(P_i)$ ซึ่งก็คือ จำนวนฟังก์ชันซึ่งมีสมาชิกตัวหนึ่ง (ตัวที่ i) มิได้อยู่ในเรนจ์ของฟังก์ชัน มีค่าเท่ากับ $(n-1)^m$ เนื่องจาก สมาชิกแต่ละตัวในโดเมนสามารถเลือกภาพในโคโดเมนได้ n – 1 แบบ (ทุกตัว ยกเว้นตัวที่ i) และค่าของ $\sum_{i_1} N(P_{i_1})$ เท่ากับ $C(n, 1)(n-1)^m$ เนื่องจากมี P_{i_1} ทั้งหมด n สมบัติ

จำนวนพจน์ในผลรวม $\sum_{i_1 i_2} N(P_{i_1}P_{i_2})$ มีทั้งหมด C(n, 2) พจน์ ซึ่งก็คือจำนวนการจัดหมู่ที่มี 2 สมบัติ จากสมบัติทั้งหมด n อย่าง $N(P_{i_1}P_{i_2})$ แต่ละตัวก็คือจำนวนฟังก์ชันซึ่งสมาชิกสองตัว (ตัวที่ i_1 และ ตัวที่ i_2) ในโคโดเมนมิได้อยู่ในเรนจ์ ดังนั้น $N(P_{i_1}P_{i_2})$ แต่ละพจน์จะมีค่าเท่ากับ $(n-2)^m$ เราจะได้ว่า $\sum_{i_1 i_2} N(P_{i_1}P_{i_2})$ มีค่าเท่ากับ $C(n, 2)(n-2)^m$

หากเราพิจารณาผลรวม $\sum_{i_1 i_2 ... i_r} N(P_{i_1}P_{i_2}...P_{i_r}))$ โดยที่ $r \le n$ เราสามารถบอกได้ในทำนองเดียวกันว่าผลรวมนี้มีทั้งหมด C(n, r) พจน์ และแต่ละพจน์ $N(P_{i_1}P_{i_2}...P_{i_r})$ มีค่าเท่ากับ $(n-r)^m$ เนื่องจากเป็นจำนวนฟังก์ชันซึ่งสมาชิกของโคโดเมนจำนวน r ตัวไม่สามารถอยู่ในเรนจ์ของฟังก์ชันได้ ดังนั้น $\sum_{i_1 i_2 ... i_r} N(P_{i_1}P_{i_2}...P_{i_r}))$ มีค่าเท่ากับ $C(n, r)(n-r)^m$

จากการคำนวณพจน์ต่าง ๆ ข้างต้น เราจะได้ว่า

$N(P_1'P_2'...P_n') = n^m - C(n, 1)(n-1)^m + ... + (-1)^n C(n, n-1)(n-(n-1))^m$

ดีเรนจ์เมนท์

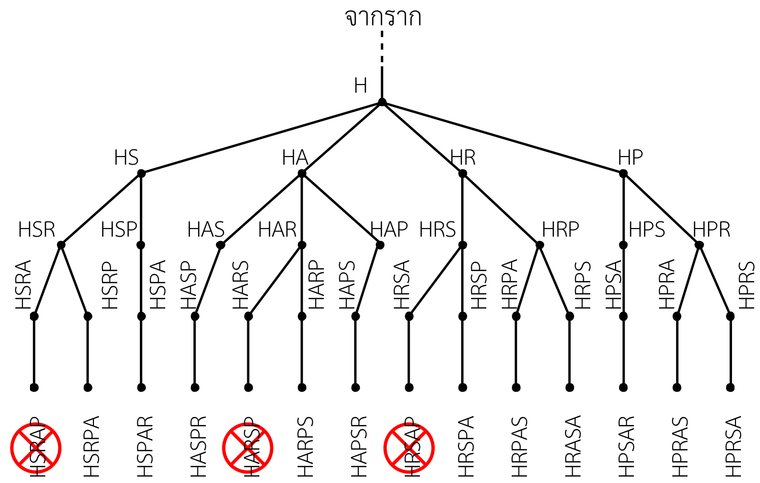
ดีเรนจ์เมนท์ (Derangement) ของลำดับ S ลำดับหนึ่ง คือ การเรียงลำดับ (Permutation) ที่ใช้สมาชิกทั้งหมดของ S โดยที่ไม่มีสมาชิกของ S ตัวใดเลยอยู่ในลำดับตั้งต้นของมัน

ยกตัวอย่างเช่น หาก S เป็นลำดับของตัวเลข 12345 เราจะกล่าวได้ว่า 54213 เป็นดีเรนจ์เมนท์แบบหนึ่งของ S ในขณะที่ 32514 ก็เป็นดีเรนจ์เมนท์อีกแบบหนึ่งของ S เช่นกัน เนื่องจากทั้งสองลำดับเป็นการเรียงลำดับสมาชิกของ S โดยที่ไม่มีตัวเลขใดอยู่ในตำแหน่งตั้งต้นของมันเลย

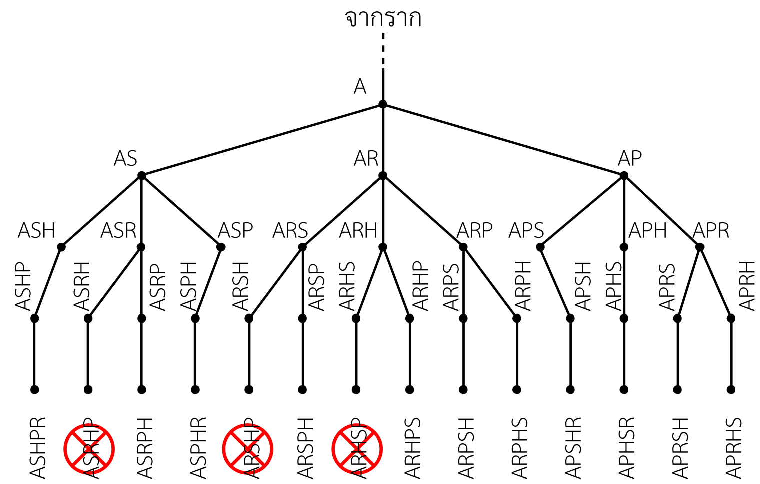
ตัวอย่างที่ 36

จงแสดงดีเรนจ์เมนท์ทั้งหมดของสายอักขระ SHARP

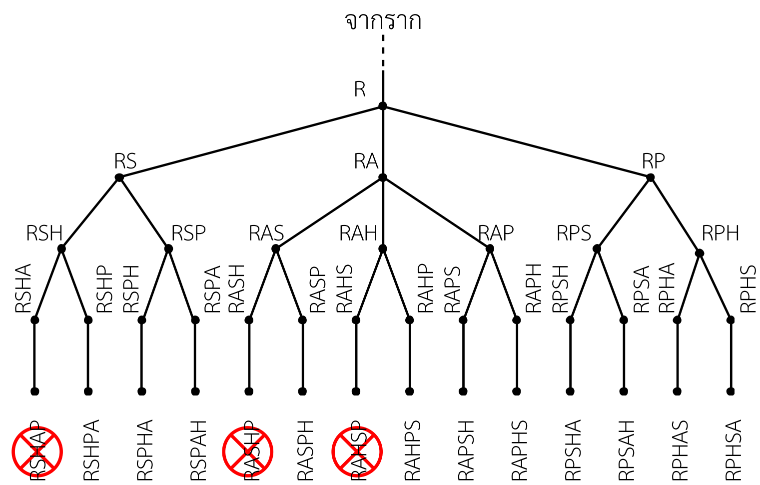
สร้างแผนภูมิต้นไม้ที่สอดคล้องกับการสร้างสายอักขระโดยการเลือกอักขระจากตำแหน่งที่ 1 ไปจนตำแหน่งสุดท้าย ตามเงื่อนไขของดีเรนจ์เมนท์ โดยให้จุดยอดในระดับที่ i แทนการเลือกอักขระตำแหน่งที่ i (i = 1, 2, 3, 4, 5) เราจะได้แผนภูมิต้นไม้ดังรูปที่ 15 ถึงรูปที่ 18



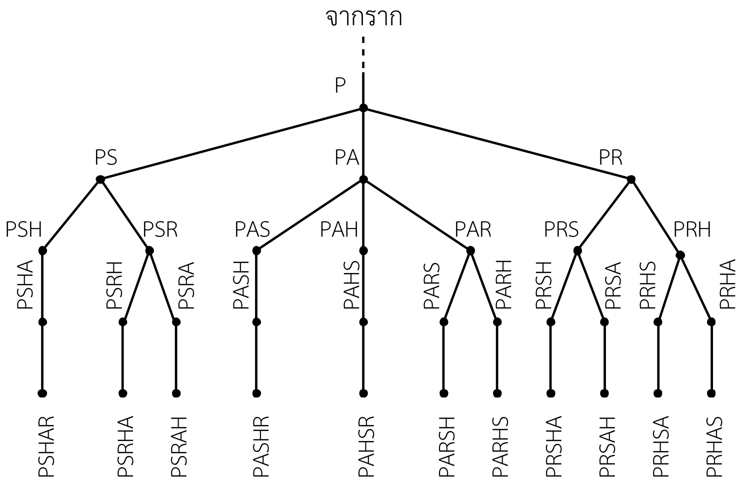
รูปที่ 15 แผนภูมิต้นไม้ของการสร้างดีเรนจ์เมนท์ต่างๆ ของสายอักขระ SHARP ที่ขึ้นต้นด้วย H



รูปที่ 16 แผนภูมิต้นไม้ของการสร้างดีเรนจ์เมนท์ต่างๆ ของสายอักขระ SHARP ที่ขึ้นต้นด้วย A



รูปที่ 17 แผนภูมิต้นไม้ของการสร้างดีเรนจ์เมนท์ต่างๆ ของสายอักขระ SHARP ที่ขึ้นต้นด้วย R



รูปที่ 18 แผนภูมิต้นไม้ของการสร้างดีเรนจ์เมนท์ต่างๆ ของสายอักขระ SHARP ที่ขึ้นต้นด้วย P

ดังนั้นรายการจำนวนสายอักขระที่สอดคล้องตามเงื่อนไขจากแผนภูมิต้นไม้ข้างต้น ได้แก่ { HSRPA, HSPAR, HASPR, HARPS, HAPSR, HRSPA, HRPAS, HRPSA, HPSAR, HPRSA, HPRAS, ASHPR, ASRPH, ASPHR, ARSPH, ARHPS, ARPSH, ARPHS, APSHR, APHSR, APRSH, APRHS, RSHPA, RSPHA, RSPAH, RASPH, RAHPS, RAPSH, RAPHS, RPSHA, RPSAH, RPHAS, RPHSA, PSHAR, PSRHA, PSRAH, PASHR, PAHSR, PARSH, PARHS, PRSHA, PRSAH, PRHSA, PRHAS } รวมทั้งสิ้น 44 สายอักขระ

เซตของดีเรนจ์เมนต์ทั้งหมดจะเป็นเซตย่อยของเซตของการเรียงลำดับทั้งหมด จำนวนของดีเรนจ์เมนท์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของลำดับที่มีสมาชิก n ตัว D_n สามารถคำนวณได้จากสูตรต่อไปนี้

$$D_n = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right]$$

การพิสูจน์สูตรของดีเรนจ์เมนท์สามารถทำได้โดยใช้การประยุกต์ของหลักการการเพิ่มเข้า-ตัดออก ดังนี้
ให้ S เป็นลำดับที่มีสมาชิก n ตัว ให้เอกภพประกอบด้วยการเรียงลำดับทุก ๆ วิธีของสมาชิกทั้ง n ตัวของ S กำหนดสมบัติ P_i คือ สมบัติของการเรียงลำดับที่สมาชิกตัวที่ i อยู่ในตำแหน่งเดียวกับตำแหน่งตั้งต้น ดังนั้น D_n ก็คือจำนวนการเรียงลำดับที่ไม่มีสมบัติ P_i ใด ๆ เลย โดย i = 1, 2, …, n หรือ $N(P_1'P_2'\ldots P_n')$
จากสูตรที่ได้จากหลักการการเพิ่มเข้า-ตัดออก $N(P_1'P_2'\ldots P_n')$ สามารถหาจาก

$$N(P_1'P_2'\ldots P_n') = N - \sum_{i_1} N(P_{i_1}) + \sum_{i_1 i_2} N(P_{i_1}P_{i_2}) - \ldots + (-1)^{n+1} \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} N(P_{i_1}P_{i_2}\ldots P_{i_n}))$$

จำนวนสมาชิกทั้งหมดในเอกภพ N คือ จำนวนการเรียงลำดับ n ตัว ซึ่งมีค่าเท่ากับ n!
พจน์ $\sum_{i_1 i_2 \ldots i_r} N(P_{i_1}P_{i_2}\ldots P_{i_r}))$ ใด ๆ เมื่อ r = 1, 2, …, n เป็นผลรวมของจำนวนการเรียงลำดับซึ่งสมาชิกจำนวน r ตัวจาก n ตัวอยู่ในตำแหน่งเดียวกับตำแหน่งตั้งต้น ค่าของ $N(P_{i_1}P_{i_2}\ldots P_{i_r})$ สำหรับ $i_1, i_2, \ldots, i_r$ ชุดหนึ่ง ๆ มีค่าเท่ากับ (n – r)! เนื่องจากการเรียงลำดับ n ตัวแต่ละวิธีในกรณีนี้จะมีสมาชิก r ตัวจะต้องอยู่ในตำแหน่งตั้งต้น เราจึงสามารถเลือกตำแหน่งให้กับสมาชิกเพียง n – r ตัวเท่านั้น และจำนวนความเป็นไปได้ในการจัดหมู่ $i_1, i_2, \ldots, i_r$ มีทั้งหมด C(n, r) แบบ

เนื่องจากค่าของ i ต่าง ๆ สามารถเลือกมาได้จากเลขจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง n ดังนั้นพจน์ $\sum_{i_1 i_2 \ldots i_r} N(P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_r})$ จะมีค่าเท่ากับ C(n, r) × (n – r)!

เนื่องจาก C(n, r) = n!/(r!)(n – r)! ดังนั้น $\sum_{i_1 i_2 \ldots i_r} N(P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_r}) = C(n,r) \times (n-r)! = \frac{n!(n-r)!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!}$

แทนค่าที่ได้จาก (4) และค่า N = n! ลงในสูตรใน (2) เราจะได้ว่า

$$N(P_1' P_2' \ldots P_n') = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!} = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right]$$

ตัวอย่างที่ 37

จงหาจำนวนสายอักขระที่แตกต่างกัน อันเกิดจากการสลับที่อักษร 5 ตัวที่ไม่ซ้ำกัน โดยที่หลังจากสลับแล้วไม่มีอักษรใดเลยอยู่ในตำแหน่งเดิม

จำนวนของสายอักขระดังกล่าวตรงกับนิยามของ D_5 ซึ่งหาได้จาก

$$D_5 = 5!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right] = \left[\frac{5!}{2!} - \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{4!} - \frac{5!}{5!}\right] = 60 - 20 + 5 - 1 = 44$$

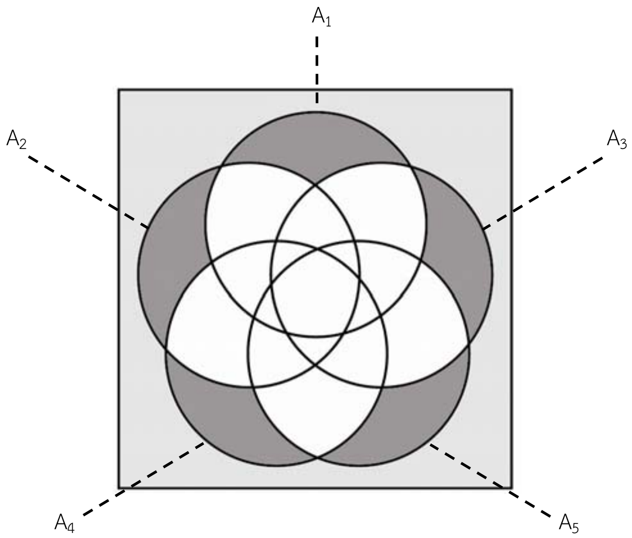
ตัวอย่างที่ 38

จงหาจำนวนสายอักขระที่แตกต่างกัน อันเกิดจากการสลับที่อักษร 5 ตัวที่ไม่ซ้ำกัน โดยที่หลังจากสลับแล้วมีอักษรที่อยู่ในตำแหน่งเดิมอย่างมาก 1 ตัวอักษร

กำหนดให้สายอักขระตั้งต้นเป็น $a_1a_2a_3a_4a_5$ และเอกภพที่เราสนใจขณะนี้คือ เซตของสายอักขระที่เกิดจากการสลับอักษรในสายอักขระตั้งต้น

ให้ A_i (i = 1, 2, 3, 4, 5) เป็นเซตของสายอักขระที่ a_i อยู่ในตำแหน่งเดียวกับตำแหน่งตั้งต้น

พิจารณาแผนภาพเวนน์ในรูปที่ 19 บริเวณที่แรเงาทั้งสีเข้มและสีอ่อนคือเซตของสายอักขระที่ต้องการหาจำนวน โดยเซตที่แรเงาด้วยสีอ่อนคือ เซตของสายอักขระซึ่งไม่มี a_i ใดเลยที่อยู่ในตำแหน่งตั้งต้น ให้เซตนี้เป็น B_0 ส่วนเซตที่แรเงาด้วยสีเข้มนั้นคือ เซตของสายอักขระซึ่งมี a_i ตัวใดตัวหนึ่ง เพียงตัวเดียว อยู่ในตำแหน่งตั้งต้น ให้เซตนี้เป็น B_1



รูปที่ 19 แผนภาพเวนน์แสดงเซตของสายอักขระที่เกิดจากการสลับที่ $a_1a_2a_3a_4a_5$

เราจะได้ว่า

$|B_0| = D_5 = 44$

และเนื่องจากส่วนที่แรเงาสีเข้มในแต่ละ A_i (เท่ากับ $B_1 \cap A_i$) ก็คือ เซตของสายอักขระที่ a_i เป็นเพียงตัวเดียวซึ่งอยู่ในตำแหน่งเดียวกับตำแหน่งตั้งต้น ดังนั้น

$$|B_1 \cap A_i| = D_4 = 4!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right] = \left[\frac{4!}{2!} - \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{4!}\right] = 12 - 4 + 1 = 9$$

นั่นคือ จำนวนสมาชิกของเซตที่แรเงาทั้งหมด หรือ จำนวนสายอักขระที่เราต้องการหา คือ 44 + 4×9 = 80 สาย

ความสัมพันธ์เวียนเกิด

ในบางครั้งเราต้องแก้ปัญหาการนับสำหรับปัญหาขนาด n สำหรับ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ เช่น การนับจำนวนสายบิตความยาว n ภายใต้เงื่อนไขบางประการ การนับจำนวนวิธีในการประสมเลขจำนวนเต็มชุดหนึ่งให้มีค่าเท่ากับ n เป็นต้น ในกรณีเหล่านี้ มีหลายกรณีที่เรามักจะสามารถใช้ประโยชน์จากการจำลองปัญหาการนับเหล่านั้นด้วยความสัมพัมธ์เวียนเกิด (Recurrence Relations) เพื่อเป็นจุดเริ่มต้นในการหาผลเฉลยของปัญหาเหล่านั้นในรูปแบบของฟังก์ชันของค่า n ต่อไป

ในส่วนนี้เราจะเริ่มต้นศึกษาเกี่ยวกับนิยามต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับความสัมพันธ์เวียนเกิด การบรรยายลำดับด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด เงื่อนไขเริ่มต้นของความสัมพันธ์เวียนเกิด ตามด้วยการสร้างแบบจำลองด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิดเพื่อแก้ปัญหาการนับ และ สุดท้ายคือ การแก้ความสัมพันธ์เวียนเกิด เพื่อให้ได้การบรรยายพจน์ที่ n ต่าง ๆ ของลำดับที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดนั้น ๆ ในรูปแบบของฟังก์ชันของ n ซึ่งค่าของพจน์ที่ n เหล่านี้ก็คือผลเฉลยของปัญหาการนับที่ถูกจำลองด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิดนั้น ๆ นั่นเอง

นิยามต่าง ๆ เกี่ยวกับความสัมพันธ์เวียนเกิด

พิจารณานิยามต่อไปนี้

ความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับลำดับ $\{a_n\}$ ลำดับหนึ่ง คือ สมการที่แสดงค่าของพจน์ a_n ในรูปแบบของการประมวลพจน์ต่าง ๆ ก่อนหน้าพจน์ a_n นั้น ซึ่งได้แก่ $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq n_o$ โดยที่ n_o เป็นค่าจำนวนเต็มไม่ติดลบค่าหนึ่ง
ลำดับใด ๆ ที่พจน์ต่าง ๆ ในลำดับนั้นทุกพจน์ สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดนี้ จะเรียกว่าเป็น *ผลเฉลย* (Solution) หนึ่งของความสัมพันธ์เวียนเกิดนี้

จากนิยามข้างต้น เราจะลองยกตัวอย่างความสัมพันธ์เวียนเกิดและลำดับที่เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดเหล่านั้นขึ้นมาหนึ่งตัวอย่าง

กำหนดให้ค่า a_n ของลำดับ ๆ หนึ่งสามารถแสดงได้โดย $a_n = 2a_{n-1}$, สำหรับ n = 1, 2, 3, … เราจะกล่าวได้ว่า $a_n = 2a_{n-1}$ เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดซึ่งเป็นสมการที่แสดงว่า ค่าของพจน์ a_n ตั้งแต่ n = 1 ขึ้นไปนั้นคำนวณได้จากสองเท่าของพจน์ก่อนหน้าของมันหนึ่งพจน์ a_{n-1} ดังนั้นลำดับใด ๆ ที่พจน์ต่าง ๆ ในลำดับนั้นทุกพจน์ สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดนี้เสมอ จะเป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์นี้ เช่น $a_n = 2^n$ สำหรับ n = 0, 1, 2, 3, … หรือ แจกแจงพจน์ต่าง ๆ ออกมา เริ่มตั้งแต่ a_0 ได้เป็นลำดับ (1, 2, 4, 6, 8, …) เป็นผลเฉลยหนึ่งของความสัมพันธ์นี้ เนื่องจากค่าของพจน์ต่าง ๆ ในช่วงของค่า n ที่กำหนดตามความสัมพันธ์ สอดคล้องกับความสัมพันธ์นั้นทั้งหมด

ในขณะที่เราแสดงข้างต้นว่าลำดับ (1, 2, 4, 6, 8, …) เป็นผลเฉลยของ $a_n = 2a_{n-1}$, สำหรับ n = 1, 2, 3, … เราสามารถแสดงได้เช่นเดียวกันว่า ลำดับ (3, 6, 12, 24, …) หรือ $a_n = 3\times2^n$ สำหรับ n = 0, 1, 2, 3, … ก็เป็นอีกผลเฉลยหนึ่งของความสัมพันธ์เวียนเกิดเดียวกันเช่นกัน ในกรณีนี้เราจะสังเกตได้ว่าลำดับใด ๆ ก็ตามที่อยู่ในรูปของ $a_n = K2^n$ สำหรับ n = 0, 1, 2, 3, … เมื่อ K คือ จำนวนจริงใด ๆ จะเป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดนี้ทั้งสิ้น

ตัวอย่างที่ 39

กำหนดให้ความสัมพันธ์เวียนเกิด r คือ $b_n = Cb_{n-1}$, สำหรับ n = 1, 2, 3, … และ C เป็นค่าคงตัวค่าหนึ่ง จงแสดงว่าลำดับ $b_n = KC^n$ สำหรับ n = 0, 1, 2, 3, … จะเป็นผลเฉลยของ r เสมอ และหาก C = 8 จงยกตัวอย่างลำดับที่เป็นผลเฉลยของ r นี้มาสองลำดับ

เพื่อแสดงว่าทุก ๆ พจน์ของ $b_n = KC^n$ สอดคล้องกับ r เสมอ สำหรับช่วงของค่า n ที่กำหนดใน r ซึ่งก็คือ n = 1, 2, 3, … เราแทนค่า $b_n = KC^n$ ลงใน r ซึ่งจะได้ว่า

$KC^n = C \times KC^{n-1} = KC^n$

สมการข้างต้นเป็นจริงเสมอสำหรับ n = 1, 2, 3, … ดังนั้นเราสามารถนรุปได้ว่า $b_n = KC^n$ เป็นผลเฉลยของ r

ตัวอย่างลำดับที่เป็นผลเฉลยของ r ในขณะที่ C = 8 สามารถหาได้จากการกำหนดค่า K ให้กับ $b_n = K8^n$ เช่น ลำดับ $b_n = 8^n$ สำหรับ n = 0, 1, 2, 3, … หรือแจกแจงเป็น (1, 8, 64, …) และ ลำดับ $b_n = 4C^n$ สำหรับ n = 0, 1, 2, 3, … หรือแจกแจงเป็น (4, 32, 256, …) เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 40

กำหนดให้ความสัมพันธ์เวียนเกิด r คือ $c_n = c_{n-1} + 2c_{n-2} + 3^n$, สำหรับ n = 2, 3, 4, … จงแสดงว่าลำดับ $c_n=A(-1)^n+B2^n+(9/4)3^n$ สำหรับ n = 0, 1, 2, 3, … ในขณะที่ A และ B เป็นค่าคงตัวใด ๆ จะเป็นผลเฉลยของ r เสมอ และจงยกตัวอย่างลำดับที่เป็นผลเฉลยของ r นี้มาสองลำดับ

แทนค่า $c_n = A(-1)^n + B2^n + (9/4)3^n$ ลงใน r ซึ่งจะได้ว่า

$$A(-1)^n + B2^n + (9/4)3^n = -A(-1)^n + (B/2)2^n + (3/4)3^n + 2A(-1)^n + (B/2)2^n + (1/2)3^n + 3^n$$

$$\boxed{A(-1)^n = -A(-1)^n + 2A(-1)^n}$$

$$\boxed{B2^n = (B/2)2^n + (B/2)2^n}$$

$$\boxed{(9/4)3^n = (3/4)3^n + (1/2)3^n + 3^n}$$

สมการที่ได้เป็นจริงเสมอ สำหรับ n = 2, 3, 4, … ดังนั้น $c_n=A(-1)^n+B2^n+(9/4)3^n$ เป็นผลเฉลยของ r

แทนค่า A และ B เท่ากับ 1 ทั้งคู่ เราจะได้ $c_n=(-1)^n+2^n+(9/4)3^n$ สำหรับ n = 0, 1, 2, 3, … ซึ่งเป็นตัวอย่างหนึ่งของลำดับที่เป็นผลเฉลยของ r ในทำนองเดียวกัน แทนค่า A เท่ากับ 1 และ B เท่ากับ 2 เราจะได้อีกตัวอย่างหนึ่งของลำดับที่เป็นผลเฉลยของ r อันได้แก่ $c_n=(-1)^n+2^{n+1}+(9/4)3^n$ สำหรับ n = 0, 1, 2, 3, …

เงื่อนไขเริ่มต้นของความสัมพันธ์เวียนเกิด

การจะกำหนดค่าของพจน์ต่าง ๆ ในลำดับที่เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดได้อย่างแน่นอน เราจำเป็นจะต้องกำหนด *เงื่อนไขเริ่มต้น* (Initial Condition) ของความสัมพันธ์เวียนเกิดนั้น เงื่อนไขดังกล่าวก็คือการกำหนดค่าของพจน์ต่าง ๆ ก่อนหน้าพจน์ที่สามารถหาค่าได้จากความสัมพันธ์เวียนเกิด ยกตัวอย่างเช่น หากความสัมพันธ์เวียนเกิดที่เราสนใจคือ $b_n = Cb_{n-1}$, สำหรับ n = 1, 2, 3, … เงื่อนไขเริ่มต้นเพื่อกำหนดค่าของพจน์ต่าง ๆ ให้เป็นเพียงอย่าง

เดียวได้ คือ ค่าของ b_0 ซึ่งเป็นค่าที่จำเป็นจะต้องรู้ในการหาค่า b_1 และเมื่อทราบค่า b_1 เราก็จะสามารถหาค่าของพจน์ b_k อื่น ๆ สำหรับ k = 2, 3, … ได้ต่อไป

ตัวอย่างที่ 41

หากต้องการหาผลเฉลยหนึ่งเดียวของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = a_{n-1}+a_{n-2}$ สำหรับ n = 2, 3, 4, … เราจะต้องกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น ด้วยพจน์ใดบ้าง

จากความสัมพันธ์เวียนเกิด ค่าของ a_n สำหรับ n = 2, 3, 4, … ขึ้นกับ a_{n-1} และ a_{n-2} ดังนั้นการจะสามารถกำหนดค่า a_2 ได้เพียงหนึ่งเดียวเราต้องทราบค่าของ a_1 และ a_0 เมื่อกำหนด a_2 แล้วเราสามารถคำนวณค่า a_3 ได้โดยใช้ค่า a_2 และ a_1 ที่ได้กำหนดไว้แล้วในการหาค่า a_2 ในทำนองเดียวกัน ค่า a_n สำหรับค่า n ตั้งแต่ 4 ขึ้นไปนั้น ก็จะสามารถหาได้จากความสัมพันธ์เวียนเกิดได้โดยไม่ต้องกำหนดเงื่อนไขใดเพิ่มเติมเช่นเดียวกับการหา a_3 ดังนั้นพจน์ที่ต้องกำหนดในเงื่อนไขเริ่มต้นมีเพียง a_1 และ a_0

ตัวอย่างที่ 42

หากต้องการหาผลเฉลยหนึ่งเดียวของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = a_{n-3}+a_{n-5}$ สำหรับ n = 5, 6, 7, … เราจะต้องกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น ด้วยพจน์ใดบ้าง

จากความสัมพันธ์เวียนเกิด ค่าของ a_n สำหรับ n = 5, 6, 7, … ขึ้นกับ a_{n-3} และ a_{n-5} ดังนั้นการจะสามารถกำหนดค่า an ต่าง ๆ มีเงื่อนไขดังนี้

การกำหนดค่า a_5 ได้เพียงหนึ่งเดียวเราต้องทราบค่าของ a_2 และ a_0

การกำหนดค่า a_6 ได้เพียงหนึ่งเดียวเราต้องทราบค่าของ a_3 และ a_1

การกำหนดค่า a_7 ได้เพียงหนึ่งเดียวเราต้องทราบค่าของ a_4 และ a_2

การกำหนดค่า a_n สำหรับ n ตั้งแต่ 8 ขึ้นไป สามารถหาได้จากความสัมพันธ์เวียนเกิดพร้อมกับค่าที่ของพจน์ที่สามารถคำนวณได้มาก่อนหน้านั้นแล้ว

ดังนั้นพจน์ที่ต้องกำหนดในเงื่อนไขเริ่มต้นคือ a_0, a_1, a_2, a_3 และ a_4

ตัวอย่างที่ 43

หากเราทราบความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = a_{n-1}+Ka_{n-2}$ สำหรับ n = 2, 3, … โดย K เป็นค่าคงตัวที่เรายังไม่ทราบค่า หากเราทราบค่าเงื่อนไขเริ่มต้นซึ่งได้แก่ $a_o = 0$ และ $a_1 = 3$ พร้อมทั้งค่าของ a_4 ว่ามีค่าเท่ากับ 15 ให้หาค่าของค่าคงตัว K

จากความสัมพันธ์เวียนเกิด เราแสดงได้ว่า $a_4 = a_3 + Ka_2$, $a_3 = a_2 + Ka_1$ และ $a_2 = a_1 + Ka_0$ ดังนั้นเมื่อเราทราบค่าของ a_4 และเงื่อนไขเริ่มต้น a_o และ a_1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$15 = a_3 + Ka_2$$
$$15 = (a_2 + Ka_1) + Ka_2$$
$$15 = (K+1)a_2 + Ka_1$$
$$15 = (K+1)(a_1 + Ka_0) + Ka_1$$
$$15 = (K+1)(3 + K(0)) + K3$$
$$15 = 6K + 3$$

ดังนั้น K มีค่าเท่ากับ 2

ความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับปัญหาการนับ

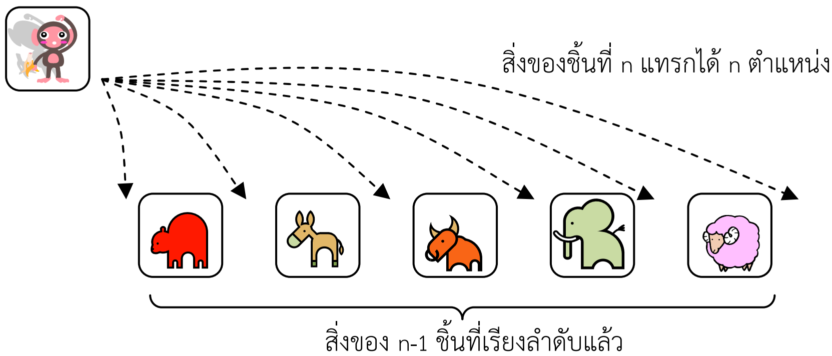
การใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิดเพื่อแก้ปัญหาการนับนั้น กระทำโดยการพยายามสร้างแบบจำลองของปัญหาการนับนั้นด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด ซึ่งมีพจน์ที่ n ต่าง ๆ ของลำดับที่เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดนั้น เป็นผลเฉลยของปัญหาการนับที่ขนาด n การคิดหาความสัมพันธ์เวียนเกิดเพื่อหาคำตอบของปัญหาการนับที่ขนาด n โดยมากมักจะเริ่มจากการสมมติว่าเราทราบคำตอบของปัญหาการนับภายใต้เงื่อนไขเดียวกันนั้นที่ขนาดเล็กกว่า n บางค่า แล้วพยายามคิดหาวิธีที่จะใช้คำตอบของปัญหาที่เล็กกว่า n เหล่านั้นเพื่อสร้างวิธีที่เป็นไปได้ต่าง ๆ สำหรับปัญหาขนาด n ยกตัวอย่างเช่น หากเราทราบว่าจำนวนสายบิตความยาว n-1 ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ a_{n-1} ความสัมพันธ์เวียนเกิดที่แสดงจำนวนสายบิตความยาว n คือ $a_n = 2a_{n-1}$ เนื่องจากในแต่ละแบบของสายบิตความ n-1 เราสามารถเลือก 0 หรือ 1 ต่อท้ายสายบิตนั้น เพื่อให้กลายเป็นสายบิตความยาว n ได้

ลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ เพื่อทำความคุ้นเคยกับการสร้างแบบจำลองของปัญหาการนับด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด

ตัวอย่างที่ 44

เราทราบมาแล้วว่าจำนวนวิธีในการเรียงลำดับสิ่งของ n ชิ้นที่แตกต่างกันนั้น เท่ากับ n! เมื่อ n คือ จำนวนเต็มบวกใด ๆ ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่พจน์ที่ k (k = 1, 2, 3, …) ของลำดับนี้ตรงกับจำนวนวิธีในการเรียงลำดับสิ่งของ k ชิ้น จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดที่บรรยายค่าของ a_n จากการประมวลผล a_{n-1} พร้อมทั้งเงื่อนไขเริ่มต้นที่จำเป็น และตรวจสอบว่า $a_n = n!$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดดังกล่าวจริง

เราสามารถหาวิธีในการเรียงสิ่งของ n ชิ้นได้โดยการ มองว่าการเรียงลำดับนั้นเกิดจากการตั้งต้นด้วยสิ่งของ n-1 ชิ้นที่เรียงลำดับด้วยวิธีใดวิธีหนึ่งอยู่แล้ว แล้วแทรกของชิ้นที่ n ลงไปในลำดับนั้น



รูปที่ 20 การสร้างการเรียงลำดับสิ่งของ n ชิ้นจากลำดับของสิ่งของ n-1 ชิ้น

จากความหมายที่เรากำหนดให้กับ a_n หากเรามีสิ่งของทั้งหมด n-1 ชิ้น เราจะมีวิธีในการเรียงลำดับสิ่งของเหล่านั้นทั้งหมด a_{n-1} วิธี ในแต่ละวิธีในการเรียงสิ่งของ n-1 ชิ้นนั้น เราสามารถแทรกของชิ้นที่ n ลงไปได้ทั้งหมด n วิธี ดังนั้นจากกฎการคูณเราจะได้ว่า $a_n = na_{n-1}$ เมื่อ n = 2, 3, … เนื่องจากค่า a_2 ขึ้นอยู่กับ a_1 ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $a_1 = 1$ ซึ่งเป็นจำนวนวิธีในการเรียงสิ่งของชิ้นเดียวนั่นก็คือ 1 วิธี

การตรวจสอบว่า $a_n = n!$ เป็นผลเฉลยจริง ทำได้โดยการแทนค่าลงไปในความสัมพันธ์เวียนเกิด เราจะได้ว่า $n! = n\times(n-1)!$ ซึ่งเป็นจริงเสมอสำหรับค่า n ในช่วงที่ความสัมพันธ์เวียนเกิดส่งผล

ตัวอย่างที่ 45

ชายคนหนึ่งเดินขึ้นบันไดจำนวน n ขั้น ในแต่ละก้าวของเขานั้น หากเขาก้าวสั้น ๆ เขาสามารถขึ้นบันไดได้ทีละ 1 แต่หากก้าวยาวหนึ่งก้าวสามารถขึ้นได้ 2 ขั้น จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดที่สามารถใช้ในการนับจำนวนวิธีในการขึ้นบันได n ขั้นนี้ (n = 3, 4, …) พร้อมทั้งเงื่อนไขเริ่มต้นที่จำเป็น

รูปที่ 21 บันได n ขั้น

นิยาม a_n เป็นจำนวนวิธีในการขึ้นบันได n ขั้น เราจะแบ่งวิธีการเหล่านี้เป็นสองกรณีที่ไม่ทับซ้อนกัน และสามารถรวมกันด้วยกฎการบวกเพื่อหาจำนวนวิธีทั้งหมดได้ โดยแบ่งกรณีตามก้าวสุดท้ายก่อนที่จะขึ้นถึงขั้นที่ n ว่าเป็นก้าวสั้นซึ่งครอบคลุมทีละขั้น หรือ ก้าวยาวซึ่งครอบคลุมทีละ 2 ขั้น

ให้ $a_{n,s}$ เป็นจำนวนวิธีในการขึ้นบันได n ขั้น โดยก้าวสุดท้ายเป็นก้าวสั้น เราบอกได้ว่าก่อนหน้าก้าวสุดท้ายนี้เขาจะอยู่ที่ขั้นที่ n-1 ซึ่งการขึ้นมายังขั้นที่ n-1 นี้เป็นได้ a_{n-1} ตามนิยามที่เรากำหนดไว้ การขึ้นจากขั้นที่ n-1 ขึ้นมายังขั้นที่ n นั้นสามารถทำได้เพียงหนึ่งวิธี คือ ก้าวสั้น ดังนั้นจากกฎการคูณ $a_{n,s} = a_{n-1} \times 1$

ให้ $a_{n,l}$ เป็นจำนวนวิธีในการขึ้นบันได n ขั้น โดยก้าวสุดท้ายเป็นก้าวยาว เราบอกได้ว่าก่อนหน้าก้าวสุดท้ายนี้เขาจะอยู่ที่ขั้นที่ n-2 ซึ่งการขึ้นมายังขั้นที่ n-2 นี้เป็นได้ a_{n-2} การขึ้นจากขั้นที่ n-2 ขึ้นมายังขั้นที่ n โดยก้าวสุดท้ายเป็นก้าวยาวนั้นคิดเป็นเพียงหนึ่งวิธี ดังนั้นจากกฎการคูณ $a_{n,l} = a_{n-2} \times 1$

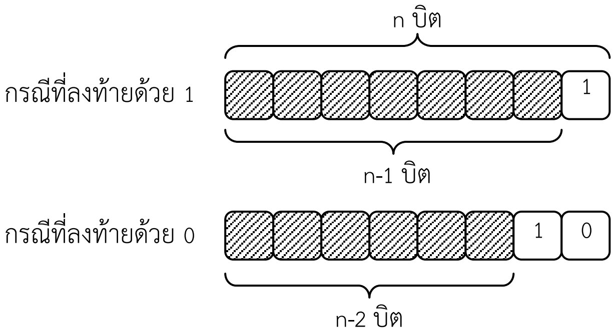
จากกฎการบวก $a_n = a_{n,s} + a_{n,l}$ ดังนั้นเราได้ว่า $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ โดยที่ n = 3, 4, … ซึ่งเป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดที่เราต้องการ

เงื่อนไขเริ่มต้นได้แก่ $a_1 = 1$ และ $a_2 = 2$ ในข้อนี้ให้สังเกตว่าหากเรากำหนดความสัมพันธ์เวียนเกิดเดิม แต่เปลี่ยนช่วงที่ความสัมพันธ์เวียนเกิดนั้นส่งผล เป็น n = 2, 3, … เงื่อนไขเริ่มต้นที่จำเป็นจะกลายเป็น $a_0 = 1$ และ $a_2 = 1$ ค่าของ a_o นั้นถึงแม้จะมีความหมายที่คลุมเครือ แต่การตั้งให้เท่ากับ 0 นั้นเราจะเห็นว่าทำให้ลำดับที่ได้ตรงกับคำตอบที่เราต้องการ

ตัวอย่างที่ 46

ให้ a_n คือ จำนวนสายบิตความยาว n ที่ไม่มีลำดับ 00 ณ ที่ใดเลยของสายบิตนั้น จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดที่สามารถใช้ในการหาค่า a_n นี้ พร้อมทั้งเงื่อนไขเริ่มต้นที่จำเป็น

หากเราแบ่งสายบิตความยาว n ที่ไม่มีลำดับ 00 ณ ที่ใดเลยของสายบิตนั้น เป็น 2 กรณีตามตัวเลขในหลักสุดท้ายของสายบิต จะได้ 2 กรณีคือ สายบิตที่ลงท้ายด้วย 0 และ สายบิตที่ลงท้ายด้วย 1



รูปที่ 22 สายบิตความยาว n ที่ไม่มี 00 ในทั้งสองกรณี

ให้ $a_{n,1}$ เป็นสายบิตความยาว n ที่ลงท้ายด้วย 1 ที่ไม่มีลำดับ 00 ณ ที่ใดเลยของสายบิตนั้น เราสามารถบอกได้ว่าจำนวนสายบิตในกรณีนี้ มีจำนวนเท่ากับสายบิตความยาว n-1 ที่ไม่มีลำดับ 00 เนื่องจากเมื่อตัด 1 ที่ท้ายของสายบิตความยาว n ที่ลงท้ายด้วย 1 ที่ไม่มีลำดับ 00 ในสายบิตนั้นออก ส่วนที่เหลือจะเป็นสายบิตความยาว n-1 ที่ไม่มีลำดับ 00 ที่แตกต่างกันอย่างแน่นอน ดังนั้น $a_{n,1} = a_{n-1}$

ให้ $a_{n,0}$ เป็นสายบิตความยาว n ที่ลงท้ายด้วย 0 ที่ไม่มีลำดับ 00 เนื่องจากสายบิตแต่ละสายเหล่านี้ไม่สามารถมี 0 ติดกันได้ ดังนั้นบิตสองตำแหน่งสุดท้ายจะต้องเป็นลำดับ 10 แน่นอน เมื่อตัดลำดับ 01 ที่สองบิตสุดท้ายของสายบิตในกรณีนี้ออก ส่วนที่เหลือจะเป็นสายบิตความยาว n-2 ที่ไม่มีลำดับ 00 ที่แตกต่างกันอย่างแน่นอน ดังนั้น $a_{n,0} = a_{n-2}$

จากกฎการบวก $a_n = a_{n,1} + a_{n,0}$ ดังนั้นเราได้ว่า $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ สำหรับ n = 2, 3, ... ซึ่งเป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดที่เราต้องการ เงื่อนไขเริ่มต้นที่จำเป็นคือ $a_0 = 1$ และ $a_1 = 2$

ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์คงที่

ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้น (Linear Recurrence Relation) คือ ความสัมพันธ์เวียนเกิดที่อยู่ในรูปแบบ

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} + F(n)$$

โดยที่ k เป็นจำนวนเต็มบวก F(n) เป็นฟังก์ชันหนึ่งของ n และ $c_1, c_2, \ldots, c_k$ เป็นสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่าง ๆ ที่เกิดก่อน a_n หากสัมประสิทธิ์เหล่านี้เป็นค่าคงที่เราจะเรียกความสัมพันธ์เวียนเกิดนี้ว่าเป็น *ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์คงที่* (Linear Recurrence Relation with Constant Coefficients) และ หาก $c_k \neq 0$ เราจะเรียกว่าความสัมพันธ์เวียนเกิดนี้มี *ดีกรี* (Degree) เท่ากับ k

หากฟังก์ชัน F(n) เป็นศูนย์ ความสัมพันธ์เวียนเกิดจะเป็นแบบ *เอกพันธุ์* (Homogeneous) สำหรับกรณีที่ F(n) เป็นฟังก์ชันอื่น ๆ ของ n หรือค่าคงที่ที่ไม่ใช่ศูนย์ ความสัมพันธ์เวียนเกิดจะไม่เป็นแบบเอกพันธุ์ (Non-homogeneous)

ตัวอย่างที่ 47

จงบอกว่าความสัมพันธ์เวียนเกิดใดบ้างต่อไปนี้เป็นแบบเอกพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์คงที่

(1) $a_n = (a_{n-1})^2+(a_{n-2})^2$

(2) $b_n = b_{n-1} + 2\log(n)$

(3) $c_n = 3c_{n-1} + 1$

(4) $d_n = 2nd_{n-1}$

(5) $e_n = 0.5e_{n-1}+e_{n-2}-0.5e_{n-3}$

ความสัมพันธ์เวียนเกิดใน (1) ไม่ใช่แบบเชิงเส้น ความสัมพันธ์เวียนเกิดใน (2) และ (3) ไม่เป็นแบบเอกพันธุ์ เนื่องจาก F(n) ไม่เป็นศูนย์ ความสัมพันธ์เวียนเกิดใน (4) ใช้สัมประสิทธิ์ที่ไม่ใช่ค่าคงที่ (ขึ้นกับ n) มีเพียงความสัมพันธ์เวียนเกิดใน (5) เท่านั้นที่เป็นแบบเอกพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์คงที่

ผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์คงที่

ก่อนที่เราจะสรุปวิธีการหาผลเฉลยในรูปแบบปิด (ผลเฉลยที่แสดงค่าของพจน์ที่ n ในรูปฟังก์ชันของ n) ของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นแบบเอกพันธ์นั้น ลองพิจารณาตัวอย่างข้างล่างนี้

ตัวอย่างที่ 48

สมมติว่าเราทราบค่า a_0 ของลำดับที่เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = ca_{n-1}$ เมื่อ n = 1, 2, 3 , ... จงหาค่า a_1, a_2, a_3, และ a_4 และจงแสดง a_n ในรูปแบบที่เป็นฟังก์ชันของ n จากการสังเกตค่าของ a_1, a_2, a_3, และ a_4 ที่หามาได้ พร้อมทั้งพิสูจน์ว่าผลเฉลยที่ได้นั้นถูกต้อง

จากความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = ca_{n-1}$ เมื่อเราทราบ a_0 เราสามารถคำนวณหาพจน์ต่อ ๆ ไปได้คือ

$a_1 = ca_0$

$a_2 = ca_1 = c^2a_0$

$a_3 = ca_2 = c^3a_0$

$a_4 = ca_3 = c^4a_0$

จากค่าของ a_1, a_2, a_3, และ a_4 เราพบว่าเมื่อพจน์ของลำดับสูงขึ้น จะมีการคูณ c เข้าไปยังพจน์ที่มาก่อนหน้าพจน์นั้นเสมอ ดังนั้นเราสามารถคาดเดาได้ว่า $a_n = c^na_0$

การพิสูจน์ว่า $a_n = c^na_0$ เป็นผลเฉลยของ $a_n = ca_{n-1}$ จริงนั้นทำได้โดยการแทนค่า a_n ดังกล่าวในความสัมพันธ์เวียนเกิด เราได้ว่า $c^na_0 = c \times c^{n-1}a_0$ ซึ่งเป็นจริงเสมอ เมื่อ n = 1, 2, 3 , ...

