Matrični zapis stanja i operatora

Kvantna računala (SI)

23. listopada 2020.

Vektori, dualni vektori i skalarni produkt ($N = 2$)

Vektore ortonormirane baze $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ u $\mathcal{H}^{(2)}$ prikazujemo vektor-stupcima

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Općeniti vektor je tada

$$|\Phi\rangle = \lambda|0\rangle + \mu|1\rangle = \boxed{\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{C},$$

a odgovarajući dualni vektor (bra-simbol) prikazuje se vektor-retkom

$$\langle\Phi| = \lambda^*\langle 0| + \mu^*\langle 1| = \boxed{\begin{pmatrix} \lambda^* & \mu^* \end{pmatrix}}.$$

Skalarni produkt vektora

$$|\Phi\rangle = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \nu \\ \sigma \end{pmatrix}$$

može se izračunati *unutarnjim množenjem* vektor-retka koji prikazuje dualni vektor $\langle\Psi|$ i vektor-stupca koji prikazuje vektor $|\Phi\rangle$

$$\langle\Psi|\Phi\rangle = \begin{pmatrix} \nu^* & \sigma^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \nu^*\lambda + \sigma^*\mu.$$

Primjer: Projekcija $|\Phi\rangle$ na $|\Psi\rangle$:

$$|\Psi\rangle \langle\Psi|\Phi\rangle = \begin{pmatrix} \nu \\ \sigma \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \nu^* & \sigma^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \nu \\ \sigma \end{pmatrix} (\nu^*\lambda + \sigma^*\mu)$$
$$= \begin{pmatrix} |\nu|^2\lambda + \nu\sigma^*\mu \\ \sigma\nu^*\lambda + |\sigma|^2\mu \end{pmatrix}$$

Operator projekcije ($N = 2$)

Neka su

$$|\Phi\rangle = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \nu \\ \sigma \end{pmatrix}$$

vektori. Operator projekcije na stanje prikazano vektorom $|\Psi\rangle$ prikazuje se matricom koju dobivamo tzv. *vanjskim množenjem* vektora-stupca i vektora-retka kojima prikazujemo $|\Psi\rangle$ i $\langle\Psi|$,

$$\mathcal{P}_\Psi = |\Psi\rangle \langle\Psi| = \begin{pmatrix} \nu \\ \sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu^* & \sigma^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\nu|^2 & \nu\sigma^* \\ \sigma\nu^* & |\sigma|^2 \end{pmatrix}$$

Projekciju vektora $|\Phi\rangle$ na vektor $|\Psi\rangle$ dobivamo množenjem matrice i vektora:

$$\mathcal{P}_\Psi |\Phi\rangle = \begin{pmatrix} |\nu|^2 & \nu\sigma^* \\ \sigma\nu^* & |\sigma|^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\nu|^2\lambda + \nu\sigma^*\mu \\ \sigma\nu^*\lambda + |\sigma|^2\mu \end{pmatrix}$$

Primjer: Projektori na bazna stanja $|0\rangle$ i $|1\rangle$:

$$\mathcal{P}_0 = |0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_1 = |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zbroj projektora daje operator identiteta:

$$\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Primjer: Stanje desne kružne polarizacije fotona i projektor na to stanje (koristimo $|x\rangle = |0\rangle$, $|y\rangle = |1\rangle$):

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + \mathrm{i}\,|y\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_R = |R\rangle\langle R| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1\end{pmatrix}$$

Stanje lijeve kružne polarizacije i projektor na to stanje:

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - \mathrm{i}\,|y\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_L = |L\rangle\langle L| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 1\end{pmatrix}$$

Uočava se $\mathcal{P}_R + \mathcal{P}_L = I$.

Hermitski operator i hermitsko konjugiranje

Koristimo li u $\mathcal{H}^{(N)}$ bazu $\{|n\rangle\,; n = 1, \ldots, N\}$, vektor stanja $|n\rangle$ dogovorno prikazujemo vektor-stupcem koji svuda ima nule osim na n-tom mjestu odozgo gdje ima jedinicu. j-ti element tog vektor-stupca možemo izraziti kao

Kroneckerov simbol:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{za } i = j \\ 0 & \text{za } i \neq j \end{cases}$$

$$(|n\rangle)_j = \delta_{jn}.$$

Primjer: $N = 4$

Baza $= \{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\}$

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots$$

Dualni vektor (bra) prikazujemo vektor-retkom $(\langle m|)_i = \delta_{mi}$.

Ako je M općenit operator u $\mathcal{H}^{(N)}$, element u m-tom retku i n-tom stupcu matričnog prikaza tog operatora se može izraziti kao

$$M_{mn} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \delta_{mi}\, M_{ij}\, \delta_{jn} = \langle m|\, M\, |n\rangle\,.$$

Neka je

$$M = \sum_{n=1}^{N} a_n |n\rangle \langle n| , \qquad a_n \in \mathbb{R},$$

Hermitski operator. U bazi $\{|n\rangle ; n = 1, \ldots , N\}$ taj je operator prikazan diagonalnom matricom pri čemu se elementi na dijagonali podudaraju sa svojstvenim vrijednostima operatora,

$$M_{mn} = \langle m| M |n\rangle = a_m \delta_{mn}.$$

$$M_{mn} = \langle m| \left(\sum_{i=1}^{N} a_i |i\rangle\langle i| \right) |n\rangle = \sum_{i=1}^{N} a_i \underbrace{\langle m|i\rangle}_{\delta_{mi}} \underbrace{\langle i|n\rangle}_{\delta_{in}}$$

$$\delta_{mn}$$

$$= a_n \delta_{mn}$$

U općenitoj bazi $\{|\alpha\rangle, \alpha = 1, \ldots, N\}$ čiji se vektori ne podudaraju sa svojstvenim vektorima hermitskog operatora M, elementi matrice kojom prikazujemo taj operator imaju svojstvo

$$M_{\alpha\beta} = \langle\alpha| M |\beta\rangle = \sum_{n=1}^{N} a_n \langle\alpha|n\rangle \langle n|\beta\rangle = \sum_{n=1}^{N} a_n \langle\beta|n\rangle^* \langle n|\alpha\rangle^*$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{N} a_n \langle\beta|n\rangle \langle n|\alpha\rangle \right)^* = \langle\beta| M |\alpha\rangle^* = (M_{\beta\alpha})^*.$$

To znači da matrica koja prikazuje hermitski operator ostaje nepromijenjena ako ju transponiramo i kompleksno konjugiramo.

Hermitsko konjugiranje matrice

Hermitsko konjugiranje matrice jest transformacija koja se sastoji od kompleksne konjugacije i transpozicije matrice (redoslijed opracija kompleksne konjugacije i transpozicije nije od važnosti). Hermitsko konjugiranje matrice M obilježavamo simbolom $\dagger$ ("bodež"),

$$M^{\dagger} = (M^*)^T = (M^T)^*,$$

dok za komponente matrice vrijedi $\left(M^{\dagger}\right)_{ij} = \left(M^*\right)_{ji} = \left((M)_{ji}\right)^*$.

Matrični prikaz hermitskog operatora

Matrični prikaz hermitskog operatora M invarijantan je na operaciju hermitskog konjugiranja,

$$M^{\dagger} = M \qquad \text{(hermitski operator).}$$