

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชื่อ _____

คณะวิศวกรรมศาสตร์

เลขประจำตัว _____

ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์

หมายเลขเครื่อง _____

2110-263 DIGITAL COMPUTER LOGIC LAB I

วันที่ _____

2. ตารางความจริงและวงจรตรรกะ

วัตถุประสงค์

1. เพื่อให้นิสิตสามารถสร้างตารางความจริงได้
2. เพื่อให้นิสิตสามารถเขียนสมการบูลีนจากตารางความจริงได้
3. เพื่อให้นิสิตสามารถสร้างวงจรเชิงตรรกะจากสมการบูลีนได้

บทนำ

ตารางความจริง คือ ตารางที่มีอินพุตทั้งหมดให้ค่าครบทุกค่า และแต่ละค่าของอินพุตจะให้ค่าเอาต์พุตเป็นอย่างไร เช่น

A	B	Output
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

เป็นตารางความจริงที่มีอินพุต 2 ค่า คือ A และ B มีเอาต์พุต 1 ค่า คือ Output การเขียนตารางความจริง จะต้องใส่ค่าของอินพุตให้ครบทุกค่า ซึ่งในตัวอย่างนี้มีเพียง 2 อินพุต จึงให้ค่าอินพุตได้ทั้งหมด 4 ค่า คือ 00 , 01 , 10 , 11 การเขียนค่าลงตารางนั้นจะต้องใส่ให้เรียงกันไปตามลำดับ (เพื่อให้เป็นมาตรฐานเดียวกัน) ส่วนค่าเอาต์พุตที่จะใส่ลงไปในนั้นเป็นค่าที่จะเกิดขึ้นจริงๆตามค่าของอินพุตนั้นๆ

ในกรณีที่มีอินพุตมากกว่า 2 ค่า ก็ใช้หลักการเดียวกัน เพียงแต่จำนวนค่าอินพุตทั้งหมดแตกต่างกัน เช่น ถ้ามีอินพุต 3 ค่า จะมีจำนวนค่าอินพุตทั้งหมด 8 ค่า ดังนี้คือ 000 , 001 , 010 , 011 , 100 , 101 , 110 , 111

สมการบูลีน ถูกศึกษาเป็นครั้งแรกโดย George Boole เป็นสมการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ช่วยในการออกแบบวงจรตรรกะและคอมพิวเตอร์ สามารถเขียนได้ 2 รูปแบบคือ

- Canonical sum-of-products (Minterm)
- Canonical Product-of-sum (Maxterm)

เพื่อให้การอธิบายง่ายขึ้น ขอให้ดูตัวอย่างตารางสมมติข้างล่าง

x_1	x_2	x_3	Minterm	Maxterm	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	$m_0 = x'_1 x'_2 x'_3$	$M_0 = x_1 + x_2 + x_3$	0
0	0	1	$m_1 = x'_1 x'_2 x_3$	$M_0 = x_1 + x_2 + x'_3$	0
0	1	0	$m_2 = x'_1 x_2 x'_3$	$M_0 = x_1 + x'_2 + x_3$	1
0	1	1	$m_3 = x'_1 x_2 x_3$	$M_0 = x_1 + x'_2 + x'_3$	1
1	0	0	$m_4 = x_1 x'_2 x'_3$	$M_0 = x'_1 + x_2 + x_3$	1
1	0	1	$m_5 = x_1 x'_2 x_3$	$M_0 = x'_1 + x_2 + x'_3$	0
1	1	0	$m_6 = x_1 x_2 x'_3$	$M_0 = x'_1 + x'_2 + x_3$	0
1	1	1	$m_7 = x_1 x_2 x_3$	$M_0 = x'_1 + x'_2 + x'_3$	1

