Zavod za telekomunikacije

Osnove virtualnih okruženja

Igor S. Pandžić, Krešimir Matković,
Aleksandra Čereković

Geometrijske transformacije

Geometrijske transformacije

- Transformiraju točke, predmete ili koordinatne sustave
- Temeljna, nezaobilazna operacija u 3D grafici
  - Iscrtavanje (npr. transf. u k.s. kamere, projekcija)
  - Organizacija scene u hijerarhijski graf
  - Animacija
  - Specijalni efekti, itd.
- Standardiziran način korištenja transformacija pomoću matrica transformacije
  - Homogene koordinate – matrice 4 x 4

Pregled predavanja

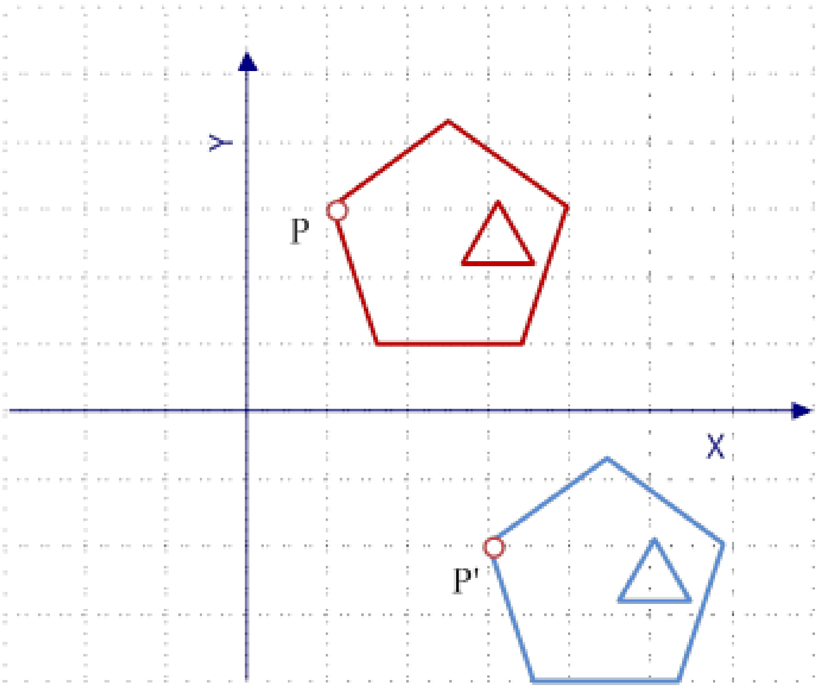
- Osnovne 2D geometrijske transformacije
  - Translacija
  - Rotacija
  - Promjena veličine (skaliranje)
  - Smik
- Homogene koordinate
- Osnovne 3D geometrijske transformacije
- Matrica kao koordinatni sustav
- Prikazi rotacije
  - Eulerovi kutovi
  - Quaternion
- Projekcija

Osnovne 2D transformacije - translacija

Zavod za telekomunikacije

- Translacija točke P za vektor T

$$P = [P_x \quad P_y] \quad \rightarrow \quad P^{'} = [P_x + T_x \quad P_y + T_y]$$



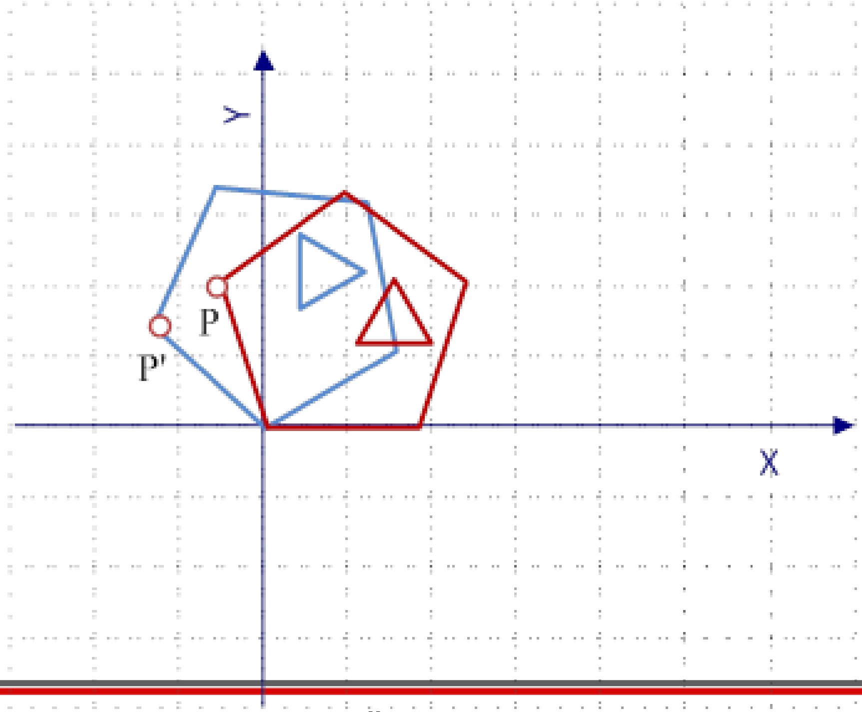
Osnovne 2D transformacije - rotacija

- Rotacija točke P oko centra koordinatnog sustava za kut α

$$P = \left[P_x \quad P_y\right] \rightarrow P' = [P_x \cos\alpha + P_y \sin\alpha \quad -P_x \sin\alpha + Py \cos\alpha]$$