ตัวอย่างที่ 49

จงแสดงว่า $a_n = Ar^n$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$ เมื่อสัมประสิทธิ์ c_i ทุกตัวเป็นค่าคงที่ A เป็นจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ และ เราสามารถเลือก r เป็นจำนวนใด ๆ ก็ได้ที่เหมาะสม

การแสดงว่า $a_n = Ar^n$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดทำได้โดยการแทนค่าลงไปในความสัมพันธ์เวียนเกิดนั้น เราได้ว่า

$Ar^n = c_1 Ar^{n-1} + c_2 Ar^{n-2} + \ldots + c_k Ar^{n-k}$

ให้ $r^{n-k} \neq 0$ เราสามารถหารทั้งสองข้างของสมการด้วย Ar^{n-k} ซึ่งจะได้ว่า

$r^{n+k} = c_1 r^{n+k-1} + c_2 r^{n+k-2} + \ldots + c_k$

สมการข้างต้นจะเป็นจริงหากเราเลือกค่า r ที่ทำให้ $r^{n+k} - c_1 r^{n+k-1} - c_2 r^{n+k-2} - \ldots - c_k = 0$ ดังนั้นด้วยค่า r ดังกล่าว $a_n = Ar^n$ จะเป็นผลเฉลยหนึ่งของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$

ตัวอย่างที่ 50

จงแสดงว่า $a_n = A_1r_1^n + A_2r_2^n + \ldots + A_kr_k^n$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$ เมื่อสัมประสิทธิ์ c_i ทุกตัวเป็นค่าคงที่ A_i เป็นจำนวนใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ และ r_i (i = 1, 2, .., k) เป็นรากต่าง ๆ ของ $r^{n+k}-c_1 r^{n+k-1} - c_2 r^{n+k-2} - \ldots - c_k = 0$ สมมติว่ารากทั้ง k รากไม่ซ้ำกันเลย

การแสดงว่า $a_n = A_1r_1^n + A_2r_2^n + \ldots + A_kr_k^n$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดทำได้โดยการแทนค่าลงไปในความสัมพันธ์เวียนเกิดนั้น เราได้ว่า

$$
\begin{aligned}
(A_1r_1^n + A_2r_2^n + \ldots + A_kr_k^n) = \; & c_1 (A_1r_1^{n-1} + A_2r_2^{n-1} + \ldots + A_kr_k^{n-1}) + \\
& c_2 (A_1r_1^{n-2} + A_2r_2^{n-2} + \ldots + A_kr_k^{n-2}) + \\
& \ldots + \\
& c_k (A_1r_1^{n-k} + A_2r_2^{n-k} + \ldots + A_kr_k^{n-k})
\end{aligned}
$$

ย้ายข้างพจน์ทั้งหมดไปอยู่ทางด้านซ้ายของสมการ และ จัดกลุ่มพจน์ต่าง ๆ ตามรากที่แตกต่างกัน ได้ดังนี้

$$A_1(r_1^n - c_1r_1^{n-1} - \ldots - c_kr_1^{n-k}) + A_2(r_2^n - c_1r_1^{n-1} - \ldots - c_kr_1^{n-k}) + \ldots + A_k (r_k^n - c_1r_k^{n-1} - \ldots - c_kr_k^{n-k}) = 0$$

เนื่องจาก r_i (i = 1, 2, .., k) เป็นรากของ $r^k-c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \ldots - c_k = 0$ ดังนั้น $r_i^n-c_1r_i^{n-1} - c_2r_i^{n-2} - \ldots - c_k r_k^{n-k} = 0$ (คูณทุกพจน์ด้วย r^{n-k}) สำหรับทุก ๆ r_i ดังนั้นสมการผลรวมของพจน์ต่าง ๆ ทางด้านซ้ายของสมการข้างต้นจึงเป็น 0 ซึ่งส่งผลให้สมการดังกล่าวเป็นจริง นั่นคือ $a_n = A_1r_1^n + A_2r_2^n + \ldots + A_kr_k^n$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดในตัวอย่างนี้

สมการลักษณะเฉพาะและรูปแบบทั่วไปของผลเฉลย

จากตัวอย่างที่แสดงไปข้างต้นนี้ เราสามารถสรุปได้ว่า

> หาก r เป็นรากรากหนึ่งของพหุนาม (Polynomial) $r^k-c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \ldots - c_k = 0$ แล้ว Ar^n เมื่อ A เป็นจำนวนใด ๆ จะเป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์คงที่ ดีกรี k ในรูปแบบ $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$ นอกจากนั้นผลบวกของ Ar^n เมื่อ r เป็นรากต่าง ๆ มากกว่าหนึ่งรากก็เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดดังกล่าวเช่นกัน

สมการพหุนาม $r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \ldots - c_k = 0$ นั้น เรียกว่าเป็น *สมการลักษณะเฉพาะ* (Characteristic Equation) ของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$

หากรากของสมการลักษณะเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนเกิดดีกรี k สมการหนึ่ง มีรากที่แตกต่างกันทั้งหมด k ราก (ไม่มีค่ารากที่ซ้ำกันเลย) ได้แก่ $r_1, r_2, \ldots, r_k$ เรายังสามารถบอกรูปแบบทั่วไปของพจน์ของลำดับที่เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดนั้นได้ ดังนี้

หากรากของสมการลักษณะเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ ที่มีสัมประสิทธิ์คงที่ ดีกรี k สมการหนึ่ง มีรากที่แตกต่างกันทั้งหมด k ราก อันได้แก่ $r_1, r_2, \ldots, r_k$ ลำดับทั้งหมดที่พจน์ต่าง ๆ ในลำดับเป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดดังกล่าวจะต้องสามารถอยู่ในรูปแบบ $A_1r_1^n + A_2r_2^n + \ldots + A_kr_k^n$ เท่านั้น

การพิสูจน์ความจริงในข้อนี้ ซึ่งก็คือเงื่อนไขที่จำเป็นของผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดในที่นี้นั้น เราจะกระทำหลังจากที่เรากล่าวถึงการใช้เงื่อนไขเริ่มต้น เพื่อหาค่าคงที่ต่าง ๆ ในรูปแบบทั่วไปของผลเฉลยเพื่อให้สามารถระบุถึงผลเฉลยหนึ่งเดียวได้แล้ว

ตัวอย่างที่ 51

จงแสดงสมการลักษณะเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนเกิดต่อไปนี้

(1) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

(2) $b_n = 2b_{n-1} - 3\ b_{n-2} + 4\ b_{n-3}$

(3) $c_n = 3c_{n-1} + c_{n-3}$

(4) $d_n = d_{n-2} + 3\ d_{n-4} + 2\ d_{n-6}$

สมการลักษณะเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนเกิดใน (1) คือ $r^2 – r – 1 = 0$

สมการลักษณะเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนเกิดใน (2) คือ $r^3 – 2r^2 + 3r – 4 = 0$

สมการลักษณะเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนเกิดใน (3) คือ $r^3 – 3r^2 – 1 = 0$

สมการลักษณะเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนเกิดใน (4) คือ $r^6 – r^4 – 3\ r^2 – 2 = 0$

ตัวอย่างที่ 52

จงหารูปแบบทั่วไปของลำดับที่เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 7a_{n-1} – 12a_{n-2}$

สมการลักษณะเฉพาะของ $a_n = 7a_{n-1} – 12a_{n-2}$ คือ $r^2 – 7r + 12= 0$ เราสามารถหารากของสมการดังกล่าวได้ดังนี้

$r^2 – 7r + 12 = 0$

$(r – 3)(r – 4) = 0$

$\therefore$ r = 3 หรือ 4

เนื่องจากรากของสมการลักษณะเฉพาะคือ 3 และ 4 เราสามารถบอกได้ว่าผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดในตัวอย่างนี้มีรูปแบบทั่วไปคือ $a_n = A3^n + B4^n$ เมื่อ A และ B คือจำนวนใด ๆ

ตัวอย่างที่ 53

จงหารูปแบบทั่วไปของลำดับที่เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $b_n = – 2b_{n-1} + 5b_{n-2} + 6\ b_{n-3}$

สมการลักษณะเฉพาะของ $b_n = – 2b_{n-1} + 5b_{n-2} + 6\ b_{n-3}$ คือ $r^3 +2r^2 – 5r – 6= 0$ เราสามารถหารากของสมการดังกล่าวได้ดังนี้

$r^3 +2r^2 – 5r – 6= 0$

$(r + 1)(r^2 + r – 6) = 0$

$(r + 1)(r - 2)(r + 3) = 0$

$\therefore$ $r = -1$ หรือ 2 หรือ -3

เนื่องจากรากของสมการลักษณะเฉพาะคือ –1, 2 และ –3 เราสามารถบอกได้ว่าผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดในตัวอย่างนี้มีรูปแบบทั่วไปคือ $b_n = A(-1)^n + B2^n + C(-3)^n$ เมื่อ A, B และ C คือจำนวนใด ๆ

ค่าคงที่ในรูปแบบทั่วไปของผลเฉลยและเงื่อนไขเริ่มต้นของความสัมพันธ์เวียนเกิด

จากที่กล่าวมาแล้วตอนเริ่มต้นว่าลำพังแค่การกำหนดความสัมพันธ์เวียนเกิดนั้น ตามธรรมดาแล้วไม่สามารถบ่งบอกถึงลำดับเพียงหนึ่งเดียวได้อย่างชัดเจน การจะกำหนดลำดับที่เป็นผลเฉลยหนึ่งเดียวของความสัมพันธ์เวียนเกิดได้จะต้องกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นที่ครบถ้วน ในรูปแบบทั่วไปค่าคงตัวที่ยังไม่กำหนดค่าเฉพาะเจาะจงลงไปนั้น ทำให้มีลำดับที่เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดเดียวกันได้มากกว่าหนึ่งลำดับ เราจะต้องใช้เงื่อนไขเริ่มต้นในการกำหนดค่าคงตัวเหล่านั้น เพื่อให้ได้มาซึ่งผลเฉลยหนึ่งเดียวที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นทั้งหมดนั้น

วิธีง่าย ๆ ในการระบุค่าคงตัวต่าง ๆ ในรูปแบบทั่วไปของผลเฉลย คือ การแก้สมการเชิงเส้นจำนวนเท่ากับค่าคงตัวที่จะต้องระบุ โดยกำหนดสมการเชิงเส้นเหล่านั้นจากการแทนค่าที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นต่าง ๆ เข้าไปในรูปแบบทั่วไปของผลเฉลย ยกตัวอย่างเช่น หากมีความสัมพันธ์เวียนเกิดดีกรี 2 ในรูปแบบ $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ เมื่อ $n = 2, 3, \ldots$ เราจะสามารถหารูปแบบทั่วไปของผลเฉลยได้คือ $a_n = A_1r_1^{\ n} + A_2r_2^{\ n}$ หากรากทั้งสองของสมการลักษณะเฉพาะไม่ซ้ำกัน ค่าคงที่ที่ต้องระบุคือ A_1 และ A_2 เงื่อนไขเริ่มต้นที่ใช้คือค่าของ a_o และ a_1 ดังนั้นเมื่อแทนค่า $n = 0$ และ 1 ลงในรูปแบบทั่วไป เราจะได้สมการเชิงเส้นสองสมการคือ $a_0 = A_1r_1^{\ 0} + A_2r_2^{\ 0}$ และ $a_1 = A_1r_1^{\ 1} + A_2r_2^{\ 1}$ เมื่อแก้ระบบสมการเชิงเส้นนี้ เราจะได้ค่าของ A_1 และ A_2 ที่ทำให้ผลเฉลยหนึ่งเดียวสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นที่เราต้องการ

ตัวอย่างที่ 54

จงหาผลเฉลยหนึ่งเดียวของ $a_n = 2a_{n-1}$ สำหรับ $n = 1, 2, \ldots$ โดยกำหนดให้ a_0 มีค่าเท่ากับ 10

สมการลักษณะเฉพาะของ $a_n = 2a_{n-1}$ คือ $r - 2 = 0$ ซึ่งมีรากคือ $r = 2$ ดังนั้นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดจะอยู่ในรูป $a_n = A2^n$ โดย A คือจำนวนใด ๆ

แทนค่า $n = 0$ ลงในรูปแบบทั่วไปของผลเฉลย จะได้ว่า $a_0 = A2^0 = 10$ ดังนั้น $A = 10$ เพราะฉะนั้นผลเฉลยหนึ่งเดียวของความสัมพันธ์เวียนเกิดในตัวอย่างนี้คือ $a_n = 10\times2^n$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, \ldots$

ตัวอย่างที่ 55

จงหาผลเฉลยหนึ่งเดียวของ $b_n = -2b_{n-1} + 5b_{n-2} + 6\,b_{n-3}$ สำหรับ $n = 3, 4, \ldots$ โดยกำหนดให้ $b_0 = 3$, $b_1 = -2$ และ $b_2 = 14$

จากตัวอย่างที่ผ่านมาแล้วเราหารูปแบบทั่วไปของ $b_n = -2b_{n-1} + 5b_{n-2} + 6\,b_{n-3}$ ได้เป็น $b_n = A(-1)^n + B2^n + C(-3)^n$

แทนค่า n =0, 1, และ 2 ลงในรูปแบบทั่วไป เพื่อใช้เงื่อนไขเริ่มต้น

$b_0 = A + B + C = 3$

$b_1 = -A + 2B - 3C = -2$

$b_2 = A + 4B + 9C = 14$

จากระบบสมการเชิงเส้นข้างต้น เราสามารถหาได้ว่า A = B = C = 1 ดังนั้นผลเฉลยหนึ่งเดียวของความสัมพันธ์เวียนเกิดในตัวอย่างนี้คือ $b_n = (-1)^n + 2^n + (-3)^n$ เมื่อ n = 0, 1, 2, …

การพิสูจน์เงื่อนไขจำเป็นสำหรับผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์สัมประสิทธิ์คงที่

ตามที่ได้กล่าวมาแล้วว่า หากรากของสมการลักษณะเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ ที่มีสัมประสิทธิ์คงที่ ดีกรี k สมการหนึ่ง มีรากที่แตกต่างกันทั้งหมด k ราก อันได้แก่ $r_1, r_2, \ldots, r_k$ ลำดับทั้งหมดที่พจน์ต่าง ๆ ในลำดับเป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดดังกล่าวจะต้องสามารถอยู่ในรูปแบบ $A_1r_1^n + A_2r_2^n + \ldots + A_kr_k^n$ เท่านั้น เราสามารถทำการพิสูจน์ความจริงข้อนี้ได้ดังนี้

(1) สมมติให้ลำดับ $\{a_{1,n}\}$ ลำดับหนึ่งเป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ ที่มีสัมประสิทธิ์คงที่ ดีกรี k ซึ่งอยู่ในรูปแบบ $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$ และลำดับนี้มีพจน์ที่ n คือ x_n เมื่อ n = 0, 1, 2, … ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นของความสัมพันธ์เวียนเกิดทำให้ $\{a_n\}$ นี้เป็นผลเฉลยคือ $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$

(2) สมมติให้ลำดับ $\{a_{2,n}\}$ เป็นอีกลำดับหนึ่งซึ่งเป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดเดียวกันกับ $\{a_{2,n}\}$ โดยพจน์ที่ n ของลำดับนี้อยู่ในรูปแบบ $A_1r_1^n + A_2r_2^n + \ldots + A_kr_k^n$

(3) เนื่องจากรากของสมการลักษณะเฉพาะแตกต่างกันทั้งหมด เราจะสามารถหาค่าคงที่ A_i (i = 1, 2, …, k) ที่ทำให้พจน์ที่ 0 ถึงพจน์ที่ k-1 มีค่าเท่ากับ คือ $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ ตามลำดับได้เสมอ ดังนั้นด้วยค่าคงที่ชุดนี้จะทำให้ $\{a_{2,n}\} = \{a_{1,n}\}$ ซึ่งแสดงว่า $\{a_{1,n}\}$ สามารถเขียนได้ในรูป $A_1r_1^n + A_2r_2^n + \ldots + A_kr_k^n$

(4) จาก (3) เราสามารถสรุปได้ว่า ผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดดังกล่าวจะต้องสามารถอยู่ในรูปแบบ $A_1r_1^n + A_2r_2^n + \ldots + A_kr_k^n$ เท่านั้น

กรณีที่สมการลักษณะเฉพาะมีรากซ้ำ

หากสมการลักษณะเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นดีกรี k มีรากที่มีค่าแตกต่างกันไม่ถึง k ราก (หรือ มีบางรากมีค่าซ้ำกัน) สมมติให้เป็น $r_1, r_2, \ldots, r_t$ โดยที่ $t < k$ รูปแบบทั่วไปของผลเฉลยจะแตกต่างไปจาก $A_1r_1^n + A_2r_2^n + \ldots + A_tr_t^n$

ในตัวอย่างที่ 49 การแสดงว่า $a_n = Ar^n$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$ เมื่อ r เป็นรากของสมการลักษณะเฉพาะที่สอดคล้องกันนั้น เราไม่ได้ใช้เงื่อนไขของการที่สมการลักษณะเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนเกิดนี้มีรากที่แตกต่างกันทั้งหมดเลย ดังนั้นเราจึงยังสามารถบอกได้ว่า $a_n = Ar^n$ ยังเป็นผลเฉลยหนึ่งถึงแม้ว่าจำนวนราก r ที่แตกต่างกันจะมีไม่ถึง k รากก็ตาม

อย่างไรก็ตามเงื่อนไขจำเป็นของผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด ที่กล่าวว่าผลเฉลยจะอยู่ในรูป $A_1r_1^n + A_2r_2^n + \ldots + A_tr_t^n$ เสมอจะไม่จำเป็นต้องเป็นจริง เนื่องจากการกำหนดผลเฉลยหนึ่งเดียวของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้น ดีกรี k จะต้องกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นทั้งหมด k พจน์ก่อนหน้าพจน์ที่จะสามารถหาได้ด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิดนั้น แต่หากรูปแบบทั่วไปมีค่าคงตัวซึ่งสามารถปรับเพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นได้เพียง t ตัว เราก็จะไม่สามารถปรับค่าคงตัวเหล่านี้เพื่อให้ได้ลำดับทุกลำดับที่เป็นผลเฉลยได้

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 56

ให้ R เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ สำหรับ n = 2, 3, 4, … จงแสดงว่ามีลำดับ $a_n = A2^n$ ที่เป็นผลเฉลยของ R เมื่อ A เป็นจำนวนจำนวนหนึ่ง และจงพิสูจน์ว่ามีลำดับ a_n ที่เป็นผลเฉลยของ R ซึ่งไม่จำเป็นต้องอยู่ในรูป $a_n = A2^n$

เมื่อแทนค่า $a_n = A2^n$ ลงใน R เราจะได้ว่า

$$A2^n = 4A(2)^{n-1} - 4A(2)^{n-2}$$

$$= 2A(2^n) - A(2^n)$$

$$= A2^n$$

ซึ่งเป็นจริงดังนั้น $a_n = A2^n$ เป็นผลเฉลยของ R เสมอ ยกตัวอย่างเช่นลำดับ (1, 2, 4, 8, …)

ตัวอย่างที่ 57

ให้ R เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ สำหรับ n = 2, 3, 4, … จงพิสูจน์ว่ามีลำดับ a_n ที่เป็นผลเฉลยของ R ซึ่งไม่จำเป็นต้องอยู่ในรูป $a_n = A2^n$ เมื่อ A เป็นจำนวนใด ๆ

เลือกพจน์ที่ 0 และ 1 ของลำดับ a_n เป็น 1 และ 3 ตามลำดับ เพื่อให้ a_n เป็นผลเฉลยของ R เราสามารถเลือกค่า a_n สำหรับ n = 2, 3, 4, … ด้วยการคำนวณจากความสัมพันธ์เวียนเกิด R พจน์แรก ๆ ของลำดับดังกล่าวจะเป็นดังนี้

$a_2 = 4a_1 - 4a_0 = 8$

$a_3 = 4a_2 - 4a_1 = 20$

$a_4 = 4a_3 - 4a_2 = 48$

จะเห็นได้ว่าลำดับ a_n ดังกล่าวไม่สามารถอยู่ในรูป $a_n = A2^n$ ได้ อย่างน้อยเนื่องจากเราไม่สามารถค่า A ที่ทำให้ $A2^2 = 8$, $A2^3 = 20$, และ $A2^4 = 48$ พร้อมกันได้

การที่รูปแบบ $A_1r_1^n + A_2r_2^n + \ldots + A_tr_t^n$ $(t < k)$ ไม่สามารถแทนผลเฉลยทั้งหมดของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ ดีกรี k ได้ เนื่องจากค่าคงตัวที่สามารถปรับได้มีจำนวนน้อยกว่าเงื่อนไขเริ่มต้น แสดงให้เห็นว่ารูปแบบทั่วไปที่แทนผลเฉลยทั้งหมดได้จะต้องมีพจน์ที่มากขึ้นกว่าแค่ t พจน์

ก่อนที่เราจะสรุปและพิสูจน์รูปแบบทั่วไปดังกล่าว ลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 58

หากความสัมพันธ์เวียนเกิด R ซึ่งคือ $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$ มีสมการลักษณะเฉพาะที่มีรากคือ $r_1, r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{k-1}$ (ราก r_1 ซ้ำกันสองครั้ง) จงแสดงว่า $a_n = Anr_1^n$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของ R

(1) R มีสมการลักษณะเฉพาะคือ

$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \ldots + c_k$$

(2) จากค่าของรากที่กำหนด แสดงว่า R สามารถเขียนได้ในรูป

$$(r-r_1)^2(r-r_2)(r-r_3)\ldots(r-r_{k-1}) = (r-r_1)^2f(r) = 0$$

(3) นำ r^{n-k} คูณสมการลักษณะเฉพาะใน (2) และหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร r เราจะได้

$$(r-r_1)^2 (r^{n-k} f(r))' + 2(r-r_1) r^{n-k}f(r) = 0$$

(4) จากสมการใน (3) เราจะเห็นได้ว่า r_1 เป็นรากของอนุพันธ์ของสมการที่เกิดจาก r^{n-k} คูณสมการลักษณะเฉพาะ

(5) นำ r^{n-k} คูณเข้ากับพจน์ต่าง ๆ ในสมการลักษณะเฉพาะใน (1) เราจะได้

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \dots + c_k r^{n-k}$$

(6) หาอนุพันธ์เทียบกับ r ของสมการใน (5) เราจะได้

$$nr^{n-1} = c_1 (n-1)r^{n-2} + c_2(n-2)r^{n-3} + \dots + c_k(n-k)r^{n-k-1}$$

(7) นำ Ar คูณเข้ากับพจน์ต่าง ๆ ในสมการที่ได้ใน (6) เราจะได้

$$Anr^n = c_1A(n-1)r^{n-1} + c_2A(n-2)r^{n-2} + \dots + c_kA(n-k)r^{n-k}$$

(8) r_1 เป็นรากของสมการที่ได้ใน (7) เนื่องจากเราแสดงให้เห็นใน (4) แล้วว่า r_1 เป็นรากของอนุพันธ์ของสมการที่เกิดจาก r^{n-k} คูณสมการลักษณะเฉพาะ และ สมการที่ได้ใน (7) นั้นเกิดจากการคูณอนุพันธ์ของสมการลักษณะเฉพาะด้วยค่าคงที่ ดังนั้นเมื่อแทน r ด้วย r_1 ในสมการใน (7) สมการดังกล่าวจะต้องเป็นจริง นั่นคือ

$$Anr_1^n = c_1A(n-1) r_1^{n-1} + c_2A(n-2) r_1^{n-2} + \dots + c_kA(n-k) r_1^{n-k}$$

(9) จาก (8) จะเห็นว่า Ar_1^n ทำให้ความสัมพันธ์เวียนเกิด R เป็นจริง ซึ่งแสดงให้เห็นว่า Ar_1^n เป็นผลเฉลยของ R

ตัวอย่างที่ 59

หากความสัมพันธ์เวียนเกิด R ซึ่งคือ $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \dots + c_ka_{n-k}$ มีสมการลักษณะเฉพาะที่มีรากคือ $r_1, r_1, r_1, r_2, r_3, \dots, r_{k-2}$ (ราก r_1 ซ้ำกันสามครั้ง) จงแสดงว่า $a_n = Anr_1^n$ และ $a_n = Bn^2r_1^n$ เป็นผลเฉลยของ R ทั้งคู่

(1) จากค่าของรากที่กำหนด แสดงว่า R สามารถเขียนได้ในรูป

$$(r-r_1)^3(r-r_2)(r-r_3)\dots(r-r_{k-2}) = (r-r_1)^3f(r) = 0$$

(2) นำ r^{n-k} คูณสมการลักษณะเฉพาะใน (1) และหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร r เราจะได้

$$(r-r_1)^3 (r^{n-k} f(r))' + 3(r-r_1)^2 r^{n-k}f(r) = 0$$

จากสมการ เราจะบอกได้ว่า r_1 เป็นรากของอนุพันธ์ของสมการที่เกิดจาก r^{n-k} คูณสมการลักษณะเฉพาะ

(3) ในทำนองเดียวกันกับตัวอย่างที่ 58 เราสามารถแสดงได้ว่า $a_n = Anr_1^n$ เป็นผลเฉลยของ R

(4) หาอนุพันธ์ของสมการใน (2) เราจะได้

$$(r-r_1)^3 (r^{n-k} f(r))'' + 3(r-r_1)^2(r^{n-k} f(r))' + 3(r-r_1)^2(r^{n-k}f(r))' + 6(r-r_1)r^{n-k}f(r) = 0$$

จากสมการ เราจะบอกได้ว่า r_1 เป็นรากของอนุพันธ์อันดับสองของสมการที่เกิดจาก r^{n-k} คูณสมการลักษณะเฉพาะเช่นเดียวกัน

(5) อนุพันธ์อันดับสองของสมการที่เกิดจาก r^{n-k} คูณสมการลักษณะเฉพาะ คือ

$$n(n-1)r^{n-2} = c_1 (n-1)(n-2)r^{n-3} + c_2(n-2)(n-3)r^{n-4} + \dots + c_k(n-k)(n-k-1)r^{n-k-2}$$

(6) นำ Br^2 คูณเข้ากับพจน์ต่าง ๆ ในสมการที่ได้ใน (5) เราจะได้

$$Bn(n-1)r^n = c_1B(n-1)(n-2)r^{n-1} + c_2B(n-2)(n-3)r^{n-2} + \ldots + c_kB(n-k)(n-k-1)r^{n-k}$$

(7) จาก (4) เราจะบอกได้ว่า r_1 เป็นรากของสมการใน (6) ด้วยเช่นกัน ดังนั้น

$$Bn(n-1)r_1^{\ n} = c_1B(n-1)(n-2)\ r_1^{\ n-1} + c_2B(n-2)(n-3)\ r_1^{\ n-2} + \ldots + c_kB(n-k)(n-k-1)\ r_1^{\ n-k}$$

(8) จาก (7) เราจะเห็นว่า $a_n = Bn(n-1)r_1^{\ n} = Bn^2r_1^{\ n} – Bnr_1^{\ n}$ เป็นผลเฉลยของ R

(9) แต่เนื่องจากที่เราแสดงใน (3) นั้น $–Bnr_1^{\ n}$ ก็เป็นผลเฉลยของ R นั่นคือ หากแทน $a_n = –Bnr_1^{\ n}$ ลงใน R จะทำให้ได้สมการที่เป็นจริง นั่นคือ ทำให้ทั้งสองข้างของความสัมพันธ์ R เท่ากัน

(10) จาก (8) และ (9) หากแทน $a_n = Bn^2r_1^{\ n}$ ลงใน R ก็จะต้องทำให้ทั้งสองข้างของความสัมพันธ์ R เท่ากัน นั่นแสดงได้ว่า $a_n = Bn^2r_1^{\ n}$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของ R เช่นกัน

จากตัวอย่างข้างต้นนั้น เราสามารถใช้วิธีการพิสูจน์ในทำนองเดียวกัน เพื่อแสดงรูปแบบทั่วไปของผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดที่มีสมการลักษณะเฉพาะมีรากซ้ำได้ การพิสูจน์ดังกล่าวผู้อ่านสามารถพิจารณาโดยละเอียดได้ในหนังสือ Discrete Mathematics and Its Applications ซึ่งรูปแบบทั่วไปในกรณีนี้สามารถแสดงได้ดังนี้

หากรากของสมการลักษณะเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ ที่มีสัมประสิทธิ์คงที่ ดีกรี k สมการหนึ่ง มีรากที่แตกต่างกันทั้งหมด t ราก อันได้แก่ $r_1, r_2, \ldots, r_t$ ($t \leq k$) โดย m_i เป็นจำนวนครั้ง หรือ ความซ้ำ (Multiplicity) ที่ราก r_i เป็นองค์ประกอบของสมการลักษณะเฉพาะนั้น ลำดับ a_n ทั้งหมดที่พจน์ต่าง ๆ ในลำดับเป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดดังกล่าวจะต้องสามารถอยู่ในรูปแบบ

$$(A_{1,m_1-1}n^{m_1-1} + A_{1,m_1-2}n^{m_1-2} + \ldots + A_{1,0}n^0)r_1^n +$$
$$(A_{1,m_2-1}n^{m_2-1} + A_{1,m_2-2}n^{m_2-2} + \ldots + A_{2,0}n^0)r_2^n +$$
$$\ldots +$$
$$(A_{1,m_t-1}n^{m_t-1} + A_{1,m_t-2}n^{m_t-2} + \ldots + A_{t,0}n^0)r_t^n$$

เท่านั้น

จะสังเกตได้ว่าหากรากที่แตกต่างกันทั้งหมดนั้นมีจำนวนเท่ากับ k (นั่นคือไม่มีรากซ้ำ ซึ่งส่งผลให้ m_i ใด ๆ มีค่าเป็น 1 ทั้งหมด) รูปแบบข้างต้นก็ยังถูกต้องและสอดคล้องกับรูปแบบทั่วไปในกรณีที่ไม่มีรากซ้ำดังได้กล่าวมาแล้วก่อนหน้านี้

ตัวอย่างที่ 60

จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 7a_{n-1} – 15a_{n-2} + 9a_{n-3}$ โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $a_0 = 2$, $a_1 = 7$ และ $a_3 = 28$

(1) สมการลักษณะเฉพาะที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 7a_{n-1} – 15a_{n-2} + 9a_{n-3}$ คือ

$r^3 – 7r^2 + 15r – 9 = 0$

ซึ่งแยกองค์ประกอบได้คือ

$(r – 1)\ (r – 3)\ (r – 3) = 0$

ดังนั้นราก r_1 และ r_2 ซึ่งเป็นรากทั้งหมดที่แตกต่างกันคือ 1 และ 3 โดยความซ้ำของ r_1 คือ 1 นั่นคือไม่มีรากซ้ำ (m_1=1) และ ความซ้ำของ r_2 คือ 2 (m_1=2)

(2) จากรากของสมการลักษณะเฉพาะ เราสามารถบอกได้ว่าผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดนี้จะต้องอยู่ในรูป

$$a_n = (An^0)1^n + (Bn^1 + Cn^0)3^n = A + (Bn + C)3^n$$

สำหรับ A, B และ C เป็นค่าใด ๆ

(3) หาค่า A, B และ C ที่ทำให้ผลเฉลยสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น โดยการแทนค่า n = 0, 1 และ 2 ลงในรูปแบบทั่วไปของผลเฉลย และแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่ได้จากการแทนค่าเหล่านั้น ซึ่งได้แก่

$$a_0 = A + C = 2$$
$$a_1 = A + 3B + 3C = 7$$
$$a_2 = A + 18B + 9C = 28$$
$$\therefore A = B = C = 1$$

(4) ดังนั้น ผลเฉลยคือ $a_n = 1 + (n + 1)3^n$ สำหรับ n = 0, 1, 2 ,...

ตัวอย่างที่ 61

จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$ โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $a_0 = 2$, $a_1 = 4$ และ $a_3 = 16$

(1) สมการลักษณะเฉพาะที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$ คือ

$r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0$

ซึ่งแยกองค์ประกอบได้คือ

$(r - 2)(r - 2)(r - 2) = 0$

ซึ่งรากมีเพียงค่าเดียวคือ 1 และมีความซ้ำเป็น 3

(2) จากรากของสมการลักษณะเฉพาะ เราสามารถบอกได้ว่าผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดนี้จะต้องอยู่ในรูป

$$a_n = (An^2 + Bn^1 + Cn^0)2^n$$

สำหรับ A, B และ C เป็นค่าใด ๆ

(3) หาค่า A, B และ C ที่ทำให้ผลเฉลยสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น โดยการแทนค่า n = 0, 1 และ 2 ลงในรูปแบบทั่วไปของผลเฉลย และแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่ได้จากการแทนค่าเหล่านั้น เราจะได้ว่า A = 1, B = -1 และ C = 2 ดังนั้น ผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดนี้คือ $a_n = (n^2 - n + 2)2^n$ สำหรับ n = 0, 1, 2 ,...

ผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์คงที่

ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้น R ซึ่งอยู่ในรูปแบบ

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + F(n)$$

จะไม่เป็นแบบเอกพันธ์เมื่อ $F(n) \neq 0$ และความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

นั้น เรียกว่าเป็น *ส่วนเอกพันธ์* (Homogeneous part) ของ R ในขณะที่เราเรียก $F(n)$ ว่า *ส่วนเฉพาะ* (Particular Part)

วิธีหนึ่งในการหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด R ในลักษณะนี้สามารถทำได้โดย นิยามผลเฉลย a_n นั้นให้เป็นผลบวกของผลเฉลยย่อยสองส่วน ดังนี้

$$a_n = a_n^h + a_n^p$$

โดยให้ a_n^h เป็นผลเฉลยย่อยซึ่งสอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดในส่วนเอกพันธ์ของ R นั่นคือ

$$a_n^h = c_1 a_{n-1}^h + c_2 a_{n-2}^h + \ldots + c_k a_{n-k}^h$$

เรียก a_n^h ว่า *ผลเฉลยเอกพันธ์* (Homogeneous solution) และเนื่องจากส่วนเอกพันธ์นี้เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบเอกพันธ์ ดังนั้นรูปแบบทั่วไปของ a_n^h จึงสามารถหาได้จากวิธีการหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบเอกพันธ์ดังที่ได้กล่าวมาในหัวข้อที่แล้ว

ส่วน a_n^p นั้นให้เป็นผลเฉลยย่อยซึ่งตามนิยามเมื่อนำมาบวกรวมกับ a_n^h แล้ว ผลรวมที่ได้จะต้องสอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดซึ่งรวมส่วนของ $F(n)$ เข้าไปด้วยแล้ว a_n^p นี้เรียกว่า *ผลเฉลยเฉพาะ* (Particular solution)

ก่อนที่จะกล่าวถึงเทคนิคในการหาค่าของ a_n^p ขอให้พิจารณาสมบัติของ a_n^p โดยเริ่มจากการแทนค่า $a_n = a_n^h + a_n^p$ ลงในความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + F(n)$ ซึ่ง $a_n = a_n^h + a_n^p$ นั้นเป็นผลเฉลย ตามนิยามของผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดสมการที่ได้จะต้องเป็นจริง ดังนี้

$$(a_n^h + a_n^p) = c_1(a_{n-1}^h + a_{n-1}^p) + c_2(a_{n-2}^h + a_{n-2}^p) + \ldots + c_k(a_{n-k}^h + a_{n-k}^p) + F(n)$$
$$(a_n^h + a_n^p) = (c_1 a_{n-1}^h + c_2 a_{n-2}^h + \ldots + c_k a_{n-k}^h) + (c_1 a_{n-1}^p + c_2 a_{n-2}^p + \ldots + c_k a_{n-k}^p) + F(n)$$

เนื่องจาก

$$a_n^h = c_1 a_{n-1}^h + c_2 a_{n-2}^h + \ldots + c_k a_{n-k}^h$$

ดังนั้น

$$a_n^p = c_1 a_{n-1}^p + c_2 a_{n-2}^p + \ldots + c_k a_{n-k}^p + F(n)$$

นั่นคือ โดยลำพัง a_n^p นั้นจะต้องสอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดที่มี $a_n = a_n^h + a_n^p$ เป็นผลเฉลยด้วย

ย้ายข้างพจน์ในสมการข้างต้นให้พจน์ต่าง ๆ ของ a_n^p แยกออกจาก $F(n)$ เพื่อแสดงค่าของ $F(n)$ ในรูปแบบของฟังก์ชันของพจน์ต่าง ๆ ของ a_n^p เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} F(n) &= a_n^p + (-c_1)a_{n-1}^p + (-c_2)a_{n-2}^p + \ldots + (-c_k)a_{n-k}^p \\ &= a_n^p + d_1 a_{n-1}^p + d_2 a_{n-2}^p + \ldots + d_k a_{n-k}^p \end{aligned}$$

เมื่อ $d_i = -c_i$

เราจะเห็นได้ว่า $F(n)$ เป็น *ผลรวมเชิงเส้น* (Linear combination) ของพจน์ต่าง ๆ ของ a_n^p ดังนั้น a_n^p จะต้องเป็นฟังก์ชันของ n ซึ่งอยู่ในรูปแบบซึ่งสามารถสร้าง $F(n)$ ได้จากการคูณพจน์ที่ n ต่าง ๆ ด้วยค่าคงที่ และ นำผลที่ได้มาบวกรวมกันเท่านั้น

โดยทั่วไปแล้วเราไม่มีวิธีการง่าย ๆ ที่จะสามารถหาค่าของ a_n^p ได้เสมอ ยกเว้นเมื่อ $F(n)$ เป็นฟังก์ชันของ n ในบางลักษณะเท่านั้นดังจะแสดงต่อไปในบทนี้

ก่อนที่เราจะแสดงข้อสรุปของการหาค่าของ a_n^p สำหรับในกรณีของ $F(n)$ ดังกล่าว ขอให้พิจารณาตัวอย่างต่าง ๆ ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 62

กำหนดความสัมพันธ์เวียนเกิด R คือ $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + F(n)$ จงหาแสดงว่า หาก $F(n) = Ks^n$ เมื่อ K เป็นค่าคงที่ใด ๆ และ s ไม่ใช่รากของสมการลักษณะเฉพาะที่สอดคล้องกับ R และไม่เป็น 0 แล้ว a_n^p ซึ่งเป็นผลเฉลยเฉพาะของ R สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบ $a_n^p = As^n$ ได้ และจงหาค่า A ที่เหมาะสม

(1) แทนค่า $a_n^p = As^n$ ลงในความสัมพันธ์เวียนเกิด R จากสมบัติของผลเฉลยเฉพาะหาก a_n^p เป็นผลเฉลยเฉพาะของ R จริง จะต้องทำให้ $a_n^p = c_1 a_{n-1}^p + c_2 a_{n-2}^p + \ldots + c_k a_{n-k}^p + F(n)$

จากการแทนค่าเราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
As^n &= c_1 As^{n-1} + c_2 As^{n-2} + \ldots + c_k As^{n-k} + Ks^n \\
As^n &= s^n (c_1 As^{-1} + c_2 As^{-2} + \ldots + c_k As^{-k} + K) \\
A &= c_1 As^{-1} + c_2 As^{-2} + \ldots + c_k As^{-k} + K \\
A &= \frac{K}{(1 - c_1 s^{-1} - c_2 s^{-2} - \ldots - c_k s^{-k})}
\end{aligned}$$

(2) พิจารณาพจน์ $1 - c_1 s^{-1} - c_2 s^{-2} - \ldots - c_k s^{-k}$ ซึ่งเป็นตัวหารของพจน์ด้านขวามือของสมการ สังเกตว่า

$$\begin{aligned}
1 - c_1 s^{-1} - c_2 s^{-2} - \ldots - c_k s^{-k} &= \frac{s^n}{s^n}(1 - c_1 s^{-1} - c_2 s^{-2} - \ldots - c_k s^{-k}) \\
&= \frac{s^n - c_1 s^{n-1} - c_2 s^{n-2} - \ldots - c_k s^{n-k}}{s^n}
\end{aligned}$$

ถ้าพจน์ข้างต้นเป็น 0 แสดงว่า $s^n - c_1 s^{n-1} - c_2 s^{n-2} - \ldots - c_k s^{n-k} = 0$ ซึ่งหมายความว่า s ต้องเป็นรากของสมการลักษณะเฉพาะของ R เท่านั้น แต่ในกรณีนี้ s มิใช่รากของสมการลักษณะเฉพาะ ดังนั้นเราจึงสรุปได้ว่า $s^n - c_1 s^{n-1} - c_2 s^{n-2} - \ldots - c_k s^{n-k} \neq 0$

(3) จาก (1) และ (2) เราสามารถบอกได้ว่า $a_n^p = As^n$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ R ได้เมื่อค่าของ A เป็นดังที่แสดงใน (1)

ตัวอย่างที่ 63

กำหนดความสัมพันธ์เวียนเกิด R คือ $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} + F(n)$ และ $F(n) = Kns^n$ เมื่อ K เป็นค่าคงที่ใด ๆ โดย s ไม่ใช่รากของสมการลักษณะเฉพาะที่สอดคล้องกับ R และไม่เป็น 0 จงแสดงว่า $a_n^p = (An + B)s^n$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ R พร้อมทั้งระบุ A และ B ที่สอดคล้องกับผลเฉลยนั้น

(1) แทนค่า $a_n^p = (An + B)s^n$ ลงในความสัมพันธ์เวียนเกิด R จากสมบัติของผลเฉลยเฉพาะหาก a_n^p เป็นผลเฉลยเฉพาะของ R จริง จะต้องทำให้ $a_n^p = c_1a_{n-1}^p + c_2a_{n-2}^p + \ldots + c_ka_{n-k}^p + F(n)$

จากการแทนค่าเราจะได้ว่า

$$(An + B)s^n = c_1(A(n-1) + B)s^{n-1} + c_2(A(n-2) + B)s^{n-2} + \ldots + c_k(A(n-k) + B)As^{n-k} + Kns^n$$

$$\begin{aligned}
An + B = {} & c_1Ans^{-1} - c_1As^{-1} + c_1Bs^{-1} \\
& + c_2Ans^{-2} - 2c_2As^{-2} + c_2Bs^{-2} \\
& + \ldots \\
& + c_kAns^{-k} - kc_kAs^{-k} + c_kBs^{-k} \\
& + Kn
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
An + B = {} & (c_1As^{-1} + c_2As^{-2} + \ldots + c_kAs^{-k} + K)n \\
& - (c_1As^{-1} + 2c_2As^{-2} + \ldots + kc_kAs^{-k}) + (c_1Bs^{-1} + c_2Bs^{-2} + \ldots + c_kBs^{-k})
\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$A = c_1As^{-1} + c_2As^{-2} + \ldots + c_kAs^{-k} + K$$

และ

$$B = -(c_1As^{-1} + 2c_2As^{-2} + \ldots + kc_kAs^{-k}) + (c_1Bs^{-1} + c_2Bs^{-2} + \ldots + c_kBs^{-k})$$

(2) จาก $A = c_1As^{-1} + c_2As^{-2} + \ldots + c_kAs^{-k} + K$ และ s มิได้เป็นรากของสมการลักษณะเฉพาะของ R เราสามารถบอกได้ว่า

$$1 - c_1s^{-1} - c_2s^{-2} - \ldots - c_ks^{-k} \neq 0$$

และ

$$A = \frac{K}{(1 - c_1s^{-1} - c_2s^{-2} - \ldots - c_ks^{-k})}$$

เป็นค่าคงที่ซึ่งจะทำให้ $a_n^p = (An + B)s^n$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ R หากเราสามารถหาค่า B ที่เหมาะสมได้

(3) หากกำหนดค่า A ตาม (2) เราจะแสดงได้ว่า

$$(1-c_1s^{-1}-c_2s^{-2}-\ldots-c_ks^{-k})=(K/A)$$
$$\frac{d(1-c_1s^{-1}-c_2s^{-2}-\ldots-c_ks^{-k})}{ds}=\frac{d(K/A)}{ds}$$
$$(c_1s^{-2}+2c_2s^{-3}+\ldots+kc_ks^{-(k+1)})=0$$
$$s^{-1}(c_1s^{-1}+2c_2s^{-2}+\ldots+kc_ks^{-k})=0$$
$$(c_1s^{-1}+2c_2s^{-2}+\ldots+kc_ks^{-k})=0$$

(4) จาก $B=-(c_1As^{-1}+2c_2As^{-2}+\ldots+kc_kAs^{-k})+(c_1Bs^{-1}+c_2Bs^{-2}+\ldots+c_kBs^{-k}+L)$ ดังแสดงใน (1) และ $(c_1s^{-1}+2c_2s^{-2}+\ldots+kc_ks^{-k})=0$ ดังแสดงใน (3) เราจะได้ว่า

$$B=(c_1Bs^{-1}+c_2Bs^{-2}+\ldots+c_kBs^{-k}+L)$$

นั่นคือ

$$B=\frac{L}{(1-c_1Bs^{-1}-c_2Bs^{-2}-\ldots-c_kBs^{-k})}$$

สังเกตว่า $1-c_1Bs^{-1}-c_2Bs^{-2}-\ldots-c_kBs^{-k}\neq 0$ เนื่องจาก s มิใช่รากของสมการลักษณะเฉพาะ

(5) จาก (2) และ (4) เราแสดงให้เห็นว่าค่า A และ B ดังกล่าว ทำให้ $a_n^p=(An+B)s^n$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ R

ตัวอย่างที่ 64

กำหนดความสัมพันธ์เวียนเกิด R คือ $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\ldots+c_ka_{n-k}+F(n)$ และ $F(n)=(Kn+L)s^n$ เมื่อ K และ L เป็นค่าคงที่ใด ๆ โดย s ไม่ใช่รากของสมการลักษณะเฉพาะที่สอดคล้องกับ R และไม่เป็น 0 จงแสดงว่า $a_n^p=(An+B)s^n$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ R พร้อมทั้งระบุ A และ B ที่สอดคล้องกับผลเฉลยนั้น

(1) แทนค่า $a_n^p=(An+B)s^n$ ลงในความสัมพันธ์เวียนเกิด R จากสมบัติของผลเฉลยเฉพาะหาก a_n^p เป็นผลเฉลยเฉพาะของ R จริง จะต้องทำให้ $a_n^p=c_1a_{n-1}^p+c_2a_{n-2}^p+\ldots+c_ka_{n-k}^p+F(n)$

จากการแทนค่าเราจะได้ว่า

$$(An+B)s^n=c_1(A(n-1)+B)s^{n-1}+c_2(A(n-2)+B)s^{n-2}+\ldots+c_k(A(n-k)+B)As^{n-k}+(Kn+L)s^n$$
$$\begin{aligned}An+B=\;&c_1Ans^{-1}-c_1As^{-1}+c_1Bs^{-1}\\&+c_2Ans^{-2}-2c_2As^{-2}+c_2Bs^{-2}\\&+\ldots\\&+c_kAns^{-k}-kc_kAs^{-k}+c_kBs^{-k}\\&+Kn+L\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}An+B=\;&(c_1As^{-1}+c_2As^{-2}+\ldots+c_kAs^{-k}+K)n\\&-(c_1As^{-1}+2c_2As^{-2}+\ldots+kc_kAs^{-k})+(c_1Bs^{-1}+c_2Bs^{-2}+\ldots+c_kBs^{-k}+L)\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$A=c_1As^{-1}+c_2As^{-2}+\ldots+c_kAs^{-k}+K$$

และ

$$B = -(c_1As^{-1} + 2c_2As^{-2} + \ldots + kc_kAs^{-k}) + (c_1Bs^{-1} + c_2Bs^{-2} + \ldots + c_kBs^{-k} + L)$$

(2) จาก $A = c_1As^{-1} + c_2As^{-2} + \ldots + c_kAs^{-k} + K$ และ s มิได้เป็นรากของสมการลักษณะเฉพาะของ R เราสามารถบอกได้ว่า

$$1 - c_1s^{-1} - c_2s^{-2} - \ldots - c_ks^{-k} \neq 0$$

และ

$$A = \frac{K}{(1 - c_1s^{-1} - c_2s^{-2} - \ldots - c_ks^{-k})}$$

เป็นค่าคงที่ซึ่งจะทำให้ $a_n^p = (An + B)s^n$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ R หากเราสามารถหาค่า B ที่เหมาะสมได้

(3) หากกำหนดค่า A ตาม (2) เราจะแสดงได้ว่า

$$(1 - c_1s^{-1} - c_2s^{-2} - \ldots - c_ks^{-k}) = (K / A)$$

$$\frac{d(1 - c_1s^{-1} - c_2s^{-2} - \ldots - c_ks^{-k})}{ds} = \frac{d(K / A)}{ds}$$

$$(c_1s^{-2} + 2c_2s^{-3} + \ldots + kc_ks^{-(k+1)}) = 0$$

$$s^{-1}(c_1s^{-1} + 2c_2s^{-2} + \ldots + kc_ks^{-k}) = 0$$

$$(c_1s^{-1} + 2c_2s^{-2} + \ldots + kc_ks^{-k}) = 0$$

(4) จาก $B = -(c_1As^{-1} + 2c_2As^{-2} + \ldots + kc_kAs^{-k}) + (c_1Bs^{-1} + c_2Bs^{-2} + \ldots + c_kBs^{-k} + L)$ ดังแสดงใน (1) และ $(c_1s^{-1} + 2c_2s^{-2} + \ldots + kc_ks^{-k}) = 0$ ดังแสดงใน (3) เราจะได้ว่า

$$B = (c_1Bs^{-1} + c_2Bs^{-2} + \ldots + c_kBs^{-k} + L)$$

นั่นคือ

$$B = \frac{L}{(1 - c_1Bs^{-1} - c_2Bs^{-2} - \ldots - c_kBs^{-k})}$$

สังเกตว่า $1 - c_1Bs^{-1} - c_2Bs^{-2} - \ldots - c_kBs^{-k} \neq 0$ เนื่องจาก s มิใช่รากของสมการลักษณะเฉพาะ

(5) จาก (2) และ (4) เราแสดงให้เห็นว่าค่า A และ B ดังกล่าว ทำให้ $a_n^p = (An + B)s^n$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ R