เราสามารถเขียนสมการบูลีนทั้งสองแบบได้ดังนี้

- เขียนในรูปแบบของ Canonical sum-of-products ให้เลือกเฉพาะ $f(x_1, x_2, x_3)$ ที่เป็น 1 นำมาเขียน Product term และ OR กัน ก็จะได้ดังนี้

$$f(x_1, x_2, x_3) = x'_1 x'_2 x'_3 + x'_1 x'_2 x_3 + x_1 x'_2 x'_3 + x_1 x_2 x_3 \quad (1)$$

แต่ละนิพจน์เรียกว่า minterm ดังนั้นอาจเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$f(x_1, x_2, x_3) = m_2 + m_3 + m_4 + m_7$$

หรืออาจเขียนย่ออีกอย่างได้เป็น

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum m(2, 3, 4, 7)$$

- เขียนในรูปแบบของ Canonical product-of-sums ให้เลือกเฉพาะ $f(x_1, x_2, x_3)$ ที่เป็น 0 นำมาเขียน Sum term และ AND กัน ก็จะได้ดังนี้

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x'_3)(x'_1 + x_2 + x'_3)(x'_1 + x'_2 + x_3) \text{ --- (2)}$$

แต่ละนิพจน์เรียกว่า maxterm ดังนั้นอาจเขียนสมการใหม่ได้เป็น

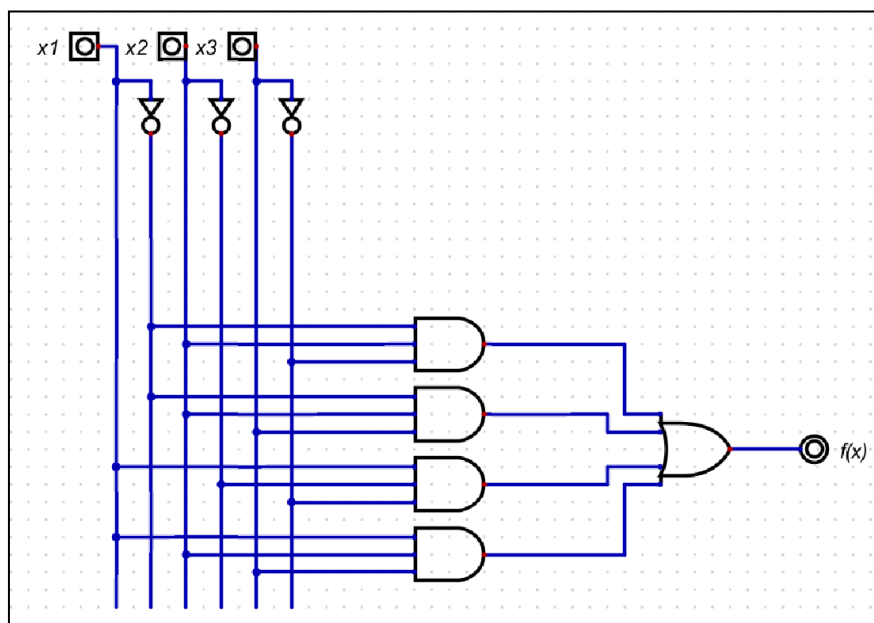
$$f(x_1, x_2, x_3) = M_0 \bullet M_1 \bullet M_5 \bullet M_6$$