- Matrični oblik

$$P' = PR = P\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$



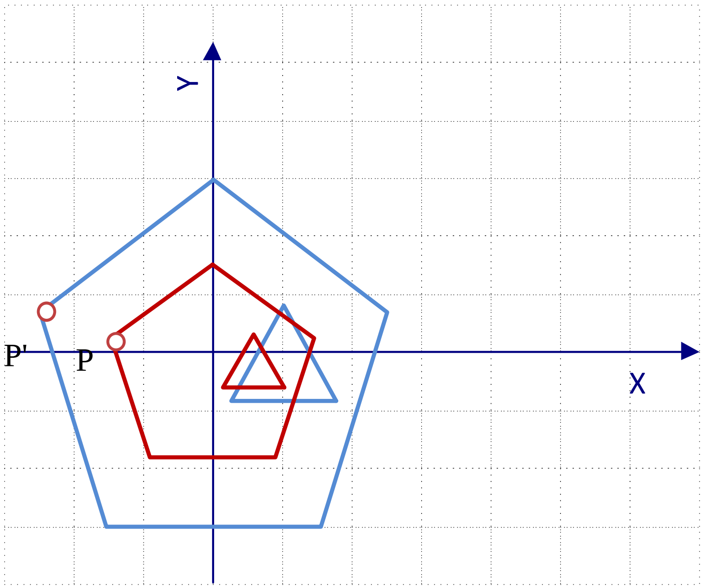
Osnovne 2D transformacije - promjena veličine

- Promjena veličine objekta (ili skaliranje) faktorom S transformira točku P objekta u točku P’

$$P = [P_x \quad P_y] \quad \rightarrow \quad P' = [S_x T_x \quad S_y T_y]$$

- Matrični oblik

$$P' = PS = P \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix}$$



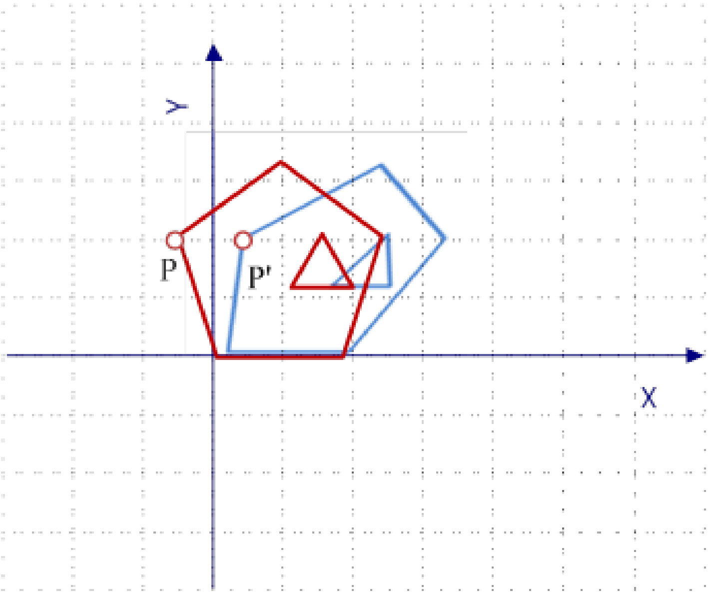
Osnovne 2D transformacije - smik

- Smik objekta po x-osi u ovisnosti o faktoru *kx*

$$P = [P_x \quad P_y] \rightarrow P' = [P_x + k_x P_y \quad P_y]$$

- Matrični oblik

$$P' = PS_{hx} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_x & 1 \end{bmatrix}$$



Kombinacije 2D transformacija

- Osnovne 2D geometrijske transformacije se mogu prikazati u formi umnoška točke sa 2x2 matricom osim translacije
- Kombinacije transformacija
  - Primjer $P' = (PS)R = P(SR)$, skaliranje i rotacija
  - Važno ako se ista transformacija vrši na velikom broju točaka

Homogene koordinate

Zavod za telekomunikacije

- 2D: $P = \begin{bmatrix} \dfrac{P_{hx}}{w} & \dfrac{P_{hy}}{w} \end{bmatrix} \rightarrow P_h = [P_{hx} \;\; P_{hy} \;\; w]$

  $w = 1, \quad P = [P_x \quad P_y\,] \rightarrow P_h = [P_{hx} \;\; P_{hy} \;\; 1]$

- 3D: $P = \begin{bmatrix} \dfrac{P_{hx}}{w} & \dfrac{P_{hy}}{w} & \dfrac{P_{hz}}{w} \end{bmatrix} \rightarrow P_h = [P_{hx} \;\; P_{hy} \;\; P_{hz} \; w]$

  $w = 1, \quad P = [P_x \quad P_y \quad P_z\,] \rightarrow P_h = [P_{hx} \;\; P_{hy} \;\; P_{hz} \;\; 1]$

