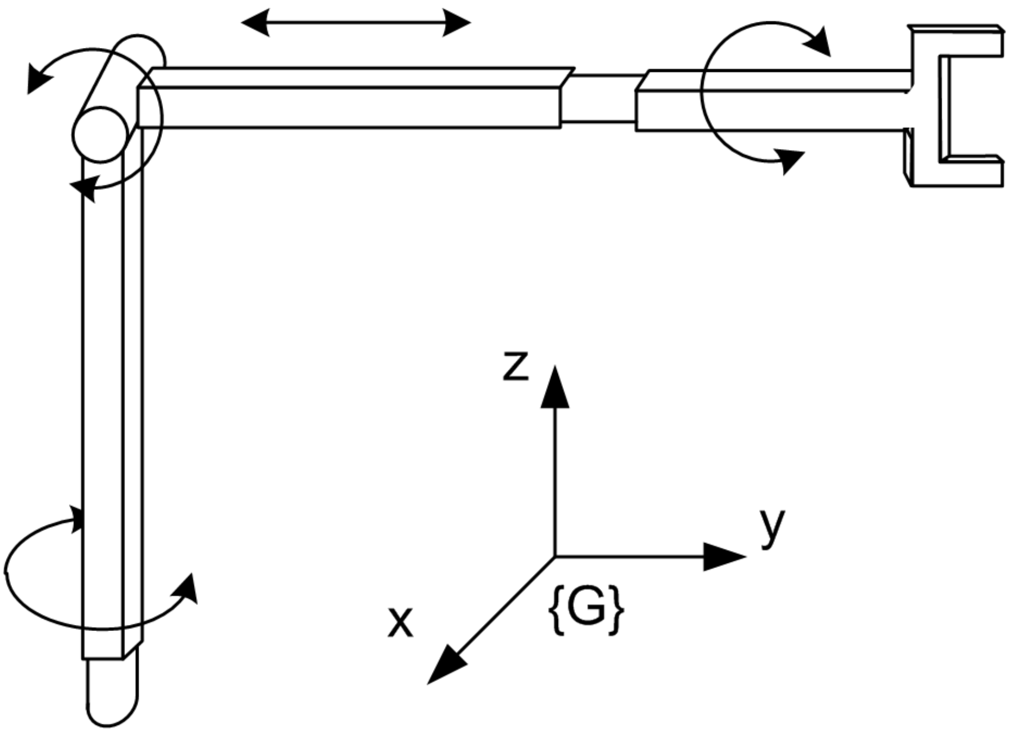
MIHA THE MIGHTY 1.D_AUT AUTOMATIKA	FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA ZAGREB ZAVOD ZA AUTOMATIKU I RAČUNALNO INŽENJERSTVO	6.11.2012.
	Osnove robotike	
	Domaća zadaća br. I & II, grupa C: Direktna i inverzna kinematika manipulatora	