หรืออาจเขียนย่ออีกอย่างได้เป็น

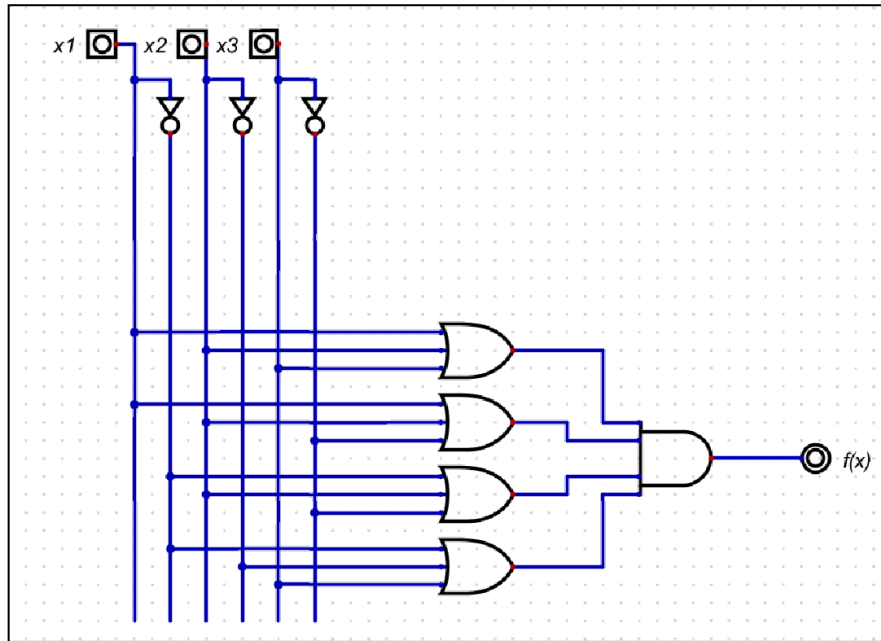
$$f(x_1, x_2, x_3) = \prod M(0, 1, 5, 6)$$

การสร้างวงจรตรรกะ จากสมการบูลีน เราสามารถเขียนวงจรตรรกะได้ โดยใช้เกทพื้นฐาน ได้แก่ AND gate , OR gate และ NOT gate ได้อย่างตรงไปตรงมา

ตัวอย่าง จากสมการที่ 1 นำมาเขียนวงจรจะได้



หรือจะใช้สมการที่ 2 มาเขียนวงจรก็ได้



XOR (Sum of Products)

ให้นิสิตสร้างวงจร XOR ที่มี Input คือ A, B ขนาด 1 Bit และ Output คือ Output ขนาด 1 บิต โดยให้สร้างวงจรโดยใช้สมการบูลีนแบบ Sum of Products เท่านั้น

A	B	Output
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$F = A'B + AB'$

รูปที่ 1 ตารางค่าความจริงของวงจร Xor

ข้อมูลนำเข้า

- A ขนาด 1 Bit
- B ขนาด 1 Bit

ข้อมูลส่งออก

- Output ขนาด 1 Bit

ชุดข้อมูลทดสอบ

- 100% โปรแกรมทำงานถูกต้องตาม Input ทุกรูปแบบ

XOR (Product of Sums)

ให้นิสิตสร้างวงจร XOR ที่มี Input คือ A, B ขนาด 1 Bit และ Output คือ Output ขนาด 1 บิต โดยให้สร้างวงจรโดยใช้สมการบูลีนแบบ Product of Sums เท่านั้น

A	B	Output
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$F = (A+B)(A'+B')$

รูปที่ 1 ตารางค่าความจริงของวงจร Xor

ข้อมูลนำเข้า

- A ขนาด 1 Bit
- B ขนาด 1 Bit

ข้อมูลส่งออก

- Output ขนาด 1 Bit

ชุดข้อมูลทดสอบ

- 100% โปรแกรมทำงานถูกต้องตาม Input ทุกรูปแบบ

FullAdder (Sum of Products)

ให้นักศึกษาสร้างวงจร FullAdder ขนาด 1 Bit ที่มี Input คือ A, B, Cin ขนาด 1 Bit และ Output คือ Sum, Cout ขนาด 1 Bit ซึ่ง Sum คือผลรวมของ Input ทั้งหมด สำหรับหลักปัจจุบันและ Cout คือตัวทดสำหรับหลักต่อไป โดยให้สร้างวงจรโดยใช้สมการบูลีนแบบ **Sum of Products**