- Sve 3D transformacije se izražavaju homogenim matricama (4x4)
  - Translacija se svodi na množenje točke matricom
  - Sve transformacije se vrše na jednak način
  - Transformacije se jednostavno kombiniraju množenjem matrica

2D transformacije u homogenim koordinatama

- Translacija točke P za vektor T:

$$P^{'} = PT = P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix}$$

- Rotacija točke P oko centra koordinatnog sustava za kut α

$$P^{'} = PR = P\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2D transformacije u homogenim koordinatama

Zavod za telekomunikacije

- Promjena veličine objekta (skaliranje) faktorom S pomiče točku P objekta

$$P' = PS = P\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Smik objekta paralelno sa x-osi u ovisnosti o faktoru k

$$P' = PS_{hx} = P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kombinacije 2D transformacija u homogenim koordinatama (1)

- Pomoću homogenih kooridnata svaka proizvoljna kombinacija transformacija može se prikazati jednom matricom
- Primjer

$$P' = PT_1$$

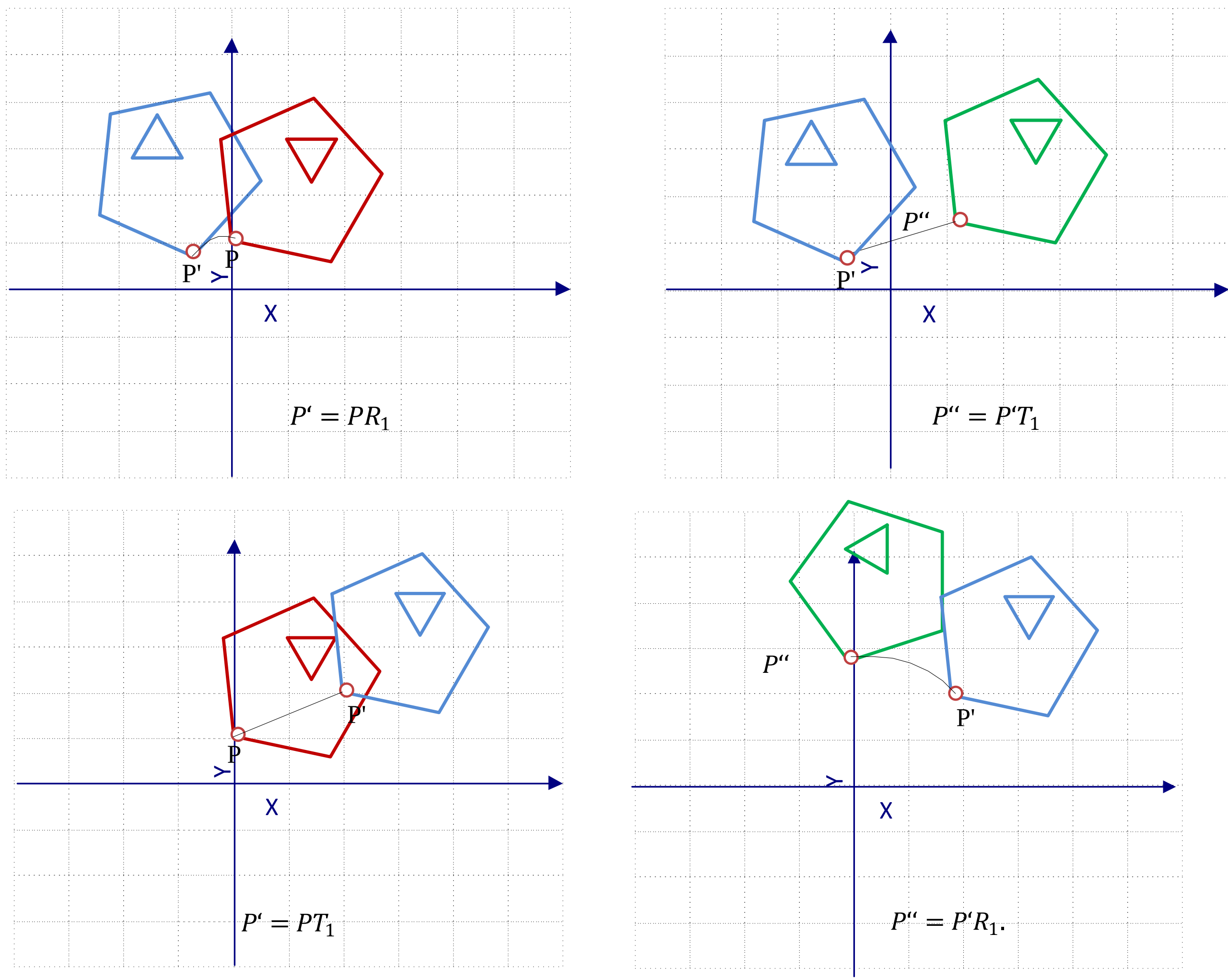
$$P'' = P'R_1 = PT_1R_1 = P(T_1R_1) = PT$$

Kombinacije 2D transformacija u homogenim koordinatama (2)

Zavod za telekomunikacije

- Množenje matrica nije komutativno!

$$T_1 R_1 \neq R_1 T_1$$



Osnovne 3D transformacije - translacija

- Translacija 3D točke za vrijednosti $[T_x \;\; T_y \;\; T_z]$ se izražava matricom:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{bmatrix}$$