1. Domaća zadaća

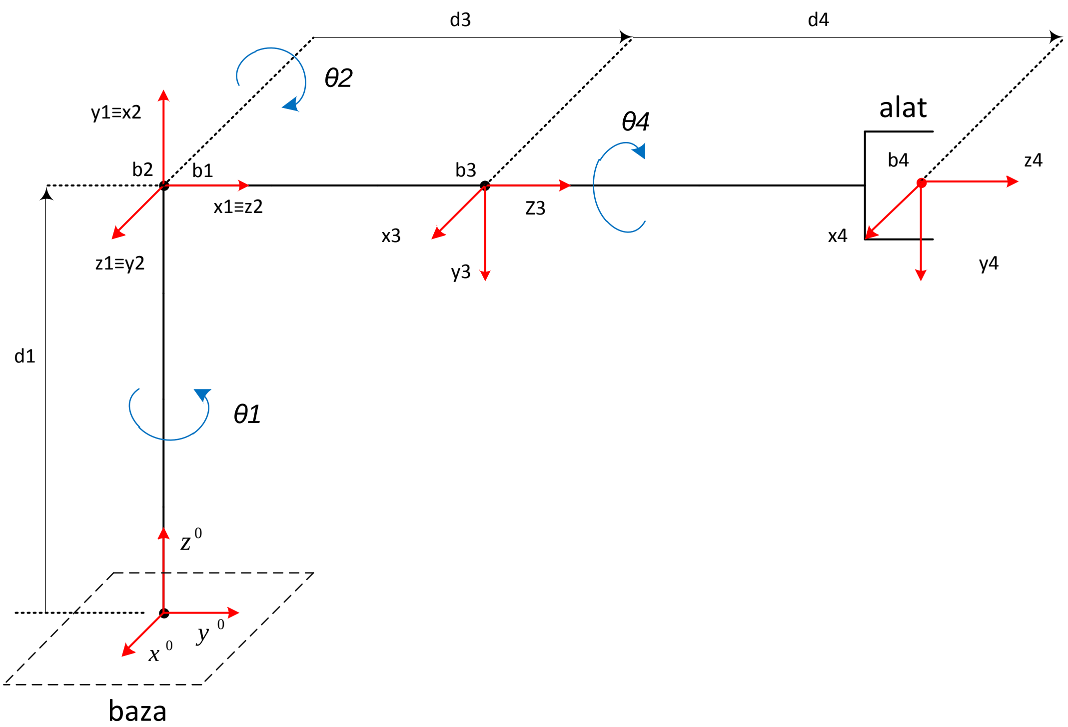


Slika 1. Sferna konfiguracija manipulatora

Za otvoreni kinematički lanac prikazan Slikom 1 potrebno je:

1. odrediti DH parametre,
2. odrediti matrice transformacija između susjednih koordinatnih sustava,
3. odrediti matricu transformacije između koordinatnog sustava pridruženog vrhu alata i koordinatnog sustava baze (matričnu jednadžbu manipulatora),
4. navesti početne vrijednosti varijabli zglobova q koje odgovaraju položaju robota prikazanom na Slici 1.

Korištenjem Denavit – Hartenbergove metode (kraće DH metoda) [1] dobivamo Sliku 2 na kojoj imamo označene sve koordinatne sustave i parametre zadanog manipulatora.



Slika 2. Koordinatni sustavi manipulatora danog Slikom 1

Također, korištenjem DH metode dolazimo do kinematičkih parametara manipulatora:

	θ_k	d_k	a_k	α_k
1. os	q_1	d_1	0	$\frac{\pi}{2}$
2. os	q_2	0	0	$\frac{\pi}{2}$
3. os	$\frac{\pi}{2}$	q_3	0	0
4. os	q_4	d_4	0	0

Tablica 1. Kinematički parametri manipulatora

Općenito, matrica homogene transformacije povezuje koordinatni sustav k s prethodnim koordinatnim sustavom k-1 u lancu. U samom zapisu matrice homogene transformacije koristimo pokrate $S := sin$ i $C := cos$. Općenit zapis matice homogene transformacije dan je izrazom (1-1) [1]:

$$T_{k-1}^{k} = \begin{bmatrix} C\theta_k & -C\alpha_k S\theta_k & S\alpha_k S\theta_k & a_k C\theta_k \\ S\theta_k & C\alpha_k S\theta_k & -S\alpha_k S\theta_k & a_k S\theta_k \\ 0 & S\alpha_k & C\alpha_k & d_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1-1}$$

Uvrštavanjem parametara danih Tablicom 1 u opću matricu homogene transformacije danu izrazom (1-1) dobivamo iduće matrice (koristimo pokrate $S_k := \sin q_k$ i $C_k := \cos q_k$):

$$\boldsymbol{T}_0^1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{T}_0^1 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}_0^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{T}_0^1 = \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & 0 \\ S_4 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1-2}$$

Jednadžba manipulatora zapisana u matričnom obliku dobiva se umnoškom matrica homogene transformacije (1-2) na idući način:

$$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{baza}}^{\boldsymbol{alat}} = \boldsymbol{T}_0^4(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{T}_0^1(q_1) \cdot \boldsymbol{T}_1^2(q_2) \cdot \boldsymbol{T}_2^3(q_3) \cdot \boldsymbol{T}_3^4(q_4) \tag{1-3}$$

Uvrštavanjem matrica danih u (1-2) u jednadžbu (1-3) dobivamo iduću jednadžbu manipulatora zapisanu u matričnom obliku (množenje matrica homogene transformacije je napravljeno u Matlab programskom okruženju – pogledati prilog A, koristimo iste pokrate kao i ranije $S_k := \sin q_k$ i $C_k := \cos q_k$):

$$\boldsymbol{T}_0^4 = \begin{bmatrix} C_4S_1 - C_1C_2S_4 & -S_1S_4 - C_1C_2C_4 & C_1S_2 & C_1S_2 \cdot (d_4 + q_3) \\ -C_1C_4 - C_2S_1S_4 & C_1S_4 - C_2C_4S_1 & S_1S_2 & S_1S_2 \cdot (d_4 + q_3) \\ -S_2S_4 & -C_4S_2 & -C_2 & d_1 - d_4C_2 - q_3C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1-3}$$