A	B	Cin	Sum	Cout
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

รูปที่ 1. ตารางค่าความจริงของ FullAdder

ข้อมูลนำเข้า

- A ขนาด 1 Bit
- B ขนาด 1 Bit
- Cin ขนาด 1 Bit

ข้อมูลส่งออก

- Sum ขนาด 1 Bit
- Cout ขนาด 1 Bit

ชุดข้อมูลทดสอบ

- 50% Cin มีค่าเป็น 0
- 50% Cin มีค่าเป็น 1

$$\text{Sum} = A'B'C_{in} + A'BC_{in} + AB'C_{in} + ABC_{in}$$

$$\begin{aligned}\text{Cout} &= A'BC_{in} + AB'C_{in} + ABC_{in} + ABC_{in} + ABC_{in} + ABC_{in} \\ &= BC_{in} + AC_{in} + AB\end{aligned}$$

Sum

		A	
		0	1
C	0	0	1
	1	1	0
		B	

Cout

		A	
		0	1
C	0	0	1
	1	1	1
		B	

FullAdder (Product of Sums)

ให้หีสถิตสร้างวงจร FullAdder ขนาด 1 Bit ที่มี Input คือ A, B, Cin ขนาด 1 Bit และ Output คือ Sum, Cout ขนาด 1 Bit ซึ่ง Sum คือผลรวมของ Input ทั้งหมด สำหรับหลักปัจจุบันและ Cout คือตัวทดสำหรับหลักต่อไป โดยให้สร้างวงจรโดยใช้สมการบูลีนแบบ **Product of Sums**

A	B	Cin	Sum	Cout
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

รูปที่ 1. ตารางค่าความจริงของ FullAdder

ข้อมูลนำเข้า

- A ขนาด 1 Bit
- B ขนาด 1 Bit
- Cin ขนาด 1 Bit

ข้อมูลส่งออก

- Sum ขนาด 1 Bit
- Cout ขนาด 1 Bit

ชุดข้อมูลทดสอบ

- 50% Cin มีค่าเป็น 0
- 50% Cin มีค่าเป็น 1

$$Sum = (A+B+Cin)(A+B'+Cin')(A'+B+Cin')(A'+B'+Cin)$$

$$Cout = (A+B+Cin)(A+B+Cin')(A+B'+Cin)(A'+B+Cin)(A+B+Cin)(A+B+Cin) \\ = (A+B)(A+Cin)(B+Cin)$$

Sum

			A
	0	1	0
C	1	0	1
		B	

Cout

			A
	0	0	1
C	0	1	1
		B	

Comparator (Sum of Products)

ให้นักศึกษาวางวงจร comparator ที่มี 4 input คือ A, B, C และ D ขนาด 1 Bit และมี 3 output คือ Z1, Z2 และ Z3 ขนาด 1 Bit โดยที่ A และ B ประกอบเป็นค่าของเลขจำนวนที่หนึ่ง (N1) และ C และ D ประกอบเป็นค่าของเลขจำนวนที่สอง (N2) เช่น ถ้า AB = 10 เลข N1 ก็มามีค่า 10 (เท่ากับ 2 ในฐานสิบ) ค่าของ Z แสดงผลการเปรียบเทียบขนาดเลขทั้งสองจำนวน โดย **Z1 เป็น 1** เมื่อ N1 > N2 **Z2 เป็น 1** เมื่อ N1 < N2 และ **Z3 เป็น 1** เมื่อ N1 = N2 (จะสังเกตว่า ที่ input ใดๆ จะมีค่า Z เป็นหนึ่งเพียงตัวเดียวเท่านั้น) โดยให้สร้างวงจรโดยใช้สมการบูลีนแบบ **Sum of Products**