- Množenjem točke P matricom T dobivamo translatiranu točku P’, zapisanu u homogenim koordinatama

$$P' = PT = [P_x \;\; P_y \;\; P_z \;\; 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{bmatrix} = [P_x + T_x \;\; P_y + T_y \;\; P_z + T_z \;\; 1]$$

Osnovne 3D transformacije - rotacija

Zavod za telekomunikacije

- Oko osi x

$$P^{'} = PR_x = [P_x \;\; P_y \;\; P_z \;\; 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Oko osi y

$$P^{'} = PR_y = [P_x \;\; P_y \;\; P_z \;\; 1]\begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R_y = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Oko osi z

$$P^{'} = PR_z = [P_x \;\; P_y \;\; P_z \;\; 1]\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R_z = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Osnovne 3D transformacije – promjena veličine

- Promjena veličine 3D objekta se izražava sljedećom matricom S:

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Točka P 3D objekta nad kojim se vrši promjena veličine se preslikava u točku P':

$$P' = PS = [P_x \;\; P_y \;\; P_z \;\; 1] \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [P_x S_x \;\; P_y S_y \;\; P_z S_z \;\; 1]$$

Osnovne 3D transformacije – smik

Zavod za telekomunikacije

- Smik 3D objekta po x-y ravnini u ovisnosti o faktorima kxz i kyz

$$P^{'} = PS_{hxy} = [P_x \;\; P_y \;\; P_z \;\; 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_x^z & k_y^z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S_{hxy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_x^z & k_y^z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Smik 3D objekta po x-z ravnini u ovisnosti o faktorima kxy i kzy

$$P^{'} = PS_{hxz} = [P_x \;\; P_y \;\; P_z \;\; 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_x^y & 1 & k_z^y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S_{hxz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_x^y & 1 & k_z^y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Smik 3D objekta po y-z ravnini u ovisnosti o faktorima kyx i kzx

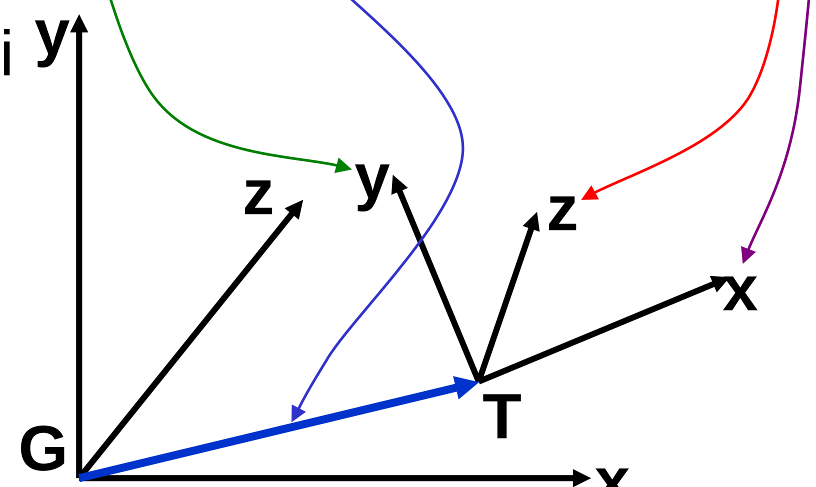
$$P^{'} = PS_{hyz} = [P_x \;\; P_y \;\; P_z \;\; 1]\begin{bmatrix} 1 & k_y^x & k_z^x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S_{hyz} = \begin{bmatrix} 1 & k_y^x & k_z^x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 3D smik $S_h = \begin{bmatrix} 1 & k_y^x & k_z^x & 0 \\ k_x^y & 1 & k_z^y & 0 \\ k_x^z & k_y^z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matrica kao koordinatni sustav (1/2)

- Matrica T definira lokalni koord. sustav
  - Prva tri reda su ortonormalni vektori koji čine osi novog sustava
  - Zadnji red je translacija sustava u odnosu na globalni sustav G