การพิจารณารูปแบบของผลเฉลยเฉพาะ

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะกล่าวถึงการพิจารณารูปแบบของผลเฉลยเฉพาะ เมื่อ $F(n)$ อยู่ในรูปแบบที่เป็นรูปแบบทั่วไปของ $F(n)$ ต่าง ๆ ที่ยกในตัวอย่างที่กล่าวมาข้างต้น

ให้ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้น R ซึ่งอยู่ในรูปแบบ

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$$

โดย $c_1, c_2, \cdots, c_k$ เป็นจำนวนจริง และ รูปแบบของ $F(n)$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มบวก คือ

$$F(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \cdots + b_0 n^0) s^n$$

เมื่อ $b_t, b_{t-1}, \cdots, b_0$ และ s เป็นจำนวนจริง และ b_t ไม่เป็นศูนย์

<u>ในกรณีที่ s มิได้เป็นรากของสมการลักษณะเฉพาะที่สอดคล้องกับ R</u> จะมีผลเฉลยเฉพาะ a_n^p ของ R ที่อยู่ในรูปแบบ

$$(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_0 n^0) s^n$$

<u>ในกรณีที่ s เป็นรากของสมการลักษณะเฉพาะที่สอดคล้องกับ R และรากนั้นซ้ำกัน m ครั้ง</u> จะมีผลเฉลยเฉพาะ a_n^p ของ R ที่อยู่ในรูปแบบ

$$n^m (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_0 n^0) s^n$$

โดย $p_t, p_{t-1}, \cdots, p_0$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้ a_n^p สอดคล้องกับ R

ทฤษฎีบทข้างต้นสามารถนำไปใช้ในการคาดการณ์รูปแบบของ a_n^p จากลักษณะฟังก์ชันของ $F(n)$ ซึ่งเป็นผลคูณระหว่างฟังก์ชันพหุนามซึ่งมีสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่าง ๆ เป็นจำนวนจริง $(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_0 n^0)$ และฟังก์ชันยกกำลัง n ของจำนวนจริง s^n ได้

ยกตัวอย่างเช่น หาก $F(n) = (15n^3 + 20n^2 + n + 8) \cdot 7^n$ เป็นส่วนเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนเกิดซึ่งสมการลักษณะเฉพาะที่สอดคล้องกับส่วนเอกพันธ์ของความสัมพันธ์นั้นไม่มีรากที่เท่ากับ 7 เมื่อเทียบกับรูปแบบ $F(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \cdots + b_0 n^0) s^n$ ที่ในทฤษฎีบท จะพบว่า $t = 3$, $b_3 = 15$, $b_2 = 20$, $b_1 = 1$, $b_0 = 8$ และ $s = 7$ ดังนั้นความสัมพันธ์เวียนเกิดนี้จะมีผลเฉลยเฉพาะที่อยู่ในรูปแบบ $(p_3 n^3 + p_2 n^2 + p_1 n + p_0) \cdot 7^n$

ทฤษฎีบทข้างต้นกล่าวว่า $p_t, p_{t-1}, \cdots, p_0$ จะต้องเป็นค่าคงที่ที่ทำให้ a_n^p สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด (รวมทั้งส่วนเอกพันธ์และส่วนเฉพาะ) ที่ a_n^p เป็นผลเฉลยเฉพาะ ดังนั้นการระบุค่า $p_t, p_{t-1}, \cdots, p_0$ สามารถทำได้โดยแทนค่า a_n^p ซึ่งยังติดค่า $p_t, p_{t-1}, \cdots, p_0$ อยู่ลงในความสัมพันธ์เวียนเกิดและแก้ระบบสมการเพื่อหาค่า $p_t, p_{t-1}, \cdots, p_0$ เหล่านั้นที่ทำให้การแทนค่าเป็นจริง

อย่างไรก็ตามในกรณีที่ค่า s ในฟังก์ชัน s^n เป็นรากของสมการลักษณะเฉพาะ กำลังของพจน์ต่าง ๆ ในฟังก์ชันพหุนาม $p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_0 n^0$ จะต้องเพิ่มขึ้น m โดย m คือค่าความซ้ำของราก s ในสมการลักษณะเฉพาะ ส่งผลให้รูปแบบของผลเฉลยเฉพาะที่กล่าวถึงโดยทฤษฎีบทข้างต้นกลายเป็น $n^m (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_0 n^0) s^n$

ข้อน่าสังเกตประการหนึ่งที่จะเกิดขึ้นในกรณีที่ค่า s ในฟังก์ชัน s^n เป็นรากของสมการลักษณะเฉพาะ คือ หากเราไม่เพิ่มกำลังของพจน์ต่าง ๆ ในฟังก์ชันพหุนาม $p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_0 n^0$ ขึ้นไป m แล้ว เราจะพบว่า a_n^p จะมีพจน์ที่มีรูปแบบซ้ำกับ a_n^h ซึ่งไม่สามารถเป็นไปได้ เนื่องจากเรากำหนดให้ a_n^p เป็นส่วนของ a_n ซึ่งเพิ่มเติมขึ้นจาก a_n^h แต่พจน์ที่มีรูปแบบเหล่านั้นควรจะถูกรวมเป็นส่วนหนึ่งของ a_n^h แล้วตั้งแต่ต้น

ในที่นี้ขอเสนอข้อควรระวังสำหรับความผิดพลาดที่มักจะเกิดขึ้นกับการระบุรูปแบบของผลเฉลยเฉพาะจาก $F(n)$ ดังนี้

การเขียน $F(n)$ ที่ไม่ปรากฏพจน์ s^n ให้เห็นโดยแจ้ง

$F(n)$ ถูกเขียนในรูป $F(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \cdots + b_0 n^0)$ เช่น $F(n) = n^2 + 5n + 6$ ในกรณีเช่นนี้ให้ระลึกเสมอว่าพจน์ s^n ยังมีปรากฏอยู่โดยมีค่า s เท่ากับ 1 ดังนั้นจะต้องทำการตรวจสอบเสมอว่ามีรากของสมการลักษณะเฉพาะที่สอดคล้องกับส่วนเอกพันธ์ที่มีค่าเป็น 1 หรือไม่ เพื่อใช้รูปแบบของ a_n^p ได้อย่างถูกต้อง

พจน์พหุนามบางพจน์ของ $F(n)$ มีสัมประสิทธิ์เป็นศูนย์

เมื่อกำลังสูงสุดของพจน์พหุนามใน F(n) เท่ากับ t แต่ค่าสัมประสิทธิ์ $b_t, b_{t-1}, \cdots, b_0$ บางค่า (นอกจาก b_t) เป็น 0 ในกรณีเช่นนี้ให้พึงระวังว่าจำนวนพจน์พหุนามใน a_n^p ยังต้องมีจำนวน t พจน์ สัมประสิทธิ์ $p_t, p_{t-1}, \cdots, p_0$ ไม่จำเป็นต้องเป็น 0 ตามค่า $b_t, b_{t-1}, \cdots, b_0$

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงการหาลำดับซึ่งเป็นผลเฉลยความสัมพันธ์เวียนเกิดไม่เอกพันธ์ โดยใช้วิธีการแบ่งพจน์ต่าง ๆ ในผลเฉลยออกเป็นผลเฉลยเอกพันธ์และผลเฉลยเฉพาะ

ตัวอย่างที่ 65

จงแสดงลำดับที่เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 3a_{n-1} + 8$ โดย $a_0 = 1$

หาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดที่ต้องการโดยเขียนลำดับ a_n อยู่ในรูป $a_n = a_n^h + a_n^p$

พิจารณาส่วนเอกพันธ์ $a_n = 3a_{n-1}$ เราสามารถเขียนสมการลักษณะเฉพาะที่สอดคล้องกันได้ว่า $r - 3 = 0$ ซึ่งมีรากหนึ่งรากคือ 3 ดังนั้น $a_n^h = A3^n$ โดย A เป็นค่าคงที่ที่สัมพันธ์กับเงื่อนไขเริ่มต้นของลำดับ ซึ่งจะระบุได้ก็เมื่อเราทราบค่าผลเฉลยเฉพาะ a_n^p เรียบร้อยแล้ว

พิจารณาส่วนเฉพาะ $F(n) = 8$ จากทฤษฎีบทเกี่ยวกับการพิจารณารูปแบบของผลเฉลยเฉพาะจากฟังก์ชัน $F(n)$ เราสามารถบอกได้ว่า a_n^p ต้องอยู่ในรูปแบบ $a_n^p = p_0$ เมื่อ p_0 เป็นค่าคงที่ซึ่งทำให้ $a_n^p = 3a_{n-1}^p + 8$

แทนค่า $a_n^p = p_0$ ลงใน $a_n^p = 3a_{n-1}^p + 8$ เราจะได้ว่า $p_0 = 3p_0 + 8$ ดังนั้น p_0 ต้องมีค่าเท่ากับ –4

จาก a_n^h และ a_n^p เราได้ว่า $a_n = A3^n - 4$

พิจารณาค่าคงที่ A ซึ่งทำให้เงื่อนไขเริ่มต้นเป็นจริงนั่นคือ $a_0 = A3^0 - 4 = 1$ เราจะได้ $A = 5$

ดังนั้นลำดับที่เป็นผลเฉลยที่ต้องการคือ $a_n = 5 \cdot 3^n - 4$

ตัวอย่างที่ 66

จงแสดงลำดับที่เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$ โดย $a_0 = 1$

ในที่นี้ส่วนเอกพันธ์ของความสัมพันธ์เวียนเกิดในตัวอย่างนี้เหมือนกับความสัมพันธ์เวียนเกิดในตัวอย่างที่แล้ว ดังนั้น a_n^h ของความสัมพันธ์เวียนเกิดในตัวอย่างนี้จึงมีค่าคือ $a_n^h = A3^n$ เช่นกัน อย่างไรก็ตามค่าคงที่ A ซึ่งสัมพันธ์กับเงื่อนไขเริ่มต้นนั้นยังไม่สามารถระบุได้จนกว่าเราจะทราบผลเฉลยเฉพาะ a_n^p แล้ว

ในที่นี้ $a_n^p = p_0 2^n$ เนื่องจากส่วนเฉพาะ $F(n) = 2^n$ โดย p_0 เป็นค่าคงที่ซึ่งต้องทำให้ $a_n^p = 3a_{n-1}^p + 2^n$ เป็นจริง นั่นคือ

$p_0 2^n = p_0 2^{n-1} + 2^n$

$p_0 2^n = \frac{p_0}{2} 2^n + 2^n$

$p_0 = 2$

ดังนั้น $a_n = a_n^h + a_n^p = A3^n + 2 \cdot 2^n$ และเมื่อพิจารณาเงื่อนไขเริ่มต้น $a_0 = 1$ เราจะได้ว่าค่าคงที่ A ต้องมีค่าเท่ากับ -1

ลำดับที่เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดในตัวอย่างนี้จึงเป็น $a_n = -3^n + 2^{n+1}$

ตัวอย่างที่ 67

จงแสดงลำดับที่เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 3a_{n-1} + (5n^2 + n)2^n$ โดย $a_0 = 6$

จากส่วนเอกพันธ์ $a_n = 3a_{n-1}$ เราบอกได้ว่าผลเฉลยเอกพันธ์ของความสัมพันธ์เวียนเกิดนี้คือ $a_n^h = A3^n$ โดย A เป็นค่าคงที่ซึ่งสัมพันธ์กับเงื่อนไขเริ่มต้น

ในที่นี้ $F(n) = (5n^2 + n)2^n$ และสมการลักษณะเฉพาะของส่วนเอกพันธ์ไม่มีรากที่เท่ากับ 2 ดังนั้น $a_n^p = (p_2 n^2 + p_1 n + p_0)2^n$

แทนค่า a_n^p ลงในความสัมพันธ์เวียนเกิดเพื่อหาค่า p_2, p_1 และ p_0 ที่ทำให้ผลการแทนค่าเป็นจริง

$$(p_2 n^2 + p_1 n + p_0)2^n = 3((p_2(n-1)^2 + p_1(n-1) + p_0)2^{n-1}) + (5n^2 + n)2^n$$

$$p_2 n^2 + p_1 n + p_0 = \frac{3}{2}p_2 n^2 - 3p_2 n + \frac{3}{2}p_2 + \frac{3}{2}p_1 n - \frac{3}{2}p_1 + \frac{3}{2}p_0 + 5n^2 + n$$

$$0 = (-p_2 + \frac{3}{2}p_2 + 5)n^2 + (-p_1 - 3p_2 + \frac{3}{2}p_1 + 1)n + (-p_o + \frac{3}{2}p_2 - \frac{3}{2}p_1 + \frac{3}{2}p_0)$$

$\therefore p_2 = -10$, $p_1 = -62$ และ $p_0 = 156$

ดังนั้นผลเฉลยจากทั้งสองส่วนคือ $a_n = A3^n + (-10n^2 - 62n + 156)2^n$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $a_0 = 6$ เราจะได้ว่า $a_0 = A + 156 = 6$ นั่นคือค่าคงที่ A ต้องมีค่าเท่ากับ -150

เพราะฉะนั้นลำดับที่เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดในตัวอย่างนี้คือ

$a_n = -150 \cdot 3^n + (-10n^2 - 62n + 156)2^n$

ตัวอย่างที่ 68

จงแสดงลำดับที่เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 3a_{n-1} + (5n^2 + n)3^n$ โดย $a_0 = 1$

จากส่วนเอกพันธ์ $a_n = 3a_{n-1}$ เราบอกได้ว่าผลเฉลยเอกพันธ์ของความสัมพันธ์เวียนเกิดนี้คือ $a_n^h = A3^n$ โดย A เป็นค่าคงที่ซึ่งสัมพันธ์กับเงื่อนไขเริ่มต้น

ในที่นี้ $F(n) = (5n^2 + n)3^n$ แต่สมการลักษณะเฉพาะของส่วนเอกพันธ์มีรากที่เท่ากับ 3 จำนวน 1 ราก ดังนั้น $a_n^p = n \cdot (p_2 n^2 + p_1 n + p_0)3^n = (p_2 n^3 + p_1 n^2 + p_0 n)3^n$

แทนค่า a_n^p ลงในความสัมพันธ์เวียนเกิดเพื่อหาค่า p_2, p_1 และ p_0 ที่ทำให้ผลการแทนค่าเป็นจริง

$$(p_2n^3+p_1n^2+p_0n)3^n=3((p_2(n-1)^3+p_1(n-1)^2+p_0(n-1))3^{n-1})+(5n^2+n)3^n$$

$$p_2n^3+p_1n^2+p_0n=p_2n^3-3p_2n^2+3p_2n-p_2+p_1n^2-2p_1n+p_1+p_0n-p_0+5n^2+n$$

$$0=(-3p_2+5)n^2+(3p_2-2p_1+1)n+(-p_2+p_1-p_0)$$

$\therefore p_2=\frac{5}{3},\ p_1=3$ และ $p_0=\frac{4}{3}$

ดังนั้นผลเฉลยจากทั้งสองส่วนคือ $a_n=A3^n+(\frac{5}{3}n^2+3n^2+\frac{4}{3}n)3^n$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $a_0 = 1$ เราจะได้ว่าค่าคงที่ A ต้องมีค่าเท่ากับ 1

เพราะฉะนั้นลำดับที่เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดในตัวอย่างนี้คือ

$a_n=(\frac{5}{3}n^2+3n^2+\frac{4}{3}n+1)3^n$

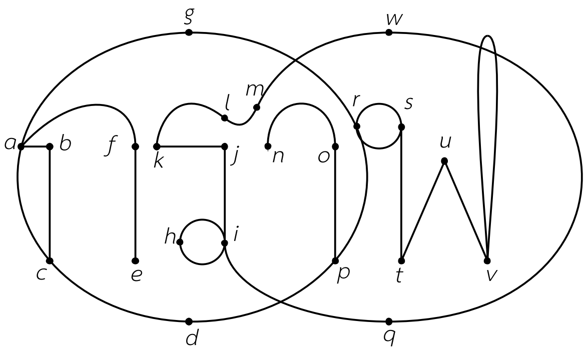
เอกสารประกอบการสอน

วิชา

2110200 โครงสร้างดิสครีต

เรื่อง

กราฟ และ ต้นไม้



โดย

ผศ. ดร.อติวงศ์ สุชาโต

ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์

คณะวิศวกรรมศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

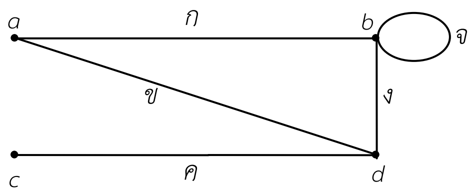
สารบัญ

กราฟ

กราฟเป็นโครงสร้างดิสครีตที่ประกอบด้วย *จุดยอด* (vertex (เอกพจน์), vertices (พหูพจน์)) และ *เส้นเชื่อม* (edge) ซึ่งเชื่อมต่อจุดยอดเหล่านั้น

กราฟ, G, สามารถแสดงโดย $G = (V, E)$

โดย V คือ เซ็ตของจุดยอด ซึ่งไม่เป็นเซ็ตว่าง
E คือ เซ็ตของเส้นเชื่อม



รูปที่ 1 : กราฟ

จากกราฟในรูปที่ 1

$V = \{a, b, c, d\}$ และ $E = \{$ก, ข, ค, ง, จ$\}$
a และ b เป็น *จุดปลาย* (Endpoints) ของ *ก*
a และ d เป็น *จุดปลาย* ของ *ข*
c และ d เป็น *จุดปลาย* ของ *ค*
b และ d เป็น *จุดปลาย* ของ *ง*
b เป็น *จุดปลาย* ของ จ เพียงจุดยอดเดียว

จุดยอดสองจุดที่เป็นจุดปลายของเส้นเชื่อมเดียวกัน เรียกว่า จุดยอดนั้น *ประชิด* (Adjacent) กัน และ เส้นเชื่อมดังกล่าว *อุบัติ* (Incident) กับจุดยอดทั้งสอง

กราฟที่มีจำนวนจุดยอดเป็นอนันต์เรียก *กราฟอนันต์* (Infinite graph) ตรงกันข้ามถ้า V มีสมาชิกจำกัด กราฟนั้นเรียก *กราฟอันตะ* (Finite Graph)

การกำหนดกราฟหนึ่งกราฟประกอบด้วยการกำหนดจุดยอดและเส้นเชื่อม แต่อย่างไรก็ตามเราควรจะคำนึงเสมอว่าการกำหนดเส้นเชื่อมนั้นจะต้องสอดคล้องกับจุดยอดเสมอ นั่นหมายความว่าสมาชิกแต่ละตัวใน E ของกราฟ $G = (V, E)$ จะต้องมีการกำหนดจุดปลายสองจุดซึ่งแต่ละจุดเป็นสมาชิกของ V เสมอ เราอาจมองได้ว่าการกำหนดกราฟ $G = (V, E)$ หนึ่งกราฟที่มีการกำหนดสมาชิกของ V มาแล้ว เป็นเพียงแค่การกำหนดว่าจุดยอดเหล่านั้นจะเชื่อมกันอย่างไร

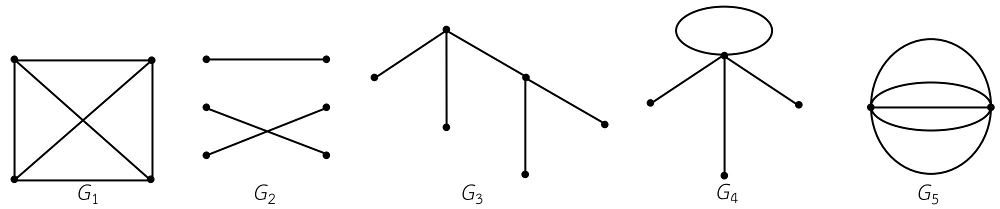
กราฟเชิงเดียว กราฟหลายทาง และ กราฟเทียม

กราฟเชิงเดียว (Simple Graph) คือ กราฟที่มีอย่างมากหนึ่งเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดคู่ใดๆ และ ไม่มีเส้นเชื่อมที่ปลายทั้งสองเชื่อมต่อจุดยอดเดียวกัน หรือ *วงวน* (loop)

กราฟหลายทาง (Multigraph) คือ กราฟที่บางคู่ของจุดยอดสามารถมีเส้นเชื่อมมากกว่าหนึ่งเส้น (multiple edges)

กราฟเทียม (Pseudograph) คือ กราฟที่สามารถมีวงวนได้ หรือ บางคู่ของจุดยอดสามารถมีเส้นเชื่อมมากกว่าหนึ่งเส้นได้ นั่นคือกราฟทุกกราฟเป็นกราฟเทียม

รูปที่ 2 แสดงตัวอย่างของกราฟแบบต่างๆ โดย G_1, G_2, และ G_3 เป็นกราฟเชิงเดียว ขณะที่ G_4 และ G_5 ไม่เป็นกราฟเชิงเดียวเนื่องจากการปรากฏของวงวนใน G_4 และเส้นเชื่อมหลายเส้นระหว่างจุดยอดคู่เดียวกันใน G_5



รูปที่ 2 : ตัวอย่างของกราฟเชิงเดียวและกราฟที่ไม่เป็นกราฟเชิงเดียว

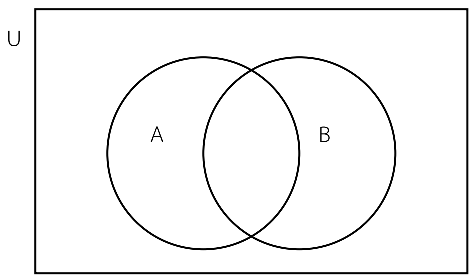
จากแผนภาพเวนน์ในรูปที่ 3

ให้ A เป็นเซ็ตของกราฟที่มีคู่ของจุดยอดที่มีเส้นเชื่อมมากกว่าหนึ่งเส้น

B เป็นเซ็ตของกราฟที่มีวงวน

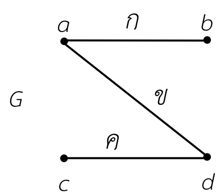
U เป็นเอกภพ (Universe)

เราแสดงได้ว่า กราฟเชิงเดียว $\in$ $(A\cup B)'$, กราฟหลายทาง $\in$ U$-$B, และ กราฟเทียม $\in$ U



รูปที่ 3 : แผนภาพเวนน์แสดงความเป็นสมาชิกของกราฟเชิงเดียว กราฟหลายทาง และ กราฟเทียม (ดูคำบรรยายในเนื้อหาประกอบ)

การอ้างถึงเส้นเชื่อมในกราฟเชิงเดียวอาจทำได้โดยแสดงเซ็ตที่ระบุจุดปลายทั้งสองของเส้นเชื่อมนั้นๆ เช่น จากกราฟ G ในรูปที่ 4 เส้นเชื่อม *ก* อาจถูกอ้างถึงได้โดย $\{a, b\}$ เส้นเชื่อม *ข* โดย $\{a, d\}$ และ เส้นเชื่อม *ค* โดย $\{c, d\}$



รูปที่ 4 : กราฟ

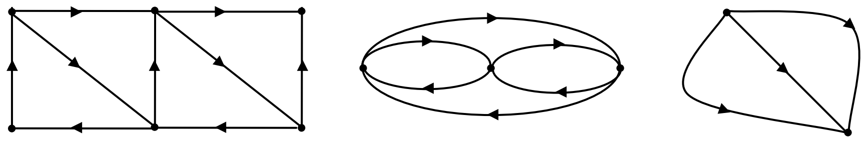
ตัวอย่างที่ 1

กราฟ G ถูกนิยามด้วย $G = (V, E)$ โดย $V = \{a, b, c, d\}$ จงหาจำนวนแบบทั้งหมดของ G ที่แตกต่างกัน ซึ่งทำให้ G เป็นกราฟเชิงเดียว

เนื่องจากเส้นเชื่อมหนึ่งเส้นในกราฟเชิงเดียวจะต้องมีจุดปลายที่แตกต่างกัน 2 จุด ดังนั้นจากจุดยอด 4 จุด เราสามารถสร้างเส้นเชื่อมที่แตกต่างกันได้มากที่สุด $C(4, 2) = 6$ แบบ
เมื่อจุดยอดทั้งสี่ถูกกำหนดไว้แล้ว กราฟเชิงเดียวแต่ละแบบเกิดจากการที่เราเลือกที่จะรวมเส้นเชื่อมแต่ละเส้นจากทั้งหมด 6 เส้นนั้นหรือไม่ ดังนั้นจำนวนแบบทั้งหมดคือ 2^6 แบบ

ความมีทิศทางในกราฟ

กราฟที่เราได้กล่าวมาข้างต้นนั้น มีเส้นเชื่อมซึ่งแต่ละเส้นสอดคล้องกับจุดยอดสองจุด โดยลำดับของจุดยอดทั้งสองไม่มีความสำคัญ กราฟเหล่านั้นสามารถเรียกได้ว่าเป็น *กราฟไม่มีทิศทาง* (Undirected Graph) ในทางตรงกันข้าม *กราฟมีทิศทาง* (Directed Graph หรือ Digraph) คือ กราฟที่แต่ละเส้นเชื่อมสอดคล้องกับ *คู่ลำดับ* (Ordered Pair) ของจุดยอดสองจุด นั่นคือ เส้นเชื่อมมีทิศทางนั่นเอง รูปที่ 5 แสดงตัวอย่างของกราฟมีทิศทาง



G_1 G_2 G_3

รูปที่ 5 : ตัวอย่างของกราฟมีทิศทาง

กราฟมีทิศทางเป็นแบบเชิงเดียว หรือ *กราฟมีทิศทางเชิงเดียว* (Simple Directed Graph) เมื่อเส้นเชื่อมที่สอดคล้องกับคู่ลำดับ (u, v) โดย u และ v เป็นจุดยอดในกราฟมีทิศทางนั้น มีอย่างมากหนึ่งเส้น และไม่มีวงวนอยู่ในกราฟนั้น สังเกตว่ากราฟมีทิศทางเชิงเดียวสามารถที่จะมีทั้งเส้นเชื่อมที่สอดคล้องกับ (u, v) และ (v, u) ได้ กราฟ G_1 และ G_2 ในรูปที่ 5 เป็นกราฟมีทิศทางเชิงเดียว

กราฟหลายทางมีทิศทาง (Directed Multigraph) มีเส้นเชื่อมที่สอดคล้องกับคู่ลำดับบางคู่มากกว่าหนึ่งเส้น และอาจมีวงวนได้ กราฟ G_3 ในรูปที่ 5 เป็นกราฟหลายทางมีทิศทาง

หากกราฟไม่มีทิศทาง G_u สร้างได้จากการไม่สนใจทิศทางของเส้นเชื่อมต่อทั้งหมดในกราฟมีทิศทาง G_d เราสามารถกล่าวได้ว่า G_u เป็น *กราฟไม่มีทิศทางรองรับ* (Underlying Undirected Graph) ของ G_d

กราฟผสม (Mixed Graph) คือ กราฟที่เส้นเชื่อมมีทั้งแบบมีทิศทาง และ ไม่มีทิศทาง

ตารางที่ 1 สรุปข้อกำหนดของกราฟแต่ละประเภทที่กล่าวมา

ประเภท	ทิศทางในเส้นเชื่อม	เส้นเชื่อมสอดคล้องกับคู่จุดยอดที่ซ้ำกัน	วงวน
กราฟเชิงเดียว	ไม่มีทิศทาง	ไม่มี	ไม่มี
กราฟหลายทาง	ไม่มีทิศทาง	มีได้	ไม่มี
กราฟเทียม	ไม่มีทิศทาง	มีได้	มีได้
กราฟมีทิศทางเชิงเดียว	มีทิศทาง	ไม่มี	ไม่มี
กราฟหลายทางมีทิศทาง	มีทิศทาง	มีได้	มีได้
กราฟผสม	มีทั้งสองประเภท	มีได้	มีได้

ตารางที่ 1 : ตารางสรุปข้อกำหนดของกราฟแบบต่างๆ

ตัวอย่างที่ 2

กราฟ G ถูกนิยามด้วย $G = (V, E)$ โดย $V = \{a, b, c, d\}$ จงหาจำนวนแบบทั้งหมดของ G ที่แตกต่างกัน ซึ่งทำให้ G เป็นกราฟเชิงเดียวมีทิศทาง

เนื่องจากเส้นเชื่อมหนึ่งเส้นในกราฟเชิงเดียวจะต้องมีจุดปลายที่แตกต่างกัน 2 จุด ดังนั้นจากจุดยอด 4 จุด ถ้าไม่พิจารณาทิศทางเราสามารถสร้างเส้นเชื่อมที่แตกต่างกันได้มากที่สุด $C(4, 2) = 6$ แบบ แต่ละแบบสามารถสร้างเส้นเชื่อมมีทิศทางได้ 2 แบบ ดังนั้นเส้นเชื่อมมีทิศทางที่แตกต่างกันมีได้ $2 \times 6 = 12$ แบบ (หรือเท่ากับ $P(4,2)$ แบบ เนื่องจากเราสนใจลำดับในการเลือกจุดยอดด้วย)

เมื่อจุดยอดทั้งสี่ถูกกำหนดไว้แล้ว กราฟเชิงเดียวมีทิศทางแต่ละแบบเกิดจากการที่เราเลือกที่จะรวมเส้นเชื่อมแต่ละเส้นจากทั้งหมด 12 เส้นนั้นหรือไม่ ดังนั้นจำนวนแบบทั้งหมดคือ 2^{12} แบบ

จากวิธีการคิดในการหาจำนวนกราฟเชิงเดียวที่แตกต่างกันเมื่อกำหนดเซ็ตของจุดยอดในตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 เราสามารถสรุปได้ว่า

กราฟเชิงเดียวแบบไม่มีทิศทางที่มีจุดยอดที่แตกต่างกัน n จุดสามารถมีได้แตกต่างกันทั้งหมด $2^{C(n,2)}$ แบบ

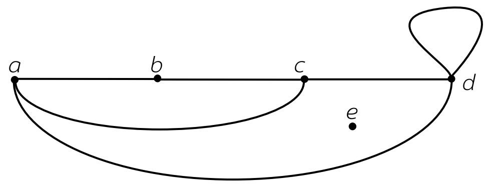
และ

กราฟเชิงเดียวแบบมีทิศทางที่มีจุดยอดที่แตกต่างกัน n จุดสามารถมีได้แตกต่างกันทั้งหมด $2^{P(n,2)}$ แบบ

ผู้อ่านควรลองใช้ประยุกต์เทคนิคการนับเพื่อทดลองหาจำนวนแบบที่เป็นไปได้ของกราฟชนิดต่างๆ เมื่อกำหนดเซ็ตของจุดยอด และ/หรือ เซ็ตของเส้นเชื่อมเอาไว้

ดีกรีของจุดยอดในกราฟ

ดีกรี (degree) ของจุดยอดในกราฟไม่มีทิศทาง คือ จำนวนเส้นเชื่อมที่อุบัติกับจุดยอดนั้น ยกเว้นเส้นเชื่อมที่เป็นวงวนจะนับเป็นสอง ดีกรีของจุดยอด v ใดๆ สามารถแทนด้วย deg(v) รูปที่ 6 แสดงตัวอย่างการหาดีกรีของจุดยอดในกราฟ



deg(a) = 3,
deg(b) = 2,
deg(c) = 3,
deg(d) = 4,
deg(e) = 0

รูปที่ 6 : ตัวอย่างการหาดีกรีของจุดยอดในกราฟ

ตัวอย่างที่ 3

จงแสดงว่า ในกราฟเชิงเดียวใดๆ ที่มีจุดยอดมากกว่าหนึ่งจุดจะต้องมีจุดยอดอย่างน้อยหนึ่งคู่ที่มีดีกรีเท่ากัน

(1) ให้ V เป็นเซ็ตของจุดยอดของกราฟเชิงเดียว G ที่มีจุดยอดทั้งหมด n จุด

(2) สำหรับ $u \in V$ แล้ว deg(u) ใดๆ เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $0 \le$ deg(u) $\le n$-1 เนื่องจาก G เป็นกราฟเชิงเดียว

(3) จาก (2) ค่าของแต่ละ deg(u) เป็นไปได้ n ค่าและเนื่องจากมีจุดยอดทั้งหมด n จุด ดังนั้นหากไม่มีจุดยอดที่มีดีกรีซ้ำกันเลย จุดยอดทั้ง n จุดจะต้องมีดีกรีเท่ากับ 0, 1, 2, ..., n-1 หรือแสดงว่าจะต้องมี $V = \{v_0, v_1, ..., v_{n-1}\}$ โดย deg(v_i) = i , i = 0, 1, 2, ..., n-1

(4) หาก v_{n-1} มีดีกรีเท่ากับ n-1 ได้แสดงว่า v_{n-1} ต้องประชิดกับจุดยอดที่เหลือทั้งหมด แต่เนื่องจาก v_0 จะต้องไม่มีเส้นเชื่อม ดังนั้นจึงเป็นไปไม่ได้ที่จะมีเซ็ต V ดังเช่นใน (3) ดังนั้นการสมมติว่าไม่มีจุดยอดที่มีดีกรีซ้ำกันเลยจึงไม่เป็นจริง นั่นคือในกราฟเชิงเดียวใดๆ ที่มีจุดยอดมากกว่าหนึ่งจุดจะต้องมีจุดยอดอย่างน้อยหนึ่งคู่ที่มีดีกรีเท่ากัน

ทฤษฎีบทที่ 1 ทฤษฎีบทการจับมือ (The Handshaking Theorem)

ทฤษฎีบทการจับมือ กล่าวว่า

ให้ G = (V, E) เป็นกราฟไม่มีทิศทางที่มีเส้นเชื่อมจำนวน e เส้น แล้ว

$$2e = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

การที่ความสัมพันธ์ของดีกรีกับจำนวนเส้นเชื่อมเป็นเช่นนี้ เนื่องจากแต่ละเส้นเชื่อมจะต้องมีผลต่อการเพิ่มของดีกรีรวมของทุกจุดยอดเท่ากับสอง ไม่ว่าเส้นเชื่อมนั้นจะเป็นหรือไม่เป็นวงวนก็ตาม

ทฤษฎีบทที่ 2 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับดีกรีของจุดยอด

ในกราฟไม่มีทิศทาง จำนวนจุดยอดที่มีดีกรีคี่จะต้องเป็นเลขคู่

พิสูจน์

(1) ดีกรีรวมของจุดยอดทุกจุดเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อม (จากทฤษฎีบทการจับมือ)

(2) เนื่องจาก (1) ดีกรีรวมต้องเป็นเลขคู่

(3) ดีกรีรวมของจุดยอดทุกจุด, deg, เท่ากับผลรวมของดีกรีของจุดยอดที่มีดีกรีคู่, $\deg_e$, และดีกรีของจุดยอดที่มีดีกรีคี่, $\deg_o$

(4) $\deg_e$ เป็นเลขคู่เสมอ เนื่องจากผลรวมของเลขคู่ย่อมเป็นเลขคู่

(5) จาก (2), (3) และ (4) $\deg_o$ ก็ต้องเป็นเลขคู่ด้วย

(6) เนื่องจาก (5) จำนวนจุดยอดที่มีดีกรีคี่จึงต้องมีเป็นจำนวนคู่ จึงจะทำให้ $\deg_o$ เป็นเลขคู่

ตัวอย่างที่ 4

จงหาจำนวนกราฟเชิงเดียวที่เป็นไปได้ทั้งหมด หากกำหนดว่ากราฟนั้นมีจุดยอด 5 จุดโดยมีดีกรีเท่ากับ 1, 1, 1, 2, และ 2

เนื่องจากดีกรีรวมของจุดยอดเป็นเลขคี่ เราจึงสามารถสรุปได้ว่าไม่มีกราฟที่มีสมบัติดังกล่าว ไม่ว่าจะเป็นกราฟเชิงเดียวหรือไม่ก็ตาม

ตัวอย่างที่ 5

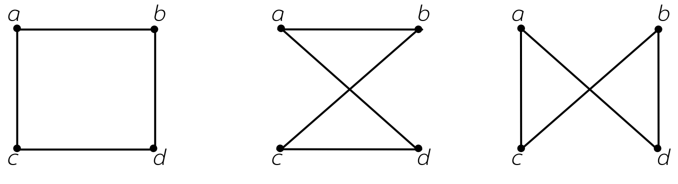
กราฟ *G* เป็นกราฟเชิงเดียวไม่มีทิศทางซึ่งมีจุดยอด 4 จุดคือ *a*, *b*, *c*, และ *d* โดยจุดยอดทั้งสี่มีดีกรีเท่ากับ 2 จงหาว่ามี *G* ที่เป็นตามข้อกำหนดนี้ที่แตกต่างกันกี่แบบ

(1) กราฟเชิงเดียวที่มีจุดยอดคือ *a*, *b*, *c*, และ *d* มีเส้นเชื่อมที่เป็นไปได้ทั้งหมด C(4,2) แบบคือ {*a*,*b*}, {*a*,*c*}, {*a*,*d*}, {*b*,*c*}, {*b*,*d*}, และ {*c*,*d*}

(2) จากทฤษฎีบทการจับมือ กราฟที่มีจุดยอด 4 จุดโดยแต่ละจุดมีดีรีเท่ากับ 2 นั้น จะต้องมีจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟเท่ากับ 4 เส้น

(3) เนื่องจากดีกรีของ *a* เป็น 2 เส้นเชื่อมทั้งสองที่อุบัติกับ *a* เป็นได้ 3 กรณี คือ กรณีแรก เส้นเชื่อมทั้งสองคือ {*a*,*b*} และ {*a*,*c*} กรณีที่สอง เส้นเชื่อมทั้งสองคือ {*a*,*b*} และ {*a*,*d*} กรณีสุดท้าย เส้นเชื่อมทั้งสองคือ {*a*,*c*} และ {*a*,*d*}

(4) ในแต่ละกรณีพิจารณาเลือกเส้นเชื่อมที่เหลืออีกสองเส้นจาก {*b*,*c*}, {*b*,*d*}, และ {*c*,*d*} เนื่องจากดีกรีของจุดยอด *a* เป็น 2 เรียบร้อยแล้ว ในกรณีแรกเส้นเชื่อมอีกสองเส้นที่เหลือจะต้องเป็น {*b*,*d*}, และ {*c*,*d*} เท่านั้น ในกรณีที่สองเส้นเชื่อมอีกสองเส้นที่เหลือจะต้องเป็น {*b*,*c*}, และ {*c*,*d*} เท่านั้น ในกรณีที่สองเส้นเชื่อมอีกสองเส้นที่เหลือจะต้องเป็น {*b*,*c*}, และ {*b*,*d*} เท่านั้น นั่นคือในแต่ละกรณีมีวิธีการเลือกเส้นเชื่อมอีกสองเส้นได้เพียงวิธีเดียวเท่านั้น ดังนั้นกราฟ *G* มีได้ 3 แบบ ดังรูปที่ 7



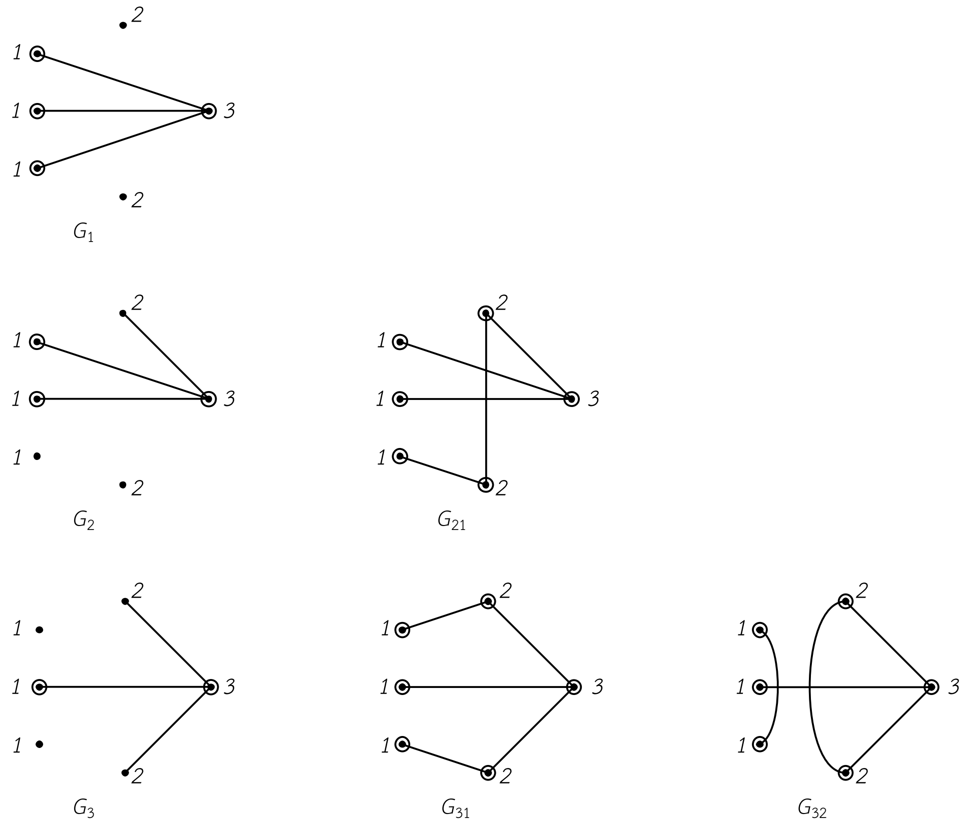
รูปที่ 7 : กราฟเชิงเดียวไม่มีทิศทางที่มี 4 จุดยอด โดยจุดยอดแต่ละจุดมีดีกรีเท่ากับ 2

ตัวอย่างที่ 6

จงหาจำนวนกราฟเชิงเดียวที่มีจุดยอด 6 จุดที่เป็นไปได้ทั้งหมด ถ้าจุดยอด 3 จุดมีดีกรี 1 จุดยอดอีก 2 จุดมีดีกรี 2 และจุดยอดที่เหลืออีกหนึ่งจุดมีดีกรี 3 หากถือว่าจุดยอดที่มีดีกรีเดียวกันไม่มีความแตกต่างกัน

(1) พิจารณาจุดยอดที่มีดีกรี 3 เส้นเชื่อมที่อุบัติกับจุดยอดนี้มี 3 เส้น เพื่อให้เป็นกราฟเชิงเดียว กราฟนี้ไม่สามารถมีวงวนได้ ดังนั้นเซ็ตของจุดยอดที่ประชิดกับจุดยอดดีกรี 3 นี้อาจเป็นได้ 3 กรณีคือ กรณีที่หนึ่งเซ็ตดังกล่าวเป็นเซ็ตของจุดยอดดีกรี 1 ทั้งหมด กรณีที่สองเซ็ตดังกล่าวเป็นเซ็ตของจุดยอดดีกรี 1 สองจุดและมีดีกรี 2 อีกหนึ่งจุด และกรณีที่สาม เซ็ตดังกล่าวเป็นเซ็ตของจุดยอดดีกรี 1 หนึ่งจุดและมีดีกรี 2 อีกสองจุด บางส่วนของกราฟในกรณีทั้งสามสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 8 กราฟ G_1 แสดงการเชื่อมต่อในกรณีที่หนึ่ง กราฟ G_2 แสดงการเชื่อมต่อในกรณีที่สอง และกราฟ G_3 แสดงการเชื่อมต่อในกรณีที่สาม ตัวเลขที่กำกับอยู่ที่แต่ละจุดยอดแสดงดีกรีของจุดยอดนั้น จุดยอดที่มีวงกลมล้อมรอบแสดงถึงจุดยอดที่มีเส้นเชื่อมครบตามดีกรีแล้ว

(2) พิจารณากรณีที่หนึ่ง (ดูกราฟ G_1 ในรูปที่ 8 ประกอบ) จุดยอดดีกรีสองที่เหลือต้องประชิดกันเองด้วยเส้นเชื่อมสองเส้นเพื่อให้เส้นเชื่อมครบตามดีกรี หรือมิฉะนั้นก็ต้องมีวงวนเกิดขึ้น ดังนั้นในกรณีนี้เราสามารถสรุปได้ว่าไม่สามารถมีกราฟเชิงเดียวเกิดขึ้นได้



รูปที่ 8

(3) พิจารณากรณีที่สอง (ดูกราฟ G_2 ในรูปที่ 8 ประกอบ) หากจุดยอดดีกรี 1 ที่ยังไม่มีเส้นเชื่อมประชิดกับจุดยอดดีกรี 2 ที่ประชิดกับจุดยอดดีกรี 3 แล้ว (จุดยอดดีกรี 2 ที่อยู่ด้านบน ตามรูป) จุดยอดทั้งสองจะมีดีกรีครบ ส่งผลให้จุดยอดดีกรี 2 ที่เหลืออยู่ (จุดยอดดีกรี 2 ที่อยู่ด้านล่าง ตามรูป) จะต้องมีวงวนเพื่อให้ดีกรีของตนครบ 2 ซึ่งจะทำให้กราฟไม่เป็นเชิงเดียว ดังนั้นในกรณีของ G_2 นี้ จุดยอดดีกรี 1 ที่

ยังไม่มีเส้นเชื่อมจะต้องประชิดกับจุดยอดดีกรี 2 ที่ยังไม่มีเส้นเชื่อมเลย แล้วจุดยอดดีกรี 2 ทั้งคู่ก็ประชิดกันเองเพื่อให้เกิดกราฟเชิงเดียวดังกราฟ G_{21} ในรูปที่ 8 เราสรุปได้ว่าในกรณีที่สองนี้เกิดกราฟเชิงเดียวได้เพียงหนึ่งแบบ

(4) พิจารณากรณีที่สาม (ดูกราฟ G_3 ในรูปที่ 8 ประกอบ) เพื่อให้จุดยอดที่เหลือมีดีกรีครบ จุดยอดดีกรี 1 แต่ละจุดอาจจะประชิดกับจุดยอดดีกรี 2 หรือ จุดยอดดีกรี 1 อาจจะประชิดกันเองใน ขณะที่จุดยอด 2 ก็ประชิดกันเองเช่นกัน ในกรณีแรกกราฟที่ได้คือ G_{31} ในรูปที่ 8 ในกรณีหลังกราฟที่ได้คือ G_{32} ซึ่งกราฟทั้งสองเป็นแบบเชิงเดียวทั้งคู่ เราสรุปได้ว่าในกรณีที่สามนี้เกิดกราฟเชิงเดียวได้เพียง 2 แบบ

(5) จาก (2), (3) และ (4) กราฟเชิงเดียวที่มีดีกรีของจุดยอดดังกล่าวจะมีได้ 3 แบบ

สำหรับกราฟมีทิศทาง ถ้า (u, v) เป็นคู่ลำดับซึ่งสอดคล้องกับเส้นเชื่อมหนึ่งของกราฟนั้น เราจะกล่าวว่า เส้นเชื่อมนั้น *ประชิดจาก* (adjacent from) u ซึ่งเป็น *จุดยอดเริ่มต้น* (Initial Vertex) ของเส้นเชื่อมนั้น โดย v จะถูกเรียกว่า ปลายทาง (Terminal) หรือ *จุดยอดจบ* (End Vertex) ของเส้นเชื่อมนั้น ในกรณีของวงวน จุดยอดเริ่มต้น และ ปลายทาง เป็นจุดยอดเดียวกัน

ดีกรีเข้า (in-degree) ยังจุดยอด v, $\deg^-(v)$ คือ จำนวนเส้นเชื่อมที่มี v เป็นปลายทาง *ดีกรีออก* (out-degree) จากจุดยอด v, $\deg^+(v)$ คือ จำนวนเส้นเชื่อมที่มี v เป็นจุดยอดเริ่มต้น ในกรณีของจุดยอดที่มีวงวน เนื่องจากจุดยอดนั้นเป็นทั้งจุดยอดเริ่มต้นและปลายทาง ดังนั้นเส้นเชื่อมที่เป็นวงวนหนึ่งเส้นจึงถูกนับในทั้งดีกรีเข้าและดีกรีออก

ทฤษฎีบทที่ 3

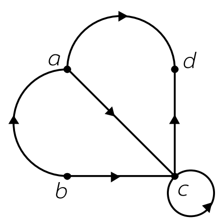
ให้ G = (V, E) เป็นกราฟมีทิศทาง

$$\sum_{v\in V}\deg^-(v) = \sum_{v\in V}\deg^+(v) = |E|$$

เนื่องจากแต่ละเส้นเชื่อมจะต้องมีหนึ่งจุดยอดเริ่มต้นและหนึ่งปลายทาง (ไม่เว้นแม้แต่วงวน) ดังนั้นผลรวมของดีกรีเข้าและดีกรีออกจะต้องเท่ากันและเท่ากับจำนวนจุดยอดทั้งหมด

ตัวอย่างที่ 7

จงแสดงดีกรีเข้าและดีกรีออกของจุดยอดแต่ละจุดในกราฟ G ดังแสดงในรูปที่ 9 พร้อมทั้งแสดงว่าผลรวมของดีกรีเข้าเท่ากับผลรวมของดีกรีออกและเท่ากับจำนวนเส้นเชื่อม