ข้อมูลนำเข้า

- A ขนาด 1 Bit
- B ขนาด 1 Bit
- C ขนาด 1 Bit
- D ขนาด 1 Bit

ข้อมูลส่งออก

- Z1 ขนาด 1 Bit
- Z2 ขนาด 1 Bit
- Z3 ขนาด 1 Bit

ชุดข้อมูลทดสอบ

- 33% N1 มีค่าเท่ากับ N2
- 33% N1 มีค่ามากกว่า N2
- 34% N1 มีค่าน้อยกว่า N2

A	B	C	D	LT	EQ	GT
0	0	0	0	0	1	0
		0	1	1	0	0
		1	0	1	0	0
		1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1
		0	1	0	1	0
		1	0	1	0	0
		1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1
		0	1	0	0	1
		1	0	0	1	0
		1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1
		0	1	0	0	1
		1	0	0	0	1
		1	1	0	1	0

GT

			A
0	1	1	1
0	0	1	1
0	0	0	0
C	0	0	1
	B		

$$Z1 = AC' + BC'D' + ABD'$$

LT

			A
0	0	0	0
1	0	0	0
1	1	0	1
C	1	1	0
	B		

$$Z2 = A'C + B'CD + A'B'D$$

EQ

			A
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
C	0	0	1
	B		

$$Z3 = A'B'C'D' + A'BC'D + ABCD + AB'CD'$$

Comparator (Product of Sums)

ให้นักศึกษาวงจร comparator ที่มี 4 input คือ A, B, C และ D ขนาด 1 Bit และมี 3 output คือ Z1, Z2 และ Z3 ขนาด 1 Bit โดยที่ A และ B ประกอบเป็นค่าของเลขจำนวนที่หนึ่ง (N1) และ C และ D ประกอบเป็นค่าของเลขจำนวนที่สอง (N2) เช่น ถ้า AB = 10 เลข N1 ก็มีค่า 10 (เท่ากับ 2 ในฐานสิบ) ค่าของ Z แสดงผลการเปรียบเทียบขนาดเลขทั้งสองจำนวน โดย Z1 เป็น 1 เมื่อ N1 > N2 Z2 เป็น 1 เมื่อ N1 < N2 และ Z3 เป็น 1 เมื่อ N1 = N2 (จะสังเกตว่า ที่ input ใดๆ จะมีค่า Z เป็นหนึ่งเพียงตัวเดียวเท่านั้น) โดยให้สร้างวงจรโดยใช้สมการบูลีนแบบ Product of Sums

ข้อมูลนำเข้า

- A ขนาด 1 Bit
- B ขนาด 1 Bit
- C ขนาด 1 Bit
- D ขนาด 1 Bit

ข้อมูลส่งออก

- Z1 ขนาด 1 Bit
- Z2 ขนาด 1 Bit
- Z3 ขนาด 1 Bit

ชุดข้อมูลทดสอบ

- 33% N1 มีค่าเท่ากับ N2
- 33% N1 มีค่ามากกว่า N2
- 34% N1 มีค่าน้อยกว่า N2

A	B	C	D	LT	EQ	GT
0	0	0	0	0	1	0
		0	1	1	0	0
		1	0	1	0	0
		1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1
		0	1	0	1	0
		1	0	1	0	0
		1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1
		0	1	0	0	1
		1	0	0	1	0
		1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1
		0	1	0	0	1
		1	0	0	0	1
		1	1	0	1	0

GT

			A
0	1	1	1
0	0	1	1
0	0	0	0
0	0	1	0
	B		D

LT

			A
0	0	0	0
1	0	0	0
1	1	0	1
1	1	0	0
	B		D

EQ

			A
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1
	B		D

$$Z1 = (A+B)(A+C')(A+D')(C'+D')(A'+B+C')$$

$$Z2 = (C+D)(A'+C)(B'+C)(A'+B')(A'+C'+D)$$

$$Z3 = (A'+C)(B'+D)(A+C')(B+D')$$

Multiplexer (Sum of Products)