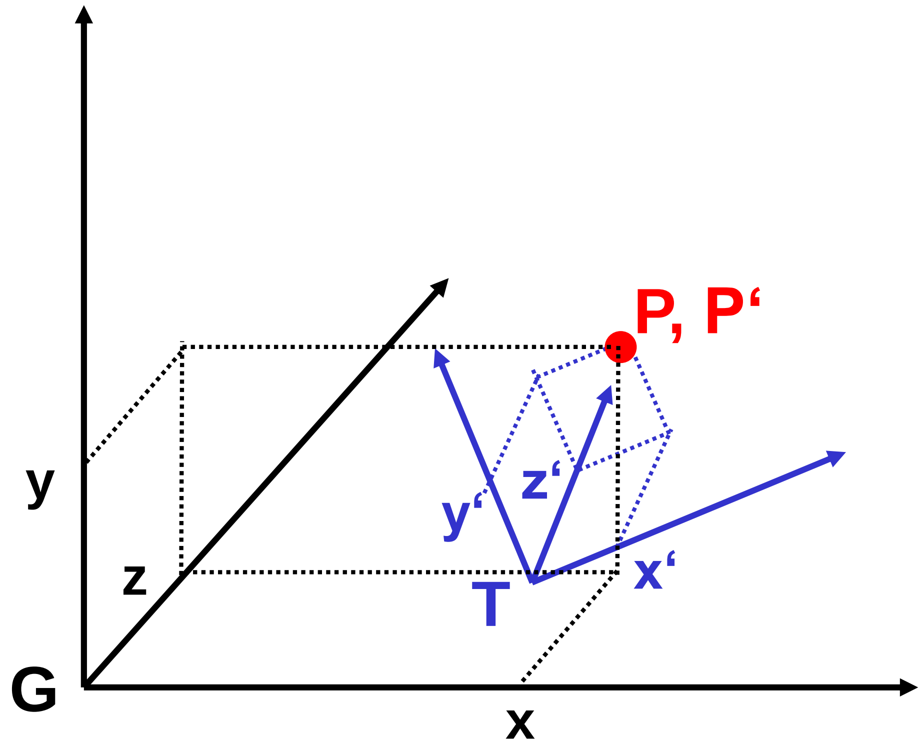
$$T = \begin{bmatrix} \boxed{Xx \quad Xy \quad Xz} & 0 \\ \boxed{Yx \quad Yy \quad Yz} & 0 \\ \boxed{Zx \quad Zy \quad Zz} & 0 \\ \boxed{Tx \quad Ty \quad Tz} & 1 \end{bmatrix}$$



Matrica kao koordinatni sustav (2/2)

Zavod za telekomunikacije

- U sustavu T: P'=[x' y' z' 1]
- U sustavu G: P = [x y z 1]
- P=P'T
- P'=PT^{-1}

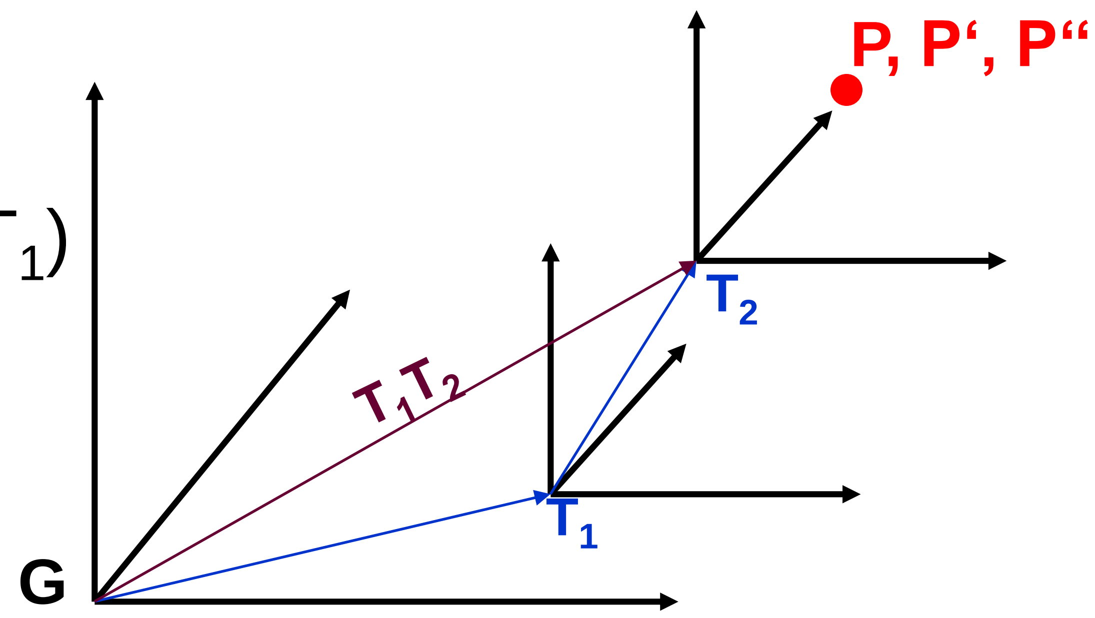


Kombinacije transformacija koord. sustava

Zavod za telekomunikacije

- U sustavu T_1: $P' = [x' \; y' \; z' \; 1]$
- U sustavu T_2: $P'' = [x'' \; y'' \; z'' \; 1]$
- U sustavu G: $P = [x \; y \; z \; 1]$
- $P = P' T_1$
- $P' = P'' T_2$
- $P = P'' T_2 T_1 = P''(T_2 T_1)$
- $P'' = P \, T_1^{-1} T_2^{-1}$

  $= P(T_2 T_1)^{-1}$



Prikaz rotacije

- Osnovne rotacije oko 3 glavne osi
  - Jednostavno, ali ograničena korisnost
- Rotacija oko općenite osi
- Eulerovi kutevi
- Quaternioni