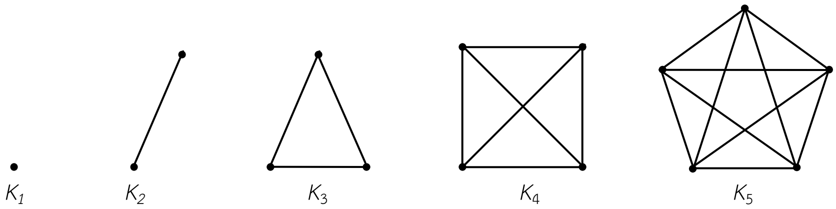
G

รูปที่ 9

จากรูป $\deg^{-}(a) = 1$, $\deg^{+}(a) = 2$, $\deg^{-}(b) = 0$, $\deg^{+}(b) = 2$, $\deg^{-}(c) = 3$, $\deg^{+}(c) = 2$, $\deg^{-}(d) = 2$, $\deg^{+}(d) = 0$ โดย $\deg^{-}(a) + \deg^{-}(b) + \deg^{-}(c) + \deg^{-}(d) = \deg^{+}(a) + \deg^{+}(b) + \deg^{+}(c) + \deg^{+}(d) = 6$ ซึ่งก็คือจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟ G

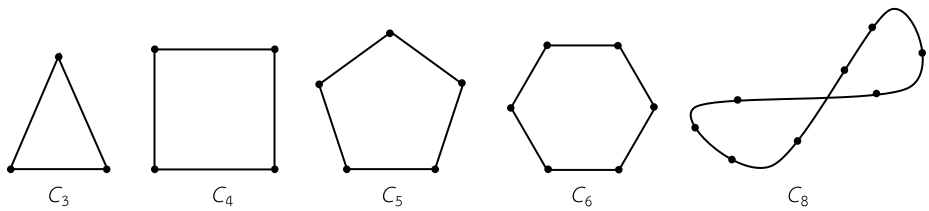
กรณีเฉพาะที่น่าสนใจของกราฟ

กราฟสมบูรณ์ (Complete Graph) คือ กราฟเชิงเดียวที่มีเส้นเชื่อมหนึ่งเส้นระหว่างทุกคู่ของจุดยอดที่เป็นไปได้ กราฟสมบูรณ์ที่มีจุดยอด n จุด สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ K_n รูปที่ 10 แสดงตัวอย่างของกราฟสมบูรณ์ที่มีจำนวนจุดยอดต่างๆ กัน



รูปที่ 10 : กราฟสมบูรณ์

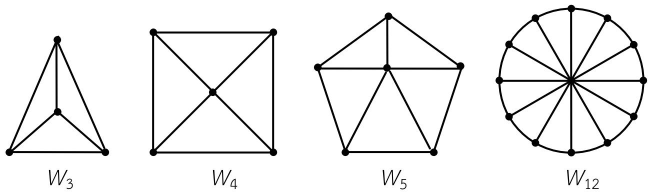
วัฏจักร (Cycle) ที่มีจุดยอด n จุด โดย $n \geq 3$ คือ กราฟที่ประกอบด้วยจุดยอด n จุด โดยมีเส้นเชื่อม n-1 เส้นที่ต่ออนุกรมกันจนครบวง นั่นคือหากเรียกจุดยอด n จุดตามลำดับว่า $v_1, v_2, \ldots, v_n$ แล้วจะต้องมีเส้นเชื่อม n-1 เส้นคือ $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$ วัฏจักรที่มีจุดยอด n จุด สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ C_n รูปที่ 11 แสดงตัวอย่างของวัฏจักรที่มีจำนวนจุดยอดต่างๆ กัน



รูปที่ 11 : วัฏจักร

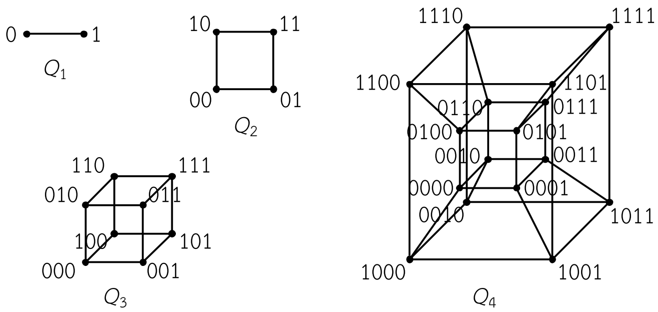
วงล้อ (Wheel) ที่มีจุดยอด n+1 จุด โดย $n \geq 3$ คือ กราฟที่เกิดจากการเติมจุดยอดอีกหนึ่งจุดเพิ่มเข้าไปใน C_n โดยที่จุดยอดที่เติมเข้าไปนั้นมีดีกรี n และเชื่อมต่อกับแต่ละจุดยอดใน C_n โดยเส้นเชื่อมใหม่หนึ่งเส้น วงล้อที่มีจุดยอด n+1 จุดหรืออาจกล่าวได้ว่าสร้างจาก C_n สามารถแทนด้วยสัญลักษณ์ W_n รูปที่ 12 แสดงตัวอย่างของวงล้อที่มีจำนวนจุดยอดต่างๆ กัน

อติวงศ์ สุชาโต
ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 12 : วงล้อ

ลูกบาศก์เกิน n มิติ (*n*-dimensional Hypercube) ซึ่งใช้สัญลักษณ์ Q_n เป็นกราฟที่จุดยอดทั้ง 2^n จุดในกราฟนั้นแทนสายบิต (Bit String) ที่มีความยาว n ยกตัวอย่างเช่น Q_3 มีเซ็ตของจุดยอดคือ {000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111} จุดยอดสองจุดจะประชิดกันก็ต่อเมื่อสายบิตที่สอดคล้องกับจุดยอดทั้งสองนั้นแตกต่างกันเพียงแค่บิตเดียว รูปที่ 13 แสดงตัวอย่างของลูกบาศก์เกินที่มีมิติต่างๆ กัน



รูปที่ 13 : ลูกบาศก์เกิน

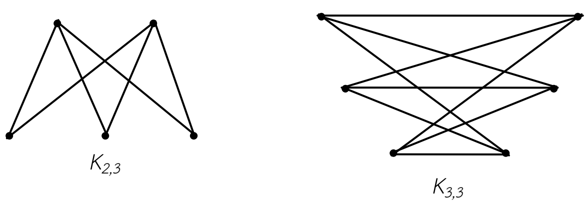
กราฟสองส่วน

กราฟสองส่วน (Bipartite Graph) คือ กราฟที่เซ็ตของจุดยอดสามารถถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนที่ไม่ทับกัน แล้วไม่มีเส้นเชื่อมที่เชื่อมระหว่างจุดยอดที่อยู่ในส่วนเดียวกัน

กราฟเชิงเดียวเป็นกราฟสองส่วนก็ต่อเมื่อเราสามารถระบายสีหนึ่งในสองสีแก่จุดยอดแต่ละจุด โดยที่ไม่มีจุดยอดใดที่ประชิดกันแล้วมีสีเดียวกัน

กราฟสองส่วนที่เมื่อแบ่งจุดยอดเป็นสองส่วน ส่วนหนึ่งมี m จุด และอีกส่วนมี n จุด แล้วมีเส้นเชื่อมจากทุกจุดยอดในส่วนแรกไปยังทุกจุดยอดในส่วนที่สอง เรียกว่า กราฟสองส่วนสมบูรณ์ ซึ่งเขียนแทนด้วย $K_{m,n}$

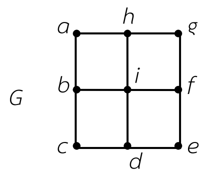
รูปที่ 14 แสดงตัวอย่างของกราฟสองส่วน



รูปที่ 14 : กราฟสองส่วน

ตัวอย่างที่ 8

จงแสดงว่ากราฟ G ในรูปที่ 15 เป็นกราฟสองส่วน



รูปที่ 15

เนื่องจากเราสามารถแบ่งจุดยอดทั้งหมดของ G เป็นสองเซ็ตคือ $\{a, c, e, g, i\}$ และ $\{b, d, f, h\}$ การแบ่งเช่นนี้ทำให้จุดยอดในเซ็ตเดียวกันนั้นไม่ประชิดกัน ดังนั้น G จึงเป็นกราฟสองส่วน

ตัวอย่างที่ 9

จงแสดงว่า C_n เป็นกราฟสองส่วนเสมอสำหรับจำนวนเต็มคู่ $n \geq 4$

(1) ให้ $C_n = \{V, E\}$ โดย $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ และ $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่ที่มากกว่าหรือเท่ากับ 4

(2) จากสมาชิกทั้งหมดของ E ใน (1) เราจะเห็นว่าไม่มีเส้นเชื่อม $\{v_i, v_j\}$ ใดที่ทั้ง i และ j เป็นจำนวนเต็มคู่ทั้งคู่ หรือ ทั้ง i และ j เป็นจำนวนเต็มคี่ทั้งคู่ ดังนั้นเราสามารถแบ่งจุดยอดเป็นสองเซ็ต โดยให้เซ็ตหนึ่งมีสมาชิกเป็น v_k สำหรับ k ที่เป็นจำนวนเต็มคู่ทั้งหมด และอีกเซ็ตหนึ่งมีสมาชิกเป็น v_k สำหรับ k ที่เป็นจำนวนเต็มคี่ทั้งหมด การแบ่งเช่นนี้ทำให้จุดยอดในเซ็ตเดียวกันนั้นไม่ประชิดกัน ดังนั้น C_n เป็นกราฟสองส่วนเสมอสำหรับจำนวนเต็มคู่ $n \geq 4$

ตัวอย่างที่ 10

จงแสดงว่า C_n ไม่สามารถเป็นกราฟสองส่วนได้ ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่มากกว่าหรือเท่ากับ 3

(1) สำหรับ C_3 ซึ่งมีจุดยอด v_1, v_2, v_3 และเส้นเชื่อม $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}$, และ $\{v_3, v_1\}$ จะเห็นว่าหากต้องแบ่งจุดยอดทั้งสามออกเป็นสองเซ็ตโดยจุดยอดในเซ็ตเดียวกันไม่ประชิดกันนั้น v_2 ต้องอยู่คนละเซ็ตกับ v_1 และ v_3 ต้องอยู่คนละเซ็ตกับ v_2 แต่ v_1 และ v_3 ประชิดกันจึงไม่สามารถอยู่เซ็ตเดียวกันได้ การแบ่งดังกล่าวจึงไม่สามารถเป็นไปได้

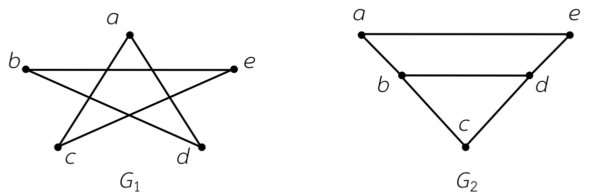
(2) สำหรับ $n > 3$ ให้ $C_n = \{V, E\}$ โดย $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ และ $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$

(3) แบ่งจุดยอดเป็นสองเซ็ต โดยเรียกเซ็ตที่มี v_1 เป็นสมาชิกว่า A ส่วนอีกเซ็ตหนึ่งเรียกว่า B

(4) จากการพิจารณาเส้นเชื่อม $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}$ หากพยายามทำให้จุดยอดในเซ็ตเดียวกันไม่ประชิดกัน v_k สำหรับ k ที่เป็นจำนวนเต็มคี่ทั้งหมดจะต้องเป็นสมาชิกของ A และจุดยอดที่เหลือต้องเป็นสมาชิกของ B อย่างไรก็ตาม เนื่องจากมีเส้นเชื่อมอีกเส้นหนึ่งคือ $\{v_n, v_1\}$ โดย n เป็นจำนวนเต็มคี่ v_n จึงอยู่ใน A ไม่ได้ จากความขัดแย้งดังนี้ทำให้เราสรุปได้ว่า เราไม่สามารถแบ่งจุดยอดของกราฟดังกล่าวออกเป็นสองเซ็ตโดยที่ไม่มีจุดยอดใดเลยในเซ็ตเดียวกันที่ไม่ประชิดกัน นั่นคือ C_n ไม่สามารถเป็นกราฟสองส่วนได้ ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่มากกว่าหรือเท่ากับ 3

ตัวอย่างที่ 11

จงแสดงว่ากราฟ G_1 และ G_2 ในรูปที่ 16 เป็นกราฟสองส่วนหรือไม่



รูปที่ 16

(1) เนื่องจาก G_1 คือ C_5 ซึ่งได้รับการแสดงในตัวอย่างก่อนหน้านี้แล้วว่าไม่เป็นกราฟสองส่วน ดังนั้น G_1 ไม่เป็นกราฟสองส่วน

(2) เนื่องจากจุดยอดบางจุดของ G_2 อันได้แก่ b, c และ d ไม่สามารถถูกแบ่งออกเป็นสองเซ็ตโดยที่จุดยอดในเซ็ตเดียวกันไม่ประชิดกันได้ เนื่องจากจุดยอดทั้งสามเชื่อมต่อกันเป็น C_3 ดังนั้น G_2 ไม่เป็นกราฟสองส่วน

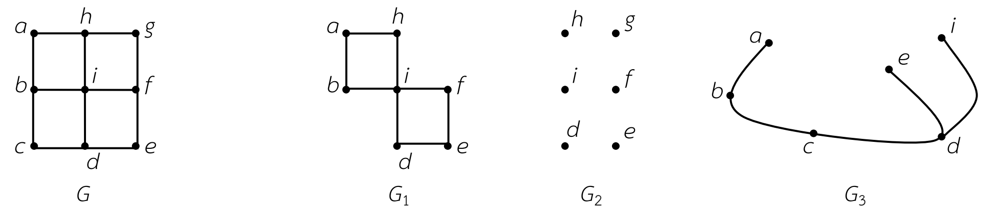
กราฟย่อย

กราฟ $H = (W, F)$ เป็น *กราฟย่อย* (Subgraph) ของกราฟ $G = (V, E)$ ก็ต่อเมื่อ $W \subseteq V$ และ $F \subseteq E$

กราฟย่อยของ G สามารถสร้างได้จาก G โดยการตัดเส้นเชื่อมบางเส้นของ G ออก

กราฟย่อยเป็น *กราฟย่อยแท้* (Proper Subgraph) ของ G ก็ต่อเมื่อกราฟนั้นไม่เท่ากับ G

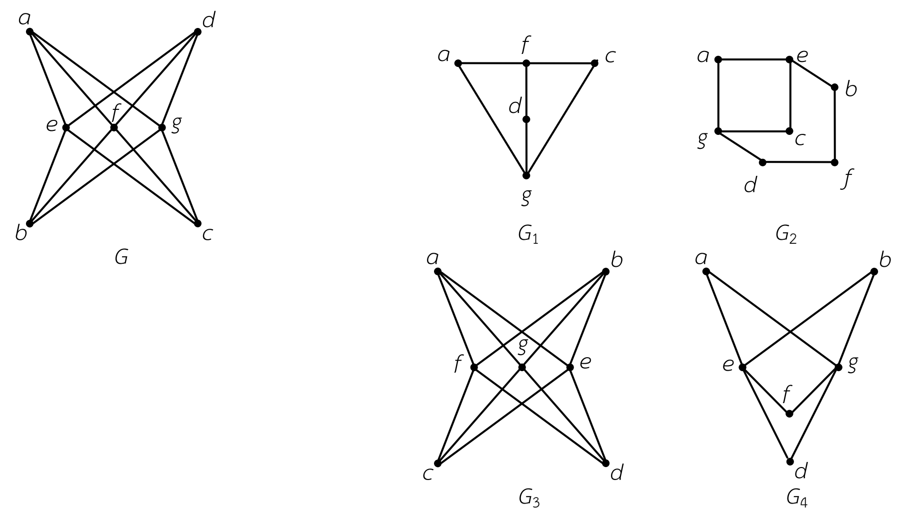
กราฟ G_1, G_2 และ G_3 ในรูปที่ 17 เป็นตัวอย่างของกราฟย่อยของกราฟ G ที่แสดงอยู่ในรูปเดียวกัน



รูปที่ 17 : กราฟ G และตัวอย่างกราฟย่อยของ G

ตัวอย่างที่ 12

กราฟทางขวามือของรูปที่ 18 กราฟใดบ้างที่เป็นกราฟย่อยของกราฟ G ในรูปเดียวกัน



รูปที่ 18

(1) ให้ V เป็นเซ็ตของจุดยอดของกราฟ G และ E เป็นเซ็ตของเส้นเชื่อมในกราฟ G เราจะได้ว่า $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ และ $E = \{\{a, e\}, \{a, f\}, \{a, g\}, \{b, e\}, \{b, f\}, \{b, g\}, \{c, e\}, \{c, f\}, \{c, g\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{d, g\}\}$

(2) ให้ V_i เป็นเซ็ตของจุดยอดของกราฟ G_i และ E_i เป็นเซ็ตของเส้นเชื่อมในกราฟ G_i

(3) $V_1 = \{a, c, d, f, g\} \subseteq V$ และ $E_1 = \{\{a, f\}, \{a, g\}, \{c, f\}, \{c, g\}, \{d, f\}, \{d, g\}\} \subseteq E$ ดังนั้น G_1 เป็นกราฟย่อยของ G

(4) $V_2 = \{a, b, c, d, e, f, g\} \subseteq V$ และ $E_2 = \{\{a, e\}, \{a, g\}, \{b, e\}, \{b, f\}, \{c, e\}, \{c, g\}, \{d, f\}, \{d, g\}\} \subseteq E$ ดังนั้น G_2 เป็นกราฟย่อยของ G

(5) $V_3 = \{a, b, c, d, e, f, g\} \subseteq V$ และ $E_3 = \{\{a, e\}, \{a, f\}, \{a, g\}, \{b, e\}, \{b, f\}, \{b, g\}, \{c, e\}, \{c, f\}, \{c, g\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{d, g\}\} \subseteq E$ ดังนั้น G_3 เป็นกราฟย่อยของ G

(6) เนื่องจาก $\{e, f\} \in E_4$ และ $\{e, g\} \in E_4$ แต่เส้นเชื่อมทั้งสองไม่เป็นสมาชิกของ E ดังนั้น G_4 ไม่เป็นกราฟย่อยของ G

ยูเนียนของกราฟ

ยูเนียนของกราฟเชิงเดียวสองกราฟหรือมากกว่านั้น เป็นกราฟเชิงเดียวซึ่งมีเส้นเชื่อมทุกเส้นและจุดยอดที่สอดคล้องกัน ของกราฟเหล่านั้น

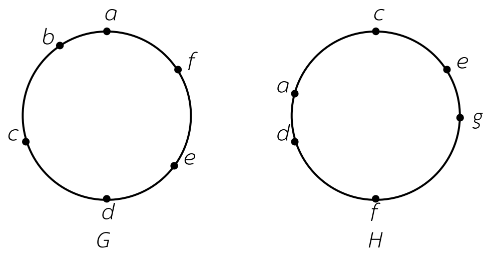
ให้ $G_1 = (V_1, E_1)$

$G_2 = (V_2, E_2)$

แล้ว ยูเนียนของ G_1 และ G_2 หรือแทนด้วย $G_1 \cup G_2 = (W, F)$ โดยที่ $W = V_1 \cup V_2$ และ $F = E_1 \cup E_2$

ตัวอย่างที่ 13

จงวาดกราฟที่เป็นยูเนียนของกราฟ *G* และ *H* ที่แสดงในรูปที่ 19



รูปที่ 19

(1) ให้ V_G และ V_H เป็นเซ็ตของจุดยอดของกราฟ *G* และ *H* ตามลำดับ ในทำนองเดียวกันให้ E_G และ E_H เป็นเซ็ตของเส้นเชื่อมของกราฟ *G* และ *H* ตามลำดับ

(2) เราจะได้ว่า

$V_G = \{a, b, c, d, e, f\}$,

$V_H = \{a, c, d, e, f, g\}$,

$E_G = \{\{a, b\}, \{a, f\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, f\}\}$,

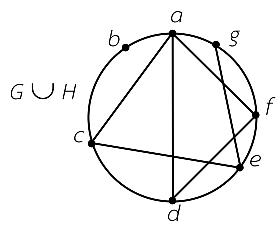
$E_H = \{\{a, c\}, \{a, d\}, \{c, e\}, \{d, f\}, \{e, g\}, \{f, g\}\}$

(3) ดังนั้น

$V_G \cup V_H = \{a, b, c, d, e, f, g\} = V_U$

$E_G \cup E_H = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, f\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}, \{e, g\}, \{f, g\}\} = E_U$

(4) เราสามารถเขียนยูเนียนของ *G* และ *H* จาก V_U และ E_U ได้ดังรูปที่ 20



รูปที่ 20

การแทนกราฟ

การแทนกราฟ หรือ การบรรยายโครงสร้างของกราฟเพื่อให้สามารถบ่งบอกถึงโครงสร้างได้อย่างชัดเจน ไม่มีความกำกวมนั้นสามารถกระทำได้ในหลายรูปแบบ โดยไม่ว่าจะเป็นรูปแบบใดก็จะต้องมีการแสดงจุดยอดทั้งหมดและการเชื่อมกันของจุดยอดเหล่านั้นด้วยเส้นเชื่อม นอกจากการแทนกราฟด้วยการเขียนรูปภาพของกราฟแล้ว เราสามารถแทนหรือแสดงกราฟนั้นโดยใช้ข้อกำหนดเช่น

- รายการการประชิด
- เมตริกซ์การประชิด
- เมตริกซ์อุบัติการณ์

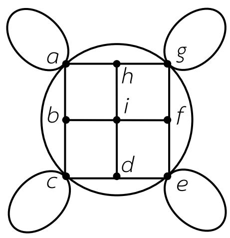
รายการการประชิด (Adjacency List) เป็น รายการ (list) ที่กำหนดว่าจุดยอดแต่ละจุดในกราฟที่ต้องการแทนนั้นประชิดกับจุดยอดใดบ้าง สำหรับกราฟมีทิศทาง รายการการประชิดแสดงว่า หากจุดยอดแต่ละจุดในกราฟนั้นเป็นจุดยอดเริ่มต้นแล้ว มีจุดยอดใดบ้างที่เป็นปลายทางที่สอดคล้องกับจุดยอดนั้น

เมตริกซ์การประชิด (Adjacency Matrix) เป็นเมตริกซ์ที่สมาชิกที่ตำแหน่ง (i, j) ใดๆ แสดงจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟที่ต้องการแทนซึ่งอุบัติกับจุดยอดที่ i และ ที่ j ของกราฟนั้น หากกราฟนั้นเป็น กราฟมีทิศทาง สมาชิกที่ตำแหน่ง (i, j) ใดๆ แสดงจำนวนเส้นเชื่อมที่ มีจุดยอดที่ i เป็นจุดยอดเริ่มต้น และ มีจุดยอดที่ j เป็นปลายทาง

เมตริกซ์อุบัติการณ์ (Incidence Matrix) เป็นเมตริกซ์ที่สมาชิกที่ตำแหน่ง (i, j) ใดๆ เป็น 1 เมื่อเส้นเชื่อมที่ j อุบัติกับจุดยอดที่ i มิฉะนั้นจะเป็น 0 สังเกตว่าในแต่ละคอลัมน์ของเมตริกซ์จะมีสมาชิกที่เป็น 1 ไม่เกินสองตัว หากมีสองตัวแสดงว่าเส้นเชื่อมนั้นมิใช่วงวน หากมีหนึ่งตัวแสดงว่าเส้นเชื่อมนั้นเป็นวงวน

ตัวอย่างที่ 14

จงแสดงรายการการประชิด เมตริกซ์การประชิด และ เมตริกซ์อุบัติการณ์ ของกราฟไม่มีทิศทาง G ในรูปที่ 21



รูปที่ 21

พิจารณาจุดยอดแต่ละจุด โดยสร้างรายการของจุดยอดทั้งหมดที่ประชิดกับจุดยอดนั้น รายการการประชิดของ G สามารถเขียนได้ดังนี้

จุดยอด	จุดยอดที่ประชิดกับจุดยอดนั้น
a	a, b, c, g, h
b	a, c, i
c	a, b, c, d, e
d	c, e, i
e	c, d, e, f, g
f	e, g, i
g	a, e, f, g, h
h	a, g, i
i	b, d, f, h

เรียงลำดับจุดยอดทั้ง 9 ของกราฟ G ดังนี้ $a, b, c, d, e, f, g, h,$ i เมตริกซ์การประชิดสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

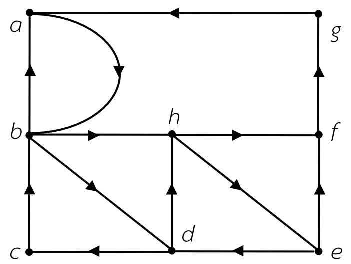
เมตริกซ์อุบัติการณ์ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจุดยอดและเส้นเชื่อมของกราฟ *G* แสดงได้ดังนี้

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 15

จงแสดงรายการการประชิด และ เมตริกซ์การประชิด ของกราฟมีทิศทาง *G* ดังแสดงในรูปที่ 22

G



รูปที่ 22

รายการการประชิดของ *G* สามารถเขียนได้ดังนี้

จุดยอดเริ่มต้น	จุดยอดปลายทาง	จุดยอดเริ่มต้น	จุดยอดปลายทาง
a	*b*	*e*	*d, f*
b	*a, d, h*	*f*	*g*
c	*b*	*g*	*a*
d	*c, h*	*h*	*e, f*

เรียงลำดับจุดยอดทั้ง 8 ของกราฟ *G* ดังนี้ *a, b, c, d, e, f, g, h* เมตริกซ์การประชิดสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

สมสัณฐานของกราฟ

สมสัณฐาน (Isomorphism) เป็นสิ่งที่ใช้แสดงว่ากราฟหลายกราฟที่แตกต่างกันสามารถเขียนในแบบเดียวกันได้ หรือ มีโครงสร้างเหมือนกันหรือไม่ พิจารณานิยามต่อไปนี้

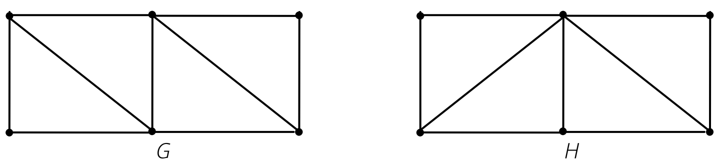
กราฟเชิงเดียวสองกราฟ $G_1 = (V_1, E_1)$ และ $G_2 = (V_2, E_2)$ มีสัณฐานเหมือนกัน ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง f จาก V_1 ไปยัง V_2 ที่มีสมบัติคือ $a \in V_1$ และ $b \in V_1$ ประชิดกันใน G_1 ก็ต่อเมื่อ $f(a) \in V_2$ และ $f(b) \in V_2$ ประชิดกัน สำหรับทุกๆ a และ b โดยฟังก์ชันดังกล่าวเรียกว่า สมสัณฐาน

สมบัติบางอย่างของกราฟ เช่น จำนวนจุดยอด จำนวนเส้นเชื่อม และ ดีกรีของจุดยอด ไม่เปลี่ยนแปลงไปโดยสมสัณฐาน เราเรียกสมบัติเหล่านี้ว่า *ตัวยืนยงแห่งกราฟ* (Graph Invariant)

การแสดงว่ากราฟสองกราฟมีสัณฐานเหมือนกัน สามารถทำได้หากเราสามารถหาสมสัณฐานตามนิยามข้างต้นได้ และเนื่องจากสมสัณฐานไม่ทำให้ตัวยืนยงเปลี่ยนแปลงไปได้ เราสามารถแสดงว่ากราฟสองกราฟมีสัณฐานที่ไม่เหมือนกันได้ โดยบ่งชี้ถึงการไม่สอดคล้องกันของตัวยืนยงแห่งกราฟทั้งสอง

ตัวอย่างที่ 16

จงแสดงว่ากราฟ G และ H ในรูปที่ 23 มีสัณฐานเหมือนกันหรือไม่

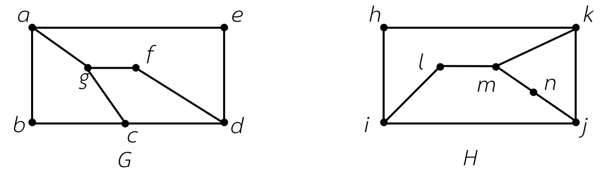


รูปที่ 23

กราฟ *H* มีจุดยอดที่มีดีกรี 5 ในขณะที่กราฟ *G* ไม่มี ดังนั้นจึงสรุปได้ว่ากราฟทั้งสองมีสัณฐานต่างกัน

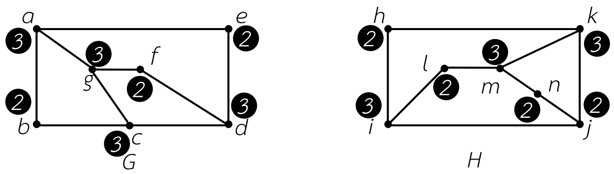
ตัวอย่างที่ 17

จงแสดงว่ากราฟ G และ H ในรูปที่ 24 มีสัณฐานเหมือนกันหรือไม่



รูปที่ 24

(1) เพื่อความสะดวกในการพิจารณา เราใส่ดีกรีของจุดยอดต่างๆ ลงในกราฟทั้งสอง ดังรูปที่ 25 เนื่องจากกราฟ *G* และ *H* มีจำนวนจุดยอดที่มีดีกรีต่างๆ เท่ากัน จึงเป็นไปได้ที่กราฟทั้งสองสมสัณฐานกัน



รูปที่ 25

(2) พิจารณาการประชิดของจุดยอดดีกรีต่างๆ ดังตาราง

จุดยอด	ดีกรี	ดีกรีของจุดยอดที่ประชิดกับจุดยอดนั้น	จุดยอด	ดีกรี	ดีกรีของจุดยอดที่ประชิดกับจุดยอดนั้น
a	3	2, 2, 3	*h*	2	3, 3
b	2	3, 3	*i*	3	2, 2, 3
c	3	2, 3, 3	*j*	3	2, 3, 3
d	3	2, 2, 3	*k*	3	2, 3, 3
e	2	2, 2, 3	*l*	2	3, 3
f	2	3, 3	*m*	3	2, 2, 3
g	3	2, 3, 3	*n*	2	3, 3

ถ้ามีสมสัณฐาน *f* ระหว่างกราฟทั้งสอง เราจะได้ว่า

(1.1) $f(a)$ และ $f(d)$ จะต้องเป็น *i* หรือ *m*

(1.2) $f(b)$, $f(e)$ และ $f(f)$ จะต้องเป็น *h*, *l* หรือ *n*

(1.3) $f(c)$ และ $f(g)$ จะต้องเป็น *j* หรือ *k*

(3) สมมติว่า $f(a) = i$ ดังนั้น $f(d) = m$ เนื่องจาก (2.1)

(4) จุดยอด *e* เป็นจุดยอดดีกรี 2 ที่อยู่ระหว่าง *a* และ *d* ในกราฟ *G* ดังนั้น จาก (3) $f(e) = l$ เนื่องจาก *l* เป็นจุดยอดดีกรี 2 ที่อยู่ระหว่าง *i* และ *m* ในกราฟ *H*

(5) จุดยอด *g* เป็นจุดยอดดีกรี 3 จุดเดียวที่ประชิดกับ *a* ในกราฟ *G* ดังนั้น จาก (3) $f(g) = j$ เนื่องจาก *j* เป็นจุดยอดดีกรี 3 จุดเดียวที่ประชิดกับ *i* ในกราฟ *H*

(6) จาก (2.3) และ (5) เราจะได้ว่า $f(c) = k$

(7) จุดยอด b เป็นจุดยอดดีกรี 2 ที่อยู่ระหว่าง a และ c ในกราฟ G ดังนั้น จาก (3) และ (6) $f(b) = h$ เนื่องจาก h เป็นจุดยอดดีกรี 2 ที่อยู่ระหว่าง i และ k ในกราฟ H

(8) จาก (3) ถึง (7) เราสรุปได้ว่า $f(f) = n$ เนื่องจากเป็นจุดยอดคู่สุดท้ายที่เหลืออยู่ โดยเราพบว่าการที่ $f(f) = n$ สามารถทำได้เนื่องจาก จุดยอด f เป็นจุดยอดดีกรี 2 ที่อยู่ระหว่าง d และ g ใน G ซึ่งสอดคล้องกับการที่จุดยอด n เป็นจุดยอดดีกรี 2 ที่อยู่ระหว่าง m และ j ใน H

(9) ดังนั้นเราสามารถหา f ที่มีสมบัติของสมสัณฐานระหว่างกราฟ G และ H ได้ นั่นคือกราฟทั้งสองสมสัณฐานกัน

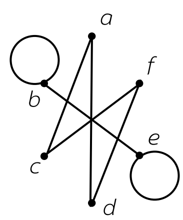
ตัวอย่างที่ 18

กำหนดเมตริกซ์การประชิด

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จงเขียนรูปกราฟที่มีสัณฐานเดียวกับกราฟที่แทนได้ด้วย A

จากเมตริกซ์การประชิด A เราบอกได้ว่ากราฟดังกล่าวจะต้องมีจุดยอด 6 จุด กำหนดให้เซ็ตของจุดยอดของกราฟนี้เป็น $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ จาก A เราสามารถวาดกราฟนี้ได้ดังรูปที่ 26



รูปที่ 26

วิถี

วิถี (Path) คือ ลำดับของเส้นเชื่อมที่เริ่มจากจุดยอดหนึ่งในกราฟ แล้วเดินทางจากจุดยอดหนึ่งไปจุดยอดหนึ่ง ผ่านทางเส้นเชื่อมของกราฟ

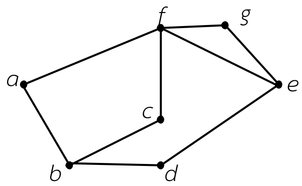
วิถีจะเป็น *วงจร* (Circuit) เมื่อวิถีนั้นเริ่มต้นและจบลงที่จุดยอดเดียวกัน

วิถี และ วงจร จะเป็น *เชิงเดียว* (Simple) เมื่อลำดับของเส้นเชื่อมที่สร้างวิถีนั้นไม่ผ่านเส้นเชื่อมใดเกินหนึ่งครั้ง

สำหรับกราฟมีทิศทาง การเดินทางจากจุดยอดหนึ่งไปยังอีกจุดยอดหนึ่งที่ประชิดกัน จะทำได้เมื่อจุดยอดแรกเป็นจุดยอดเริ่มต้น และ จุดยอดที่สองเป็นปลายทางของเส้นเชื่อมที่สอดคล้องกับจุดยอดทั้งสองเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 19

จงหาวิถีเชิงเดียวทั้งหมดจากจุดยอด a ไปยังจุดยอด e ที่ผ่านจุดยอดไม่เกิน 5 จุด (รวมจุดยอด a และ e) ในกราฟที่แสดงในรูปที่ 27

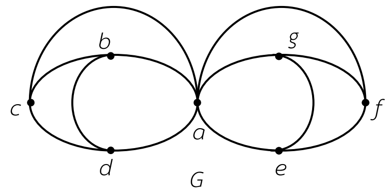


รูปที่ 27

วิถีเชิงเดียวดังกล่าวได้แก่ *a-f-g-e*, *a-f-e*, *a-b-c-f-e*, และ *a-b-d-e*

ตัวอย่างที่ 20

จงหาจำนวนวิถีเชิงเดียว (วงจรเชิงเดียว) ที่แตกต่างกันทั้งหมดในกราฟ G ในรูปที่ 28 ที่เริ่มต้นและจบลงที่ a



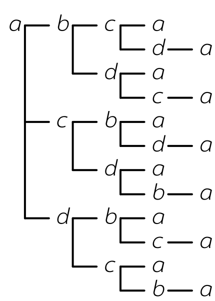
รูปที่ 28

(1) แบ่งกราฟ G ออกเป็นสองส่วนซ้ายและขวาด้วยจุดยอด a กราฟย่อยส่วนซ้ายของกราฟคือกราฟที่ประกอบด้วยจุดยอด a, b, c, และ d กราฟย่อยส่วนขวาของกราฟคือกราฟที่ประกอบด้วยจุดยอด a, e, f, และ g

(2) วิถีเชิงเดียวที่เริ่มและจบที่จุดยอด a สามารถเกิดจากเส้นเชื่อมของกราฟย่อยส่วนซ้าย กราฟย่อยส่วนขวา หรือ ทั้งสองกราฟย่อย

(3) หากพิจารณาวิถีที่อยู่ในส่วนซ้ายอย่างเดียว จะเห็นว่าเมื่อวิถีกลับมาที่ a แล้วจะต้องสิ้นสุดวิถีทันที เนื่องจากจำนวนเส้นเชื่อมที่อุบัติกับ a ไปยังส่วนซ้ายของกราฟมีเพียง 3 เส้น (หากพยายามสร้างวิถีเชิงเดียวที่วนมากกว่าหนึ่งรอบโดยอยู่ในส่วนซ้ายของกราฟเท่านั้น จะต้องมีเส้นเชื่อมจาก a ไปยังส่วนซ้ายของกราฟ 4 เส้นขึ้นไป)

(4) วิถีที่เริ่มจาก a และวนกลับมาที่ a ที่อยู่ในส่วนซ้ายอย่างเดียวทั้งหมดสามารถแสดงได้ด้วยแผนภาพต้นไม้ดังรูปที่ 29



รูปที่ 29

หากพิจารณาเฉพาะวิถีที่อยู่ในส่วนซ้ายอย่างเดียว วิถีที่ประกอบด้วยจุดยอดชุดเดียวกันแต่เรียงกลับหน้ากลับหลังกัน เช่น *a-b-c-a* และ *a-c-b-a* ถือว่าเป็นวิถีเดียวกัน ดังนั้นจากแผนภาพต้นไม้เราจะสามารถแสดงวิถีดังกล่าวที่ไม่ซ้ำกันที่ได้ 6 วิถี

(5) พิจารณาวิถีที่เริ่มจาก a และวนกลับมาที่ a ที่อยู่ในส่วนขวาอย่างเดียว ด้วยวิธีเดียวกับการพิจารณาวิถีที่อยู่ในส่วนซ้ายอย่างเดียว เราสามารถบอกได้ว่าวิถีดังกล่าวมี 6 วิถี

(6) วิถีที่อยู่ในทั้งสองข้างของกราฟจะต้องเกิดจากการประกอบกันของวิถีหนึ่งใน 12 วิถีในส่วนซ้ายของกราฟที่แสดงในแผนภาพต้นไม้ในรูปที่ 29 และหนึ่งใน 12 วิถีในส่วนขวาของกราฟ ซึ่งเนื่องจากความสมมาตรของกราฟรอบจุดยอด a วิถีในส่วนขวานี้หาได้จากวิถีในแผนภาพต้นไม้ในรูปที่ 29 หากแต่เปลี่ยนจุดยอด b เป็น g จุดยอด c เป็น f และจุดยอด d เป็น e

(7) จาก (6) จำนวนวิถีดังกล่าวที่อยู่ในทั้งสองข้างของกราฟมีทั้งหมด $12 \times 12 = 144$ วิถี แต่เนื่องจากวิถีที่ประกอบด้วยจุดยอดชุดเดียวกันแต่เรียงกลับหน้ากลับหลังกันถือเป็นวิถีเดียวกัน วิถีดังกล่าวที่แตกต่างกันจึงมีเพียง $144/2 = 72$ วิถี

(8) รวมจำนวนวิถีในทั้งสามกรณี จาก (4), (5) และ (7) เราพบว่าจำนวนวิถีเชิงเดียวทั้งหมดที่แตกต่างกันในกราฟ G ที่เริ่มต้นและจบลงที่ a มี $6 + 6 + 72 = 84$ วิถี

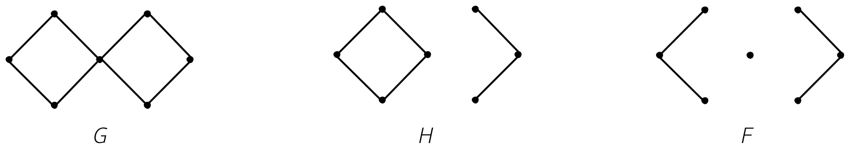
ความเชื่อมต่อกัน

กราฟไม่มีทิศทางเป็น *กราฟเชื่อมต่อ* (Connected Graph) ก็ต่อเมื่อมีวิถีที่เชื่อมต่อระหว่างจุดยอดใดๆ ในกราฟเสมอ

ส่วนประกอบเชื่อมต่อ (Connected Component) ของกราฟ G ใดๆ คือ กราฟย่อยของ G ซึ่งไม่เป็นกราฟย่อยแท้ของส่วนประกอบเชื่อมต่ออื่นของกราฟนั้น หรือ อีกนัยหนึ่งคือ กราฟย่อยของ G ที่ใหญ่ที่สุดที่ยังคงความเป็นกราฟเชื่อมต่ออยู่ เรียกว่า ส่วนประกอบเชื่อมต่อ

จากนิยามของส่วนประกอบเชื่อมต่อของกราฟ G ใดๆ แสดงว่า กราฟที่ไม่ใช่กราฟเชื่อมต่อจะมีส่วนประกอบเชื่อมต่อ (ซึ่งแน่นอนว่าไม่ทับกัน) มากกว่าหนึ่งส่วนเสมอ และ ยูเนียนของส่วนประกอบทั้งหมดก็คือ G นั่นเอง

รูปที่ 30 แสดงกราฟ G ซึ่งเป็นตัวอย่างของกราฟเชื่อมต่อ กราฟ H ซึ่งเป็นตัวอย่างของกราฟที่มีส่วนประกอบเชื่อมต่อ 2 ส่วน และ กราฟ F ซึ่งเป็นตัวอย่างของกราฟที่มีส่วนประกอบเชื่อมต่อ 3 ส่วน



รูปที่ 30

ตัวอย่างที่ 21

จงแสดงว่าเราสามารถหาวิถีเชิงเดียวระหว่างทุกๆ คู่ของจุดยอดในกราฟเชื่อมต่อไม่มีทิศทางได้เสมอ

เนื่องจากนิยามของกราฟเชื่อมต่อกล่าวว่ามีวิถีจากจุดยอดหนึ่งไปยังจุดยอดหนึ่งเสมอ เราต้องแสดงว่ามีวิถีที่เป็นแบบเชิงเดียว

(1) ให้ u และ v เป็นจุดยอดสองจุดในกราฟเชื่อมต่อไม่มีทิศทาง

(2) เนื่องจาก G เป็นกราฟเชื่อมต่อ ดังนั้นจะต้องมีวิถีที่สั้นที่สุด, P, จาก *u* ไป *v*

(3) สมมติว่า P ไม่ใช่วิถีเชิงเดียว ดังนั้นจะต้องมีจุดยอดบางจุดที่ถูกผ่านมากกว่าหนึ่งครั้ง

(4) จาก (3) หากตัดวิถีหลังจากที่ผ่านจุดยอดนั้นครั้งแรกไปจนถึงก่อนที่จะผ่านจุดยอดเดียวกันนั้นในครั้งสุดท้ายออกไปจากวิถี P เราจะได้วิถีใหม่จาก *u* ไป *v* ซึ่งสั้นกว่า P

(5) อย่างไรก็ตาม (4) ขัดแย้งกับข้อสมมติที่ว่า P ไม่ใช่วิถีเชิงเดียว ดังนั้นข้อสมมติดังกล่าวเป็นเท็จเสมอ นั่นคือ P เป็นวิถีเชิงเดียว ซึ่งเป็นการแสดงว่าเราสามารถหาวิถีเชิงเดียวระหว่างทุกๆ คู่ของจุดยอดในกราฟเชื่อมต่อไม่มีทิศทางได้เสมอ

สำหรับกราฟมีทิศทางนั้น การนิยามความเชื่อมต่อของกราฟสามารถแบ่งได้เป็นสองระดับคือ *ความเชื่อมต่ออย่างเข้ม* (Strongly Connectedness) และ *ความเชื่อมต่ออย่างอ่อน* (Weakly Connectedness) พิจารณานิยามต่อไปนี้

กราฟมีทิศทาง $G = (V, E)$ จะถูกเชื่อมต่ออย่างเข้ม เมื่อมีวิถีจาก a ไป b และจาก b ไป a เสมอ สำหรับทุกๆ คู่ของ $a \in V$ และ $b \in V$

และ

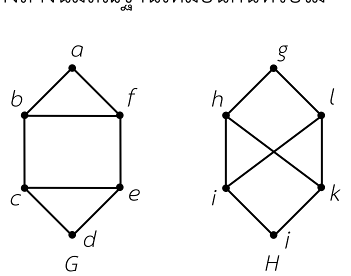
กราฟมีทิศทางจะถูกเชื่อมต่ออย่างอ่อน เมื่อมีวิถีระหว่างจุดยอดทุกคู่ ในกราฟไม่มีทิศทางรองรับของกราฟมีทิศทางนั้น

การพิจารณาสมสัณฐานจากวิถี

การปรากฏของวงจรเชิงเดียวที่มีความยาวเป็นค่าหนึ่งๆ โดยเฉพาะ ก็เป็นตัวยืนยงหนึ่งซึ่งไม่เปลี่ยนแปลงไปโดยสมสัณฐาน ดังนั้นถ้าเราพบว่ากราฟ *G* กราฟหนึ่งมีวงจรเชิงเดียวที่มีความยาว *k* หน่วย กราฟที่มีสัณฐานเหมือนกับ *G* จะต้องมีวงจรเชิงเดียวความยาว *k* หน่วยอยู่ในกราฟนั้นด้วย ดังนั้นเราสามารถสรุปว่ากราฟสองกราฟมีสัณฐานต่างกันได้ ถ้าเราพบว่ามีวงจรเชิงเดียงความยาว *k* หน่วยในกราฟหนึ่ง แต่ไม่มีในอีกกราฟหนึ่ง อย่างไรก็ตามการปรากฏของวงจรเชิงเดียวความยาว *k* ในกราฟสองกราฟไม่ใช่สิ่งที่จะทำให้สรุปได้ว่าทั้งสองกราฟมีสัณฐานเหมือนกัน

ตัวอย่างที่ 22

จงแสดงว่ากราฟ *G* และ *H* ที่แสดงข้างล่างนี้มีสัณฐานเหมือนกันหรือไม่



รูปที่ 31

(1) พิจารณาวิถีในกราฟ *G* ที่ผ่าน *a*, *b*, และ *c* วิถีนี้เป็นวงจรเชิงเดียวซึ่งมีความยาวเท่ากับ 3

(2) ในกราฟ *H* เราพบว่าวงจรเชิงเดียวทั้งหมดที่เป็นไปได้คือ วงจร *g, h, k, l* วงจร *g, h, i, l* วงจร *h, i, j, k* วงจร *i, j, k, l* และ วงจร *g, h, i, j, k, l* ซึ่งไม่มีวงจรเชิงเดียวใดเลยที่มีความยาวเท่ากับ 3

(3) จาก (1) และ (2) เราสรุปได้ว่า *G* และ *H* มีสัณฐานที่ต่างกัน เนื่องจากการปรากฏของวงจรเชิงเดียวความยาวเท่ากับ 3 ก็เป็นตัวยืนยงตัวหนึ่งที่ไม่เปลี่ยนแปลงเพราะสมสัณฐาน

การนับจำนวนวิถีที่มีความยาวที่กำหนดระหว่างจุดยอด

ทฤษฎีบทที่ 4

ให้ G เป็นกราฟที่มีเมตริกซ์การประชิด A โดยมีลำดับของจุดยอดคือ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ จำนวนวิถีที่มีความยาวเป็นจำนวนเต็มบวก l จาก v_i ไปยัง v_j มีเท่ากับสมาชิกในตำแหน่ง (i, j) ของ A^l

พิสูจน์

(1) ให้ P(l) แทน “ให้ G เป็นกราฟที่มีเมตริกซ์ประชิด A โดยมีลำดับของจุดยอดคือ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ จำนวนวิถีที่มีความยาว l จาก v_i ไปยัง v_j มีเท่ากับสมาชิกในตำแหน่ง (i, j) ของ A^l” โดยที่ l เป็นจำนวนเต็มบวก

(2) P(1) เป็นจริง เนื่องจากนิยามของเมตริกซ์การประชิด

(3) สมมติว่า P(k) เป็นจริง

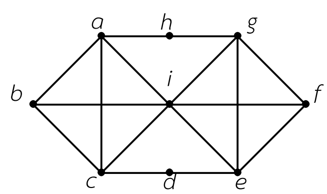
(4) $A^{k+1} = A^k A$ ดังนั้นสมาชิกในตำแหน่ง (i, j) ของ A^{k+1} เท่ากับ $b_{i1}a_{1j}+ b_{i2}a_{2j}+\ldots+ b_{in}a_{nj}$ โดย a_{ij} คือ สมาชิกในตำแหน่ง (i, j) ของ A และ b_{ij} คือ สมาชิกในตำแหน่ง (i, j) ของ A^k ซึ่งก็คือ จำนวนวิถีความยาว k จาก v_i ไปยัง v_j เนื่องจากการสมมติใน (3)

(5) วิถีที่มีความยาว k+1 จาก v_i ไปยัง v_j แต่ละวิถีจะต้องเป็นวิถีที่มีส่วนต้นเป็นวิถีความยาว k จาก v_i ไปยัง v_p และส่วนท้ายเป็นวิถีความยาว 1 จาก v_p ไปยัง v_j โดยที่ v_p เป็นได้ทุกจุดยอดในกราฟ จากกฎการบวกและกฎการคูณในเทคนิคการนับจำนวนวิถีดังกล่าวจึงเท่ากับ $b_{i1}a_{1j}+ b_{i2}a_{2j}+\ldots+ b_{in}a_{nj}$

