



Osnove robotike Zbirka (ne)rješenih primjera

Kinematika krutog tijela

1. ZADATAK

Odaberite 2 osnovne konfiguracije robota, navedite od kojih se zglobova sastoje te ih skicirajte (skicirajte i radni prostor).

RJEŠENJE

Osnovne konfiguracije robota su:

- a) pravokutna, tip zglobova TTT, radni prostor prizma
- b) cilindrična, tip zglobova RTT, radni prostor cilindar ili prostor između dva cilindra
- c) sferna, RRT, radni prostor sfera ili prostor između dvije sfere
- d) rotacijska, RRR, radni prostor sfera ili prostor između dvije sfere
- e) SCARA (RTR, TRR, RRT), karakteristično je da su sve osi paralelne, radni prostor sličan cilindričnoj konfiguraciji.

2. ZADATAK

Koordinatni sustav G zadan je uređenom trojkom jediničnih vektora $(\hat{I}, \hat{J}, \hat{K})$, a koordinatni sustav B zadan je jediničnim vektorima $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$. Napišite matricu rotacije \mathbf{R}_B^G izražene pomoću jediničnih vektora sustava G i B.

RJEŠENJE

Matrica rotacije koja opisuje orijentaciju koordinatnog sustava G u koordinatama koordinatnog sustava B definirana je kao $\mathbf{R}_{Bij}^G = \mathbf{b}^i \cdot \mathbf{g}^j$, gdje su \mathbf{b}^i i \mathbf{g}^j vektori koji definiraju koordinatne sustave B odnosno G, odnosno:

$$\mathbf{R}_B^G = \begin{bmatrix} \hat{i}\hat{I} & \hat{i}\hat{J} & \hat{i}\hat{K} \\ \hat{j}\hat{I} & \hat{j}\hat{J} & \hat{j}\hat{K} \\ \hat{k}\hat{I} & \hat{k}\hat{J} & \hat{k}\hat{K} \end{bmatrix}$$

3. ZADATAK

Koje od navedenih matrica (približno) predstavljaju rotacije u 2D prostoru:

- a) $R = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}$ b) $R = \begin{bmatrix} 0.353 & -0.353 \\ 0.353 & 0.353 \end{bmatrix}$ c) $R = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}$ d) $R = \begin{bmatrix} 1.5 & -1.866 \\ 1.866 & 1.5 \end{bmatrix}$

RJEŠENJE

Postoji više načina za riješiti ovaj zadatak, ali svi počivaju na osnovnim svojstima matrice rotacije. Matrica rotacije ortogonalna je matrica, a ortogonalnost matrice očituje se u tome da je inverz matrice

jednak transponiranoj matrici $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ pa je jedan od načina za riješiti zadatok provjeriti da je umnožak $\mathbf{R} * \mathbf{R}^T$ jedinična matrica.

$$\text{a) } \mathbf{R} * \mathbf{R}^T \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{R} * \mathbf{R}^T \approx \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \mathbf{R} * \mathbf{R}^T \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{d) } \mathbf{R} * \mathbf{R}^T \approx \begin{bmatrix} 5.7 & 0 \\ 0 & 5.7 \end{bmatrix}$$

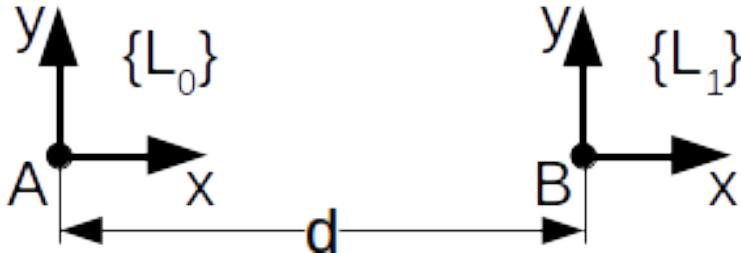
Ortogonalnost matrice se očituje i u tome da su stupci i retci matrice ortonormirani vektori pa je drugi način za riješiti zadatok provjeriti imaju li svi stupci i retci euklidsku normu 1, i ako imaju jesu li stupci, odnosno retci međusobno okomititi (okomititi vektori imaju skalarni produkt jednak 0).

- a) Stupci $s_1 = [0.707, 0.707]^T$, $s_2 = [0.707, -0.707]^T$, $\|s_1\|_2 \approx 1$, $\|s_2\|_2 \approx 1$, $s_1 \cdot s_2 = 0$.
 Retci $r_1 = [0.707, -0.707]$, $r_2 = [0.707, 0.707]$, $\|r_1\|_2 \approx 1$, $\|r_2\|_2 \approx 1$, $r_1 \cdot r_2 = 0$.
- b) Stupci $s_1 = [0.353, 0.353]^T$, $s_2 = [0.353, -0.353]^T$, $\|s_1\|_2 \approx 0.5$, $\|s_2\|_2 \approx 0.5$, $s_1 \cdot s_2 = 0$.
 Retci $r_1 = [0.353, -0.353]$, $r_2 = [0.353, 0.353]$, $\|r_1\|_2 \approx 0.5$, $\|r_2\|_2 \approx 0.5$, $r_1 \cdot r_2 = 0$.
- c) Stupci $s_1 = [0.707, 0.707]^T$, $s_2 = [0.707, 0.707]^T$, $\|s_1\|_2 \approx 1$, $\|s_2\|_2 \approx 1$, $s_1 \cdot s_2 \approx 1$.
 Retci $r_1 = [0.707, 0.707]$, $r_2 = [0.707, 0.707]$, $\|r_1\|_2 \approx 1$, $\|r_2\|_2 \approx 1$, $r_1 \cdot r_2 \approx 1$.
- d) Stupci $s_1 = [1.5, 1.866]^T$, $s_2 = [-1.866, 1.5]^T$, $\|s_1\|_2 \approx 2$, $\|s_2\|_2 \approx 2$, $s_1 \cdot s_2 = 0$.
 Retci $r_1 = [1.5, -1.866]$, $r_2 = [1.866, 1.5]$, $\|r_1\|_2 \approx 2$, $\|r_2\|_2 \approx 2.4$, $r_1 \cdot r_2 = 0$.