Matrica $\boldsymbol{T}_0^4$ je oblika [1]:

$$\boldsymbol{T}_{baza}^{alat} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{q}) & \boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}) \\ v_1^T & 1 \end{bmatrix} \tag{1-4}$$

gdje je vektor $v_1^T = [0\ 0\ 0]$, matrica $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q})$ ima dimenzije 3 × 3 i određuje orijentaciju alata i vektor $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q})$ čije su dimenzije 3 × 1 i definira položaj vrha alata, odnosno koordinate vrha alata u odnosu prema koordinatnom sustavu baze [1]. Iz izraza (1-3) i (1-4) slijedi da je $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q})$ jednak:

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}) = [C_1S_2 \cdot (d_4 + q_3), S_1S_2 \cdot (d_4 + q_3), d_1 - d_4C_2 - q_3C_2]^T \tag{1-5}$$

Sa Slike 1 vidi se da su koordinate vrha alata jednake

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q_0}) = \left[0, q_{3,0} + d_4, d_1\right]^T$$

odnosno za proračun početnih vrijednosti varijabli zglobova imamo idući sustav jednadžbi:

$$\begin{gathered} C_1S_2 \cdot (d_4 + q_3) = 0\ , \\ S_1S_2 \cdot (d_4 + q_3) = q_{3,0}\ , \\ d_1 - d_4C_2 - q_3C_2 = d_1\ . \end{gathered} \tag{1-6}$$

Rješavanjem sustava jednadžbi (1-6) dobije se su početni uvjeti jednaki:

$$q = \left[\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ q_{3,0},\ 0\right] \tag{1-7}$$

gdje je $q_{3,0}$ proizvoljna početna vrijednost translacijskog zgloba.

2. Domaća zadaća

Na temelju matrične jednadžbe manipulatora određene u 1. domaćoj zadaći, riješite inverzni kinematički problem za otvoreni kinematički lanac prikazan Slikom 1. Pri rješavanju obratite pažnju na potencijalne višeznačnosti i singularitete u rješenjima.

Početak rješavanja svakog inverznog kinematičkog problema je definiranje i određivanje vektora **w.** Definiramo ga na idući način [1]:

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} \\ e^{\frac{q_4}{\pi}} \boldsymbol{r}^3 \end{bmatrix} \tag{2-1}$$

gdje je vektor $\boldsymbol{p}$ dimenzija 3×1 te definira položaj vrha alata, vektor $\boldsymbol{r^3}$ treći stupac matrice rotacije $\boldsymbol{R}$. Konkretno, iz (1-3) dobivamo vektor $\boldsymbol{w}$:

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} C_1 S_2 (d_4 + q_3) \\ S_1 S_2 \cdot (d_4 + q_3) \\ d_1 - C_2 (d_4 + q_3) \\ C_1 S_2 e^{\frac{q_4}{\pi}} \\ S_1 S_2 e^{\frac{q_4}{\pi}} \\ -C_2 e^{\frac{q_4}{\pi}} \end{bmatrix} \tag{2-2}$$

Nakon što imamo definiran vektor $\boldsymbol{w}$ možemo krenuti s rješavanjem. Prva star koja se može uočiti je da se komponente w_1 i w_2 danog vektora razlikuju samo u jednom elementu. Dijeljenjem komponente vektora w_2 s komponentom w_1 dobivamo $\tan q_1$, te korištenjem funkcije $atan2(y, x)$ dobivamo izraz za q_1:

$$q_1 = atan2(w_2, w_1) \tag{2-3}$$

Varijablu q_4 određujemo iz sume kvadrata komponenti w_4 , w_5 i w_6 :

$$w_4^2 + w_5^2 + w_6^2 = e^{\frac{2q_4}{\pi}}$$

$$\ln(w_4^2 + w_5^2 + w_6^2) = \frac{2q_4}{\pi}$$

$$q_4 = \frac{\pi}{2} \cdot \ln(w_4^2 + w_5^2 + w_6^2) \tag{2-4}$$

Varijablu q_2 dobivamo rješavanjem idućeg sustava jednadžbi:

$$w_1^2 + w_2^2 = (d_4 + q_3)^2 \cdot S_2^2 \tag{2-5}$$

$$w_3 = d_1 - C_2(d_4 + q_3). \tag{2-6}$$

Uvrstimo li da je $d_4 + q_3 = \frac{d_1 - w_3}{C_2}$ u jednadžbu (2-5) dobivamo:

$$w_1^2 + w_2^2 = \left(\frac{d_1 - w_3}{C_2}\right)^2 \cdot S_2^2 = (d_1 - w_3)^2 \cdot (\tan q_2)^2$$

$$q_2 = \pm\, atan2\left(\sqrt{w_1^2 + w_2^2},\ d_1 - w_3\right) \tag{2-7}$$

Na kraju, trebamo izračunati zakret lakta q_3 . Množenjem w_1 sa C_1S_2, w_2 sa S_1S_2 i w_3 s C_2 imamo idući izraz:

$$C_1S_2w_1 + S_1S_2w_2 - C_2(w_3 - d_1) = (d_4 + q_3)(C_1^2S_2^2 + S_1^2S_2^2 + C_2^2) \tag{2-8}$$