(6) จาก (5) เราได้แสดงว่า P(k+1) เป็นจริงเมื่อ P(k) เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก k และ จาก (2) ว่า P(1) เป็นจริง ดังนั้นโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสรุปได้ว่า P(l) เป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวกใดๆ

ตัวอย่างที่ 23

จงหาจำนวนวิถีที่มีความยาวไม่เกิน 4 จากจุดยอด *b* ไปยังจุดยอด *f* ในกราฟ *G* ที่แสดงในรูปที่ 32



G

รูปที่ 32

เขียนเมตริกซ์การประชิด *A* ของกราฟ *G* โดยมีลำดับของจุดยอดคือ *a, b, c, d, e, f, g, h, I, j, k* ได้ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

หา A^2, A^3, และ A^4 ได้คือ

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} A^3 = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 & 3 & 6 & 5 & 4 & 6 & 12 \\ 8 & 6 & 8 & 3 & 5 & 4 & 5 & 3 & 10 \\ 9 & 8 & 6 & 6 & 4 & 5 & 6 & 3 & 12 \\ 3 & 3 & 6 & 0 & 6 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 6 & 6 & 8 & 9 & 3 & 12 \\ 5 & 4 & 5 & 3 & 8 & 6 & 8 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 9 & 8 & 6 & 6 & 12 \\ 6 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 & 6 & 0 & 4 \\ 12 & 10 & 12 & 4 & 12 & 10 & 12 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 35 & 27 & 29 & 15 & 24 & 22 & 29 & 10 & 38 \\ 27 & 26 & 27 & 13 & 22 & 20 & 22 & 13 & 36 \\ 29 & 27 & 35 & 10 & 29 & 22 & 24 & 15 & 38 \\ 15 & 13 & 10 & 12 & 10 & 13 & 15 & 6 & 24 \\ 24 & 22 & 29 & 10 & 35 & 27 & 29 & 15 & 38 \\ 22 & 20 & 22 & 13 & 27 & 26 & 27 & 13 & 36 \\ 29 & 22 & 24 & 15 & 29 & 27 & 35 & 10 & 38 \\ 10 & 13 & 15 & 6 & 15 & 13 & 10 & 12 & 24 \\ 38 & 36 & 38 & 24 & 38 & 36 & 38 & 24 & 68 \end{bmatrix}$$

จำนวนวิถีความยาว N ระหว่างจุดยอด a และจุดยอด f สามารถหาได้จากสมาชิกที่ตำแหน่ง (1, 6) หรือ (6, 1) ของเมตริกซ์ A^N ดังนั้นวิถีดังกล่าวที่มีความยาว 1 มีจำนวน 0 วิถี ความยาว 2 มีจำนวน 1 วิถี ความยาว 3 มีจำนวน 5 วิถี ความยาว 4 มีจำนวน 22 วิถี นั่นคือวิถีระหว่างจุดยอด a และจุดยอด f ที่มีความยาวไม่เกิน 4 มีทั้งหมด 0+1+5+22 = 28 วิถี

วิถีออยเลอร์ และ วงจรออยเลอร์

วิถีออยเลอร์ (Euler Path) ในกราฟหนึ่งๆ คือ วิถีเชิงเดียวที่ผ่านเส้นเชื่อมทั้งหมดของกราฟนั้น *วงจรออยเลอร์* (Euler Circuit) ในกราฟหนึ่งๆ คือ วงจรเชิงเดียวที่ผ่านเส้นเชื่อมทั้งหมดของกราฟนั้น

รูปที่ 33

วงจร *a-b-c-d-e-b-f-d-a* ของกราฟ *G* ในรูปที่ 33 เป็นตัวอย่างของวงจรออยเลอร์วงจรหนึ่ง เนื่องจากวงจรดังกล่าวเป็นวงจรเชิงเดียวที่ผ่านเส้นเชื่อมทั้งหมดของกราฟ *G* ส่วนวิถี *a-b-c-d-e-a-d-f-b* ของกราฟ *H* ในรูปเดียวกัน เป็นตัวอย่างของวิถีออยเลอร์วิถีหนึ่ง เนื่องจากวิถีดังกล่าวเป็นวงจรเชิงเดียวที่ผ่านเส้นเชื่อมทั้งหมดของกราฟ *H*

ทฤษฎีบทที่ 5

กราฟหลายทางอันตะเชื่อมต่อ (Connected Finite Multigraph) ที่มีจุดยอดอย่างน้อยสองจุดจะมีวงจรออยเลอร์ก็ต่อเมื่อจุดยอดแต่ละจุดมีดีกรีคู่

การพิสูจน์ทฤษฎีบทดังกล่าวสามารถเริ่มจากการพิสูจน์ว่าหากกราฟหลายทางอันตะเชื่อมต่อที่มีจุดยอดอย่างน้อยสองจุดโดยแต่ละจุดมีดีกรีคู่แล้วกราฟนั้นจะมีวงจรออยเลอร์

(1) ให้ *G* เป็นกราฟเชื่อมต่อที่มีจุดยอดจำนวนจำกัดซึ่งเป็นอย่างน้อยสองจุดและจุดยอดแต่ละจุดมีดีกรีคู่

(2) เลือกจุดยอดมาของ *G* มาหนึ่งจุด เรียกจุดยอดนี้ว่า *a* แล้วสร้างวิถี *p* ที่เริ่มต้นจาก *a* ไปเรื่อยๆ โดยที่วิถีดังกล่าวจะต้องไม่ผ่านเส้นเชื่อมใดในกราฟ *G* เกินหนึ่งครั้ง วิถีนี้จะจบลงเมื่อมาถึงจุดยอดที่เราไม่สามารถหาเส้นเชื่อมออกจากจุดยอดนี้ซึ่งยังไม่เคยถูกใช้ในวิถีนี้มาก่อนเลย การจบลงในกรณีนี้จะเกิดขึ้นอย่างแน่นอนเนื่องจากจุดยอดของ *G* มีจำนวนจำกัด

(3) เนื่องจากจุดยอดทุกจุดมีดีกรีคู่ เมื่อวิถีผ่านเข้าสู่และออกจากจุดยอดใดๆ หนึ่งครั้ง เส้นเชื่อมที่อุบัติกับจุดยอดนั้นจะถูกใช้ไปสองเส้น ดังนั้นจำนวนเส้นเชื่อมที่ยังไม่ถูกใช้จะเหลือเป็นจำนวนคู่เสมอ นั่นคือเมื่อวิถีผ่านเข้าสู่จุดยอดเหล่านั้นอีกครั้ง เราจะสามารถหาเส้นเชื่อมออกจากจุดยอดนั้นได้เสมอ ดังนั้นวิถี *p* จะต้องจบลงที่จุดยอด *a* แน่นอน เนื่องจากเป็นจุดยอดเดียวที่สามารถมีเส้นเชื่อมที่ยังไม่ได้เป็นส่วนหนึ่งของวิถี ณ ขณะใดขณะหนึ่งเป็นจำนวนคี่ (เนื่องจากวิถี *p* เริ่มจาก *a*) นั่นคือวิถี *p* เป็นวงจร

(4) เมื่อวงจร *p* สิ้นสุดลงที่จุด *a* วงจรดังกล่าวอาจจะผ่านเส้นเชื่อมครบทุกเส้นหรือไม่ก็ได้ ในกรณีที่วงจร *p* ผ่านเส้นเชื่อมครบทุกเส้นแล้ว วงจร *p* จะเป็นวงจรออยเลอร์ตามนิยาม

(5) ในกรณีที่วงจร *p* สิ้นสุดลงในขณะที่ยังผ่านเส้นเชื่อมในกราฟ *G* ไม่ครบทุกเส้น เราสามารถสร้างกราฟย่อยของ *G* ซึ่งประกอบด้วยเส้นเชื่อมทั้งหมดที่ไม่อยู่ในวงจร *p* นั้นพร้อมทั้งจุดยอดที่สอดคล้องกัน เรียกกราฟย่อยนี้ว่า *H*

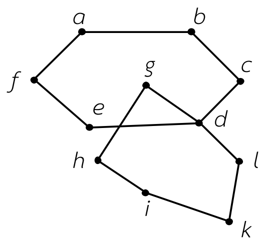
(6) กราฟ *H* จะต้องมีจุดยอด *w* อย่างน้อยหนึ่งจุดซึ่งอยู่ในวงจร *p* เนื่องจากกราฟ *G* เป็นกราฟเชื่อมต่อ

(7) จุดยอดทุกจุดในกราฟ *H* จะมีดีกรีเป็นเลขคู่ด้วย เนื่องจากจุดยอดทุกจุดในกราฟ *G* มีดีกรีเป็นเลขคู่ และถึงแม้ว่าจุดยอดใดถูกผ่านโดยวงจร *p* แล้ว เส้นเชื่อมของจุดยอดนั้นก็จะถูกใช้ไปแล้วเป็นจำนวนเลขคู่เสมอ ดังนั้นเส้นเชื่อมของจุดยอดนั้นที่เหลืออยู่ใน *H* จึงมีเป็นจำนวนคู่เช่นกัน

(8) จาก (6) เราสามารถหาวงจร *q* ในกราฟ *H* ดังเช่นวงจร *p* ในกราฟ *G* ได้ โดยให้เริ่มต้นสร้างวงจรดังกล่าวจากจุดยอด *w*

อติวงศ์ สุชาโต
ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

(9) เนื่องจากจุดยอด w เป็นจุดยอดร่วมกันระหว่างวงจร p และวงจร q เราจึงสามารถสร้างวงจรใหม่ที่ผ่านทุกจุดยอดใน p และ q ได้ ดูรูปที่ 34 ประกอบ (ความจริงข้อนี้ให้ผู้อ่านพิสูจน์ด้วยตนเอง) หากวงจรนี้ผ่านเส้นเชื่อมครบทุกเส้นในกราฟ G แล้ววงจรนี้จะเป็นวงจรออยเลอร์ตามนิยาม



ถ้า p คือวงจร a-b-c-d-e-f-a

และ q คือวงจร d-g-h-i-j-k-l-d

เราสามารถสร้างวงจรใหม่ที่ผ่านจุดยอดทั้งหมดใน p และ q ได้ โดยตัดวงจร p เป็นส่วนจาก a ผ่าน b, และ c ไปยัง d และส่วนจาก d ผ่าน e และ f ไปยัง a เสร็จแล้วจึงเชื่อมทั้งสองส่วนด้วย q ซึ่งเริ่มต้นและจบลงที่ d ซึ่งเป็นจุดแบ่งของ p ในตอนแรก

รูปที่ 34

(10) หากวงจรที่ได้ใน (9) ยังไม่เป็นวงจรออยเลอร์ เราสามารถสร้างกราฟย่อยของ G ซึ่งประกอบด้วยเส้นเชื่อมทั้งหมดที่ไม่อยู่ในวงจรดังกล่าว แล้วทำซ้ำกระบวนการดังใน (8) และ (9) จนได้วงจรออยเลอร์ในที่สุด ดังนั้นเราจึงสรุปได้ว่า G ซึ่งมีสมบัติดังกล่าวจะต้องมีวงจรออยเลอร์อย่างแน่นอน

ต่อไปเราต้องพิสูจน์ว่าถ้ากราฟเชื่อมต่อ G กราฟหนึ่งมีวงจรออยเลอร์แล้วจุดยอดทุกจุดของ G จะมีดีกรีคู่

(1) ให้กราฟ G มีวงจรออยเลอร์วงจรหนึ่ง

(2) จุดยอดทุกจุดของกราฟ G อยู่ในวงจรออยเลอร์นั้น เนื่องจาก G เป็นกราฟเชื่อมต่อและเส้นเชื่อมทุกเส้นเป็นส่วนหนึ่งของวงจรออยเลอร์

(3) จุดยอดทุกจุดในวงจรใดๆ จะต้องมีจำนวนเส้นเชื่อมที่เป็นส่วนหนึ่งของวงจรและอุบัติกับจุดยอดนั้นเป็นจำนวนคู่เสมอ (ให้ผู้อ่านพิสูจน์ด้วยตนเอง)

(4) เนื่องจากเส้นเชื่อมทุกเส้นใน G เป็นส่วนหนึ่งของวงจรออยเลอร์โดยนิยาม ดังนั้นจาก (3) จุดยอดในวงจรออยเลอร์จะต้องมีดีกรีเป็นเลขคู่

(5) จาก (2) และ (4) จุดยอดทุกจุดของ G จะมีดีกรีคู่

ทฤษฎีบทที่ 6

กราฟหลายทางอันตะเชื่อมต่อจะมีวิถีออยเลอร์แต่ไม่มีวงจรออยเลอร์ก็ต่อเมื่อจุดยอดกราฟนั้นมีจุดยอดสองจุดพอดีที่มีดีกรีคี่

เราจะเริ่มการพิสูจน์จากการพิสูจน์ว่ากราฟหลายทางอันตะเชื่อมต่อที่มีวิถีออยเลอร์แต่ไม่มีวงจรออยเลอร์จะมีจุดยอดสองจุดที่มีดีกรีคี่

(1) ให้กราฟเชื่อมต่อ G มีวิถีออยเลอร์จากจุดยอด a ไปจุดยอด b แต่ไม่มีวงจรออยเลอร์

(2) จุดยอดทุกจุดในวิถีออยเลอร์ ซึ่งก็คือจุดยอดทุกจุดในกราฟ G เนื่องจาก G เป็นกราฟเชื่อมต่อ ยกเว้นจุดยอด a และ b จะต้องมีดีกรีคู่ เนื่องจากทุกๆ ครั้งเมื่อวิถีผ่านเข้าสู่หนึ่งในจุดยอดดังกล่าวโดยเส้นเชื่อมหนึ่งเส้นจะต้องมีเส้นเชื่อมเส้นที่สองเพื่อให้วิถีออกจากจุดยอดนั้นเสมอ นั่นคือจำนวนเส้นเชื่อมที่อุบัติกับจุดยอดเหล่านั้นต้องเป็นเลขคู่

(3) จุดยอด a จะต้องมีเส้นเชื่อมเส้นที่หนึ่งซึ่งเป็นเส้นเชื่อมแรกที่ออกจาก a ไปตามวิถีออยเลอร์ หากวิถีออยเลอร์นี้ไม่กลับมาผ่าน a อีกครั้ง ดีกรีของ a จะเป็น 1 หากวิถีดังกล่าวกลับมาผ่าน a อีก ทุกครั้งที่มีเส้นเชื่อมหนึ่งเส้นผ่านเข้ามายัง a จะต้องมีเส้นเชื่อมเส้นที่สองที่ยังไม่ได้เป็นส่วนหนึ่งของวิถีออกจาก a เสมอ เนื่องจากวิถีจะต้องไปจบที่จุดยอด b ดังนั้นจุดยอด a จึงมีดีกรีเป็นเลขคี่

(4) หากมีวิถีออยเลอร์จากจุดยอด a ไป b เราสามารถกลับทิศทางของวิถีที่เราสนใจ เพื่อมองวิถีดังกล่าวว่าเป็นวิถีจาก b ไปยัง a ได้เสมอ ดังนั้น จาก (3) เราจึงสามารถบอกได้ว่าจุดยอด b ก็มีดีกรีเป็นเลขคี่

(5) จาก (2), (3) และ (4) เราสรุปได้ว่ากราฟดังกล่าวต้องมีจุดยอดสองจุดที่มีดีกรีคี่

ต่อไปเราต้องพิสูจน์ว่ากราฟเชื่อมต่อที่มีจุดยอดสองจุดพอดีที่มีดีกรีคี่จะมีวิถีออยเลอร์แต่ไม่มีวงจรออยเลอร์

(1) ให้กราฟ G มีจุดยอดสองจุดพอดีที่มีดีกรีคี่ ให้จุดยอดดังกล่าวเรียกว่า จุดยอด a และ จุดยอด b และให้กราฟ G มีเซ็ตของเส้นเชื่อมคือ E

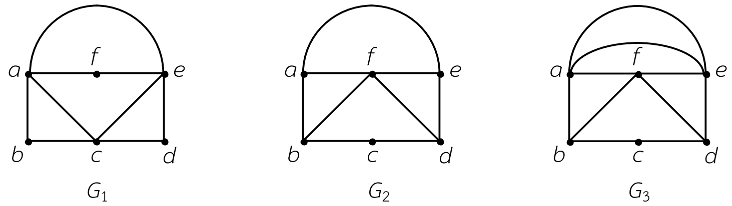
(2) หากเราเติมเส้นเชื่อม e หนึ่งเส้นระหว่าง a และ b ลงใน G เราจะได้กราฟ H กราฟใหม่ซึ่งจุดยอดทุกจุดในกราฟนั้นมีดีกรีคู่ จากทฤษฎีบทที่เราได้พิสูจน์ไปแล้วเราสามารถสรุปได้ว่า H ที่ได้นั้นมีวงจรออยเลอร์เนื่องจากจุดยอดทุกจุดใน H มีดีกรีคู่ และจากทฤษฎีบทเดียวกันเราก็สามารถสรุปได้ว่า G ไม่มีวงจรออยเลอร์

(3) เนื่องจากวงจรออยเลอร์ที่ได้ใน (2) ผ่านเส้นเชื่อม e และเส้นเชื่อมทั้งหมดใน E หากตัดเส้นเชื่อม e ซึ่งเป็นเส้นเชื่อมเดียวที่มิใช่ส่วนหนึ่งของกราฟ G ออก เราจะได้วิถีซึ่งเริ่มจาก a ไป b โดยผ่านเส้นเชื่อมทั้งหมดใน E ซึ่งโดยนิยามก็คือวิถีออยเลอร์จาก a ไป b นั่นเอง

(4) จาก (2) และ (3) เราจึงสรุปได้ว่า G มีวิถีออยเลอร์จาก a ไป b แต่ไม่มีวงจรออยเลอร์

ตัวอย่างที่ 24

จงหาวงจรออยเลอร์มาหนึ่งวงจรในกราฟ G_1, G_2, และ G_3 ดังแสดงในรูปที่ 35 หากกราฟใดไม่มีวิถีออยเลอร์ให้หาวิถีออยเลอร์ในกราฟนั้นมาหนึ่งวิถี หากกราฟใดไม่มีวิถีออยเลอร์เลยให้ระบุเหตุผลให้ชัดเจน



รูปที่ 35

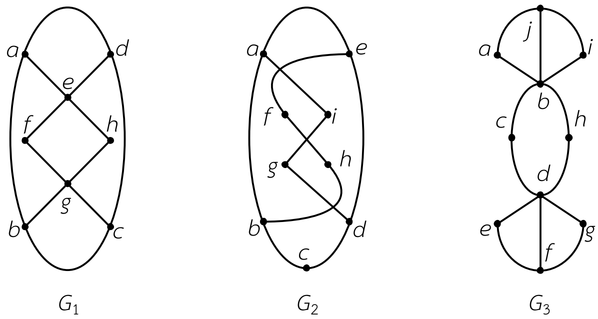
จุดยอดทุกจุดของกราฟ G_1 มีดีกรีเป็นเลขคู่ ซึ่งแสดงว่ามีวงจรออยเลอร์ วงจรออยเลอร์วงจรหนึ่งของ G_1 คือ *a-b-c-a-f-e-d-c-e-a*

กราฟ G_2 มีจุดยอดที่มีดีกรีเป็นเลขคี่อยู่ 4 จุด ดังนั้นกราฟดังกล่าวไม่มีวิถีออยเลอร์

กราฟ G_3 มีจุดยอดที่มีดีกรีเป็นเลขคี่อยู่ 2 จุดพอดี คือ จุดยอด b และจุดยอด d นั่นคือกราฟ G_3 จะมีวิถีออยเลอร์แต่ไม่มีวงจรออยเลอร์ วิถีออยเลอร์วิถีหนึ่งของ G_3 คือ *b-c-d-f-b-a-f-e-a-e-d*

วิถีแฮมิลตัน และ วงจรแฮมิลตัน

วิถีแฮมิลตัน (Hamilton Path) ในกราฟหนึ่งๆ คือ วิถีเชิงเดียวที่ผ่านจุดยอดทุกจุดในกราฟนั้นครั้งเดียวพอดี *วงจรแฮมิลตัน* (Hamilton Circuit) ในกราฟหนึ่งๆ คือ วงจรเชิงเดียวที่ผ่านจุดยอดทุกจุดในกราฟนั้นครั้งเดียวพอดี



รูปที่ 36

ในรูปที่ 36 วิถี *a-b-c-d-e-f-g-h* เป็นวิถีแฮมิลตันวิถีหนึ่งของกราฟ G_1 วงจร *a-i-g-d-c-b-h-f-e-a* เป็นวงจรแฮมิลตันวงจรหนึ่งของกราฟ G_2 (ในกรณีนี้เราเขียนจุดยอด *a* สองครั้งเพื่อแสดงว่าจุดยอด *a* เป็นจุดเริ่มต้นและจุดจบของวิถี นั่นคือวิถีดังกล่าวเป็นวงจร แต่เราจะถือว่าวิถีดังกล่าวผ่านจุดยอด *a* เพียงครั้งเดียว) ส่วนกราฟ G_3 ในรูปเดียวกันนั้นไม่มีทั้งวิถีและวงจรแฮมิลตัน

ตัวอย่างที่ 25

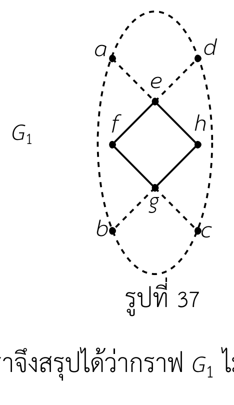
จงแสดงว่ากราฟ G_1 ในรูปที่ 36 มีวิถีแฮมิลตันแต่ไม่มีวงจรแฮมิลตัน

(1) เราสามารถแสดงว่าวิถี *a-b-c-d-e-f-g-h* เป็นวิถีแฮมิลตันวิถีหนึ่งของกราฟ G_1 ดังนั้น G_1 มีวิถีแฮมิลตัน

(2) หากกราฟ G_1 มีวงจรแฮมิลตัน วิถี *e-f-g* (หรือกลับหน้ากลับหลัง) จะต้องเป็นส่วนหนึ่งของวงจรเรื่องจากจุดยอด *f* มีเส้นเชื่อมที่อุบัติกับมันเพีนงแค่สองเส้นคือ {*e*, *f*} และ {*f*, *g*} เท่านั้น

(3) ด้วยเหตุผลในทำนองเดียวกัน หากกราฟ G_1 มีวงจรแฮมิลตัน *e-h-g* (หรือกลับหน้ากลับหลัง) จะต้องเป็นส่วนหนึ่งของวงจรเช่นกัน

(4) เนื่องจากจุดยอดแต่ละจุดสามารถถูกผ่านในวงจรแฮมิลตัน ได้เพียงครั้งเดียวเท่านั้น *e-f-g* และ *e-h-g* จึงจะต้องเชื่อมต่อกันเป็น *e-f-g-h-e* ดูรูปที่ 37 ประกอบ จากรูป เส้นทึบคือเส้นเชื่อมที่ต้องเป็นส่วนหนึ่งของวงจร หากจะให้วงจรดังกล่าวผ่าน *e* และ *g* เพียงครั้งเดียว วงจรดังกล่าวจะต้องสิ้นสุดเพียงเท่านี้ แต่อย่างไรก็ตามวงจรนี้ยังไม่ผ่านจุดยอดทั้งหมดของกราฟ ดังนั้นวงจรนี้จึงไม่ใช่วงจรแฮมิลตันตามนิยาม



รูปที่ 37

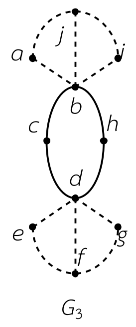
(5) จากความขัดแย้งใน (4) เราจึงสรุปได้ว่ากราฟ G_1 ไม่สามารถมีวงจรแฮมิลตันได้

ตัวอย่างที่ 26

จงแสดงว่ากราฟ G_3 ในรูปที่ 36 ไม่มีวิถีแฮมิลตัน

(1) สมมติว่ากราฟ G_3 มีวิถีแฮมิลตัน

(2) หากจุดยอด c และ h ไม่ได้เป็นจุดปลายของวิถีแฮมิลตัน เส้นเชื่อม $\{b, c\}$, $\{c, d\}$, $\{b, h\}$ และ $\{h, d\}$ จะต้องเป็นส่วนหนึ่งของวิถีดังกล่าวพร้อมกัน ดูรูปที่ 38 ประกอบ รูป เส้นทึบคือเส้นเชื่อมที่ต้องเป็นส่วนหนึ่งของวิถีแฮมิลตัน



รูปที่ 38

(3) อย่างไรก็ตามการที่วิถีจะผ่านจุดยอด a, j และ i ได้นั้น จุดยอดเหล่านี้จะต้องถูกเชื่อมต่อกับวิถีแฮมิลตันผ่านจุดยอด b ซึ่งกรณีนี้ไม่สามารถเกิดขึ้นได้ เพราะมิฉะนั้น b จะถูกผ่านมากกว่าหนึ่งครั้ง นั่นคือ กราฟ G_3 ไม่สามารถมีวิถีแฮมิลตันได้ ในกรณีที่จุดยอด c และ h ไม่ได้เป็นจุดปลายของวิถีแฮมิลตัน

(4) หากจุดยอด c เป็นจุดปลายของวิถีแฮมิลตัน เส้นเชื่อม $\{b, c\}$ หรือ $\{c, d\}$ เพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่เป็นส่วนหนึ่งของวิถีแฮมิลตัน หากเป็น $\{b, c\}$ เราจะเห็นว่าวิถีไม่สามารถที่จะผ่านทั้งจุดยอด a และจุดยอด h ได้ทั้งคู่ เนื่องจากหากเลือกไปที่จุดยอดใดจุดยอดหนึ่งแล้ววิถีจะไม่สามารถผ่านอีกจุดยอดได้ถ้าไม่ผ่านกลับมาที่จุดยอด b อีกครั้ง ในทำนองเดียวกัน หากเป็น $\{c, d\}$ เป็นส่วนหนึ่งของวิถี วิถีไม่สามารถที่จะผ่านทั้งจุดยอด e และจุดยอด h ได้ทั้งคู่ นั่นคือเราสามารถสรุปได้ว่า กราฟ G_3 ไม่สามารถมีวิถีแฮมิลตันได้ ในกรณีที่จุดยอด c เป็นจุดปลายของวิถีแฮมิลตัน

(5) หากจุดยอด h เป็นจุดปลายของวิถีแฮมิลตัน เราสามารถแสดงเหตุผลในทำนองเดียวกับใน (4) ดังที่ใช้กับจุดยอด c ได้ คู่ นั่นคือเราสามารถสรุปได้ว่า กราฟ G_3 ไม่สามารถมีวิถีแฮมิลตันได้ ในกรณีที่จุดยอด h เป็นจุดปลายของวิถีแฮมิลตัน

(6) จาก (3), (4) และ (5) เราสามารถสรุปได้ว่ากราฟ G_3 ไม่สามารถมีวิถีแฮมิลตันได้ ไม่ว่ากรณีใดๆ

ทฤษฎีบทที่ 7 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการมีอยู่ของวงจรแฮมิลตัน

ถ้า G เป็นกราฟเชิงเดียวที่มีจุดยอด n จุด โดยที่ $n \geq 3$ และ จุดยอดแต่ละคู่ที่ไม่ประชิดกันมีผลรวมของดีกรีอย่างน้อย n สำหรับทุกๆ คู่ แล้ว G มีวงจรแฮมิลตัน

พิสูจน์

(1) ให้ G เป็นกราฟเชิงเดียวที่มีจุดยอด n จุด โดยที่ $n \geq 3$ และ จุดยอดแต่ละคู่ที่ไม่ประชิดกันมีผลรวมของดีกรีอย่างน้อย n สำหรับทุกๆ คู่

(2) ใช้การพิสูจน์โดยอาศัยข้อขัดแย้ง โดยสมมติให้ G ไม่มีวงจรแฮมิลตัน

(3) หากเราเติมเส้นเชื่อมเข้าไปให้ G ทีละเส้นเรื่อยๆ จะต้องมีการเติมในขั้นตอนหนึ่งซึ่งหลังจากเติมเส้นเชื่อมในขั้นตอนนั้นเข้าไปแล้วเกิดมีวงจรแฮมิลตันขึ้น ขั้นตอนดังกล่าวเกิดขึ้นอย่างแน่นอนเนื่องจากเมื่อเส้นเชื่อมถูกเติมเข้ามาในกราฟ ทางเลือกในการเดินทางเพื่อให้เกิดวงจรแฮมิลตันก็มากขึ้น และในกรณีที่ร้ายที่สุดคือเมื่อกราฟที่ได้หลังจากการเติมเส้นเชื่อมไปจำนวนหนึ่งแล้วขาดเพียงอีกหนึ่งเส้นเชื่อมที่จะทำให้กราฟนั้นเป็นกราฟเชื่อมต่อสมบูรณ์แต่ก็ยังไม่มีวงจรแฮมิลตันเกิดขึ้น ในกรณีนี้เมื่อเราเติมเส้นเชื่อมที่เหลือนั้นจะทำให้กราฟนั้นเชื่อมต่อสมบูรณ์ซึ่งเป็นเงื่อนไขเพียงพอสำหรับการมีวงจรแฮมิลตัน นั่นหมายความว่าจะต้องมีกราฟอย่างน้อยกราฟหนึ่งซึ่งมีจุดยอดเหมือนกับ G แต่มีเส้นเชื่อมใน G ทั้งหมด และ เมื่อเติมเส้นเชื่อมใหม่เข้าไปเพียงหนึ่งเส้นแล้วจะเกิดวงจรแฮมิลตันขึ้น เรียกกราฟนี้ว่า H

(4) เนื่องจาก H ขาดอีกเพียงหนึ่งเส้นเชื่อม e ก่อนที่จะมีวงจรแฮมิลตัน วิถีใน H ซึ่งเมื่อต่อกับ e แล้วเกิดวงจรแฮมิลตัน จะต้องเป็นวิถีแฮมิลตัน

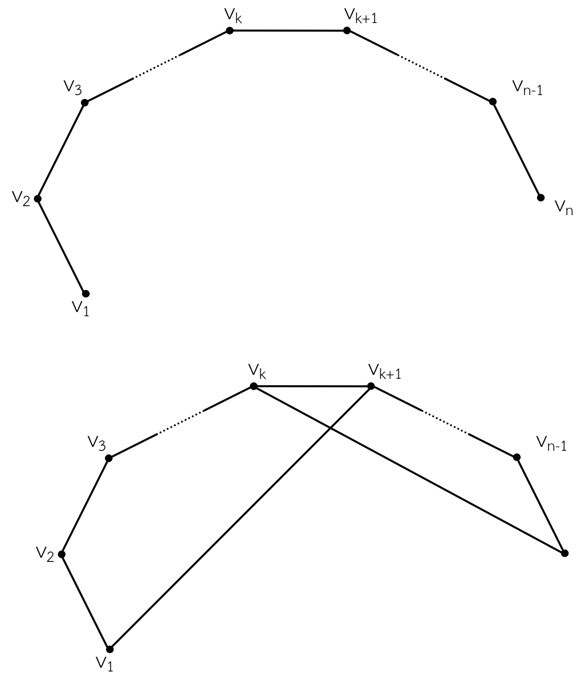
(5) ให้จุดยอดที่วิถีแฮมิลตันใน (4) ผ่านเป็น $v_1, v_2, \ldots, v_n$ จากข้อกำหนดใน (1) $\deg(v_1) + \deg(v_n) \geq n$ เนื่องจาก H ไม่มีวงจรแฮมิลตัน ดังนั้น v_1 และ v_n จึงไม่ประชิดกัน

(6) จาก (5) เราได้ว่า $\deg(v_1) \geq n - \deg(v_n)$ โดย $\deg(v_n)$ ตรงกับจุดยอดที่ประชิดกับ n และ n คือ จำนวนจุดยอดทั้งหมด ดังนั้นจำนวนจุดยอดที่ไม่ประชิดกับ n มีได้อย่างมาก $\deg(v_1)$ ซึ่งในจำนวนนี้ v_n ถูกรวมไว้ด้วย

(7) ให้ S เป็นเซ็ตของจุดยอดที่อยู่ก่อนหน้าแต่ละจุดยอดที่ประชิดกับ v_1 โดยเรียงลำดับตามวิถีแฮมิลตันใน (5) ดังนั้น S มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ $\deg(v_1)$ และ v_n ไม่เป็นสมาชิกของ S เนื่องจากไม่มีจุดยอดใดที่ประชิดกับ v_1 แล้วมี v_n เป็นจุดยอดก่อนหน้า เพราะ H ไม่มีวงจรแฮมิลตัน

(8) จาก (6) เราได้ว่า จำนวนจุดยอดที่ไม่ประชิดกับ n มีได้อย่างมาก $\deg(v_1)$ ซึ่งถ้าไม่รวม v_n จุดยอดดังกล่าวมีได้อย่างมาก $\deg(v_1)$ -1 จุด แต่จาก (7) เราได้ว่า S มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ $\deg(v_1)$ ดังนั้นมีจุดยอดจุดหนึ่งใน S ซึ่งประชิดกับ v_n

(9) ให้จุดยอดใน S ซึ่งประชิดกับ v_n เป็น v_k นั่นหมายความว่ามีเส้นเชื่อมที่เชื่อม v_k และ v_n รวมทั้งมีเส้นเชื่อมที่เชื่อม v_1 และ v_{k+1} ใน H โดนที่หากเป็นเช่นนี้วิถี $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{k+1}, v_1$ (ดูรูปที่ 39 ประกอบ) จะเป็นวงจรแฮมิลตันใน H ซึ่งขัดแย้งกับข้อกำหนดของ H ดังนั้นเราจึงสรุปว่า H ตามข้อกำหนดไม่มีทางสร้างได้จาก G ที่ไม่มีวงจรแฮมิลตัน ดังนั้น G จึงต้องมีวงจรแฮมิลตัน



รูปที่ 39 : (บน) วิถีแฮมิลตันตามที่กำหนดใน (5) และ (ล่าง) วิถีตามที่กำหนดใน (5) พร้อมเส้นเชื่อมระหว่าง v_k และ v_n รวมทั้งเส้นเชื่อมระหว่าง v_1 และ v_{k+1}

ทฤษฎีบทที่ 8

ถ้า *G* เป็นกราฟเชิงเดียวที่มีจุดยอด *n* จุด โดยที่ $n \geq 3$ และ จุดยอดแต่ละจุดของ *G* มีดีกรีอย่างน้อย *n*/2 แล้ว *G* มีวงจรแฮมิลตัน

พิสูจน์

(1) ให้ *G* เป็นกราฟเชิงเดียวที่มีจุดยอด *n* จุด โดยที่ $n \geq 3$ และ จุดยอดแต่ละจุดของ *G* มีดีกรีอย่างน้อย *n*/2

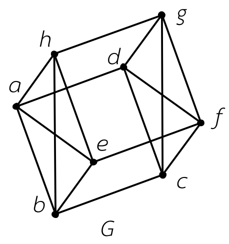
(2) จากข้อกำหนดของ *G* ใน (1) จะพบว่าดีกรีของจุดยอดสองจุดรวมกันมีดีกรีอย่างน้อย *n* เสมอ ดังนั้น จุดยอดแต่ละคู่ที่ไม่ประชิดกันมีผลรวมของดีกรีอย่างน้อย *n* เสมอด้วย

(3) จากทฤษฎีบทที่ 8 เราจะได้ว่า *G* มีวงจรแฮมิลตัน

ทฤษฎีบทที่ทั้งสองที่กล่าวมาข้างต้นระบุเกี่ยวกับเงื่อนไขของกราฟที่เพียงพอที่จะบอกว่ากราฟนั้นมีวงจรแฮมิลตันอยู่หรือไม่ อย่างไรก็ตามในปัจจุบันยังไม่มีการระบุเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับกราฟที่มีวงจรแฮมิลตัน

ตัวอย่างที่ 27

จงใช้ทฤษฎีบทที่ 8 เพื่อแสดงว่ากราฟ *G* ในรูปที่ 40 มีวงจรแฮมิลตัน

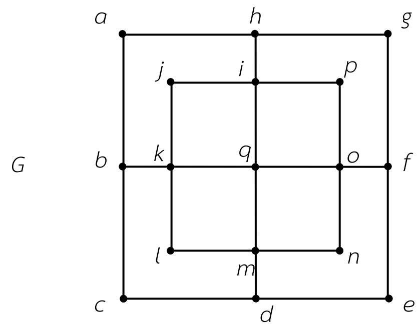


รูปที่ 40

จุดยอดทั้ง 8 ของกราฟ *G* มีดีกรีเท่ากับ 4 ซึ่ง $\geq 8/2 = 4$ ดังนั้นกราฟ G มีวงจรแฮมิลตัน

ตัวอย่างที่ 28

จงแสดงว่ากราฟ *G* ในรูปที่ 41 มีวงจรแฮมิลตันหรือไม่



รูปที่ 41

(1) หากมีวงจรแฮมิลตัน (ไม่สนใจทิศทาง) ส่วนของวงจรแฮมิลตันที่ผ่านจุดยอด *a* จะต้องผ่าน *b-a-h*

(2) ส่วนของวงจรแฮมิลตันที่ผ่านจุดยอด *g* จะต้องผ่าน *h-g-f*

(3) ส่วนของวงจรแฮมิลตันที่ผ่านจุดยอด *e* จะต้องผ่าน *f-e-d*

(4) ส่วนของวงจรแฮมิลตันที่ผ่านจุดยอด *c* จะต้องผ่าน *d-c-b*

(5) เพื่อให้สอดคล้องกับ (1) – (4) และแต่ละจุดยอดจะอยู่ในวงจรได้เพียงครั้งเดียว ส่วนหนึ่งของวงจรแฮมิลตันจะต้องเป็น *b-a-h-g-f-e-d-c-b*

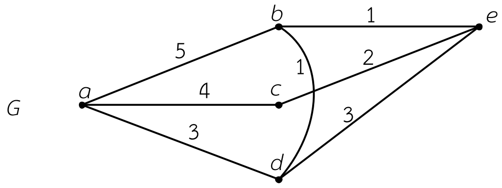
(6) วิถีใน (5) นั้นถูกบังคับให้วกกลับมายังจุดเดิมเรียบร้อยแล้ว ดังนั้นจึงไม่สามารถมีวงจรที่ผ่านจุด *a g e* และ *c* จุดละหนึ่งครั้งโดยผ่านจุดอื่นๆ ในส่วนในของกราฟอันได้แก่ *i j k l m n o p* และ *q* ได้ ดังนั้นสามารถสรุปว่าจึงไม่มีวงจรแฮมิลตันในกราฟ *G* ดังรูป

จากตัวอย่างข้างบนนี้ เราสามารถใช้การให้เหตุผลอย่างเดียวกันเพื่อพิสูจน์ว่ากราฟ *G* ไม่มีแม้แต่วิถีแฮมิลตัน

วิถีสั้นที่สุด

กราฟที่มีค่าถ่วงน้ำหนักกำกับอยู่ที่แต่ละเส้นเชื่อมเรียกว่า *กราฟถ่วงน้ำหนัก* (Weighted Graph) โดยน้ำหนักที่ถ่วงอยู่ที่แต่ละเส้นเชื่อมนี้มักจะแทนค่าใช้จ่ายหรือทรัพยากรที่ต้องใช้ไปในการเดินทางตามกราฟผ่านเส้นเชื่อมนั้นๆ

กราฟ *G* ในรูปที่ 42 แสดงตัวอย่างหนึ่งของกราฟถ่วงน้ำหนัก ตัวเลขที่กำกับอยู่ที่เส้นเชื่อมต่างๆ เรียกว่าเป็น น้ำหนักถ่วงของเส้นเชื่อมนั้น จากกราฟเราสามารถกล่าวได้ว่าวิถี *a-b-e* มีน้ำหนักถ่วงรวมเท่ากับ 6 ซึ่งเป็นผลรวมของน้ำหนักถ่วงของเส้นเชื่อม {*a*, *b*} และ {*b*, *e*} ซึ่งเป็นส่วนประกอบของวิถีดังกล่าวนั้นเอง



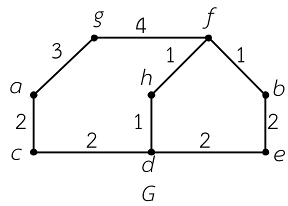
รูปที่ 42

ประเด็นหลักที่น่าสนใจประเด็นหนึ่งเกี่ยวกับกราฟถ่วงน้ำหนักซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาการกำหนดเส้นทางได้อย่างแพร่หลาย คือ การแก้ปัญหาเกี่ยวกับการหาวิถีจากจุดยอดหนึ่งไปยังอีกจุดยอดหนึ่งโดยให้มีค่าใช้จ่าย หรือ ผลรวมของค่าถ่วงน้ำหนักตามเส้นเชื่อมที่ผ่านน้อยที่สุด

สำหรับกราฟ *G* ในรูปที่ 42 หากเราพิจารณาวิถีทั้งหมดจากจุดยอด *a* ไปจุดยอด *e* เราจะพบว่าวิถีที่มีน้ำหนักถ่วงรวมน้อยที่สุดคือ วิถี *a-d-b-e* ซึ่งมีน้ำหนักรวมเท่ากับ 5

ตัวอย่างที่ 29

จงหาวิถีที่มีผลรวมของค่าน้ำหนักถ่วงตลอดเส้นทางน้อยที่สุด (หรือวิถีสั้นที่สุด) จากจุดยอด *a* ไปยังจุดยอด *b* ในกราฟถ่วงน้ำหนัก *G* ดังแสดงในรูปที่ 43 พร้อมแสดงเหตุผลประกอบอย่างชัดเจน



รูปที่ 43

(1) การจะเดินทางมายังจุดยอด *b* ได้นั้นจะต้องผ่านมาจากจุดยอด *f* หรือ จุดยอด *e* จุดใดจุดหนึ่ง

(2) หากวิถีสั้นที่สุดมาจากจุดยอด *f* น้ำหนักถ่วงที่น้อยที่สุดนั้นจะต้องเป็นผลรวมของน้ำหนักถ่วงของวิถีสั้นที่สุดจากจุดยอด *a* มายังจุดยอด *f* กับน้ำหนักถ่วงของ {*f*, *b*} ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1

(3) วิถีสั้นที่สุดจากจุดยอด *a* มายังจุดยอด *f* จะต้องเป็นวิถีเชิงเดียว (ผู้อ่านควรลองพิสูจน์ความจริงข้อนี้ด้วยตนเอง) ที่ยังไม่ผ่านจุดยอด *b* ซึ่งมีอยู่เพียงสองวิถี คือ วิถี *a-g-f* หรือวิถี *a-c-d-h-f* วิถีที่สั้นกว่าคือ *a-c-d-h-f* ซึ่งมีน้ำหนักถ่วงรวมเท่ากับ 6

(4) จาก (2) และ (3) หากวิถีสั้นที่สุดมาจากจุดยอด *f* น้ำหนักถ่วงที่น้อยที่สุดจะเท่ากับ 7 โดยวิถีดังกล่าวจะเป็น *a-c-d-h-f-b*

(5) หากวิถีสั้นที่สุดมาจากจุดยอด *e* ก่อนไปยังจุดยอด *b* น้ำหนักถ่วงที่น้อยที่สุดนั้นจะต้องเป็นผลรวมของน้ำหนักถ่วงของวิถีสั้นที่สุดจากจุดยอด *a* มายังจุดยอด *e* กับน้ำหนักถ่วงของ {*e*, *b*} ซึ่งมีค่าเท่ากับ 2

(6) การเดินทางจากจุดยอด *a* มายังจุดยอด *e* เพื่อให้วิถีสั้นที่สุดจากจุดยอด *a* ไปยังจุดยอด *b* ผ่านมาจากจุดยอด *e* นั้น จะต้องไม่ผ่านจุดยอด *f* (ผู้อ่านควรลองพิสูจน์ความจริงข้อนี้ด้วยตนเอง) ดังนั้นวิถี

จากจุดยอด *a* มายังจุดยอด *e* โดยที่ไม่ผ่านจุดยอด *b* ก่อนในกรณีนี้จึงมีวิถีเดียว คือ วิถี *a-c-d-e* ซึ่งมีน้ำหนักถ่วงรวมเท่ากับ 8

(7) จาก (5) และ (6) หากวิถีสั้นที่สุดมาจากจุดยอด *e* น้ำหนักถ่วงที่น้อยที่สุดจะเท่ากับ 10 โดยวิถีดังกล่าวจะเป็น *a-c-d-e-b*

(8) เปรียบเทียบวิถีใน (4) และ (7) เราจะได้ว่าวิถีสั้นที่สุดที่เราต้องการคือ *a-c-d-h-f-b*

ระเบียบวิธีของไดซ์ตรา

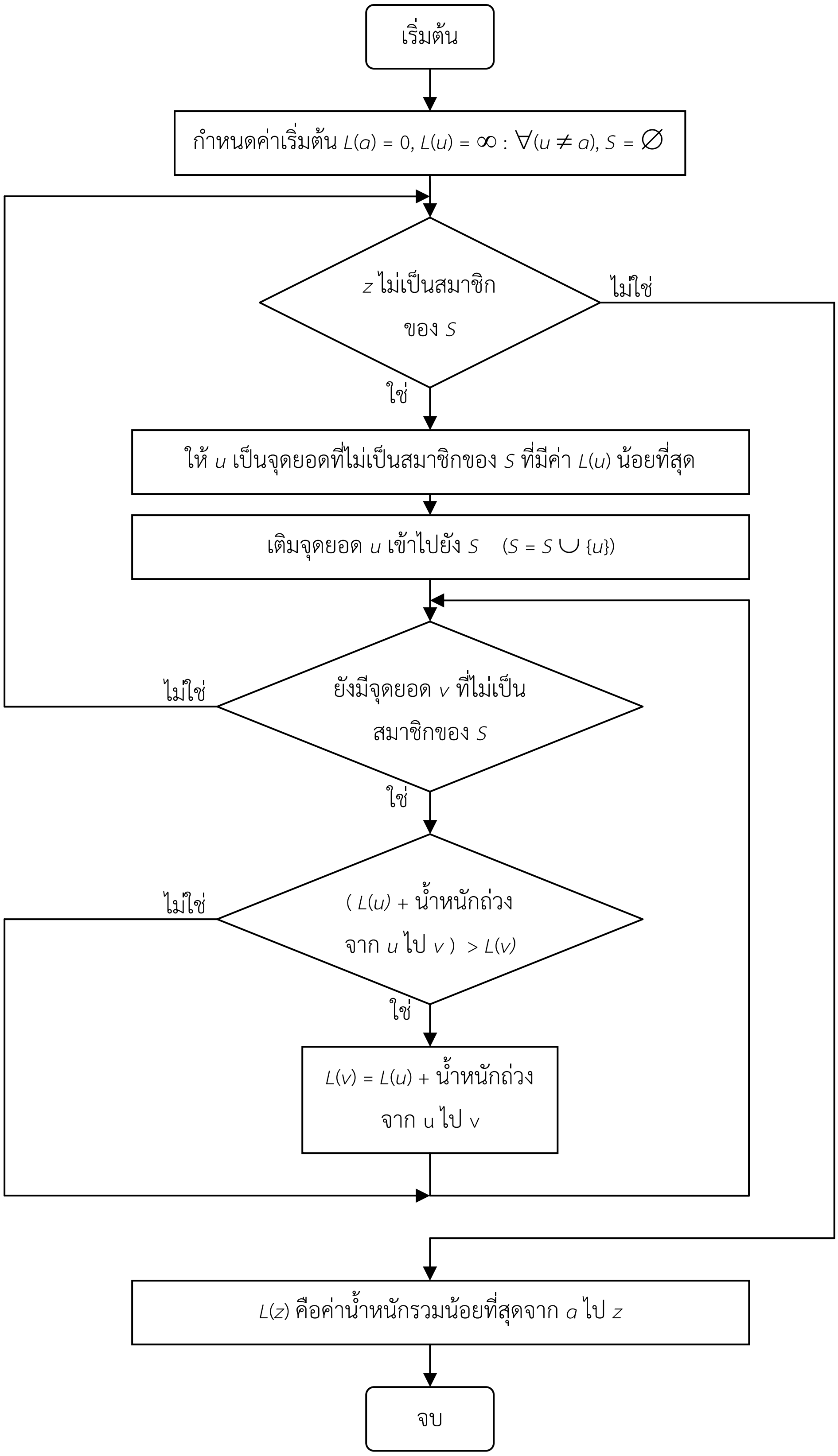
ระเบียบวิธีหนึ่งที่สามารถใช้ในการหาวิถีสั้นที่สุดจากจุดยอดหนึ่งไปยังอีกจุดยอดหนึ่งในกราฟถ่วงน้ำหนัก ได้แก่ *ระเบียบวิธีของไดซ์ตรา* (Dijkstra's Algorithm)

กำหนดจุดยอดที่เป็นจุดเริ่มต้น เรียกจุดยอดนั้นว่า a กำหนดจุดยอดที่เป็นจุดหมายปลายทาง เรียกจุดยอดนั้นว่า z สำหรับกราฟที่มีจุดยอดทั้งหมดจำนวน n จุด เรียกจุดต่างๆ ว่า $v_1, v_2, \ldots, v_n$ โดยให้ $v_1 = a$ และ $v_n = z$