Rotacija oko proizvoljne osi ***r*** za kut ϕ

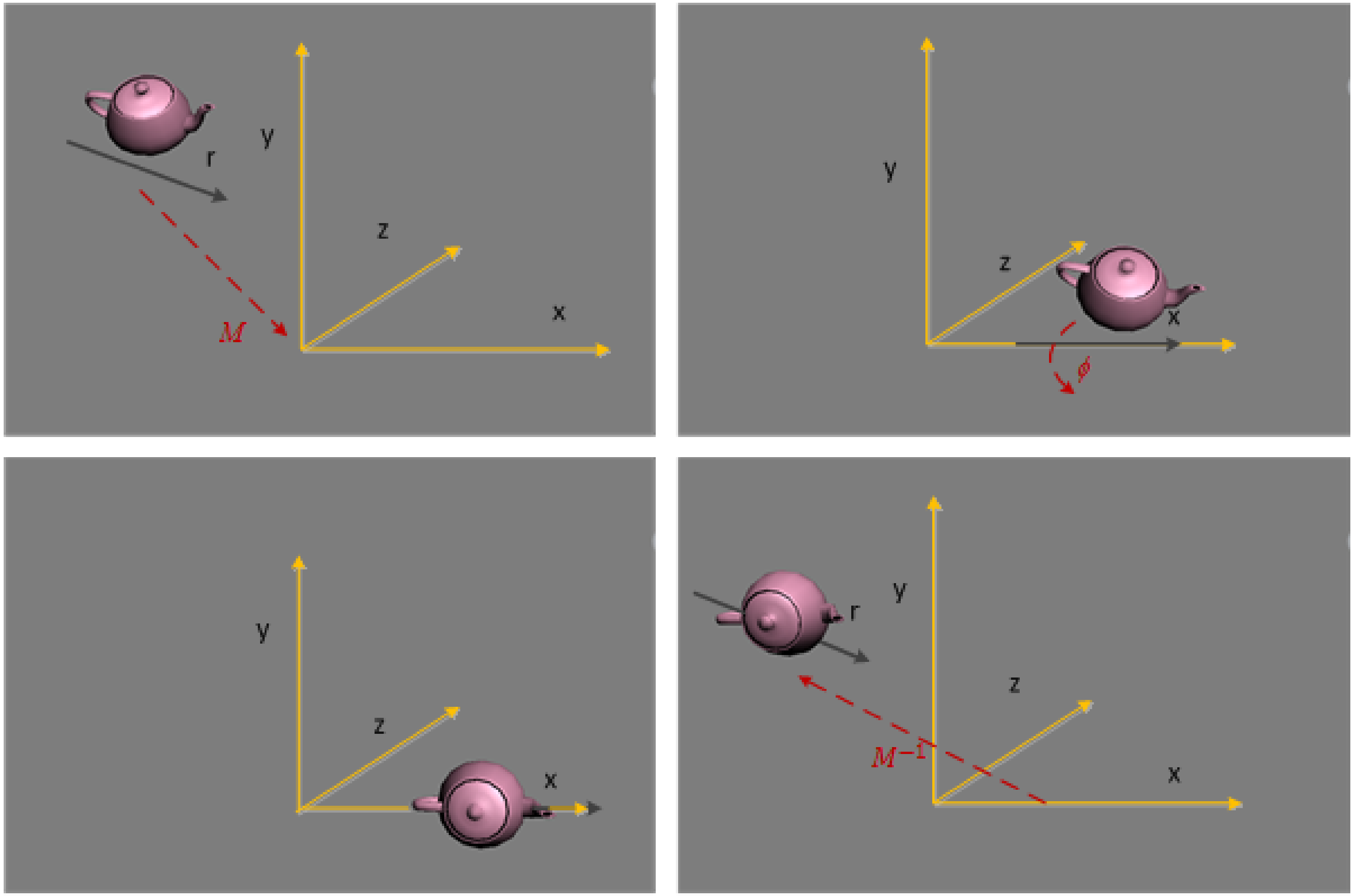
- Ideja: transformirati os ***r*** na os x, rotirati za kut ϕ, vratiti natrag inverznom transformacijom
- Naći transformaciju M koja će ***r*** dovesti u os x
- Ukupna transformacija:

$$R_{r,\,\phi} = MRx(\phi)M^{-1} = MRx(\phi)M^{T}$$

- Jednostavno poopćenje za os izvan ishodišta

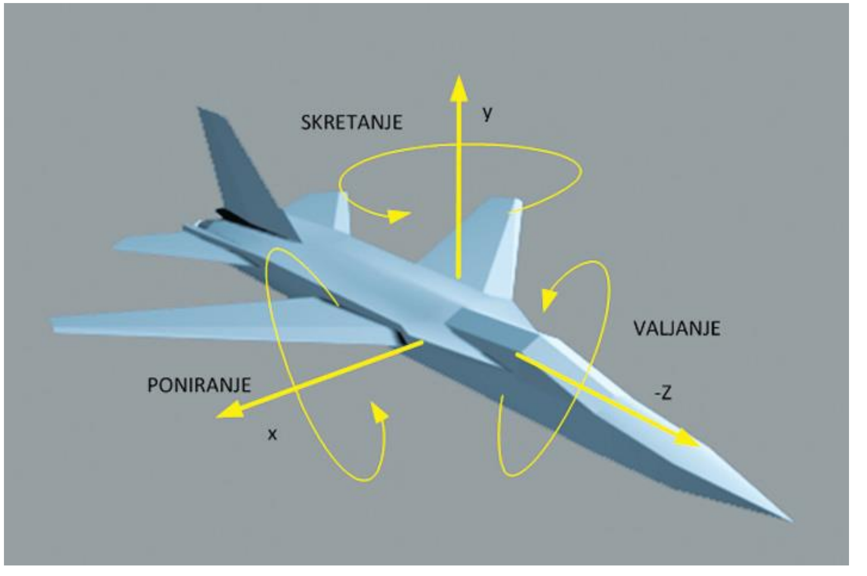
Rotacija oko proizvoljne osi *r* za kut ϕ