Sređivanjem jednadžbe (2-8) dobijemo konačni izraz za q_3:

$$q_3 = C_1S_2w_1 + S_1S_2w_2 - C_2(w_3 - d_1) - d_4 \tag{2-9}$$

Dakle, ukupno rješenje inverznog kinematičkog problema zadanog manipulatora glasi:

$$q_1 = atan2(w_2, w_1)$$

$$q_2 = \pm\, atan2\left(\sqrt{w_1^2 + w_2^2},\ d_1 - w_3\right)$$

$$q_3 = C_1 S_2 w_1 + S_1 S_2 w_2 - C_2(w_3 - d_1) - d_4$$

$$q_4 = \frac{\pi}{2} \cdot \ln(w_4^2 + w_5^2 + w_6^2)$$

Iz danih jednadžbi vidimo da je rješenje inverznog kinematičkog problema zadanog manipulatora jednoznačno određeno. Problem može nastati kod izračuna varijable q_1 jer se ona računa preko funkcije *atan2* koja kao argumente prima x i y koordinatu vrha alata. Takav problem koji se događa radi funkcije *atan2* možemo programski detektirati te u idućoj iteraciji petlje možemo dobiveni q_1 umanjiti za 180° te ćemo tako dobiti ispravan zakret prvog zgloba robota, tj. baze.

Literatura

[1] Kovačić, Z.; Bogdan, S.; Krajči, V.: *Osnove robotike*. Graphis, Zagreb, 2002.

Dodatak A

```
%% 1. Domaca zadaca, Osnove robotike, Mihovil Bartulovic, 1.D_AUT,
4/11/2012
clear
clc
%% Inicijalizacija potrebnih varijabli
syms theta_k alpha_k a_k d_k q30

syms q1 q2 q3 q4                % varijable zglobova
alpha = [pi/2, pi/2, 0, 0];     % DH parametri alpha
syms d1 d2 d3 d4                % DH parametri d
syms a1 a2 a3 a4;               % DH parametri a

%% Definiranje opcenite matrice homogene transformacije koja koja povezuje
%  koordinatne sustave k i k-1.

T_k = [
cos(theta_k),-
cos(alpha_k)*sin(theta_k),sin(alpha_k)*sin(theta_k),a_k*cos(theta_k) ;
sin(theta_k),cos(alpha_k)*cos(theta_k),-
sin(alpha_k)*cos(theta_k),a_k*sin(theta_k) ;
0, sin(alpha_k), cos(alpha_k),d_k ;
0, 0, 0,1 ;
];

%% Zamjena varijabli u opcenitoj matrici homogene trasnformacije s
%  DH parametrima

T_01 = subs(T_k, [theta_k, d_k, a_k, alpha_k], [q1, d1, 0, alpha(1)]);
T_12 = subs(T_k, [theta_k, d_k, a_k, alpha_k], [q2, 0, 0, alpha(2)]);
T_23 = subs(T_k, [theta_k, d_k, a_k, alpha_k], [pi/2, q3, 0, alpha(3)]);
T_34 = subs(T_k, [theta_k, d_k, a_k, alpha_k], [q4, d4, 0, alpha(4)]);

% Izracun matrice koja povezuje koordinatne sustave baze i alata

T_04 = simple(T_01*T_12*T_23*T_34);

% Iz matrice T_04 uzimamo vektor polozaja p

p = T_04(1:3,4);

% Racunamo koordinate vrha alata u odnosu na koordinatni sustav baze
% manipulatora za pocetne uvijete

xyz_alat = subs(p, {q1,q2,q3,q4}, {pi/2, pi/2, q30, 0})

% Iz matrice T_04 uzimamo matricu rotacije R

R = T_04(1:3,1:3);

% Računamo orijentaciju alata u odnosu na koordinatni sustav baze
% manipulatora

alat_orijentacija = subs(R, {q1,q2,q3,q4}, {pi/2, 0, 0, -pi/2})
```