กำหนดให้ $L(u)$ เรียกว่า ฉลากของจุดยอด u โดย $L_i(u)$ เป็นค่าน้ำหนักรวมที่น้อยที่สุดในการเดินทางจาก a ไปยัง u เท่าที่พบในการวนซ้ำรอบปัจจุบัน โดยมีการกำหนดค่าเริ่มต้น $L(a) = 0$ และ $L(u) = \infty$ สำหรับจุดยอด u อื่นๆ ที่ไม่ใช่จุดเริ่มต้น

กำหนดให้เซ็ต S เป็นเซ็ตที่มีสมาชิกเป็นจุดยอดซึ่งค่า $L(.)$ ของจุดยอดเหล่านั้นสามารถยืนยันได้ว่าเป็นค่าน้ำหนักรวมที่น้อยที่สุดจาก a ไปยังจุดยอดนั้นๆ เริ่มต้นจาก $S = \varnothing$ และจุดยอดต่างๆ จะถูกทะยอยเติมเข้ามาใน S ในขั้นตอนของการวนซ้ำแต่ละรอบ

ระเบียบวิธีของไดซ์ตราสามารถแสดงได้ตามผังงานในรูปที่ 44



รูปที่ 44 : ระเบียบวิธีของไดซ์ตรา

ทฤษฎีบทที่ 9 ระเบียบวิธีไดซ์ตรากับการหาวิถีสั้นที่สุด

ระเบียบวิธีของไดซ์ตราสามารถหาวิถีสั้นที่สุดระหว่างจุดยอดสองจุดในกราฟถ่วงน้ำหนักไม่มีทิศทางเชิงเดียวเชื่อมต่อ (Connected Simple Undirected Weighted Graph) ได้

พิสูจน์

(1) ให้ $P(k) \equiv P_1(k) \wedge P_2(k)$ โดย $P_1(k)$ แทน “ณ การวนซ้ำรอบที่ k ฉลากของจุดยอด v ทุกจุดใน S เป็นความยาวของวิถีสั้นที่สุด จาก a ไปยังจุดยอดนั้น” และ $P_2(k)$ “ณ การวนซ้ำรอบที่ k ฉลากของจุดยอด v ทุกจุดที่ไม่เป็นสมาชิกของ S เป็นความยาวของวิถีสั้นที่สุดจาก a ไปยังจุดยอดนั้น ซึ่งวิถีนี้ประกอบไปด้วยจุดยอดใน S เท่านั้น ยกเว้นจุดยอด v เอง” หาก $P(k)$ เป็นจริงฉลากของจุดยอดปลายทาง z เมื่อ z ถูกเติมเข้าไปใน S ก็ต้องเป็นความยาววิถีสั้นที่สุดจาก a ไป z ตามที่ระเบียบวิธีของไดซ์ตรากล่าว

(2) $P_1(0)$ เป็นจริง เนื่องจาก $S = \varnothing$ และ $P_2(0)$ เป็นจริง เนื่องจากความยาวจาก a ไปยัง a คือ 0 ซึ่งเท่ากับฉลากของจุดยอด a ขณะเริ่มต้น (k=0) และการที่ $S = \varnothing$ ทำให้ไม่มีวิถีที่ประกอบไปด้วยจุดยอดใน S เท่านั้นเลย ดังนั้นความยาวจาก a ไปยังจุดยอดอื่นๆ ผ่านวิถีที่ประกอบไปด้วยจุดยอดใน S เท่านั้นจึงเป็น ∞

(3) จาก (2) แสดงว่า $P(0) \equiv P_1(0) \wedge P_2(0)$ เป็นจริง

(4) สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริงสำหรับการวนซ้ำครั้งที่ k

(5) จาก (4) $P_1(k)$ ถูกสมมติให้เป็นจริง

(6) จาก (4) $P_2(k)$ ถูกสมมติให้เป็นจริงเช่นกัน

(7) ในการวนซ้ำรอบที่ k+1 สมาชิกของ S ประกอบด้วยจุดยอดที่เป็นสมาชิกของ k อยู่แล้วในรอบที่ k และจุดยอดที่ถูกเติมเข้ามาใหม่ ตามระเบียบวิธีของไดซ์ตรา

(8) ในการวนซ้ำรอบที่ k+1 สำหรับจุดยอดที่เป็นสมาชิกของ k อยู่แล้วในรอบที่ k ฉลากของจุดยอดเหล่านั้นไม่มีการเปลี่ยนแปลง นั่นคือค่าเหล่านั้นยังคงเป็นความยาวของวิถีสั้นที่สุดจาก a ไปยังจุดยอดนั้นเหมือนเช่นที่เป็นอยู่ในรอบที่ k เนื่องจาก (5)

(9) ในการวนซ้ำรอบที่ k+1 ฉลากของจุดยอด v ที่ถูกเติมเข้ามาใหม่ในรอบนี้เป็นความยาวของวิถีสั้นที่สุดจาก a ไปยัง v โดยวิถีนี้ประกอบไปด้วยจุดยอดใน S ณ รอบที่ k เท่านั้น เนื่องจากเราสมมติว่า $P_2(k)$ เป็นจริง (จาก (6)) และถึงแม้จะประกอบไปด้วยจุดยอดใน S เท่านั้น วิถีนี้ก็ต้องเป็นวิถีที่สั้นที่สุดในบรรดาวิถีที่ผ่านจุดยอดใดก็ได้ด้วย หากไม่ใช่เช่นนั้นแล้ววิถีสั้นที่สุดจะต้องมีจุดยอด u ซึ่งเป็นจุดยอดแรกในวิถีซึ่งไม่ได้อยู่ใน S ณ รอบที่ k แต่ u ไม่สามารถมีได้เพราะหากมีก็แสดงว่ามีวิถีที่มีความยาวน้อยกว่าฉลากของ v ในรอบที่ k ซึ่งประกอบด้วยจุดยอดที่อยู่ใน S เท่านั้น ซึ่งขัดกับการเลือก v (ซึ่งจะต้องเป็นจุดยอดที่ฉลากมีค่าน้อยที่สุดในบรรดาจุดยอดที่ไม่อยู่ใน S และจาก (6) แสดงว่าไม่สามารถมีวิถีไปยังจุดยอดอื่นที่ไม่ได้อยู่ใน S เช่นกัน ที่มีความยาวสั้นกว่านั้นได้) ในระเบียบวิธีของไดซ์ตรา

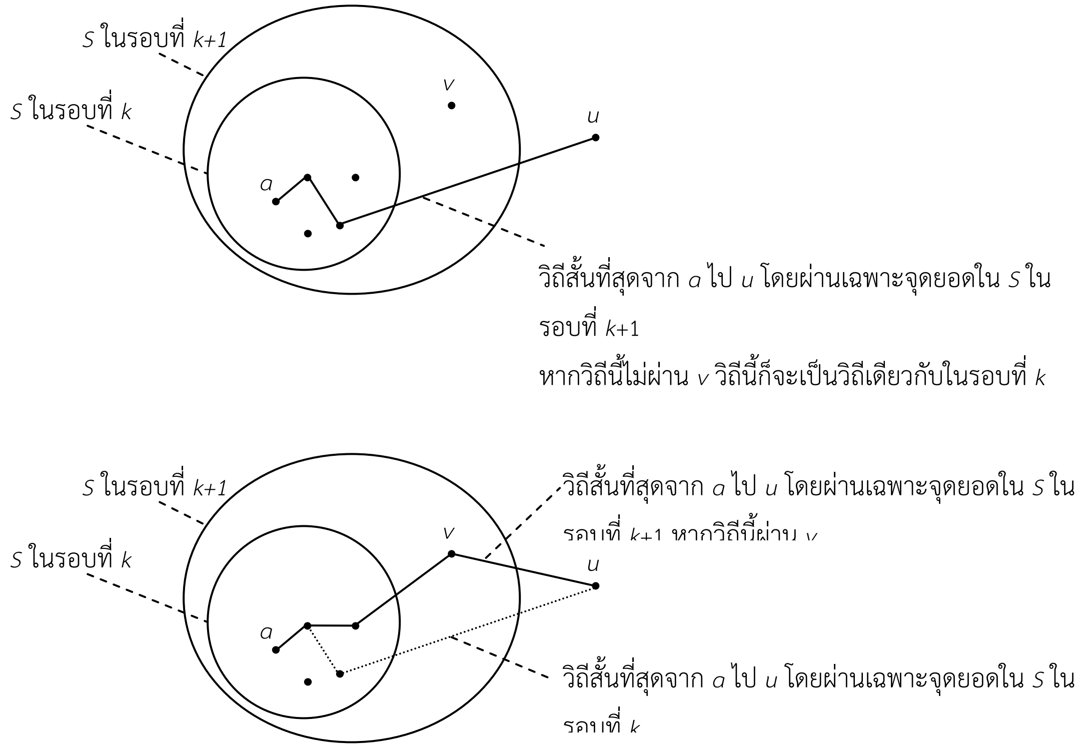
(10) จาก (8) และ (9) แสดงว่า $P_1(k) \rightarrow P_1(k+1)$ เป็นจริง

(11) ให้ u เป็นจุดยอดที่ไม่อยู่ใน S ณ รอบที่ k+1 เนื่องจากสิ่งที่ทำให้ S ในรอบที่ k+1 ต่างไปจาก S ในรอบที่ k คือจุดยอด v ซึ่งถูกเติมเข้ามาใหม่ หากวิถีจาก a ไป u ที่ผ่านเฉพาะจุดยอดใน S ณ รอบที่ k+1 ที่สั้นที่สุดไม่ผ่าน v ฉลากของ u ก็ยังคงเป็นเหมือนที่เป็นในรอบที่ k นั่นคือความยาวของวิถีสั้นที่สุดจาก a ไปยัง u นั้นซึ่งวิถีนี้ประกอบไปด้วยจุดยอดใน S เท่านั้น ดูรูปที่ 45 (บน) ประกอบ

(12) หากวิถีจาก a ไป u ที่ผ่านเฉพาะจุดยอดใน S ณ รอบที่ k+1 ที่สั้นที่สุดผ่าน v แปลว่าวิถีดังกล่าวจะต้องประกอบด้วยวิถีสั้นที่สุดจาก a ไป v ต่อกับเส้นเชื่อมจาก v ไปยัง u เนื่องจากระเบียบวิธีของไดซ์ตราในขั้นตอนนี้ให้เลือกค่าที่น้อยกว่าระหว่างฉลากเดิมของ u และ ผลบวกของฉลากเดิมของ v กับน้ำหนักถ่วงของเส้นเชื่อมจาก v ไป u วิถีสั้นที่สุดดังกล่าวจะผ่าน v ก็ต่อเมื่อค่าหลังน้อยกว่าค่าแรก ดูรูปที่ 45 (ล่าง) ประกอบ

(13) จาก (11) และ (12) ไม่ว่าจะเป็นกรณีไหน ฉลากของ u ในรอบที่ k+1 นี้ก็จะเป็นความยาวของวิถีสั้นที่สุดจาก a ไปยังจุดยอดนั้น ซึ่งวิถีนี้ประกอบไปด้วยจุดยอดใน S เท่านั้น นั่นหมายความว่า $P_2(k) \rightarrow P_2(k+1)$ เป็นจริง

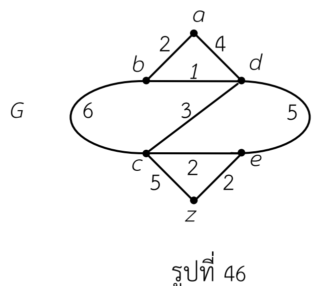
(14) จากการพิสูจน์โดยอุปนัยคณิตศาสตร์ ผลสรุปใน (2), (10), และ (13) แสดงว่า $P(k)$ เป็นจริง ซึ่งหมายความว่าระเบียบวิธีของไดซ์ตราสามารถหาวิถีสั้นที่สุดตามที่ต้องการได้



รูปที่ 45

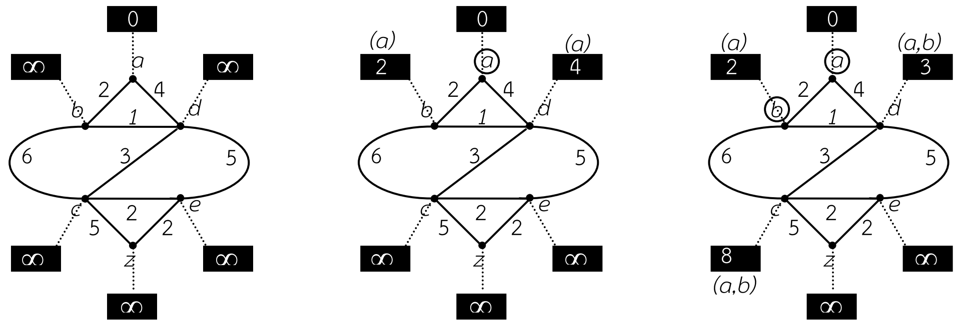
ตัวอย่างที่ 30

จงหาเส้นทางสั้นที่สุดจากจุดยอด a ไปยังจุดยอด z ในกราฟ G ดังรูปที่ 46 โดยใช้ระเบียบวิธีของไดซ์ตรา

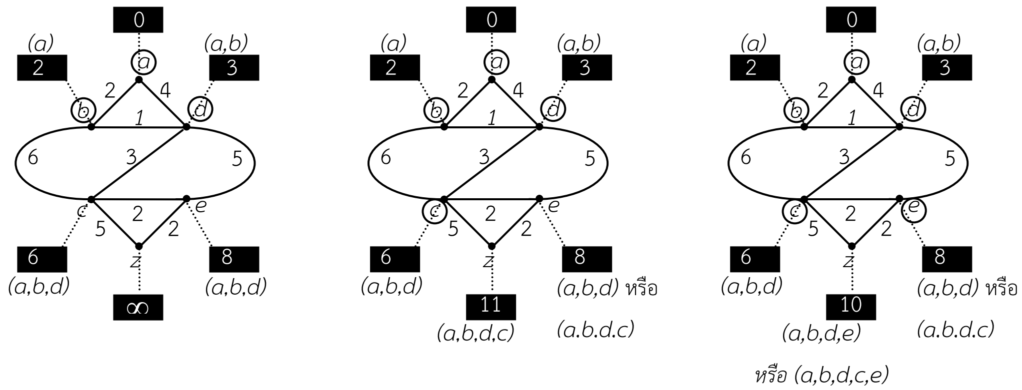


รูปที่ 46

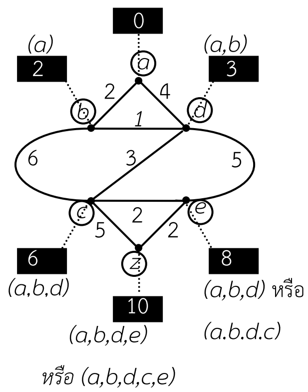
ใช้ระเบียบวิธีของไดซ์ตรา โดยแสดงแต่ละขั้นตอนด้วยรูปประกอบกับคำอธิบาย ชื่อของจุดยอดที่เป็นสมาชิกของ *S* จะถูกวงกลมล้อมรอบ ค่าตัวเลขในกล่องสี่เหลี่ยมที่สอดคล้องกับจุดยอดหนึ่งๆ คือ ค่า *L*(.) ของจุดยอดนั้น ลำดับของจุดยอดที่ระบุที่จุดยอดหนึ่งๆ คือ การเดินทางจาก *a* ไปยังจุดยอดนั้นที่สัมพันธ์กับค่า *L*(.) ที่ระบุ



รูปที่ 47



รูปที่ 48



รูปที่ 49

(1) ตั้งค่าเริ่มต้น *L*(*a*) = 0 และ *L*(.) ของจุดยอดอื่นๆ เป็น ∞ (รูปที่ 47 ซ้าย) ยังไม่มีสมาชิกใน *S*

(2) จุดยอด *a* เป็นจุดยอดที่ไม่เป็นสมาชิกของ *S* ที่มี *L*(.) น้อยที่สุด ดังนั้นเราเติมจุดยอด *a* เข้าไปยัง *S* นั่นคือ *S* = {*a*} คำนวณ *L*(.) ใหม่ของจุดยอดทั้งหมดที่ยังไม่อยู่ใน *S* (รูปที่ 47 กลาง)

จุดยอด (v)	$L(a)$	น้ำหนักถ่วงของ $\{a, v\}$	ผลรวม	$L(v)$ เดิม	ผลรวม < $L(v)$ เดิม	$L(v)$ ใหม่	วิถีที่สอดคล้องกับ $L(v)$
b	0	2	2	∞	ใช่	2	a-b
c	0	∞	∞	∞	ไม่ใช่	∞	-
d	0	4	4	∞	ใช่	4	a-d
e	0	∞	∞	∞	ไม่ใช่	∞	-
z	0	∞	∞	∞	ไม่ใช่	∞	-

(3) จุดยอด b เป็นจุดยอดที่ไม่เป็นสมาชิกของ S ที่มี $L(.)$ น้อยที่สุด ดังนั้นเราเติมจุดยอด b เข้าไปยัง S นั่นคือ $S = \{a, b\}$ คำนวณ $L(.)$ ใหม่ของจุดยอดทั้งหมดที่ยังไม่อยู่ใน S (รูปที่ 47 ขวา)

จุดยอด (v)	$L(b)$	น้ำหนักถ่วงของ $\{b, v\}$	ผลรวม	$L(v)$ เดิม	ผลรวม < $L(v)$ เดิม	$L(v)$ ใหม่	วิถีที่สอดคล้องกับ $L(v)$
c	2	6	8	∞	ใช่	8	a-b-c
d	2	1	3	4	ใช่	3	a-b-d
e	2	∞	∞	∞	ไม่ใช่	∞	-
z	2	∞	∞	∞	ไม่ใช่	∞	-

(4) จุดยอด d เป็นจุดยอดที่ไม่เป็นสมาชิกของ S ที่มี $L(.)$ น้อยที่สุด ดังนั้นเราเติมจุดยอด d เข้าไปยัง S นั่นคือ $S = \{a, b, d\}$ คำนวณ $L(.)$ ใหม่ของจุดยอดทั้งหมดที่ยังไม่อยู่ใน S (รูปที่ 48 ซ้าย)

จุดยอด (v)	$L(d)$	น้ำหนักถ่วงของ $\{d, v\}$	ผลรวม	$L(v)$ เดิม	ผลรวม < $L(v)$ เดิม	$L(v)$ ใหม่	วิถีที่สอดคล้องกับ $L(v)$
c	3	3	6	8	ใช่	6	a-b-d-c
e	3	5	8	∞	ใช่	8	a-b-d-e
z	3	∞	∞	∞	ไม่ใช่	∞	-

(5) จุดยอด c เป็นจุดยอดที่ไม่เป็นสมาชิกของ S ที่มี $L(.)$ น้อยที่สุด ดังนั้นเราเติมจุดยอด c เข้าไปยัง S นั่นคือ $S = \{a, b, c, d\}$ คำนวณ $L(.)$ ใหม่ของจุดยอดทั้งหมดที่ยังไม่อยู่ใน S (รูปที่ 48 กลาง)

จุดยอด (v)	$L(c)$	น้ำหนักถ่วงของ $\{c, v\}$	ผลรวม	$L(v)$ เดิม	ผลรวม < $L(v)$ เดิม	$L(v)$ ใหม่	วิถีที่สอดคล้องกับ $L(v)$
e	6	2	8	8	ไม่ใช่ (เท่ากัน)	8	a-b-d-e ($L(v)$ ค่าเดิม)หรือ a-b-d-c-e ($L(v)$ ค่าใหม่)
z	6	5	11	∞	ใช่	11	a-b-d-c-z

(6) จุดยอด e เป็นจุดยอดที่ไม่เป็นสมาชิกของ S ที่มี $L(.)$ น้อยที่สุด ดังนั้นเราเติมจุดยอด e เข้าไปยัง S นั่นคือ $S = \{a, b, c, d, e\}$ คำนวณ $L(.)$ ใหม่ของจุดยอดทั้งหมดที่ยังไม่อยู่ใน S (รูปที่ 48 ขวา)

จุดยอด (v)	$L(e)$	น้ำหนักถ่วงของ $\{e, v\}$	ผลรวม	$L(v)$ เดิม	ผลรวม < $L(v)$ เดิม	$L(v)$ ใหม่	วิถีที่สอดคล้องกับ $L(v)$
z	8	2	10	11	ใช่	10	a-b-d-e-z หรือ a-b-d-c-e-z

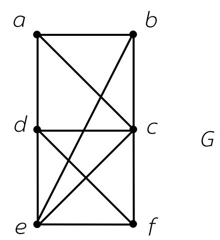
(7) จุดยอด z เป็นจุดยอดที่ไม่เป็นสมาชิกของ S ที่มี $L(.)$ น้อยที่สุด ดังนั้นเราเติมจุดยอด z เข้าไปยัง S และเนื่องจากจุดหมายปลายทางหรือจุดยอด z เป็นสมาชิกของ S เรียบร้อยแล้ว $L(z)$ ซึ่งเท่ากับ 10 จึงเป็นค่าน้ำหนักถ่วงรวมของวิถีสั้นที่สุดจากจุดยอด a ไปยังจุดยอด z โดยวิถีสั้นที่สุดที่สอดคล้องกับค่าดังกล่าวคือ a-b-d-e-z หรือ a-b-d-c-e-z (รูปที่ 49)

กราฟเชิงระนาบ

กราฟหนึ่งๆ จะเป็น *กราฟเชิงระนาบ* (Planar Graph) เมื่อการวาดกราฟนั้นลงบนระนาบสามารถทำได้โดยไม่มีเส้นเชื่อมใดตัดกันเลย กราวาดกราฟในลักษณะดังกล่าวเรียกว่า ตัวแทนเชิงระนาบ (Planar Representation) ของกราฟนั้น

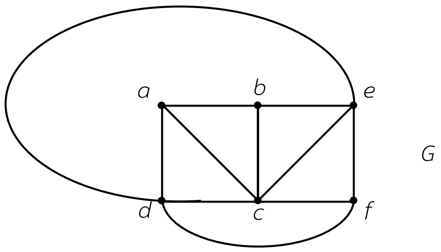
ตัวอย่างที่ 31

จงวาดรูปตัวแทนเชิงระนาบของกราฟ G ในรูปที่ 50 มาหนึ่งแบบ



รูปที่ 50

ตัวแทนเชิงระนาบแบบหนึ่งของ G สามารถแสดงได้ในรูปที่ 51 โดยเราตรวจสอบว่ากราฟทั้งสองเป็นกราฟเดียวกันโดยพิจารณารายการการประชิดของจุดยอดแต่ละจุด

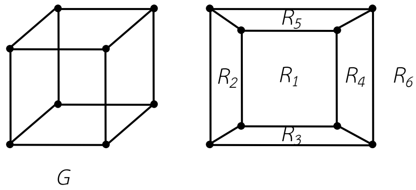


รูปที่ 51

บริเวณ

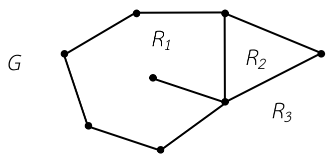
เมื่อวาดกราฟในรูปแบบตัวแทนเชิงระนาบ กราฟนั้นจะถูกแบ่งเป็นส่วนๆ หรือ *บริเวณ* (Region) ซึ่งก็คือพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นเชื่อมของกราฟนั่นเอง รวมถึงบริเวณที่อยู่นอกกราฟทั้งหมดด้วย

R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, และ R_6 แสดงบริเวณทั้ง 6 ของตัวแทนเชิงระนาบของกราฟ G ในรูปที่ 52



รูปที่ 52 : บริเวณในตัวแทนเชิงระนาบของกราฟ

จำนวนเส้นเชื่อมทั้งหมดที่เป็นขอบเขตของแต่ละบริเวณ เรียกว่า *ดีกรี* ของบริเวณนั้น ดีกรีของบริเวณ R ใช้สัญลักษณ์ deg(R) การนับดีกรีของบริเวณทำได้ดังนี้ เมื่อตามรอยขอบเขตของแต่ละบริเวณจนครบรอบ เส้นเชื่อมใดที่ถูกผ่านหนึ่งครั้งจะมีส่วนร่วมในดีกรีรวมของบริเวณนั้นเท่ากับ 1 หากเส้นเชื่อมใดที่ถูกผ่านหนึ่งครั้งจะมีส่วนร่วมในดีกรีรวมของบริเวณนั้นเท่ากับ 2 ดีกรีของบริเวณก็คือผลรวมของส่วนร่วมของเส้นเชื่อมทั้งหมดต่อบริเวณนั้น รูปที่ 53 แสดงดีกรีของบริเวณต่างๆ ในตัวแทนเชิงระนาบของกราฟ G

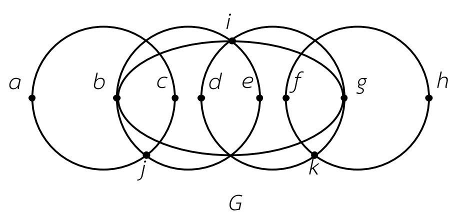


deg(R_1) = 8,
deg(R_2) = 3,
deg(R_3) = 7

รูปที่ 53

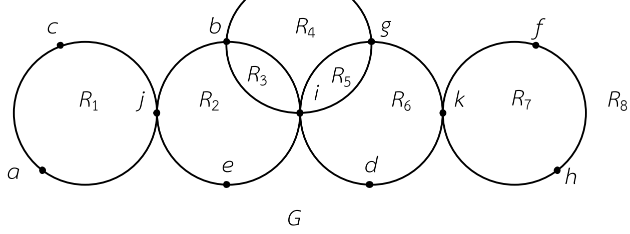
ตัวอย่างที่ 32

จงหาจำนวนบริเวณและดีกรีของแต่ละบริเวณในตัวแทนเชิงระนาบของกราฟ G ดังแสดงในรูปที่ 54



รูปที่ 54

ตัวแทนเชิงระนาบหนึ่งของกราฟ G สามารถเขียนได้ดังรูปที่ 55 โดยตัวแทนเชิงระนาบดังกล่าวมีบริเวณทั้งหมด 8 บริเวณคือ R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, และ R_8 ดังรูป และดีกรีของบริเวณทั้ง 8 สามารถหาได้จากการนับจำนวนเส้นเชื่อมที่เป็นขอบของบริเวณต่างๆ เหล่านั้น เราจะได้ว่า deg(R_1) = 3, deg(R_2) = 4, deg(R_3) = 2, deg(R_4) = 3, deg(R_5) = 2, deg(R_6) = 4, deg(R_7) = 3, และ deg(R_8) = 13

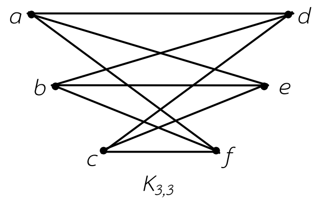


รูปที่ 55

ตัวอย่างที่ 33

จงแสดงว่า $K_{3,3}$ ไม่เป็นกราฟเชิงระนาบ

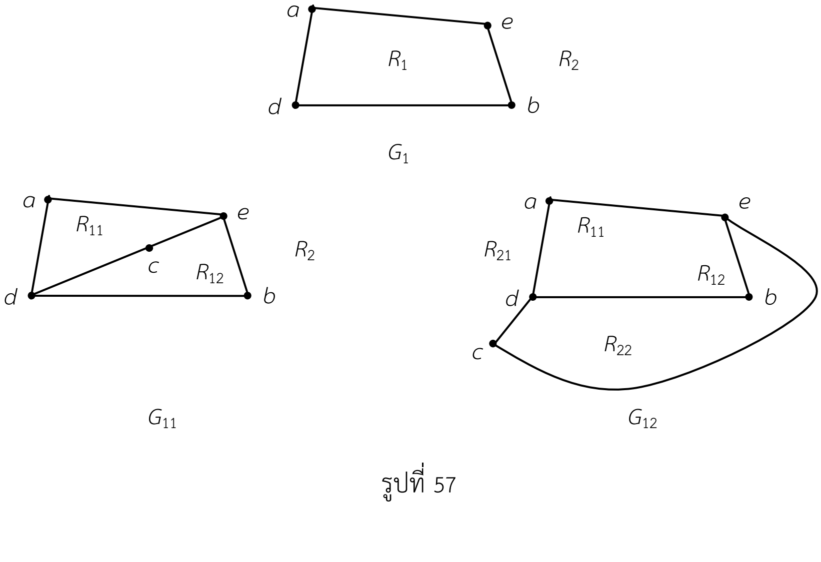
(1) $K_{3,3}$ สามารถวาดได้ดังรูปที่ 56



รูปที่ 56

(2) พยายามเขียนตัวแทนเชิงระนาบของ $K_{3,3}$ โดยการค่อยๆ เพิ่มจุดยอดและเส้นเชื่อมเข้าไปจนครบ โดยที่พยายามรักษาความเป็นเชิงระนาบเอาไว้ เริ่มจากเติมจุดยอด a, b, d, และ e พร้อมเส้นเชื่อมที่อุบัติกับจุดยอดเหล่านี้ก่อน สังเกตว่า a และ b จะต้องประชิดกับ d และ e ทั้งคู่ ดังนั้นกราฟย่อยที่เกิดขึ้นจะต้องเป็นวงปิดดังกราฟ G_1 ในรูปที่ 57 เท่านั้น เรียกบริเวณทั้งสองที่เกิดขึ้นว่า R_1 และ R_2 ดังแสดงในรูป

(3) เพิ่ม c และเส้นเชื่อมที่สอดคล้องกับจุดยอดลงไปในกราฟ G_1 ในรูปที่ 57 จุดยอด c จะต้องอยู่ใน R_1 และ R_2 บริเวณใดบริเวณหนึ่ง ถ้าจุดยอด c อยู่ใน R_1 เนื่องจาก c ต้องประชิดกับ d และ e บริเวณ R_1 จะถูกแบ่งเป็น 2 ส่วน ดังกราฟ G_{11} ถ้าจุดยอด c อยู่ใน R_2 บริเวณ R_2 จะถูกแบ่งเป็น 2 ส่วน ดังกราฟ G_{12}



รูปที่ 57

(4) จากกราฟ G_{11} การเติมจุดยอด f ซึ่งประชิดกับ a, b, และ c โดยไม่ให้เส้นเชื่อมตัดกันนั้นไม่สามารถทำได้ เนื่องจากหากทำได้จะต้องมีบริเวณที่เมื่อเติม f ลงไปในบริเวณนั้นแล้วเส้นเชื่อมจาก f ไปยัง a, b, และ c จะต้องไม่ตัดเส้นขอบเขตของบริเวณนั้นเลย นั่นคือบริเวณนั้นต้องมีจุดยอดทั้ง 3 อยู่ที่ขอบพร้อมกัน อย่างไรก็ตามไม่มีบริเวณใดที่ขอบของบริเวณผ่าน a, b, และ c พร้อมกัน ดังนั้นในกรณีนี้จึงไม่สามารถสร้างตัวแทนเชิงระนาบของ $K_{3,3}$ ได้

(5) ในทำนองเดียวกัน จากกราฟ G_{12} การเติมจุดยอด f ซึ่งประชิดกับ a, b, และ c โดยไม่ให้เส้นเชื่อมตัดกันนั้นไม่สามารถทำได้ ด้วยเหตุผลเดียวกับ (5) ดังนั้นในกรณีนี้ก็ไม่สามารถสร้างตัวแทนเชิงระนาบของ $K_{3,3}$ ได้

(6) จากผลการพยายามสร้างตัวแทนเชิงระนาบของ $K_{3,3}$ ใน (4) และ (5) เราสรุปได้ว่า $K_{3,3}$ ไม่เป็นกราฟเชิงระนาบ

ตัวอย่างที่ 34

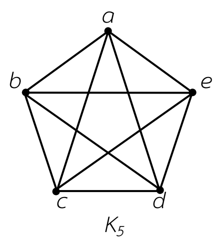
จงแสดงว่า $K_{3,2}$ เป็นกราฟเชิงระนาบ

การแสดงว่ากราฟใดๆ เป็นกราฟเชิงระนาบสามารถทำได้โดยหาตัวแทนเชิงระนาบของกราฟนั้นให้ได้อย่างน้อยหนึ่งแบบ เราสามารถพยายามสร้างตัวแทนเชิงระนาบของ $K_{3,2}$ ได้โดยใช้วิธีเดียวกับที่ใช้ในการพิสูจน์ว่า $K_{3,3}$ ไม่ใช่กราฟเชิงระนาบจากตัวอย่างที่กล่าวมาแล้ว สังเกตว่าถ้า $K_{3,3}$ ในรูปที่ 56 ไม่มีจุดยอด f กราฟดังกล่าวจะเป็น $K_{3,2}$ ซึ่งสามารถเขียนตัวแทนเชิงระนาบได้ดังกราฟ G_{11} หรือ G_{12} ในรูปเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 35

จงแสดงว่า K_5 ไม่เป็นกราฟเชิงระนาบ

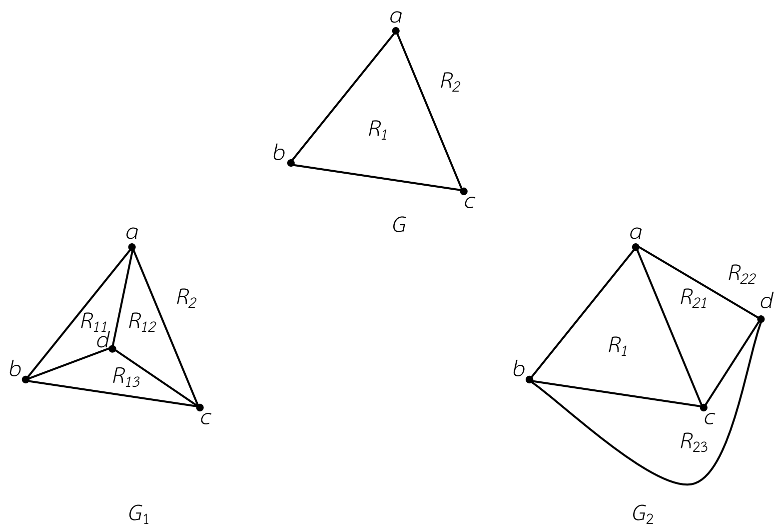
(1) K_5 สามารถวาดได้ดังรูปที่ 58



รูปที่ 58

(2) พยายามเขียนตัวแทนเชิงระนาบของ K_5 โดยการค่อยๆ เพิ่มจุดยอดและเส้นเชื่อมเข้าไปจนครบ โดยที่พยายามรักษาความเป็นเชิงระนาบเอาไว้ เริ่มจากเติมจุดยอด a, b, และ c พร้อมเส้นเชื่อมที่อุบัติกับจุดยอดเหล่านี้ เนื่องจากจุดยอดทั้งสามเชื่อมต่อสมบูรณ์ กราฟย่อยที่ได้จะต้องเป็นดังกราฟ G ในรูปที่ 59

(3) เพิ่ม d และเส้นเชื่อมที่สอดคล้องกับจุดยอดลงไปในกราฟ G_1 ในรูปที่ 59 จุดยอด d จะต้องอยู่ใน R_1 และ R_2 บริเวณใดบริเวณหนึ่ง ถ้าจุดยอด c อยู่ใน R_1 เนื่องจาก c ต้องประชิดกับจุดยอดอื่นๆ ทุกจุด บริเวณ R_1 จะถูกแบ่งเป็น 3 ส่วน ดังกราฟ G_{11} ถ้าจุดยอด c อยู่ใน R_2 บริเวณ R_2 จะถูกแบ่งเป็น 3 ส่วน ดังกราฟ G_{12}



รูปที่ 59

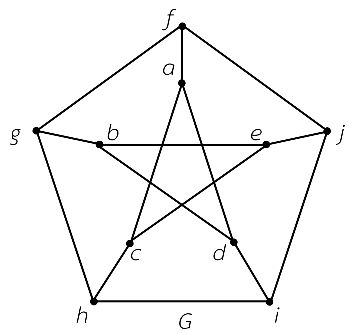
(4) จากกราฟ G_{11} การเติมจุดยอด e โดยไม่ให้เส้นเชื่อมตัดกันเลยไม่สามารถทำได้ เนื่องจาก e ต้องประชิดกับทั้งสี่จุดยอดที่มีอยู่แล้ว แต่ไม่มีบริเวณใดเลยที่มี a, b, c, และ d อยู่บนขอบพร้อมกัน ดังนั้นในกรณีนี้จะไม่สามารถสร้างตัวแทนเชิงระนาบของ K_5 ได้

(5) จากกราฟ G_{12} การเติมจุดยอด e โดยไม่ให้เส้นเชื่อมตัดกันเลยก็ไม่สามารถทำได้ ด้วยเหตุผลเดียวกับ (4) ดังนั้นในกรณีนี้ก็ไม่สามารถสร้างตัวแทนเชิงระนาบของ K_5 ได้

(6) จากผลการพยายามสร้างตัวแทนเชิงระนาบของ K_5 ใน (4) และ (5) เราสรุปได้ว่า K_5 ไม่เป็นกราฟเชิงระนาบ

ตัวอย่างที่ 36

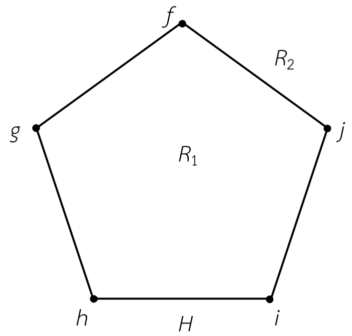
กราฟของพีเทอร์เซน (Petersen's Graph) สามารถแสดงได้ดังกราฟ G ในรูปที่ 60 จงแสดงว่ากราฟดังกล่าวไม่เป็นกราฟเชิงระนาบ



รูปที่ 60 : กราฟของพีเทอร์เซน

(1) พยายามสร้างตัวแทนเชิงระนาบของ G โดยเริ่มเติมจุดยอดและเส้นเชื่อมต่างๆ เพื่อให้กราฟย่อยในแต่ละขั้นตอนเป็นกราฟเชิงระนาบ

(2) เนื่องจากจุดยอด f, g, h, i, และ j ต่อกันเป็นวงจรเชิงเดียว ดังนั้นตัวแทนเชิงระนาบของกราฟย่อยที่มีจุดยอยทั้งสี่และเส้นเชื่อมที่เชื่อมระหว่างจุดยอดเหล่านั้นจะต้องเป็นดังรูปที่ 61



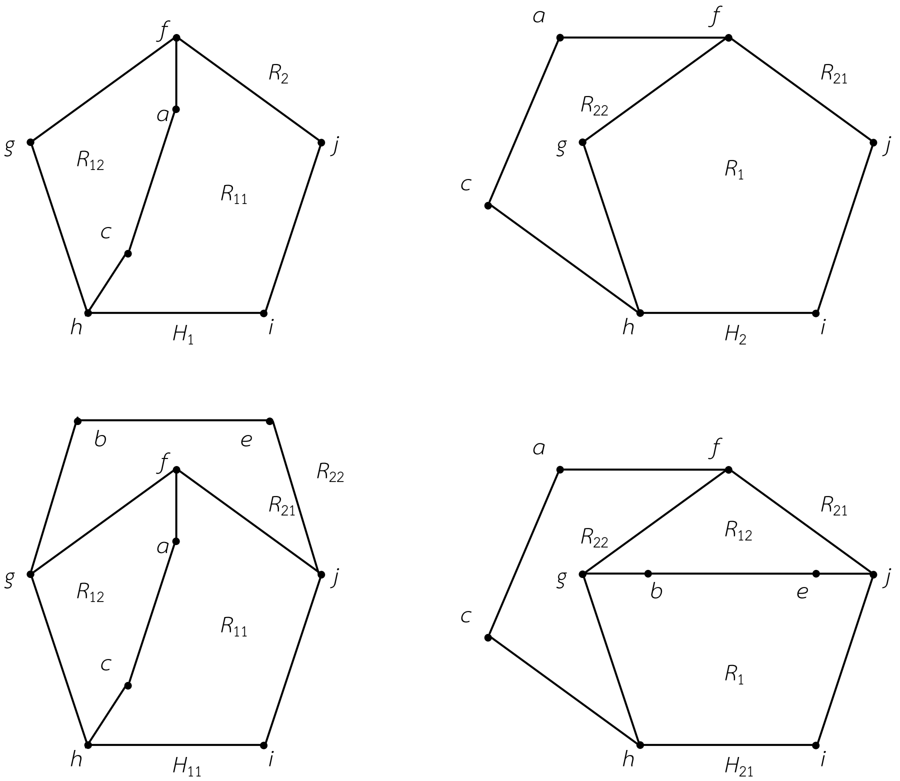
รูปที่ 61

(3) เพิ่มจุดยอด a เข้าไปใน H โดยตำแหน่งของ a เป็นได้สองกรณีคือ บริเวณ R_1 หรือ บริเวณ R_2 จุดยอด c จะต้องอยู่ในบริเวณเดียวกับจุดยอด a เนื่องจาก c ต้องประชิดกับ a เพื่อหลีกเลี่ยงการตัดกับเส้นขอบของบริเวณระหว่างบริเวณทั้งสอง กราฟย่อยที่ได้จะเป็นดังกราฟ H_1 หรือ H_2 ในรูปที่ 62

(4) ด้วยเหตุผลเดียวกับการวางตำแหน่งของจุดยอด a และ c เมื่อเทียบกับกราฟ H จุดยอด b และ e จะต้องอยู่ในบริเวณ R_1 เหมือนกัน หรือ R_2 เหมือนกัน ในกรณีที่เติมจุดยอด a และ c เข้าไปแล้วเกิด $H1$ จุดยอด b และ e จะต้องอยู่ใน R_1 เพื่อมิให้การวิถีระหว่าง g และ j ที่ผ่าน b และ e ตัดกับวิถีระหว่าง f และ h ที่ผ่าน a และ c ส่วนในกรณีที่เกิดกราฟ H_2 จุดยอด b และ e จะต้องอยู่ใน R_2 ผลลัพธ์ที่ได้คือกราฟ H_{11} และ H_{21} ตามลำดับ

(5) เนื่องจากไม่ว่าจะเป็น H_{11} หรือ H_{21} ก็ไม่มีบริเวณใดที่ทั้งจุดยอด a และ b อยู่บนขอบของบริเวณเดียวกันนั้น ทำให้ไม่สามารถเติมจุดยอด d ซึ่งประชิดกับทั้ง a และ b ลงไป โดยที่ไม่ให้มีการตัดกันของเส้นเชื่อมเกิดขึ้นได้ เราจึงสามารถสรุปได้ว่ากราฟของพีเทอร์เซนไม่เป็นกราฟเชิงระนาบ

(6) จุดยอด c จะต้องอยู่ในบริเวณเดียวกับจุดยอด a เนื่องจาก c ต้องประชิดกับ a เพื่อหลีกเลี่ยงการตัดกับเส้นขอบของบริเวณระหว่างบริเวณทั้งสอง



รูปที่ 62

ทฤษฎีบทที่ 10 สูตรของออยเลอร์

> ให้ G เป็นกราฟเชิงเดียวเชิงระนาบเชื่อมต่อ (Connected Planar Simple Graph) ที่มีเส้นเชื่อม e เส้นและจุดยอด v จุด แล้ว $r = e - v + 2$ โดย r เป็นจำนวนบริเวณทั้งหมดของตัวแทนเชิงระนาบของกราฟ G นั้น

พิสูจน์

(1) ให้ G เป็นกราฟเชิงเดียวเชิงระนาบเชื่อมต่อที่มีเส้นเชื่อม e เส้นและจุดยอด v จุด

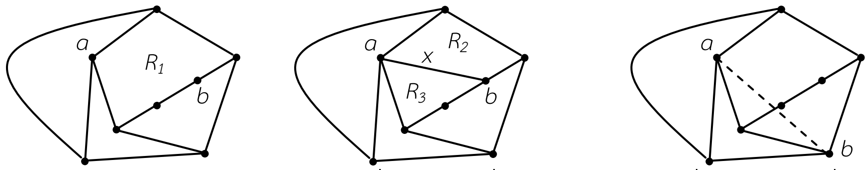
(2) จากตัวแทนเชิงระนาบของ G สร้างกราฟย่อยของ G ที่มีหนึ่งเส้นเชื่อมโดยเลือกเส้นเชื่อมหนึ่งเส้นใน G พร้อมจุดยอดที่อุบัติกับเส้นเชื่อมนั้น เรียกกราฟนี้ว่า G_1

(3) สูตรของออยเลอร์เป็นจริงสำหรับ G_1 โดย $r = 1, e = 1, v = 2$

(4) สมมติให้สูตรของออยเลอร์เป็นจริงสำหรับกราฟ G_k ซึ่งเป็นกราฟย่อยเชื่อมต่อของ G ที่มีเส้นเชื่อม k เส้น หรือเขียนได้ว่า $r_k = e_k - v_k + 2$ โดย r_k คือ จำนวนบริเวณใน G_k, e_k คือ จำนวนเส้นเชื่อมใน G_k, และ v_k คือ จำนวนจุดยอดใน G_k

(5) สร้างกราฟ G_{k+1} ซึ่งเป็นกราฟย่อยเชื่อมต่อของ G ที่มีเส้นเชื่อม k+1 เส้นจาก G_k โดยการเลือกเติมเส้นเชื่อมของ G ที่ไม่อยู่ใน G_k เข้าไปอีกหนึ่งเส้น ให้เส้นเชื่อมนี้อุบัติกับจุดยอด a และ b, หรือเขียนได้ว่า $\{a, b\}$ เรียกเส้นเชื่อมนี้ว่า x จุดยอดทั้งสองจะต้องเป็นจุดยอดของ G_k ทั้งคู่ หรือ ไม่ก็ต้องมีจุดใดจุดหนึ่งเป็นจุดยอดของ G_k เนื่องจาก G_{k+1} ต้องเป็นกราฟเชื่อมต่อ ถ้าทั้ง a และ b ไม่เป็นจุดยอดของ G_k เส้นเชื่อมที่เติมเข้ามานั้นจะทำให้เกิดส่วนประกอบเชื่อมต่อใหม่แยกจาก G_k

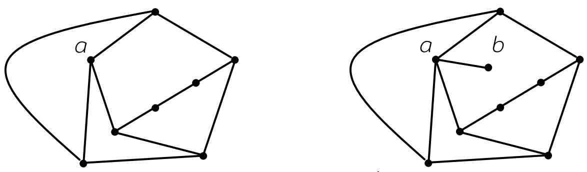
(6) หากจุดยอด *a* และ *b* เป็นจุดยอดของ G_k ทั้งคู่ *x* จะไม่ตัดกับเส้นเชื่อมที่มีอยู่เดิมเมื่อ *x* ตัดผ่านเพียงบริเวณเดียวของ G_k เท่านั้น นั่นหมายความว่าทั้ง *a* และ *b* จะต้องอยู่บนขอบของบริเวณเดียวกันบริเวณหนึ่ง มิเช่นนั้นจะไม่สามารถทำให้ *G* เป็นกราฟเชิงระนาบได้ ดูรูปที่ 63 เป็นตัวอย่างประกอบ ในกรณีนี้ *x* จะแบ่งบริเวณที่ *a* และ *b* อยู่บนขอบเป็นสองส่วน ดังนั้น $r_{k+1} = r_k + 1$, $v_{k+1} = v_k$, และ $e_{k+1} = e_k + 1$ เราจึงกล่าวได้ว่า $r_{k+1} = e_{k+1} - v_{k+1} + 2$ จริง เนื่องจาก (4)



G_k G_{k+1} เมื่อมีบริเวณที่ a และ b เป็นขอบร่วมกัน G_{k+1} เมื่อไม่มีบริเวณที่ a และ b เป็นขอบร่วมกัน (ไม่สามารถเป็นเชิงระนาบได้)

รูปที่ 63

(7) หากมีเพียง *a* หรือ *b* จุดใดจุดหนึ่งที่เป็นจุดยอดของ G_k นั่นหมายความว่าจุดยอดใหม่ที่เกิดขึ้นจะต้องไปปรากฎอยู่ในบริเวณที่มีอยู่แล้วบิเวณใดบริเวณหนึ่ง และ ไม่มีบริเวณใหม่เกิดขึ้น ดังเช่นตัวอย่างในรูปที่ 64 ในกรณีนี้ $r_{k+1} = r_k$, $v_{k+1} = v_k+1$, และ $e_{k+1} = e_k + 1$ เราจึงกล่าวได้ว่า $r_{k+1} = e_{k+1} - v_{k+1} + 2$ จริง เนื่องจาก (4)



G_k G_{k+1} เมื่อ b ไม่ได้เป็นจุดยอดของ G_k

รูปที่ 64

(8) จาก (6) และ (7) เราสรุปได้ว่า ถ้าสูตรของออยเลอร์เป็นจริงสำหรับ G_k แล้วสูตรของออยเลอร์เป็นจริงสำหรับ G_{k+1} เช่นกัน

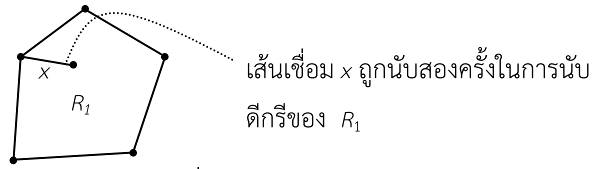
(9) จาก (3) และ (8) เราใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่าสูตรของออยเลอร์เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 37