Zavod za telekomunikacije



Eulerovi kutovi (1/2)

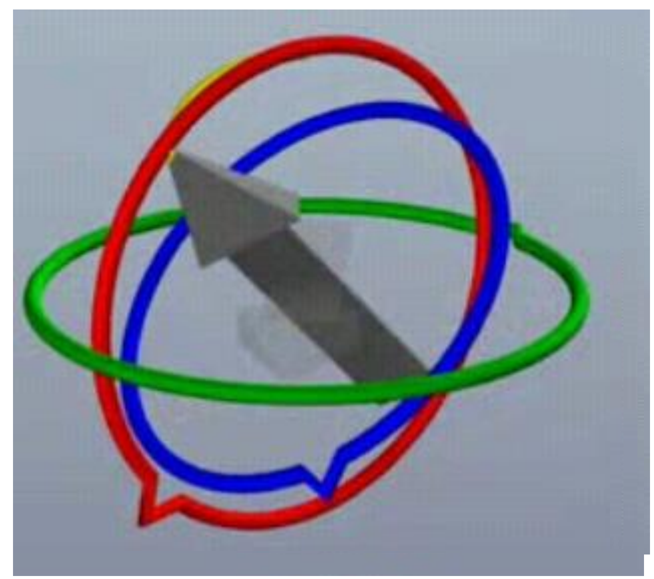
- Način prikaza općenite rotacije pomoću rotacija oko 3 osi s definiranim redoslijedom
  - $R = Rz(r)\ Rx(p)\ Ry(h)$
    - h = head, smjer
    - p = pitch (nagib, elevacija)
    - r = roll (okret)
- Svaka od rotacija se vrši u lokalnom k.s.!!!



Eulerovi kutovi (2/2)

Zavod za telekomunikacije

- Često se koriste radi jednostavnosti i intuitivnosti, no ima problema:
- „Gimbal lock“ (doslovno: blokada kardana)
  - Gubi se stupanj slobode kada je p = +/-90°
- Interpolacija je problematična
  - Najpoželjnija – interpolacija po najkraćem luku



Quaternion

Zavod za telekomunikacije

- Kompaktan i efikasan način za prikazivanje i baratanje rotacijama
- U matematici: proširenje kompleksnih brojeva

$$\hat{q} = (q_{v,} q_{w}) = (q_{x,} q_{y,} q_{z,} q_{w}) = iq_{x} + jq_{y} + kq_{x} + q_{w}$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$jk = -kj = i$$

$$ki = -ik = j$$

$$ij = -ji = k$$

Prikaz rotacije pomoću quaterniona

$$\hat{q} = (u_q \sin\phi, \cos\phi)$$ Zapis rotacije quaternionom

$$\hat{p} = (p_x, p_y, p_z, 1)$$ Zapis točke p quaternionom

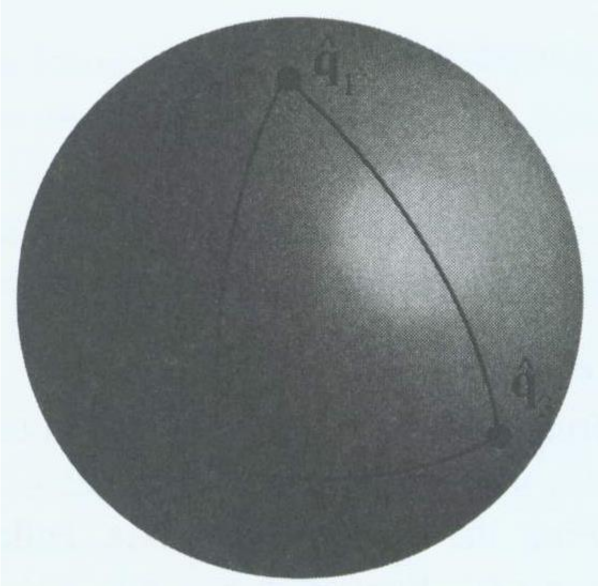
- u_q je jedinični vektor; p je točka u prostoru
- Izraz $\hat{q}\hat{p}\hat{q}^{-1}$ rotira točku p oko osi u_q za kut 2ϕ
- Množenjem quaterniona dodajemo rotacije
  - Množenje quaterniona je jednostavnije od matrica
- Postoje pretvorbe matrica-quaternion i natrag

Interpolacija orijentacije quaternionima

- Interpolacija po najkraćem luku konstantnom brzinom
- Interpolacija parametrom t $\hat{r} \rightarrow \hat{q}, t \in [0,1]$
- Sferna linearna interpolacija (spherical linear interpolation – slerp)

$$slerp(\hat{r}, \hat{q}, t) = \frac{\sin(\phi(1-t))}{\sin\phi}\hat{q} + \frac{\sin(\phi t)}{\sin\phi}\hat{r}$$