ให้นิสิตสร้างวงจร ที่มี 3 input คือ X0, X1 และ Selector ขนาด 1 Bit และมี 1 output คือ Z ขนาด 1 Bit โดยที่ ค่าของ Z ควบคุมโดย input Selector คือ ถ้า input Selector เป็น 0 ค่าของ Z จะเป็น X0 แต่ถ้า input Selector เป็น 1 ค่าของ Z จะเป็น X1 วงจรนี้เรียกว่า Multiplexer เนื่องจากวงจรเลือก 1 input จาก 2 input จะเรียกสั้นๆว่า MUX 2:1 โดยให้สร้างวงจรโดยใช้สมการบูลีนแบบ Sum of Products

ข้อมูลนำเข้า

- X0 ขนาด 1 Bit
- X1 ขนาด 1 Bit
- Selector ขนาด 1 Bit

ข้อมูลส่งออก

- Z ขนาด 1 Bit

ชุดข้อมูลทดสอบ

- 50% Selector มีค่าเป็น 0
- 50% Selector มีค่าเป็น 1

x0	x1	S	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

		A	
	0	0	1
C	0	1	1
			0
	B		

$$Z = AC' + BC$$

Multiplexer (Product of Sums)

ให้นิสิตสร้างวงจร ที่มี 3 input คือ X0, X1 และ Selector ขนาด 1 Bit และมี 1 output คือ Z ขนาด 1 Bit โดยที่ ค่าของ Z ควบคุมโดย input Selector คือ ถ้า input Selector เป็น 0 ค่าของ Z จะเป็น X0 แต่ถ้า input Selector เป็น 1 ค่าของ Z จะเป็น X1 วงจรนี้เรียกว่า Multiplexer เนื่องจากวงจรเลือก 1 input จาก 2 input จะเรียกสั้นๆว่า MUX 2:1 โดยให้สร้างวงจรโดยใช้สมการบูลีนแบบ **Product of Sums**

ข้อมูลนำเข้า

- X0 ขนาด 1 Bit
- X1 ขนาด 1 Bit
- Selector ขนาด 1 Bit

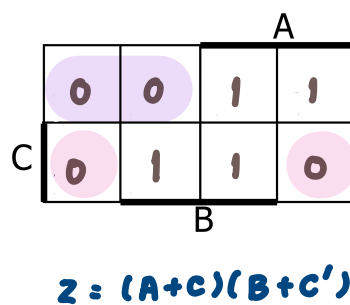
ข้อมูลส่งออก

- Z ขนาด 1 Bit

ชุดข้อมูลทดสอบ

- 50% Selector มีค่าเป็น 0
- 50% Selector มีค่าเป็น 1

X0	X1	S	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1



Mux4:1 (Sum of Products)

ให้นักศึกษาวงจร MUX 4:1 คือวงจรมี 4 input คือ X0, X1, X2 และ X3 ขนาด 1 Bit และมี input ที่ใช้ในการเลือก 2 input คือ S1 S0 ขนาด 1 Bit และ 1 output คือ Z ขนาด 1 Bit โดยค่าที่ออกมาที่ Z จะเป็น input ไตขึ้นกับค่าของ S1 S0 ตามตาราง

S1	S0	Z
0	0	X0
0	1	X1
1	0	X2
1	1	X3

$$S1'S0'X0 + S1'S0X1 + S1S0'X2 + S1S0X3$$

ข้อแนะนำ : ใช้วงจรจากข้อ Multiplexer

ข้อมูลนำเข้า

- X0 ขนาด 1 Bit
- X1 ขนาด 1 Bit
- X2 ขนาด 1 Bit
- X3 ขนาด 1 Bit
- S0 ขนาด 1 Bit
- S1 ขนาด 1 Bit

ข้อมูลส่งออก

- Z ขนาด 1 Bit

ชุดข้อมูลทดสอบ

- 25% S1 มีค่าเป็น 0 และ S2 มีค่าเป็น 0
- 25% S1 มีค่าเป็น 0 และ S2 มีค่าเป็น 1
- 25% S1 มีค่าเป็น 1 และ S2 มีค่าเป็น 0
- 25% S1 มีค่าเป็น 1 และ S2 มีค่าเป็น 1