จงแสดงว่าถ้า *G* เป็นกราฟเชิงเดียวเชิงระนาบเชื่อมต่อที่มีเส้นเชื่อมจำนวน *e* เส้นและจุดยอด *v* จุดโดยที่ $v \geq 3$ แล้ว $e \leq 3v - 6$

(1) บริเวณแต่ละบริเวณของ *G* ซึ่งเป็นกราฟตามข้อกำหนดนั้นจะต้องมีดีกรีอย่างน้อย 3 (สังเกตว่า *G* มีจุดยอดอย่างน้อย 3 จุด ไม่มีเส้นเชื่อมต่อระหว่างจุดยอดคู่เดียวกันหลายเส้น และ ไม่มีวงวน)

(2) ดีกรีรวมของทุกบริเวณเป็นสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อม เนื่องจากเส้นเชื่อมแต่ละเส้นเป็นขอบเขตของบริเวณสองบริเวณที่แตกต่างกัน หรือมิเช่นนั้นก็จะถูกนับสองครั้งในบริเวณเดียวกัน ดังเช่นตัวอย่างในรูปที่ 65



รูปที่ 65

(3) ให้ r เป็นจำนวนบริเวณในกราฟ G จาก (1) และ (2) เราแสดงได้ว่า $2e \geq 3r$

(4) จาก (3) และ สูตรของออยเลอร์ ($r = e - v + 2$) ดังนั้น $e - v + 2 \leq (2/3)e$

(5) จาก (5) เราแสดงได้ว่า $e/3 \leq v - 2$ นั่นคือ $e \leq 3v - 6$ นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 38

จงแสดงว่าถ้า G เป็นกราฟเชิงเดียวเชิงระนาบเชื่อมต่อแล้ว G มีจุดยอดหนึ่งที่มีดีกรีไม่เกิน 5

(1) ถ้า G ซึ่งเป็นกราฟเชิงเดียวมีจุดยอด 1 หรือ 2 จุด จุดยอดทั้งสองไม่สามารถมีดีกรีมากกว่า 5 ได้ เนื่องจากมีจุดยอดไม่พอให้เกิดกรณีดังกล่าว

(2) ในกรณีที่ G มีจุดยอด 3 จุดขึ้นไป ให้ e เป็นจำนวนเส้นเชื่อม และ v คือจำนวนจุดยอดของ G ดังนั้น จากทฤษฎีบทการจับมือซึ่งกล่าวว่า $2e$ เท่ากับผลรวมของดีกรีของจุดยอดทั้งหมด หากจุดยอดทุกจุดมีดีกรีเกิน 5 จะทำให้ $2e$ ซึ่งเท่ากับผลรวมดังกล่าวมีค่าอย่างน้อย $6v$

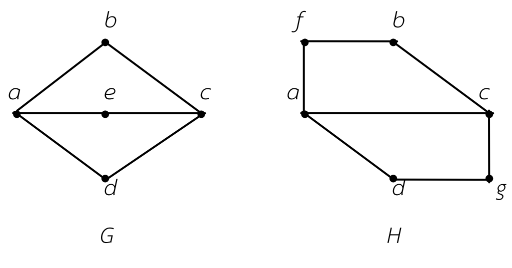
(3) จาก $e \leq 3v - 6$ ดังที่ได้พิสูจน์มาแล้ว เราแสดงได้ว่า $2e \leq 6v - 12$ ซึ่งขัดแย้งกับค่าของ $2e$ ในกรณีที่จุดยอดทุกจุดมีดีกรีเกิน 5 ดังนั้นจะต้องมีจุดยอดของ G จุดหนึ่งที่มีดีกรีไม่เกิน 5

ภาวะสมานสัณฐาณ

กราฟสองกราฟ G และ H จะ *สมานสัณฐาน* (Homeomorphic) กันเมื่อมีกราฟ H กราฟหนึ่งซึ่งทั้ง G และ H สามารถได้มาโดยการแทนเส้นเชื่อมบางเส้นในกราฟ F นั้นด้วยเส้นเชื่อมที่ต่ออนุกรมกันหลายๆ เส้น

ตัวอย่างที่ 39

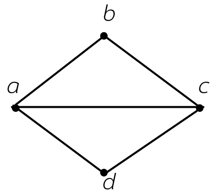
จงแสดงว่ากราฟ G และ H ในรูปที่ 66 นั้นสมานสัณฐานกัน



รูปที่ 66

พิจารณากราฟ F ในรูปที่ 67

อติวงศ์ สุชาโต
ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



F
รูปที่ 67

กราฟ G สามารถสร้างได้จากการแทนเส้นเชื่อมที่อุบัติกับ a และ c ใน F ด้วยการอนุกรมกันของเส้นเชื่อมจาก a ไปจุดยอด e และเส้นเชื่อมจาก e ไป c ส่วนกราฟ F สามารถสร้างได้จากการแทนเส้นเชื่อมที่อุบัติกับ a และ b ใน F ด้วยการอนุกรมกันของเส้นเชื่อมจาก a ไปจุดยอด f และเส้นเชื่อมจาก f ไป b และแทนเส้นเชื่อมที่อุบัติกับ c และ d ด้วยการอนุกรมกันของเส้นเชื่อมจาก c ไปจุดยอด g และเส้นเชื่อมจาก g ไป d ดังนั้นจึงสรุปได้ว่ากราฟ G และ H สมานสัณฐานกัน

ทฤษฎีบทที่ 11 ทฤษฎีบทของกูราตอฟสกี (Kuratowski's Theorem)

กราฟหนึ่งๆ จะไม่เป็นกราฟเชิงระนาบก็ต่อเมื่อกราฟนั้นมีกราฟย่อยที่สมานสัณฐานกับ $K_{3,3}$ หรือ K_5

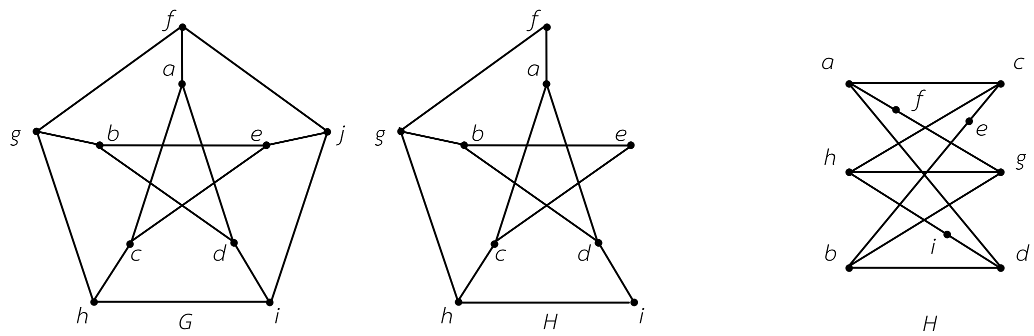
ตัวอย่างที่ 40

จงแสดงด้วยทฤษฎีบทของกูราตอฟสกีว่ากราฟของพีเทอร์เซนไม่เป็นกราฟเชิงระนาบ

(1) กราฟของพีเทอร์เซน G มีกราฟย่อยหนึ่งเป็นดังกราฟ H ในรูปที่ 68

(2) เราสามารถวาดกราฟ H ใหม่ได้ดังกราฟทางขวามือสุดของรูปที่ 68 ซึ่งเห็นได้ชัดว่าสมานสัณฐานกับ $K_{3,3}$

(3) จากทฤษฎีบทของกูราตอฟสกี กราฟของพีเทอร์เซนไม่เป็นกราฟเชิงระนาบ



รูปที่ 68

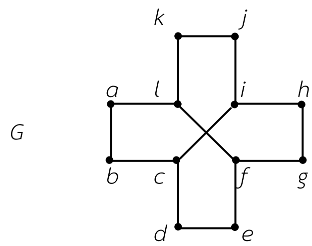
การระบายสีกราฟ

การระบายสี (Coloring) กราฟเชิงเดียว คือ การใส่สีให้กับจุดยอดแต่ละจุดในกราฟ โดยที่ไม่มีจุดยอดที่ประชิดกันจุดใดๆ ที่มีสีเดียวกัน

รงคเลข (Chromatic Number) ของกราฟใดๆ คือ จำนวนสีที่น้อยที่สุดที่จำเป็นต้องใช้ในการระบายสีกราฟนั้น รงคเลขของกราฟ *G* สามารถแทนด้วยสัญลักษณ์ $\chi(G)$

ตัวอย่างที่ 41

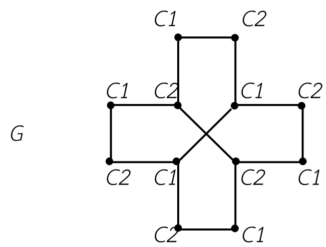
จงหารงคเลขของกราฟ *G* ดังแสดงในรูปที่ 69



รูปที่ 69

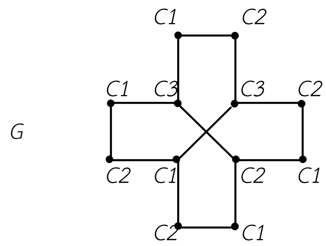
(1) พยายามใช้สีเพียงสองสีระบายกราฟ *G* ให้สีทั้งสองเป็น *C1* และ *C2*

(2) พยายามระบายกราฟย่อยที่เป็นวงจรเชิงเดียวที่ผ่าน *a-b-c-d-e-f-g-h-i-j-k-l-a* เริ่มจากระบายจุดยอด *a* ด้วย *C1* จุดยอด *b* จะต้องถูกระบายด้วย *C2* จุดยอด *c* จะต้องถูกระบายด้วย *C1* จุดยอด *d* จะต้องถูกระบายด้วย *C2* จุดยอด *e* จะต้องถูกระบายด้วย *C1* จุดยอด *f* จะต้องถูกระบายด้วย *C2* เช่นนี้สลับกันไป เราจะได้การระบายสีวงจรดังกล่าวดังรูปที่ 70 จะเห็นได้ว่าจุดยอด *i* ไม่สามารถถูกระบายด้วย *C1* ได้เนื่องจาก i ประชิดกับ *c* ซึ่งถูกระบายด้วย *C1* เช่นกันอย่างแน่นอน เช่นเดียวกับจุดยอด *l* ที่ไม่สามารถถูกระบายด้วย *C2* ดังนั้นการระบายสีกราพ *G* ด้วยสองสีจึงเป็นไปไม่ได้



รูปที่ 70

(3) จากรูปที่ 70 หากเราเพิ่มสีที่สาม *C3* โดยระบาย *i* และ *l* ด้วย C3 เราจะสามารถระบายสีกราฟ *G* ได้ตามต้องการ ดังนั้นรงคเลขของ *G* คือ 3 ดูรูปที่ 71 ประกอบ



รูปที่ 71

ตัวอย่างที่ 42

จงหารงคเลขของ $K_{m,n}$ โดยที่ m และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 0

เนื่องจากจุดยอดของ $K_{m,n}$ สามารถแบ่งได้เป็นสองกลุ่ม โดยกลุ่มหนึ่งมีจุดยอดจำนวน m จุด อีกกลุ่มหนึ่งมี n จุดและจุดยอดในแต่ละกลุ่มไม่ประชิดกับจุดยอดในกลุ่มเดียวกันเลย เราจึงสามารถใช้สีสองสีเพื่อระบายสี $K_{m,n}$ ได้ โดยระบายจุดยอดในกลุ่มหนึ่งด้วยสีที่หนึ่งและระบายสีจุดยอดในอีกกลุ่มหนึ่งด้วยสีที่สอง นั่นคือรงคเลขของ $K_{m,n}$ เท่ากับ 2

ตัวอย่างที่ 43

จงหารงคเลขของ C_n โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 0

ให้ลำดับของจุดยอดในวงจรที่ผ่านจุดยอดทั้งหมดของ C_n เป็น $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, v_1$ หาก n เป็นจำนวนเต็มคู่ เราสามารถระบายจุดยอด v_i ด้วยสีที่หนึ่งเมื่อ i เป็นเลขคี่ และระบายด้วยสีที่สองเมื่อ i เป็นเลขคู่ นั่นคือในกรณีนี้รงคเลขของ C_n เป็น 2 หาก n เป็นจำนวนเต็มคี่ การระบายด้วยวิธีเดิมจะทำให้ v_n และ v_1 ซึ่งประชิดกันมีสีเดียวกัน ดังนั้นจึงต้องเพิ่มสีที่สาม โดยเราสามารถใช้วิธีการระบายสองสีแรกวิธีเดิม แต่ระบาย v_n ด้วยสีที่สาม นั่นคือรงคเลขของ C_n จะเป็น 3 เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่

ตัวอย่างที่ 44

จงหารงคเลขของ W_n โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 0

เนื่องจาก Wn สามารถสร้างได้จาก C_n การเติมจุดยอดอีกจุดหนึ่งซึ่งประชิดกับทุกจุดใน C_n ดังนั้นจุดยอดที่ถูกเติมเข้าไปนั้นจะต้องถูกระบายด้วยสีที่แตกต่างจากสีของจุดยอดเดิม นั่นคือรงคเลขของ Wn เท่ากับรงคเลขของ C_n บวกด้วยหนึ่ง หรืออาจกล่าวได้ว่ารงคเลขของ W_n จะเป็น 3 เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่ และจะเป็น 4 เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่

ตัวอย่างที่ 45

จงหารงคเลขของ K_n โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 0

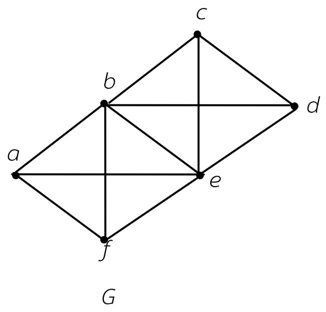
รงคเลขของ K_n คือ n เนื่องจากจุดยอดทุกจุดใน K_n ประชิดกันทั้งหมด จำนวนสีที่น้อยที่สุดที่จะสามารถใช้ระบาย K_n ได้คือ n ซึ่งการระบายสีนี้สามารถทำได้โดยระบายจุดยอดต่างๆ ด้วยสีที่ต่างกันทั้งหมด

ทฤษฎีบทที่ 12 ทฤษฎีบทจตุรงค์

กราฟเชิงระนาบใดๆ มีรงคเลขที่ไม่เกิน 4 เสมอ

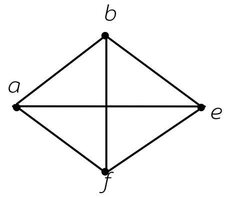
ตัวอย่างที่ 46

จงหารงคเลขของกราฟ G ดังรูปที่ 72



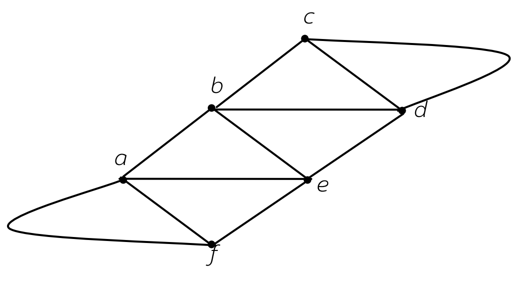
รูปที่ 72

(1) เนื่องจากกราฟย่อยของ G ดังแสดงในรูปที่ 73 สมสมัณฐานกับ K_4 ดังนั้นรงคเลขของ G อย่างน้อยต้องเป็น 4



รูปที่ 73

(2) เราสามารถเขียนตัวแทนเชิงระนาบของ G ได้ดังรูปที่ 74 ดังนั้น G เป็นกราฟเชิงระนาบ



รูปที่ 74

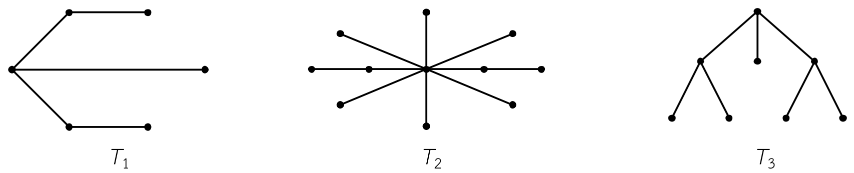
(3) จากทฤษฎีบทจตุรงค์ กราฟเชิงระนาบจะต้องมีรงคเลขไม่เกิน 4 ดังนั้นจาก (1) และ (2) เราสามารถบอกได้ว่ารงคเลขของ G เท่ากับ 4

ต้นไม้

กราฟชนิดพิเศษที่ใช้ประโยชน์ได้มากที่สุดชนิดหนึ่งเรียกว่า *ต้นไม้* (Tree) ซึ่งเป็นกราฟเชื่อมต่อไม่มีทิศทางซึ่งไม่มีวงจรเชิงเดียวเกิดขึ้นในกราฟนั้น การที่กราฟชนิดพิเศษชนิดนี้ถูกเรียกว่าต้นไม้เนื่องจาก เมื่อวาดรูปจุดยอดและเส้นเชื่อมของกราฟชนิดนี้แล้วมีลักษณะคล้ายต้นไม้

เนื่องจากต้นไม้หนึ่งๆ ไม่สามารถมีวงจรในต้นไม้นั้นได้ ในต้นไม้จึงไม่สามารถมีวงวนที่จุดยอดใด และ ไม่สามารถมีเส้นเชื่อมหลายเส้นเชื่อมเกิดขึ้นระหว่างจุดยอดคู่ใดๆ ได้

รูปที่ 75 แสดงตัวอย่างของกราฟที่มีสมบัติเป็นต้นไม้



รูปที่ 75 : ต้นไม้

ทฤษฎีบทที่ 13

กราฟไม่มีทิศทางจะมีสมบัติเป็นต้นไม้ก็ต่อเมื่อมีวิถีระหว่างแต่ละคู่ของจุดยอดใดๆ เพียงวิถีเดียวเท่านั้น

พิสูจน์โดยเริ่มจากการพิสูจน์ว่าต้นไม้มีวิถีระหว่างแต่ละคู่ของจุดยอดใดๆ เพียงวิถีเดียวเท่านั้น

(1) ให้กราฟ T เป็นต้นไม้ ดังนั้น T เป็นกราฟเชื่อมต่อที่ไม่มีวงจรเชิงเดียว

(2) พิจารณาคู่ของจุดยอด u และ v ใดๆ ใน T เราสามารถบอกได้ว่าจะต้องมีวิถีเชิงเดียวระหว่างจุดยอดทั้งคู่เสมอเนื่องจาก T เป็นกราฟเชื่อมต่อ

(3) สมมติว่ามีวิถีที่แตกต่างจากวิถีใน (2) ที่เชื่อมระหว่าง จุดยอด u และ v

(4) เราจะสามารถเดินทางจาก u ไปยัง v ด้วยวิถีใน (2) และเดินทางกลับด้วยวิถีใน (3) ซึ่งวิถีทั้งสองจะประกอบกันเป็นวงจรเชิงเดียว ซึ่งไม่สามารถมีได้ใน T ดังนั้นข้อสมมติใน (3) จึงไม่มีทางเป็นจริง นั่นคือจะต้องมีวิถีระหว่างแต่ละคู่ของจุดยอดใดๆ เพียงวิถีเดียวเท่านั้น

ต่อไปเราต้องพิสูจน์ว่าหากกราฟไม่มีทิศทางมีวิถีระหว่างแต่ละคู่ของจุดยอดใดๆ เพียงวิถีเดียวเท่านั้น กราฟนั้นจะเป็นต้นไม้

(5) ให้ R เป็นกราฟไม่มีทิศทางที่มีวิถีระหว่างแต่ละคู่ของจุดยอดใดๆ เพียงวิถีเดียวเท่านั้น

(6) จาก (5) R เป็นกราฟเชื่อมต่อ เนื่องจากมีวิถีระหว่างจุดยอดทุกๆ คู่

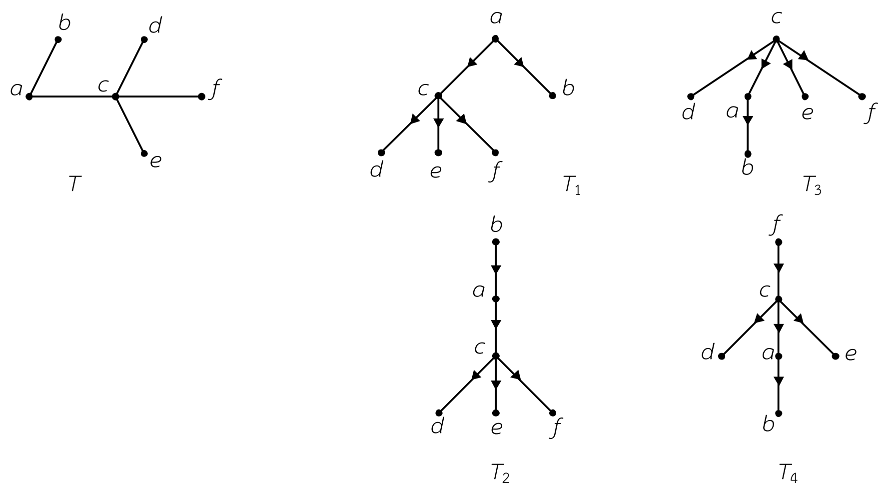
(7) ถ้า R มีวงจรเชิงเดียวซึ่งผ่านจุดยอด u และ v ใดๆ เราจะสามารถหาวิถีเชิงเดียวสองวิถีที่แตกต่างกันระหว่างจุดยอดทั้งสองได้ โดยวิถีแรกคือส่วนหนึ่งของวงจรเชิงเดียวดังกล่าวที่เชื่อมจุดยอด u และ v อีกวิถีคือส่วนที่เหลือของวงจรเชิงเดียวซึ่งเชื่อมจุดยอด u และ v เช่นเดียวกัน จากข้อกำหนดใน (5) R จะมีวงจรเชิงเดียวไม่ได้

(8) จาก (6) และ (7) เราสามารถสรุปได้ว่า R เป็นกราฟซึ่งสอดคล้องตามนิยามของต้นไม้ ดังนั้น R ก็คือต้นไม้นั่นเอง

ต้นไม้แบบกำหนดราก

โดยทั่วๆ ไปแล้วการนำโครงสร้างต้นไม้ไปใช้ประโยชน์ เรามักจะกำหนดจุดยอดจุดหนึ่งให้เป็น *ราก* (Root) ของต้นไม้ หลังจากนั้นจึงสามารถกำหนดทิศทางของเส้นเชื่อมให้มีทิศทางออกจากรากไปยังจุดยอดอื่นๆ ของต้นไม้ กราฟมีทิศทางที่ได้นี้จะถูกเรียกว่า *ต้นไม้แบบกำหนดราก* (Rooted Tree)

เรามักจะวาดรูปต้นไม้แบบกำหนดรากโดยการวางรากอยู่เหนือสุดของโครงสร้างกราฟ และวางจุดยอดที่มีระยะห่างระหว่างจุดยอดนั้นๆ กับราก หรือ จำนวนเส้นเชื่อมที่ประกอบกันเป็นวิถีระหว่างจุดยอดนั้นๆ กับรากเท่ากันอยู่ในระดับเดียวกัน รูปที่ 76 แสดงกราฟ T ซึ่งเป็นต้นไม้ที่ยังไม่มีการกำหนดราก ต้นไม้ T_1 เป็นต้นไม้ที่สร้างจาก T โดยกำหนดจุดยอด a เป็นราก ในทำนองเดียวกันต้นไม้ต้นอื่นๆ ในรูปก็ได้จากการกำหนดจุดยอดต่างๆ กันให้เป็นรากของต้นไม้ T



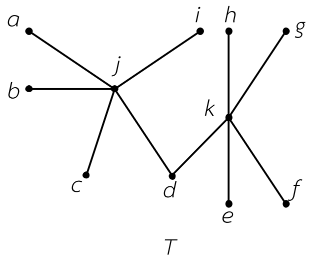
รูปที่ 76

การกำหนดรากให้กับต้นไม้นั้นเป็นการกำหนดทิศทางของเส้นเชื่อมต่างๆ ไปในตัว ทั้งนี้ทิศทางของเส้นเชื่อมของต้นไม้แบบกำหนดรากนั้นจะมีทิศทางออกจากรากเสมอ หรืออีกนัยหนึ่งการบ่งชี้ทิศทางของเส้นเชื่อมในต้นไม้แบบกำหนดรากทำได้โดยพิจารณาวิถีเชิงเดียวระหว่างรากและจุดยอดใดๆ ที่มีเส้นเชื่อมนั้นเป็นส่วนประกอบ ทิศทางของเส้นเชื่อมนั้นก็คือทิศทางในการเดินทางผ่านเส้นเชื่อมนั้นจากรากไปยังจุดยอดดังกล่าว ด้วยเหตุที่ทิศทางของเส้นเชื่อมถูกกำหนดตายตัวด้วยตำแหน่งของรากนี้เอง ในการวาดรูปต้นไม้แบบกำหนดราก เรามักจะไม่เขียนลูกศรที่แสดงทิศทางของเส้นเชื่อมในต้นไม้จุดยอดที่เป็นรากถูกกำหนดไว้แล้ว

ความสูง (Height) ของต้นไม้แบบกำหนดราก คือ ความยาวมากที่สุดของวิถีเชิงเดียวจากรากไปยังจุดยอดใดๆ ในต้นไม้นั้น จากตัวอย่างต้นไม้แบบกำหนดรากในรูปที่ 76 ต้นไม้ T_1 และ T_3 มีความสูงเท่ากับ 2 ขณะที่ต้นไม้ T_2 และ T_4 มีความสูงเท่ากับ 3

ตัวอย่างที่ 47

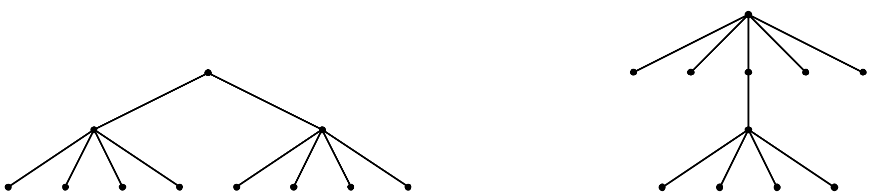
จงหาจำนวนต้นไม้แบบกำหนดรากที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่ไม่สมสัณฐานกัน ที่สามารถสร้างได้โดยการกำหนดจุดยอดจุดใดจุดหนึ่งในต้นไม้ T ในรูปที่ 77 เป็นรากของต้นไม้นั้น และ ต้นไม้แบบกำหนดรากที่ได้ต้องมีความสูงไม่เกิน 3



รูปที่ 77

(1) วิถีเชิงเดียวระหว่างจุดยอด *a*, *b*, *c*, หรือ *i* และจุดยอด *e*, *f*, *g*, หรือ *h* นั้นมีความยาวเท่ากับ 4 ดังนั้นจุดยอดทั้ง 8 จึงไม่สามารถเป็นรากของต้นไม้ที่มีความสูงไม่เกิน 3 ได้

(2) จาก (1) จึงเหลือจุดยอดที่จะพิจารณาให้เป็นรากได้เพียง 3 จุดคือจุดยอด *j*, *d*, และ *k* เท่านั้น หากจุดยอด *d* เป็นรากความสูงของต้นไม้จะเท่ากับ 2 ในกรณีนี้จึงนับเป็นต้นไม้ตามที่โจทย์กำหนดหนึ่งแบบ หากจุดยอด *j* หรือจุดยอด *k* เป็นราก ต้นไม้แบบกำหนดรากที่ได้จะมีความสูงเท่ากับ 3 แต่อย่างไรก็ตามเราสามารถสังเกตได้ว่าต้นไม้กำหนดรากที่มีจุดยอด *j* เป็นรากนั้นสมสัณฐานกับต้นไม้กำหนดรากที่มีจุดยอด *k* เป็นราก ดังนั้นจำนวนต้นไม้ที่ไม่สมสัณฐานกันทั้งหมดจึงมีแค่ 2 แบบ ดังแสดงในรูปที่ 78



รูปที่ 78

สำหรับต้นไม้แบบกำหนดราก เราเรียกจุดยอดใดๆ ที่มีเส้นเชื่อมมีทิศทางจากจุดยอดนั้นๆ ไปยังจุดยอด *v* จุดยอดหนึ่งว่าเป็น *แม่* (Parent) ของจุดยอด *v* นั้น จุดยอดหนึ่งๆ จะถูกเรียกว่าเป็น *ลูก* (Child) ของจุดยอดที่เป็นแม่ของจุดยอดนั้น จุดยอดที่มีแม่เป็นจุดยอดเดียวกันจะถูกเรียกว่าเป็น *พี่น้อง* (Siblings) กัน จุดยอดใดๆ จะมี *บรรพบุรุษ* (Ancestors) หรือ *จุดยอดบน* เป็นจุดยอดต่างๆ ที่อยู่ในวิถีจากรากมายังจุดยอดนั้นรวมถึงจุดยอดที่เป็นรากด้วย จุดยอดที่มีจุดยอดใดๆ เป็นบรรพบุรุษจะถูกเรียกว่า *ผู้สืบเชื้อสาย* (Descendant) หรือ *จุดยอดล่าง* ของจุดยอดที่เป็นบรรพบุรุษนั้น ดังนั้นรากเป็นจุดยอดบนของจุดยอดทุกๆ จุดในต้นไม้แบบกำหนดราก และจุดยอดทุกๆ จุดเป็นจุดยอดล่างของราก

จุดยอดที่ไม่มีลูกจะถูกเรียกว่า *ใบ* (Leaf) ของต้นไม้ ในทางตรงกันข้ามจุดยอดที่ลูกจะถูกเรียกว่า *จุดยอดภายใน* (Internal vertex) รากของต้นไม้จะเป็นจุดยอดภายในหากรากมิได้เป็นเพียงจุดยอดเดียวในต้นไม้นั้น

ต้นไม้ย่อย (Subtree) ของต้นไม้ *T* ที่มีจุดยอด *v* ใดๆ ในต้นไม้นั้นเป็นราก คือ ต้นไม้ที่ประกอบด้วย *v* (ซึ่งเป็นราก) และจุดยอดทั้งหมดที่เป็นจุดยอดล่างของ *v* รวมถึงเส้นเชื่อมที่อุบัติกับจุดยอดล่างต่างๆ เหล่านั้นด้วย

ตัวอย่างที่ 48

จงแสดงว่าจุดยอดใดๆ ที่ไม่ใช่รากในต้นไม้แบบกำหนดราก จะมีจุดยอดที่เป็นแม่ได้เพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น

(1) กำหนดให้ v เป็นจุดยอดหนึ่งที่มิใช่รากของต้นไม้ T และให้ u เป็นจุดยอดที่เป็นแม่ของ v

(2) สมมติว่ามีจุดยอดอื่นอีกนอกจาก u ที่เป็นแม่ของ v ให้หนึ่งในจุดยอดนี้เรียกว่า w จากข้อสมมตินี้ แสดงว่าเส้นเชื่อม (u, v) และ (w, v) มุ่งเข้าสู่จุดยอด v ทั้งคู่

(3) จาก (2) เราสามารถบอกได้ว่ามีวิถีเชิงเดียวจากรากมายัง v มากกว่าหนึ่งวิถี ซึ่งอย่างน้อยก็ได้แก่ วิถีที่เกิดจากวิถีจากรากมายัง u ต่อกับเส้นเชื่อม (u, v) และ วิถีที่เกิดจากวิถีจากรากมายัง w ต่อกับเส้นเชื่อม (w, v) ซึ่งคำกล่าวนี้ขัดแย้งกับนิยามของต้นไม้ เราจึงสรุปได้ว่าข้อสมมติใน (2) ไม่มีทางเป็นจริง นั่นคือจุดยอดใดๆ ที่ไม่ใช่รากในต้นไม้แบบกำหนดราก จะมีจุดยอดที่เป็นแม่ได้เพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 49

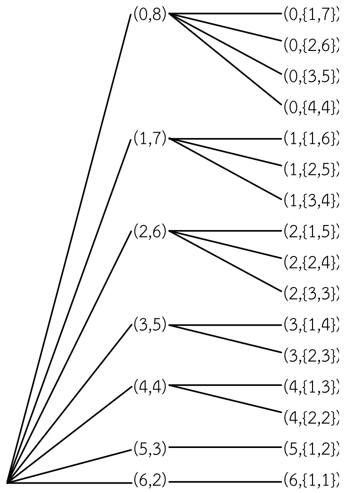
จงหาจำนวนต้นไม้แบบกำหนดรากที่ไม่สมสัณฐานกัน ที่มีจุดยอดภายใน 3 จุดและใบ 8 ใบ

(1) จุดยอดภายในหนึ่งจุดจะต้องเป็นรากของต้นไม้ ให้จุดยอดภายในที่เหลืออีกสองจุดเรียกว่า a และ b c และเรียกจุดยอดที่ความยาววิถีเชิงเดียวจากจากรากมาสู่จุดยอดนั้นเท่ากับ n ว่าอยู่ในระดับ (Level) ที่ n

(2) จากจำนวนจุดยอดภายใน เราสามารถบอกได้ว่าต้นไม้ที่เกิดขึ้นจะต้องมีความสูงเท่ากับ 2 หรือ 3 เท่านั้น เนื่องจากที่ระดับที่ 0 จะต้องประกอบด้วยรากเท่านั้น และที่ระดับที่เท่ากับความสูงของต้นไม้จะต้องประกอบด้วยจุดยอดที่เป็นใบเท่านั้น ดังนั้นหากจุดยอด a และ b อยู่ระดับเดียวกัน ต้นไม้ที่ได้จะสูงเท่ากับ 2 มิฉะนั้นต้นไม้ก็จะสูงเท่ากับ 3

(3) หากจุดยอด a และ b อยู่ระดับเดียวกันซึ่งต้องเป็นระดับที่ 1 เนื่องจากจุดยอด a และ b เป็นจุดยอดภายใน เราสามารถสร้างต้นไม้ที่ไม่สมสัณฐานกันโดยการจัดแบ่งใบทั้ง 8 ออกเป็น 3 กลุ่ม คือ กลุ่มที่อยู่ในระดับที่ 1 และอีกสองกลุ่มในระดับที่ 2 แล้วให้ใบในกลุ่มแรกจะเป็นลูกของราก ในขณะที่ใบในสองกลุ่มที่เหลือแต่ละกลุ่มจะเป็นลูกของจุดยอด a หรือ b

(4) เนื่องจากเราจะไม่นับต้นไม้ที่สมสัณฐานกัน ดังนั้นจุดยอดภายใน a และ b จะถือว่าไม่มีความแตกต่างกัน ในทำนองเดียวกันใบทั้ง 8 ก็ถือว่าไม่แตกต่างกัน วิธีแบ่งกลุ่มใบทั้ง 8 เพื่อให้ได้ต้นไม้ที่ไม่สมสัณฐานกันจึงสามารถหาได้จากการแบ่งใบในระดับทั้งสองก่อน โดยที่ในระดับที่ 1 นั้นจำนวนใบอาจจะเท่ากับ 0 ได้ แต่ในระดับที่ 2 จะต้องมีอย่างน้อยหนึ่ง 2 ใบเนื่องจากแต่ละกลุ่มจาก 2 กลุ่มในระดับที่ 2 จะต้องมีจำนวนใบอย่าง 1 หนึ่งใบเสมอ หลังจากนั้นจึงนับจำนวนวิธีในการแบ่งใบในระดับที่สองออกเป็นสองกลุ่ม ซึ่งถือว่าไม่แตกต่างกัน โดย วิธีแบ่งกลุ่มใบทั้ง 8 ดังกล่าวสามารถแสดงได้ดังแผนภาพต้นไม้ในรูปที่ 79 นั่นคือจำนวนต้นไม้ที่ไม่สมสัณฐานกันตามเงื่อนไขใน (3) มี 16 แบบ



รูปที่ 79

*(จำนวนใบในระดับที่ 1, จำนวนใบในระดับที่ 2)

**(จำนวนใบในระดับที่ 1, { จำนวนใบในระดับที่ 2 ในกลุ่มที่มีใบน้อยกว่าหรือเท่ากัน, จำนวนใบในระดับที่ 2 ในกลุ่มที่มีใบมากกว่าหรือเท่ากัน })

(5) หากจุดยอด a และ b อยู่คนละระดับกัน จุดยอดทั้งสองต้องเป็นแม่ลูกกัน และอยู่ที่ระดับที่ 1 หนึ่งจุด ระดับที่ 2 อีกหนึ่งจุด เราสามารถสร้างต้นไม้ที่ไม่สมสัณฐานกันโดยการจัดแบ่งใบทั้ง 8 ออกเป็น 3 กลุ่ม คือ กลุ่มที่อยู่ในระดับที่ 1 กลุ่มที่อยู่ในระดับที่ 2 และ กลุ่มที่อยู่ในระดับที่ 3 โดยกลุ่มที่อยู่ระดับที่ 3 จะต้องมีอย่างน้อย 1 ใบ จำนวนวิธีดังกล่าวสามารถคำนวณจาก C(7+3-1, 7) = 36 วิธี

(6) จาก (4) และ (5) เราสามารถสรุปได้ว่าจำนวนต้นไม้แบบกำหนดรากที่ไม่สมสัณฐานกัน ที่มีจุดยอดภายใน 3 จุดและใบ 8 ใบ มีทั้งสิ้น 16 + 36 = 52 แบบ

ตัวอย่างที่ 50

หากกำหนดเซ็ตของจุดยอด V ขึ้นมาหนึ่งเซ็ต จงแสดงว่ากราฟเชื่อมต่อที่ผ่านจุดยอดทั้งหมดใน V และใช้จำนวนเส้นเชื่อมน้อยที่สุดต้องมีสมบัติเป็นต้นไม้

(1) ให้กราฟ G คือกราฟเชื่อมต่อที่ผ่านจุดยอดทั้งหมดใน V และใช้จำนวนเส้นเชื่อมน้อยที่สุด

(2) สมมติว่า G ไม่เป็นต้นไม้ ตามนิยามของต้นไม้แสดงว่า G มีวงจรเชิงเดียว

(3) ให้กราฟ H เป็นกราฟที่เกิดจากการตัดเส้นเชื่อมเส้นหนึ่งในวงจรเชิงเดียวใน G ออก สมมติว่าเส้นเชื่อมที่ตัดออกคือ $\{v_a, v_b\}$ จะเห็นว่าเรายังสามารถหาวิถีระหว่างจุดยอดคู่ใดๆ ใน H ได้เสมอ เนื่องจากหากวิถีใดที่ต้องผ่าน $\{v_a, v_b\}$ จะสามารถใช้วิถีระหว่าง v_a และ v_b ในส่วนของวงจรที่เหลืออยู่แทนได้

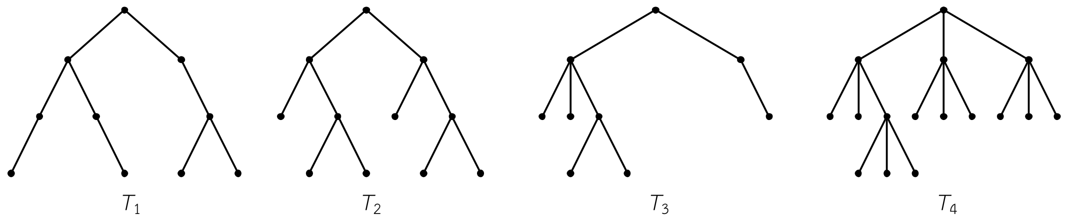
(4) จาก (3) แสดงว่า H เป็นกราฟเชื่อมต่อที่มีจุดยอดเหมือนกับ G แต่มีจำนวนเส้นเชื่อมน้อยกว่า ดังนั้นข้อสรุปนี้ขัดแย้งกับสิ่งที่เราสมมติใน (2)

(5) จาก (4) เราสรุปได้ว่า G ต้องเป็นต้นไม้

ต้นไม้ *m* ภาค

ต้นไม้แบบกำหนดรากจะถูกเรียกว่า *ต้นไม้ m ภาค* (*m*-ary Tree) เมื่อทุกๆ จุดยอดภายในของต้นไม้นั้นมีจำนวนจุดยอดที่เป็นลูกไม่เกิน *m* จุด หากแต่ละจุดยอดภายในมีจำนวนจุดยอดที่เป็นลูกเท่ากับ *m* พอดี เราจะเรียกต้นไม้นั้นว่า *ต้นไม้ m ภาคแบบเต็มต้น* (Full *m*-ary Tree)

รูปที่ 80 แสดงตัวอย่างของต้นไม้ *m* ภาค ต้นไม้ T_1 และ T_2 เป็นต้นไม้ 2 ภาค หรือ เรียกว่า *ต้นไม้ทวิภาค* (Binary Tree) โดย T_2 เป็นแบบเต็มต้นเนื่องจากทุกจุดยอดภายในมีลูกเท่ากับสองเสมอ ต้นไม้ T_3 และ T_4 เป็นต้นไม้ 3 ภาค โดย T_4 เป็นแบบเต็มต้น

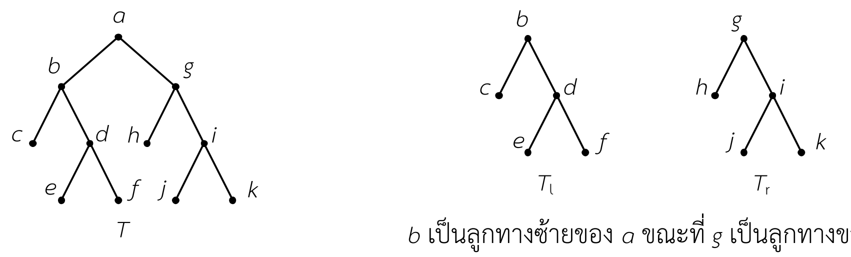


รูปที่ 80

หากจุดยอดที่เป็นลูกของจุดยอดภายในแต่ละจุดของต้นไม้แบบกำหนดรากถูกเรียงลำดับ โดยเรามักจะเรียงลำดับของการวาดจุดยอดที่เป็นลูกของจุดยอดเดียวกันจากซ้ายไปขวา เราจะเรียกต้นไม้นั้นว่า *ต้นไม้แบบกำหนดรากและเรียงลำดับ* (Ordered Rooted Tree) หรืออาจเรียกโดยใช้เพียง *ต้นไม้แบบเรียงลำดับ* (Ordered Tree) เท่านั้น

ในกรณีของต้นไม้ทวิภาคแบบเรียงลำดับ สำหรับจุดยอดภายในใดที่มีจุดยอดที่เป็นลูกจำนวนสองจุด จุดยอดที่เป็นลูกจุดยอดแรกจะเรียกว่า *ลูกทางซ้าย* (Left Child) และจุดยอดที่เป็นลูกอีกจุดจะเรียกว่า *ลูกทางขวา* (Right Child) ต้นไม้ที่มีลูกทางซ้ายของจุดยอดหนึ่งเป็นราก เรียกว่า *ต้นไม้ย่อยทางซ้าย* (Left Subtree) ของจุดยอดนั้น โดยที่จุดยอดล่างทั้งหมดของลูกทางซ้ายนั้นยังคงเดิม ในทำนองเดียวกันหากจุดยอดที่เป็นรากคือลูกทางขวา ต้นไม้นั้นจะเรียกว่า *ต้นไม้ย่อยทางขวา* (Right Subtree)

รูปที่ 81 แสดงตัวอย่างของลูกทางซ้าย ลูกทางขวา ต้นไม้ย่อยทางซ้าย และ ต้นไม้ย่อยทางขวา ในต้นไม้แบบเรียงลำดับ



b เป็นลูกทางซ้ายของ *a* ขณะที่ *g* เป็นลูกทางขวาของ *a*

T_l เป็นต้นไม้ย่อยทางซ้ายของ *a*

T_r เป็นต้นไม้ย่อยทางขวาของ *a*

รูปที่ 81

ต้นไม้ *m* ภาคจะ *สมดุล* (Balanced) ถ้าใบทั้งหมดอยู่ที่ระดับ *h* หรือ *h* - 1 เท่านั้น ต้นไม้ทั้งสี่ในรูปที่ XXX เป็นต้นไม้สมดุล เนื่องจากไม่มีใบใดเลยของต้นไม้แต่ละต้นที่อยู่ที่ระดับที่ไม่ใช่ระดับสุดท้ายหรือรองสุดท้าย

สมบัติต่างๆ ของต้นไม้

ทฤษฎีบทที่ 14

ต้นไม้ที่มีจุดยอด n จุดจะมีเส้นเชื่อม n - 1 เส้น

พิสูจน์

(1) กำหนด P(n) แทนประพจน์ที่ว่า ต้นไม้ที่มีจุดยอด n จุดจะต้องมีเส้นเชื่อม n – 1 เส้น

(2) ต้นไม้ที่มีจุดยอดเพียงจุดเดียว จะไม่มีเส้นเชื่อม ดังนั้น P(1) เป็นจริง

(3) สมมติให้ P($\underline{k}$) เป็นจริงสำหรับ k = 1, 2, 3, … นั่นคือสมมติว่าต้นไม้ที่มีจุดยอด k จุดจะต้องมีเส้นเชื่อมเท่ากับ k – 1 เส้น

(4) การเติมจุดยอดเพิ่มเติมเข้าไปในต้นไม้หนึ่งจุด จะต้องมีการเพิ่มเส้นเชื่อมเข้าไปหนึ่งเส้นด้วย เนื่องจากจุดยอดจะต้องเชื่อมต่อกับต้นไม้เดิม ตามนิยามที่ว่าต้นไม้ต้องเป็นกราฟเชื่อมต่อ และการเพิ่มเส้นเชื่อมดังกล่าวทำได้เพียงเส้นเดียว เพราะหากมากกว่านั้นจะทำให้เกิดวงจรเชิงเดียวขึ้นซึ่งจะทำให้กราฟที่ได้ไม่เป็นต้นไม้ ดังนั้นหากต้นไม้ที่มีจุดยอด k จุดจะต้องมีเส้นเชื่อมเท่ากับ k – 1 เส้น ตามที่สมมติใน (4) แล้ว ต้นไม้ที่มีจุดยอด k + 1 จุดจะต้องมีเส้นเชื่อมเท่ากับ (k – 1) + 1 = k เส้นด้วย นั่นคือ P(k) → P(k+1) เป็นจริงสำหรับ k = 1, 2, 3, …

(5) จาก (1) และ (4) เราสามารถสรุปด้วยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ว่า P(n) เป็นจริงสำหรับ n = 1, 2, 3, … นั่นคือ ต้นไม้ที่มีจุดยอด n จุดจะต้องมีเส้นเชื่อม n – 1 เส้น

ทฤษฎีบทที่ 15

หาก n, i , และ l เป็นจำนวนจุดยอดทั้งหมด จำนวนจุดยอดภายใน และ จำนวนใบของต้นไม้ m ภาคแบบเต็มต้นต้นหนึ่งตามลำดับ แล้ว $n = mi + 1$ และ $l = ((m-1)n + 1)/m$

พิสูจน์

(1) จุดยอดภายในทุกจุดในต้นไม้ m ภาคแบบเต็มต้นจะต้องมีจุดยอดที่เป็นลูกเท่ากับ m พอดี ดังนั้นถ้า i เป็นจำนวนจุดยอดภายใน เราจะได้ว่าจุดยอดที่เป็นลูกของจุดยอดใดจุดยอดหนึ่งในต้นไม้นั้นจะมีจำนวนเท่ากับ mi

(2) ในต้นไม้หนึ่งต้นจุดยอดทุกจุดยกเว้นรากต้องเป็นลูกของจุดยอดใดจุดยอดหนึ่งในต้นไม้นั้น ดังนั้น จำนวนจุดยอดทั้งหมดก็คือ ผลรวมของจุดยอดที่เป็นลูกของจุดยอดใดจุดยอดหนึ่งในต้นไม้นั้น กับอีกหนึ่งจุดยอดที่เป็นราก นั่นคือถ้า n เป็นจำนวนจุดยอดทั้งหมด และ จาก (1) mi คือจำนวนจุดยอดที่เป็นลูกของจุดยอดใดจุดยอดหนึ่งในต้นไม้นั้น แล้ว $n = mi + 1$

(3) จุดยอดหนึ่งๆ หากไม่เป็นจุดยอดภายในก็ต้องเป็นใบ ดังนั้นจำนวนจุดยอดทั้งหมดจึงเท่ากับจำนวนจุดยอดภายในบวกกับจำนวนใบ หรือ $n = l + i$

(4) จาก (3) $i = n - l$ แล้วแทนค่า i ลงใน $n = mi + 1$ ที่ได้จาก (2) เราจะได้ว่า $l = ((m-1)n + 1)/m$ (ผู้อ่านควรลองจัดรูปสมการด้วยตนเอง)

ทฤษฎีบทที่ 16

ต้นไม้ m ภาคที่มีความสูงเท่ากับ h จะมีจำนวนใบอย่างมาก m^h ใบ

พิสูจน์

(1) ต้นไม้ m ภาคที่มีความสูง h จะมีจำนวนใบมากที่สุดเมื่อใบทั้งหมดอยู่ที่ระดับที่ h เนื่องจากหากมีจุดยอดใดที่เป็นใบและไม่อยู่ที่ระดับที่ h เรายังสามารถเติมลูกให้กับจุดยอดนั้นอีก m จุด ซึ่งการทำเช่นนั้นจะทำให้เกิดจำนวนใบมากขึ้น นั่นคือเมื่อต้นไม้ดังกล่าวมีจำนวนใบมากที่สุดจะไม่สามารถมีใบใดๆ ที่อยู่ในระดับอื่นๆ นอกจากระดับสุดท้ายได้