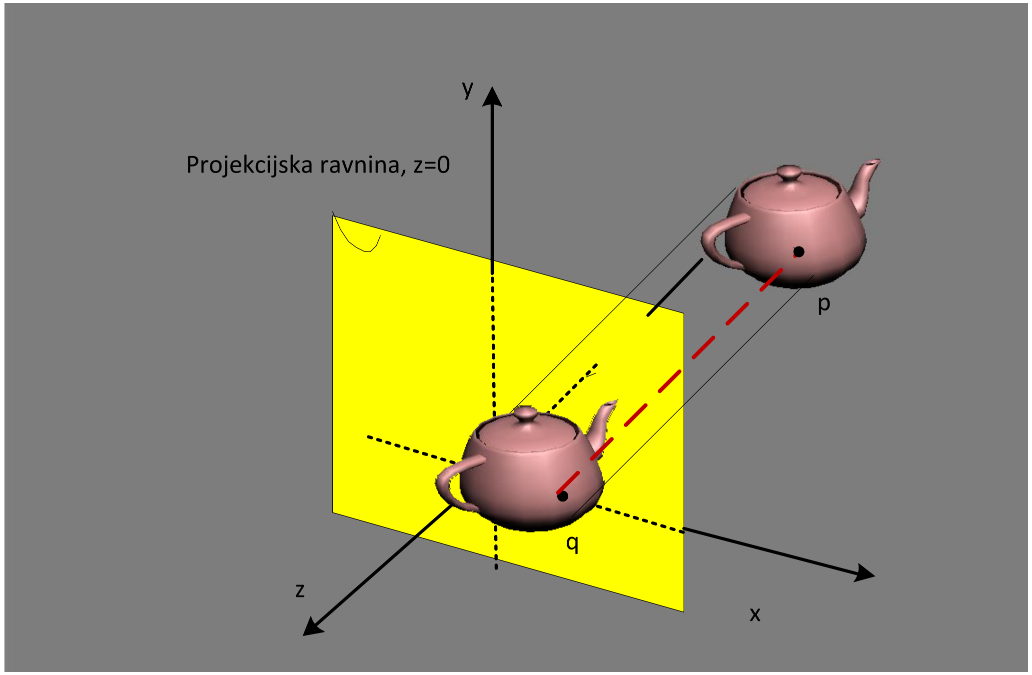
$$\cos\phi = q_x r_x + q_y r_y + q_z r_z + q_w r_w$$



Projekcija

- Ortografska projekcija na ravninu z=0
  - Postavlja z koordinate na 0

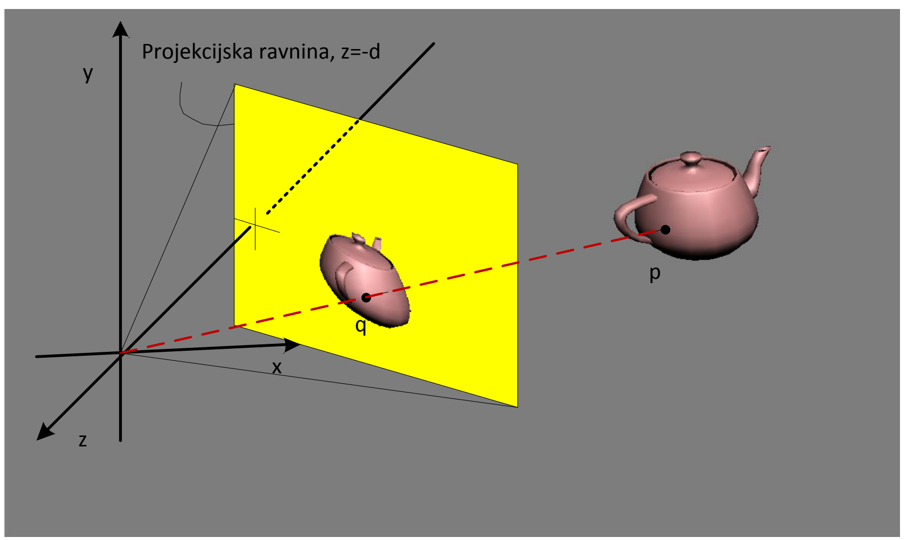
$$P_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

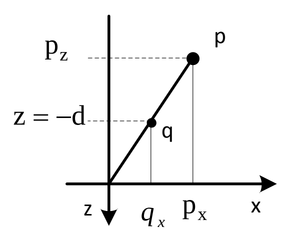


Projekcija

- Perspektivna projekcija na ravninu z=-d

$$P_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





$$\frac{q_x}{p_x} = \frac{-d}{p_z} \Rightarrow q_x = -d\,\frac{p_x}{p_z}$$

$$q = \begin{bmatrix} -d\,\frac{p_x}{p_z} & -d\,\frac{p_y}{p_z} & -d & 1 \end{bmatrix}$$

Zaključno o transformacijama

- Ovo su osnovni alati
- Ovdje je dan vrlo kratak pregled
- Za matrice, quaternione (i gomile drugih stvari) puno materijala u knjigama i na web-u
  - Postoje slobodni programi s izvornim kodom i objašnjenjima
- Programska sučelja više razine imaju ugrađene funkcije za matrice i quaternione