(2) ให้ a_n แทนจำนวนจุดยอดที่มากที่สุดที่มีได้ในระดับที่ n ของต้นไม้ m ภาค

(3) จาก (2) เงื่อนไขเริ่มต้นคือ $a_0 = 1$

(4) ที่ $1 < n \leq h$ ใดๆ เราสามารถเขียนความสัมพันธ์เวียนเกิดของ a_n ได้ว่า $a_n = m\, a_{n-1}$ เนื่องจากการเกิดจำนวนจุดยอดที่มากที่สุดในระดับที่ n เกิดจากการมีจุดยอดในระดับที่ n จำนวนมากที่สุดแล้วเติมลูกให้กับแต่ละจุดยอดต่างๆ เหล่านั้นให้มากที่สุด ด้วยข้อจำกัดของต้นไม้ m ภาค จำนวนลูกที่มากที่สุดของแต่ละจุดยอดคือ m ดังนั้น a_n จึงมีค่าเป็น m เท่าของ a_{n-1}

(5) จาก (3) และ (4) เราสามารถแก้ความสัมพันธ์เวียนเกิดแล้วได้ผลเฉลยคือ $a_n = m^n$

(6) ดังนั้นจำนวนจุดยอดที่มากที่สุดที่มีได้ในระดับที่คือ $a_h = m^h$ ซึ่งจาก (1) ก็คือจำนวนใบที่มากที่สุดที่มีได้นั่นเอง

ต้นไม้ค้นหาแบบทวิภาค

ต้นไม้ค้นหาแบบทวิภาค (Binary Search Tree) คือ ต้นไม้ทวิภาคซึ่งลูกของแต่ละจุดยอดจะถูกกำหนดให้เป็นลูกทางซ้ายหรือลูกทางขวาอย่างใดอย่างหนึ่ง โดยไม่มีจุดยอดใดที่มีลูกทางซ้ายหรือลูกทางขวามากกว่าหนึ่งจุด แต่ละจุดยอดของต้นไม้นี้จะถูกระบุด้วยค่าประจำจุดยอดนั้น โดยค่าประจำจุดยอดแต่ละจุดนั้นจะถูกเรียงลำดับโดยที่ค่าของจุดยอดหนึ่งๆ จะต้องมากกว่าค่าของจุดยอดทั้งหมดในต้นไม้ย่อยทางซ้ายของจุดยอดนั้น และต้องน้อยกว่าค่าของจุดยอดทั้งหมดในต้นไม้ย่อยทางขวาของจุดยอดนั้น

ต้นไม้ค้นหาแบบทวิภาคนี้เป็นโครงสร้างข้อมูลแบบหนึ่ง ซึ่งสามารถทำให้การค้นหาข้อมูลที่เก็บอยู่ในต้นไม้นี้มีประสิทธิภาพ โดยข้อมูลดังกล่าวก็คือค่าของจุดยอดต่างๆ ซึ่งถูกเรียงลำดับในโครงสร้างต้นไม้อย่างเป็นระบบ

การสร้างต้นไม้ค้นหาแบบทวิภาค

การสร้างต้นไม้ค้นหาแบบทวิภาคสามารถทำได้โดยค่อยๆ เติมข้อมูลที่ต้องการเก็บโดยต้นไม้นั้นในรูปแบบของการเติมจุดยอดที่มีค่าของข้อมูลที่ต้องการจะเก็บเข้าไปยังต้นไม้ที่ต้องการทีละหนึ่งจุดยอด โดยการเติมจุดยอดเข้าไปนั้นจะต้องทำให้ต้นไม้ยังคงสมบัติของต้นไม้ค้นหาแบบทวิภาคอยู่ นั่นคือไม่ว่าขณะใดๆ ค่าของจุดยอดหนึ่งๆ จะต้องมากกว่าค่าของจุดยอดทั้งหมดในต้นไม้ย่อยทางซ้ายและน้อยกว่าค่าของจุดยอดทั้งหมดในต้นไม้ย่อยทางขวาของจุดยอดนั้นเสมอ

ข้อมูลชิ้นแรกที่ถูกเติมเข้าไปยังต้นไม้จะถูกแทนด้วยรากของต้นไม้ที่มีค่าเป็นข้อมูลชิ้นนั้น การเติมข้อมูลชิ้นต่อๆ ไปจะต้องพิจารณาค่าของจุดยอดต่างๆ ที่มีอยู่ก่อนในต้นไม้นั้น โดยดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

(1) ให้จุดยอด v เป็นรากของต้นไม้

อติวงศ์ สุชาโต
ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

(2) หากข้อมูลที่ต้องการเติมมีค่าน้อยกว่าค่าที่ v และ v ยังไม่มีลูกทางซ้ายให้เติมจุดยอดที่มีค่าของข้อมูลชิ้นนั้นเป็นลูกทางซ้ายของ v

(3) หากข้อมูลที่ต้องการเติมมีค่าน้อยกว่าค่าที่ v แต่ v มีลูกทางซ้ายแล้ว ให้ v เป็นจุดยอดที่เป็นลูกทางซ้ายนั้นแทนจุดยอดเดิม แล้วย้อนกลับไปทำซ้ำตั้งแต่ (2) จนกว่าจะมีการเติมจุดยอดใหม่เข้าไปยังต้นไม้

(4) หากข้อมูลที่ต้องการเติมมีค่ามากกว่าค่าที่ v และ v ยังไม่มีลูกทางขวาให้เติมจุดยอดที่มีค่าของข้อมูลชิ้นนั้นเป็นลูกทางขวาของ v

(5) หากข้อมูลที่ต้องการเติมมีค่ามากกว่าค่าที่ v แต่ v มีลูกทางขวาแล้ว ให้ v เป็นจุดยอดที่เป็นลูกทางขวานั้นแทนจุดยอดเดิม แล้วย้อนกลับไปทำซ้ำตั้งแต่ (2) จนกว่าจะมีการเติมจุดยอดใหม่เข้าไปยังต้นไม้

การดำเนินการตามขั้นตอนข้างต้นจะทำให้ต้นไม้ที่ได้มีสมบัติเป็นต้นไม้ค้นหาแบบทวิภาคเสมอ

ตัวอย่างที่ 51

จงสร้างต้นไม้ค้นหาแบบทวิภาค โดยเติมข้อมูลเหล่านี้เข้าไปตามลำดับ 8, 16, 9, 5, 23, 2

(1) กำหนดให้เรียกชื่อจุดยอดตามค่าที่ระบุที่จุดยอดนั้น ดูรูปที่ 82 ประกอบ

(2) สร้างรากที่ระบุค่าเท่ากับ 8 (ต้นไม้ T_1)

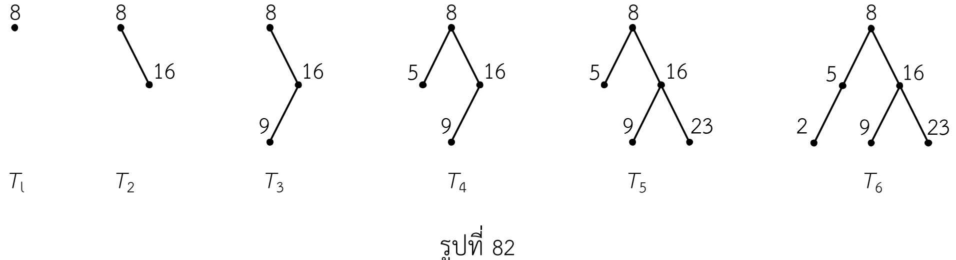
(3) หาตำแหน่งในการเติมจุดยอด 16 โดยเริ่มพิจารณาจากรากซึ่งก็คือจุดยอด 8 เนื่องจาก 16 > 8 เติมลูกทางขวาให้จุดยอด 8 โดยจุดยอดที่เติมที่มีค่า 16 (ต้นไม้ T_2)

(4) หาตำแหน่งในการเติมจุดยอด 9 โดยเริ่มพิจารณาจากราก เนื่องจาก 9 > 8 เราจึงพิจารณาลูกทางขวาของจุดยอด 8 ซึ่งก็คือจุดยอด 16 ต่อไป และเนื่องจาก 9 < 16 เติมจุดยอด 9 ให้เป็นลูกทางซ้ายของจุดยอด 16 (ต้นไม้ T_3)

(5) หาตำแหน่งในการเติมจุดยอด 5 โดยเริ่มพิจารณาจากราก เนื่องจาก 5 < 8 เติมจุดยอด 5 ให้เป็นลูกทางซ้ายของจุดยอด 8 (ต้นไม้ T_4)

(6) หาตำแหน่งในการเติมจุดยอด 23 โดยเริ่มพิจารณาจากราก เนื่องจาก 23 > 8 เราจึงพิจารณาจุดยอดต่อไปคือจุดยอด 16 และเนื่องจาก 23 > 16 เติมจุดยอด 23 เป็นลูกทางขวาของจุดยอด 16 (ต้นไม้ T_5)

(7) หาตำแหน่งในการเติมจุดยอดสุดท้ายซึ่งก็คือจุดยอด 2 เนื่องจาก 2 < 8 จุดยอดต่อไปที่จะพิจารณาคือจุดยอด 5 และเนื่องจาก 2 < 5 เติมจุดยอด 2 เป็นลูกทางซ้ายของจุดยอด 5 (ต้นไม้ T_6)



รูปที่ 82

การค้นหาข้อมูลในต้นไม้ค้นหาแบบทวิภาค

ระเบียบวิธีหนึ่งในการค้นหาข้อมูล พร้อมทั้งเติมข้อมูลเข้าไปยังต้นไม้เมื่อไม่พบข้อมูลนั้น สามารถแสดงได้ตามขั้นตอนดังนี้

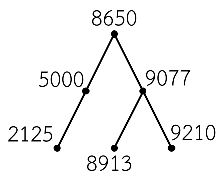
(1) ให้จุดยอด v เป็นรากของต้นไม้

(2) เปรียบเทียบว่าค่าที่ระบุที่ v เป็นค่าที่ต้องการค้นหาหรือไม่ ถ้าใช่แสดงว่าเราพบข้อมูลที่ต้องการแล้ว ถ้าไม่ใช่ให้เปรียบเทียบค่าที่ระบุที่ v กับค่าที่ต้องการค้นหา โดย

- ถ้าค่าที่ต้องการค้นหาน้อยกว่าค่าที่ระบุที่ v และ v มีลูกทางซ้าย ให้ v เป็นจุดยอดที่เป็นลูกทางซ้ายนั้นแทนจุดยอดเดิม แล้วเริ่มต้นทำซ้ำขั้นตอน (2) นี้ใหม่
- ถ้าค่าที่ต้องการค้นหาน้อยกว่าค่าที่ระบุที่ v แต่ v ไม่มีลูกทางซ้าย แสดงว่าข้อมูลที่ต้องการค้นหาไม่อยู่ในต้นไม้นี้ เราสามารถเพิ่มข้อมูลดังกล่าวให้กับต้นไม้นี้ได้โดนเติมลูกทางซ้ายให้จุดยอด v และให้จุดยอดที่ถูกเติมนี้มีค่าเท่ากับข้อมูลนั้น
- ถ้าค่าที่ต้องการค้นหามากกว่าค่าที่ระบุที่ v และ v มีลูกทางขวา ให้ v เป็นจุดยอดที่เป็นลูกทางขวานั้นแทนจุดยอดเดิม แล้วเริ่มต้นทำซ้ำขั้นตอน (2) นี้ใหม่
- ถ้าค่าที่ต้องการค้นหามากกว่าค่าที่ระบุที่ v แต่ v ไม่มีลูกทางขวา แสดงว่าข้อมูลที่ต้องการค้นหาไม่อยู่ในต้นไม้นี้ เราสามารถเพิ่มข้อมูลดังกล่าวให้กับต้นไม้นี้ได้โดนเติมลูกทางขวาให้จุดยอด v และให้จุดยอดที่ถูกเติมนี้มีค่าเท่ากับข้อมูลนั้น

ตัวอย่างที่ 52

ต้นไม้ค้นหาแบบทวิภาคต้นหนึ่งใช้ในการเก็บข้อมูลที่มีลักษณะเป็นสายอักขระตัวเลข โดยสามารถแสดงได้ดังต้นไม้ T ในรูปที่ 83 จงแสดงวิธีการค้นหาข้อมูลที่ตรงกับ 7100 หากไม่พบให้เติมข้อมูลนี้เข้าไปยังต้นไม้ T อย่างถูกต้อง



T

รูปที่ 83

(1) ค่าที่ต้องการค้นหาคือ 7100

(2) ให้ v เป็นราก ซึ่งก็คือจุดยอด 8650 เนื่องจาก 7100 < 8650 ให้ v เป็นลูกทางซ้ายของจุดยอด 8650 ซึ่งก็คือจุดยอด 5000

(3) เนื่องจาก 7100 > 5000 แต่จุดยอด 5000 ยังไม่มีลูกทางขวา ดังนั้นเราสรุปได้ว่า 7100 ไม่อยู่ในต้นไม้นี้ ดังนั้นจุดยอด 7100 ซึ่งเป็นจุดยอดที่เก็บข้อมูลใหม่นี้ต้องถูกเติมเป็นลูกทางขวาของจุดยอด 5000

อติวงศ์ สุชาโต
ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การแวะผ่านต้นไม้

เนื่องจากต้นไม้แบบกำหนดรากและเรียงลำดับมักจะถูกนำไปใช้เก็บข้อมูลต่างๆ ดังนั้นเราจึงควรศึกษาวิธีที่สามารถแสดงข้อมูลทั้งหมดที่เก็บอยู่ในต้นไม้นั้น นั่นคือเราจะศึกษาระเบียบวิธีในการสร้างรายการของจุดยอดทั้งหมดในต้นไม้ออกมาอย่างเป็นระบบ การกระทำเช่นนี้เรียกว่า *การแวะผ่านต้นไม้* (Tree Traversal)

ในที่นี้เราจะกล่าวถึงระเบียบวิธีที่เป็นที่นิยมใช้ในการแวะผ่านต้นไม้ทั้งหมด 3 วิธีด้วยกัน วิธีเหล่านี้เรียกว่า *การแวะผ่านก่อนลำดับ* (Preorder Traversal) *การแวะผ่านตามลำดับ* (Inorder Traversal) และ *การแวะผ่านหลังลำดับ* (Postorder Traversal)

การแวะผ่านต้นไม้แบบก่อนลำดับให้กระทำตามนิยามต่อไปนี้

> ให้ T เป็นต้นไม้แบบกำหนดรากและเรียงลำดับที่มีรากคือ r ถ้า T ประกอบด้วย r เพียงจุดยอดเดียว การแวะผ่านต้นไม้ T แบบก่อนลำดับ จะผ่าน r เพียงจุดเดียว ถ้ามิฉะนั้นแล้วการแวะผ่านต้นไม้ T แบบก่อนลำดับจะเริ่มต้นจากการแวะที่ r แล้วแวะผ่านต้นไม้ย่อยของ T ซึ่งมีรากคือจุดยอดที่เป็นลูกของ r แบบก่อนลำดับ จากซ้ายไปขวาทีละต้นจนครบ

การแวะผ่านต้นไม้แบบตามลำดับให้กระทำตามนิยามต่อไปนี้

> ให้ T เป็นต้นไม้แบบกำหนดรากและเรียงลำดับที่มีรากคือ r ถ้า T ประกอบด้วย r เพียงจุดยอดเดียว การแวะผ่านต้นไม้ T แบบตามลำดับ จะผ่าน r เพียงจุดเดียว ถ้ามิฉะนั้นแล้วการแวะผ่านต้นไม้ T แบบตามลำดับจะเริ่มต้นจากการแวะผ่านต้นไม้ย่อยของ T ซึ่งมีรากคือจุดยอดที่เป็นลูกทางซ้ายของ r แบบตามลำดับ แล้วจึงแวะที่ r หลังจากนั้นก็แวะผ่านต้นไม้ย่อยของ T ซึ่งมีรากคือจุดยอดที่เป็นลูกที่เหลือของ r แบบตามลำดับ จากซ้ายไปขวาทีละต้นจนครบ

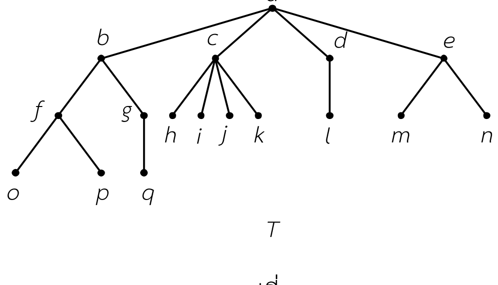
การแวะผ่านต้นไม้แบบหลังลำดับให้กระทำตามนิยามต่อไปนี้

> ให้ T เป็นต้นไม้แบบกำหนดรากและเรียงลำดับที่มีรากคือ r ถ้า T ประกอบด้วย r เพียงจุดยอดเดียว การแวะผ่านต้นไม้ T แบบหลังลำดับ จะผ่าน r เพียงจุดเดียว ถ้ามิฉะนั้นแล้วการแวะผ่านต้นไม้ T แบบหลังลำดับจะเริ่มต้นจากการแวะผ่านต้นไม้ย่อยของ T ซึ่งมีรากคือจุดยอดที่เป็นลูกของ r แบบก่อนลำดับ จากซ้ายไปขวาทีละต้นจนครบเสร็จแล้วจึงแวะที่ r

---

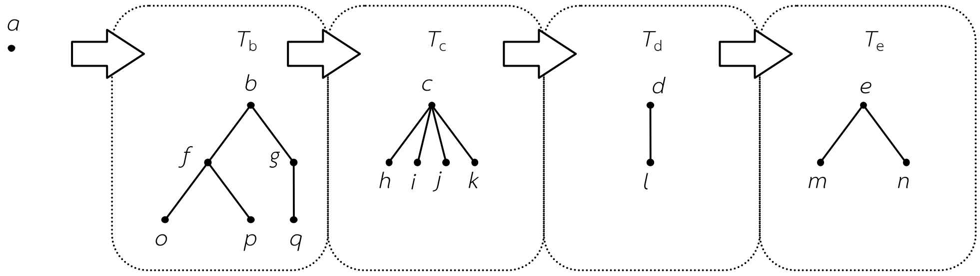
ตัวอย่างที่ 53

จงแสดงลำดับของจุดยอดในต้นไม้ T ดังรูปที่ 84 ที่จะถูกแวะ หากต้นไม้ T นั้นถูกแวะผ่านแบบก่อนลำดับ



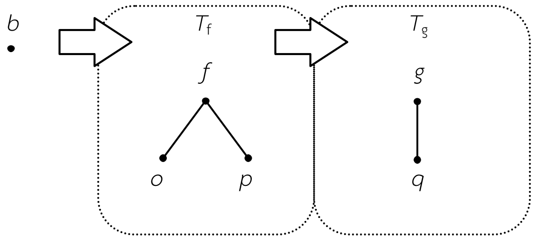
รูปที่ 84

(1) รากของต้นไม้ T คือ a ซึ่งมีลูกคือ $b, c, d,$ และ e ต้นไม้ย่อยที่มีรากเป็นจุดยอดดังกล่าวคือ T_b, T_c, T_d, และ T_e ดังแสดงในรูปที่ 85 การแวะผ่านต้นไม้ T แบบก่อนลำดับของจะเริ่มจากจุดยอด a แล้วจึงแวะผ่าน T_b, T_c, T_d, และ T_e แบบก่อนลำดับ



รูปที่ 85 : ลำดับการแวะผ่านต้นไม้ T แบบก่อนลำดับ

(2) <u>แวะผ่าน T_b</u>: ลูกของรากของต้นไม้ T_b คือ f และ g ต้นไม้ย่อยที่มีรากเป็นจุดยอดดังกล่าวคือ T_f, และ T_g ดังแสดงในรูปที่ 86 ลำดับของจุดยอดในการแวะผ่าน T_f แบบก่อนลำดับคือ f, o, p ลำดับของจุดยอดในการแวะผ่าน T_g แบบก่อนลำดับคือ g, q ดังนั้นลำดับของจุดยอดในการแวะผ่าน T_b แบบก่อนลำดับคือ จุดยอด b, ลำดับของจุดยอดในการแวะผ่าน T_f, และ ลำดับของจุดยอดในการแวะผ่าน T_g ซึ่งรวมแล้วคือ b, f, o, p, g, q



รูปที่ 86 : ลำดับการแวะผ่านต้นไม้ T_b แบบก่อนลำดับ

(3) <u>แวะผ่าน T_c</u>: ลูกของรากของต้นไม้ T_c คือ $h, i, j,$ และ k ซึ่งต้นไม้ย่อยที่มีรากเป็นจุดยอดดังกล่าวแต่ละต้นมีเพียงจุดยอดที่เป็นรากเหล่านั้นเท่านั้น ดังนั้นลำดับของจุดยอดในการแวะผ่าน T_c แบบก่อนลำดับ คือ c, h, i, j, k

(4) <u>แวะผ่าน T_d</u>: ลูกของรากของต้นไม้ T_d คือ l ซึ่งต้นไม้ย่อยที่มีรากเป็นจุดยอดดังกล่าวมีเพียงจุดยอด l เท่านั้น ดังนั้นลำดับของจุดยอดในการแวะผ่าน T_d แบบก่อนลำดับ คือ d, l

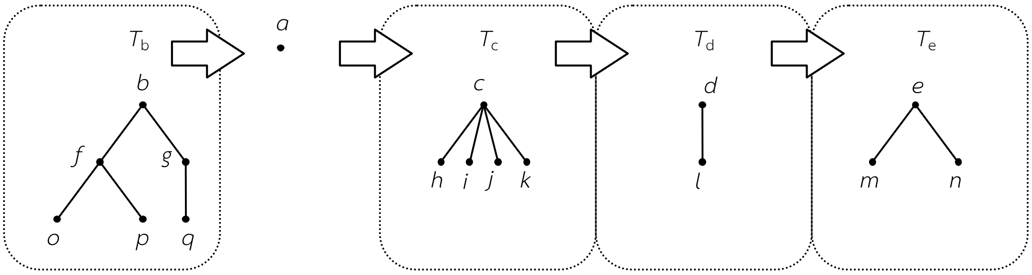
(5) <u>แวะผ่าน T_e</u>: ลูกของรากของต้นไม้ T_e คือ m และ n ซึ่งต้นไม้ย่อยที่มีรากเป็นจุดยอดดังกล่าวแต่ละต้นมีเพียงจุดยอดที่เป็นรากเหล่านั้นเท่านั้น ดังนั้นลำดับของจุดยอดในการแวะผ่าน T_e แบบก่อนลำดับ คือ e, m, n

(6) จาก (1) – (5) ลำดับของจุดยอดในการแวะผ่าน T แบบก่อนลำดับ คือ $a, b, f, o, p, g, q, c, h, i, j, k, d, l, e, m, n$

ตัวอย่างที่ 54

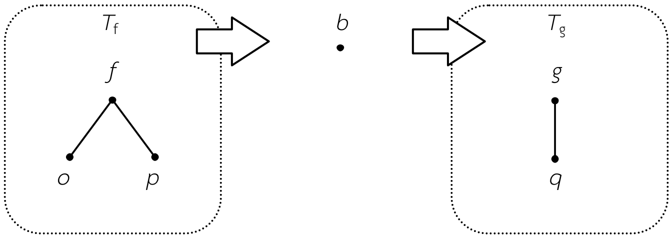
จงแสดงลำดับของจุดยอดในต้นไม้ T ดังรูปที่ 84 ที่จะถูกแวะ หากต้นไม้ T นั้นถูกแวะผ่านแบบตามลำดับ

(1) รากของต้นไม้ T คือ a ซึ่งมีลูกคือ $b, c, d,$ และ e ต้นไม้ย่อยที่มีรากเป็นจุดยอดดังกล่าวคือ T_b, T_c, T_d, และ T_e ดังแสดงในรูปที่ 87 การแวะผ่านต้นไม้ T แบบตามลำดับของจะเริ่มจากการแวะผ่าน T_b แบบตามลำดับ แล้วแวะจุดยอด a แล้วจึงแวะผ่าน T_c, T_d, และ T_e แบบตามลำดับ



รูปที่ 87 : ลำดับการแวะผ่านต้นไม้ T แบบตามลำดับ

(2) ลูกของรากของต้นไม้ T_b คือ f และ g ต้นไม้ย่อยที่มีรากเป็นจุดยอดดังกล่าวคือ T_f, และ T_g ดังแสดงในรูปที่ 88 ลำดับของจุดยอดในการแวะผ่าน T_f แบบตามลำดับคือ o, f, p ลำดับของจุดยอดในการแวะผ่าน T_g แบบตามลำดับคือ q, g ดังนั้นลำดับของจุดยอดในการแวะผ่าน T_b แบบตามลำดับคือ o, f, p, b, q, g



รูปที่ 88 : ลำดับการแวะผ่านต้นไม้ T_b แบบก่อนลำดับ

(3) ลำดับของจุดยอดในการแวะผ่าน T_c แบบตามลำดับคือ h, c, i, j, k

(4) ลำดับของจุดยอดในการแวะผ่าน T_d แบบตามลำดับคือ l, d

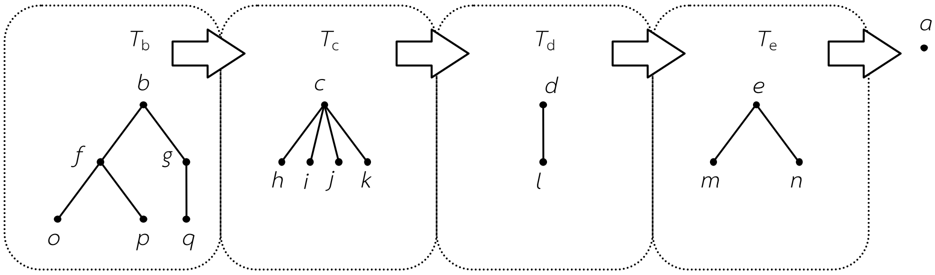
(5) ลำดับของจุดยอดในการแวะผ่าน T_e แบบตามลำดับคือ m, e, n

(6) จาก (1) – (5) ลำดับของจุดยอดในการแวะผ่าน T แบบตามลำดับคือ $o, f, p, b, q, g, a, h, c, i, j, k, l, d, m, e, n$

ตัวอย่างที่ 55

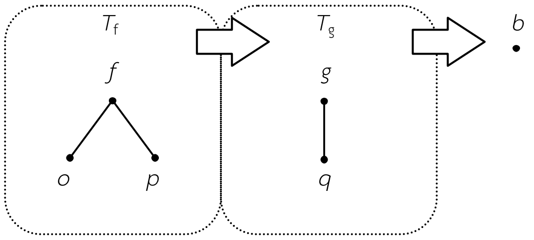
จงแสดงลำดับของจุดยอดในต้นไม้ T ดังรูปที่ 84 ที่จะถูกแวะ หากต้นไม้ T นั้นถูกแวะผ่านแบบหลังลำดับ

(1) การแวะผ่านต้นไม้ T แบบหลังลำดับของจะเริ่มจากการแวะผ่าน T_b, T_c, T_d, และ T_e แบบหลังลำดับ แล้วจึงแวะจุดยอด a ซึ่งเป็นราก ดังแสดงในรูปที่ 89



รูปที่ 89 : ลำดับการแวะผ่านต้นไม้ T แบบหลังลำดับ

(2) ลำดับของจุดยอดในการแวะผ่าน T_b แบบหลังลำดับเกิดจากการแวะผ่าน T_f แบบหลังลำดับ แวะผ่าน T_g แบบหลังลำดับ แล้วจึงแวะที่ b ซึ่งเป็นรากของ T_b ดังแสดงในรูปที่ 90 ลำดับดังกล่าวคือ *o, p, f, q, g, b*



รูปที่ 90 : ลำดับการแวะผ่านต้นไม้ T_b แบบหลังลำดับ

(3) ลำดับของจุดยอดในการแวะผ่าน T_c แบบหลังลำดับคือ *h, i, j, k, c*

(4) ลำดับของจุดยอดในการแวะผ่าน T_d แบบหลังลำดับคือ *l, d*

(5) ลำดับของจุดยอดในการแวะผ่าน T_e แบบหลังลำดับคือ *m, n, e*

(6) จาก (1) – (5) ลำดับของจุดยอดในการแวะผ่าน T แบบหลังลำดับคือ *o, p, f, q, g, b, h, i, j, k, c, l, d, m, n, e*

ตัวอย่างที่ 56

ต้นไม้แบบเรียงลำดับ T ต้นหนึ่งมีลำดับของจุดยอดจากการแวะผ่านต้นไม้แบบก่อนลำดับคือ *a, b, d, e, f, g, c* และมีลำดับของจุดยอดจากการแวะผ่านต้นไม้แบบหลังลำดับคือ *d, f, g, e, b, c, a* จงแสดงว่าต้นไม้ T ดังกล่าวเป็นได้เพียงแบบเดียวหรือไม่ หากเป็นได้เพียงแบบเดียว ให้วาดภาพแสดงต้นไม้ T นั้น

(1) ให้ลำดับของจุดยอดจากการแวะผ่านต้นไม้แบบก่อนลำดับ *a, b, d, e, f, g, c* เรียกว่า s_{pre} และลำดับของจุดยอดจากการแวะผ่านต้นไม้แบบหลังลำดับ *d, f, g, e, b, c, a* เรียกว่า s_{post}

(2) เราจะพิจารณาจุดยอดใน s_{pre} จากก่อนไปหลัง โดยหาความสัมพันธ์ของแต่ละจุดยอดกับจุดยอดต่างๆ ที่อยู่ก่อนหน้ามัน พร้อมทั้งพิจารณาความเป็นไปได้ของความสัมพันธ์เหล่านั้นโดยใช้ลำดับของจุดยอดใน s_{post} ควบคู่ไปด้วย

(3) จากนิยามของการแวะผ่านต้นไม้แบบก่อนลำดับจุดยอดที่มาทีหลังจะต้องเป็นลูกของจุดยอดใดจุดยอดหนึ่งที่อยู่ข้างหน้ามันเสมอ

(4) จากนิยามของการแวะผ่านต้นไม้แบบหลังลำดับจุดยอดที่มาก่อนจะต้องเป็นลูกของจุดยอดใดจุดยอดหนึ่งที่อยู่ข้างหลัง

(5) ทั้งในการแวะผ่านแบบก่อนลำดับและหลังลำดับ หากจุดยอดใดมีแม่เดียวกัน (เป็นพี่น้องกัน) จุดยอดที่มาทีหลังจะต้องอยู่ทางขวาของจุดยอดที่มาก่อนเสมอ

(6) จากลำดับทั้งสองเราสามารถบอกได้ว่า a ต้องเป็นรากของต้นไม้นี้ เนื่องจาก (3) และ (4) แสดงให้เห็นว่า a ไม่สามารถเป็นลูกของจุดยอดใดได้

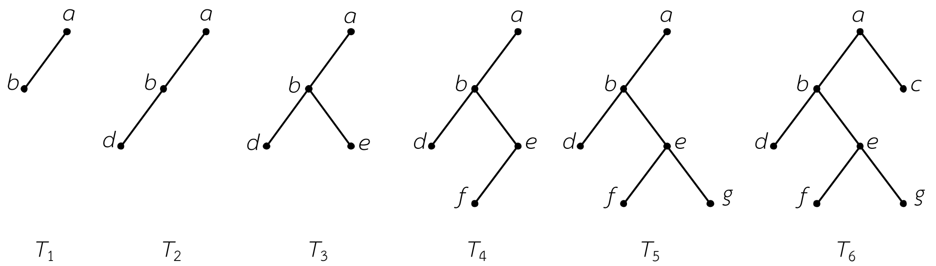
(7) พิจารณาจุดยอดต่อไปใน s_{pre} ซึ่งก็คือ b ซึ่งจาก (3) ต้องเป็นลูกของ a แน่นอน ทั้งนี้ข้อนี้ไม่ขัดแย้งกับ (4) หากพิจารณา s_{post} (ดูรูปต้นไม้ T_1 ในรูปที่ 91)

(8) พิจารณาจุดยอดต่อไปใน s_{pre} ซึ่งก็คือ d ซึ่งจาก (3) ต้องเป็นลูกของ a หรือ b แต่ d ไม่สามารถเป็นลูกของ a ได้เนื่องจากมิฉะนั้นแล้ว b และ d จะเป็นพี่น้องกันซึ่งเป็นไปไม่ได้เนื่องจากลำดับของทั้งสองใน

s_{pre} และ s_{post} ไม่สอดคล้องกัน ด้วยเหตุผลใน (5) ดังนั้น d ต้องเป็นลูกของ b ซึ่งข้อนี้ไม่ขัดแย้งกับ (4) หากพิจารณา s_{post} (ดูรูปต้นไม้ T_2 ในรูปที่ 91)

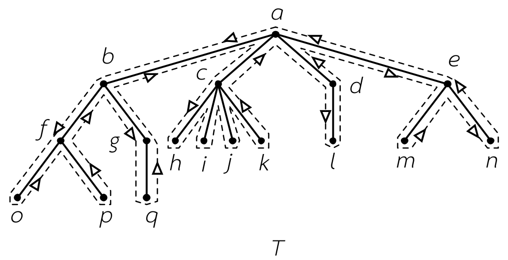
(9) จาก s_{pre} จุดยอด e อาจจะเป็นลูกของ a, b, หรือ d อย่างไรก็ตาม e เป็นพี่น้องกับ b (หรือเป็นลูกของ a) ไม่ได้ เนื่องจาก (5) และความไม่สอดคล้องกันของลำดับของจุดยอดทั้งสองใน s_{pre} และ s_{post} และ e เป็นลูกของ d ไม่ได้ เนื่องจาก d มาก่อน e ใน s_{post} นั่นหมายความว่า e ต้องเป็นลูกของ b โดยต้องอยู่ทางขวาของ d (ผู้อ่านลองควรพิจารณาเองว่าข้อนี้ไม่เกิดขัดแย้งใดๆ เมื่อพิจารณา s_{post}) (ดูรูปต้นไม้ T_3 ในรูปที่ 91)

(10) ใช้เหตุผลใน (3), (4) และ (5) ในทำนองเดียวกับที่แสดงข้างต้น เพื่อเติมจุดยอด f, g และ c เข้าไปตามลำดับ (ดูรูปต้นไม้ T_4 , T_5 และ T_6 ในรูปที่ 91) เราจะพบว่าต้นไม้ที่สอดคล้องกับทั้ง s_{pre} และ s_{post} มีเพียงแบบเดียวคือ ต้นไม้ T_6 ดังแสดงในรูปที่ 91 (ผู้อ่านควรลองระบุรายละเอียดของการให้เหตุผลในการเติมจุดยอดทั้งสามด้วยตนเอง)



รูปที่ 91

วิธีการหนึ่งที่สะดวกในการไล่ลำดับของจุดยอดในต้นไม้เมื่อต้นไม้นั้นถูกแวะผ่านแบบก่อนลำดับ แบบตามลำดับ หรือแบบหลังลำดับ สามารถกระทำได้โดยการลากเส้นล้อมรอบภาพของต้นไม้ที่ต้องการแวะผ่าน โดยเริ่มจากรากไปในทิศทางของลูกที่อยู่ทางซ้ายสุด เส้นนี้จะต้องถูกลากไปในทิศทางขนานกับเส้นเชื่อมโดยเมื่อถึงใบของต้นไม้เส้นนี้จะวกกลับมายังอีกด้านหนึ่งของเส้นเชื่อมที่เชื่อมกับใบนั้น ลากเส้นดังนี้จนวนกลับมาที่จุดเริ่มต้น เส้นนี้จะล้อมรอบต้นไม้ทั้งต้น ดังเช่นรูปที่ 92



รูปที่ 92

เมื่อต้องการสร้างลำดับของจุดยอดจากการแวะผ่านแบบก่อนลำดับให้เติมจุดยอดลงในลำดับทันทีที่การลากเส้นล้อมนั้นผ่านจุดยอดนั้นเป็นครั้งแรก เช่นในที่นี้คือ $a, b, f, o, p, g, q, c, h, i, j, k, d, l, e, m, n$

เมื่อต้องการสร้างลำดับของจุดยอดจากการแวะผ่านแบบตามลำดับให้เติมจุดยอดที่เป็นใบลงในลำดับทันทีที่การลากเส้นล้อมนั้นผ่านใบนั้นเป็นครั้งแรก แต่ถ้าจุดยอดนั้นเป็นจุดยอดภายในให้เติมลงในลำดับเมื่อเส้นผ่านจุดยอดภายในนั้นเป็นครั้งที่สอง ทำเช่นนี้กับต้นไม้ T ในรูปที่ 92 เราจะได้ $o, f, p, b, q, g, a, h, c, i, j, k, l, d, m, e, n$

เมื่อต้องการสร้างลำดับของจุดยอดจากการแวะผ่านแบบหลังลำดับให้เติมจุดยอดลงในลำดับเมื่อการลากเส้นผ่านจุดยอดนั้นเป็นครั้งสุดท้ายก่อนจะวกกลับสู่จุดยอดที่เป็นแม่ของมัน ทำเช่นนี้กับต้นไม้ *T* ในรูปที่ 92 เราจะได้ *o, p, f, q, g, b, h, i, j, k, c, l, d, m, n, e*

ลำดับของจุดยอดที่ได้จากการแวะผ่านทั้งสามแบบสอดคล้องกับที่ได้จากตัวอย่างที่แสดงมาแล้วข้างต้น

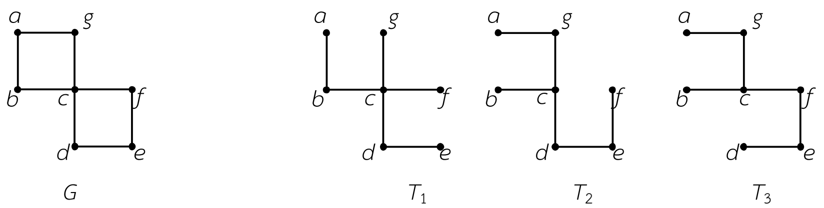
ต้นไม้แบบทอดข้าม

ในบางครั้งเราต้องการที่จะหากราฟย่อยเชื่อมต่อของกราฟๆ หนึ่งซึ่งใช้จุดยอดทั้งหมดของกราฟนั้นและมีจำนวนเส้นเชื่อมน้อยที่สุด กราฟย่อยหนึ่งที่มีสมบัติดังกล่าวจะต้องเป็นต้นไม้ และต้นไม้นั้นจะเรียกว่า *ต้นไม้แบบทอดข้าม* (Spanning Tree)

เราสามารถเขียนนิยามของต้นไม้แบบทอดข้ามได้ดังต่อไปนี้

ให้ *G* เป็นกราฟเชิงเดียวกราฟหนึ่ง ต้นไม้แบบทอดข้ามของ *G* ก็คือกราฟย่อยของ *G* ซึ่งมีสมบัติเป็นต้นไม้ และมีจุดยอดทุกจุดของ *G*

ในรูปที่ 93 ต้นไม้ T_1, T_2, และ T_3 เป็นตัวอย่างของต้นไม้แบบทอดข้ามของ *G*



รูปที่ 93

ตัวอย่างที่ 57

จงพิสูจน์ว่ากราฟเชิงเดียวเป็นแบบเชื่อมต่อก็ต่อเมื่อกราฟนั้นมีต้นไม้แบบทอดข้าม

เริ่มจากพิสูจน์ว่าหากกราฟเชิงเดียวมีต้นไม้แบบทอดข้ามแล้วกราฟนั้นเป็นกราฟเชื่อมต่อ

(1) ให้ *G* เป็นกราฟเชิงเดียวที่มีต้นไม้แบบทอดข้ามเรียกว่า *T*

(2) เนื่องจาก *T* เป็นต้นไม้จึงมีวิถีระหว่างจุดยอดคู่ใดๆ ใน *T* เสมอ และ ตามนิยามของต้นไม้ทอดข้าม จุดยอดทุกจุดใน *G* จะอยู่ใน *T* ด้วยเช่นกัน ดังนั้นจึงหมายความว่ามีวิถีระหว่างจุดยอดคู่ใดๆ ใน *G* เสมอ

(3) จาก (2) เราสรุปได้ว่า *G* เป็นกราฟเชื่อมต่อ

ต่อไปเราต้องพิสูจน์ว่าหากกราฟเชิงเดียวเป็นแบบเชื่อมต่อแล้วกราฟนั้นมีต้นไม้แบบทอดข้าม

(1) ให้ *G* เป็นกราฟเชิงเดียวเชื่อมต่อ

(2) หาก *G* เป็นต้นไม้แล้ว กราฟ *G* ก็เป็นต้นไม้แบบทอดข้ามตามนิยามแล้ว

(3) หาก *G* ไม่เป็นต้นไม้ แสดงว่า *G* มีวงจรเชิงเดียว

(4) จาก (3) หากเราตัดเส้นเชื่อมเส้นหนึ่งของวงจรเชิงเดียวออก เราจะได้กราฟย่อยที่ยังผ่านจุดยอดทุกจุดของ *G* อยู่ ถ้ากราฟย่อยนี้เป็นต้นไม้ กราฟนี้ก็จะเป็นต้นไม้แบบทอดข้ามของ *G* หากกราฟย่อยนี้ไม่ใช่ต้นไม้ เราสามารถตัดเส้นเชื่อมของวงจรเชิงเดียวที่ยังเหลืออยู่ไปเรื่อยๆ กราฟที่ได้หลังการตัด

เส้นเชื่อมของวงจรในแต่ละครั้งจะยังผ่านจุดยอดทุกจุดของ G อยู่ (ผู้อ่านอาจลองพิสูจน์คำกล่าวนี้ด้วยตนเอง) เมื่อใดก็ตามที่กราฟที่ได้หลังการตัดเส้นเชื่อมออกไปมีสมบัติของต้นไม้หรือไม่มีวงจรเชิงเดียวเหลืออยู่แล้ว กราฟนั้นจะเป็นต้นไม้แบบทอดข้ามของ G

(5) จาก (2) และ (4) เราสรุปได้ว่ากราฟเชิงเดียวเชื่อมต่อมีต้นไม้แบบทอดข้ามเสมอ

ตัวอย่างที่ 58

จงแสดงว่าการจะสร้างต้นไม้แบบทอดข้ามจากกราฟเชื่อมต่อที่มีจุดยอด n จุดและเส้นเชื่อม m เส้นจะต้องมีการตัดเส้นเชื่อมออกจากกราฟนั้นจำนวน m-n+1 เส้น

(1) จากสมบัติของต้นไม้ ต้นไม้ที่มีจุดยอด k จุดจะมีเส้นเชื่อม k-1 เส้น

(2) ต้นไม้แบบทอดข้ามของกราฟๆ หนึ่งจะต้องมีจำนวนจุดยอดเท่ากับกราฟนั้น

(3) จาก (1) และ (2) ต้นไม้แบบทอดข้ามของกราฟเชื่อมต่อที่มีจุดยอด n จุด จะต้องมีเส้นเชื่อม n-1 เส้นพอดี ดังนั้นจากเส้นเชื่อม m เส้น เราจะต้องตัดออกไป m-n+1 เส้น เพื่อให้เหลือเส้นเชื่อมเท่ากับ n-1

ตัวอย่างที่ 59

จงหาจำนวนต้นไม้แบบทอดข้ามที่แตกต่างกันของกราฟ G ในรูปที่ 93

(1) ต้นไม้แบบทอดข้ามของกราฟเชื่อมต่อกราฟหนึ่งสามารถสร้างได้โดยตัดเส้นเชื่อมออกจากกราฟจนไม่เหลือวงจรเชิงเดียวในกราฟนั้น

(2) พิจารณากราฟ G การได้มาซึ่งต้นไม้ทอดข้ามเกิดจากการตัดเส้นเชื่อมหนึ่งเส้นออกจากวงจร a-b-c-g-a พร้อมทั้งตัดเส้นเชื่อมอีกหนึ่งเส้นออกจากวงจร c-d-e-f-c การกระทำดังกล่าวทำให้ไม่เหลือวงจรอยู่ในกราฟย่อยที่ได้และส่วนประกอบเชื่อมต่อก็ยังคงเป็นส่วนเดียวเหมือนเดิม

(3) การตัดเส้นเชื่อมหนึ่งเส้นจากวงจร a-b-c-g-a ทำได้ 4 วิธี ในแต่ละวิธีนั้นการตัดเส้นเชื่อมหนึ่งเส้นจากวงจร c-d-e-f-c ทำได้อีก 4 วิธี ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดที่ทำได้คือ $4 \times 4 = 16$ วิธี โดยการสร้างในแต่ละวิธีนั้นให้ต้นไม้ทอดข้ามที่แตกต่างกันออกไป ดังนั้นจำนวนต้นไม้แบบทอดข้ามที่แตกต่างกันของกราฟ G คือ 16 ต้น

ตัวอย่างที่ 60

จงหาจำนวนต้นไม้แบบทอดข้ามที่มีสัณฐานแตกต่างกันของกราฟ G ในรูปที่ 93

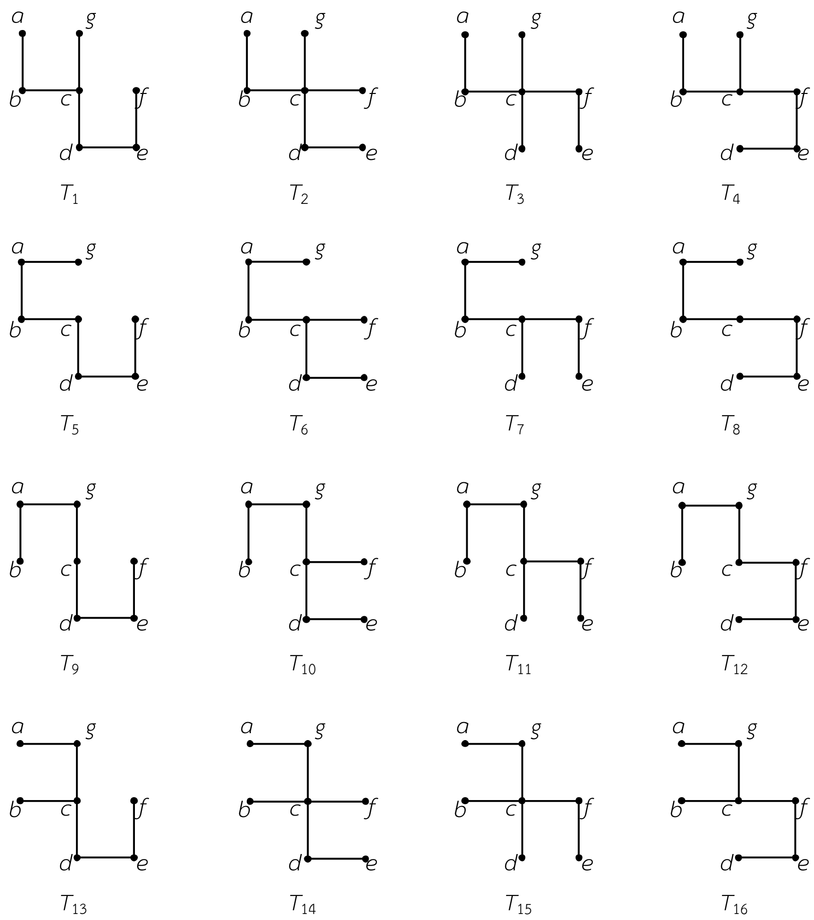
(1) พิจารณาต้นไม้แบบทอดข้ามทั้ง 16 ของกราฟ G ดังแสดงในรูปที่ 94

(2) ต้นไม้ T_2, T_3, T_{14}, และ T_{15} เท่านั้นที่มีจุดยอดที่มีดีกรี 4 เราพบว่าสัณฐานของต้นไม้ทั้งสี่เหมือนกันและสัณฐานนี้แตกต่างกับสัณฐานของต้นไม้อื่นที่ไม่มีจุดยอดดีกรี 4

(3) ต้นไม้ T_1, T_4, T_6, T_7, T_{10}, T_{11}, T_{13} และ T_{16} เท่านั้นที่มีจุดยอดที่มีดีกรี 3 เราพบว่าสัณฐานของต้นไม้ทั้งแปดเหมือนกันและสัณฐานนี้แตกต่างกับสัณฐานของต้นไม้อื่นที่ไม่มีจุดยอดดีกรี 3

(4) ต้นไม้ T_5, T_8, T_9, และ T_{12} มีจุดยอดที่มีดีกรีเท่ากับ 1 อยู่สองจุด ที่เหลืออีก 5 จุดมีดีกรีเท่ากับ 2 สัณฐานของต้นไม้ทั้งสี่นี้เหมือนกัน คือ เชื่อมต่อกันเป็นเส้นจากจุดยอดที่มีดีกรีเท่ากับ 1 จุดหนึ่งไปยังอยู่จุดยอดที่มีดีกรี 1 อีกจุดหนึ่ง

(5) จาก (2), (3), และ (4) เราสรุปได้ว่าต้นไม้แบบทอดข้ามที่มีสัณฐานแตกต่างกันของกราฟ G มี 3 แบบเท่านั้น



รูปที่ 94