I u prvom i u drugom slučaju, očito je kako samo matrica **a)** $R = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}$ zadovoljava osnovno svojstvo rotacijske matrice.

4. ZADATAK

U nekom industrijskom postrojenju nalaze se dva robota montirana na pokretnim bazama. Roboti su pozicionirani kao na Slici 1.



Slika 1: Koordinatni sustavi robota u industrijskom okruženju.

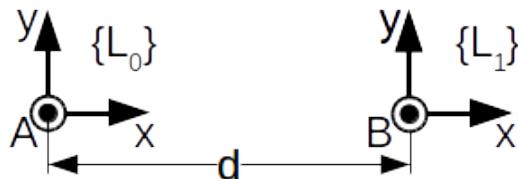
- a) Pod pretpostavkom da su koordinatni sustavi L_0 i L_1 desno orijentirani, odredite i skicirajte smjer z osiju za oba koordinatna sustava.
- b) Zapišite položaj i orijentaciju koordinatnog sustava L_1 u koordinatama koordinatnog sustava L_0 u obliku matrice homogene transformacije \mathbf{T}_1 .
- c) Robot A premješten je unutar postrojenja rotacijom za 90° oko z osi koordinatnog sustava L_1 . Napišite matricu homogene transformacije \mathbf{T}_2 koja opisuje rotaciju oko osi z za 90° .
- d) Korištenjem \mathbf{T}_1 i \mathbf{T}_2 , izračunajte matricu homogene transformacije \mathbf{T}_3 koja opisuje položaj i orijentaciju koordinatnog sustava L_1 u koordinatama koordinatnog sustava L_0 nakon premještanja prvog robota. Skicirajte trenutni položaj robota zajedno s pridruženim koordinatnim sustavima.
- e) Robot B iz trenutnog je položaja premješten na način da je zarotiran za -45° oko z osi koordinatnog sustava L_1 uz istovremeni pomak po y osi koordinatnog sustava L_0 za iznos d_1 . Je li moguće taj

pomak zapisati pomoću jedne homogene matrice transformacije? Objasnite i izračunajte matricu homogene transformacije \mathbf{T}_4 koja opisuje položaj i orijentaciju koordinatnog sustava L_1 u koordinatama koordinatnog sustava L_0 nakon premještanja drugog robota. Skicirajte trenutni položaj robota zajedno s pridruženim koordinatnim sustavima.

- f) Položaj i orijentacija vrha alata robota A u odnosu na koordinatni sustav L_0 definirani su matricom homogene transformacije \mathbf{T}_A , a vrh alata robota B u odnosu na koordinatni sustav L_1 definiran je matricom \mathbf{T}_B . Napišite izraz za položaj i orijentaciju vrha alata robota A u koordinatnom sustavu vrha alata robota B.

RJEŠENJE

- a) Po pravilu desne ruke može se zaključiti kako obje osi z pokazuju iz papira te je u presjecištu osiju x i y potrebno nacrtati simbol \odot , kao što je prikazano na slici 2.



Slika 2: Koordinatni sustavi robota u industrijskom okruženju nakon pomaka obaju robota.

- b) Problem se može razložiti na određivanje orijentacije i translacije. Iz slike 1 se može iščitati kako su koordinatni sustavi L_0 i L_1 jednakorijentirani (sve osi su paralelne), te je stoga matrica rotacije koja opisuje orijentaciju L_1 u odnosu na L_0 jedinična matrica, $\mathbf{R} = \mathbf{I}_{3 \times 3}$. Isto tako, iz slike je vidljivo kako je L_1 u odnosu na L_0 pomaknut po x osi za iznos d te je vektor translacije $\mathbf{p} = [d, 0, 0]^T$. Konačno rješenje dobije se korištenjem \mathbf{R} i \mathbf{p} :

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- c) Prvo je potrebno napisati općeniti oblik matrice rotacije oko z osi, a onda se uvrsti vrijednost $\theta = 90^\circ$:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- d) S obzirom na to da je pomak robota A u c) dijelu zadatka definiran u koordinatnom sustavu L_1 , potrebno je izraziti početni položaj L_0 u koordinatama L_1 , što se dobije invertiranjem matrice \mathbf{T}_1 . Položaj koordinatnog sustava L_0 u koordinatama L_1 nakon pomicanja robota A dobije se korištenjem \mathbf{T}_2 i inverza matrice \mathbf{T}_1 na sljedeći način:

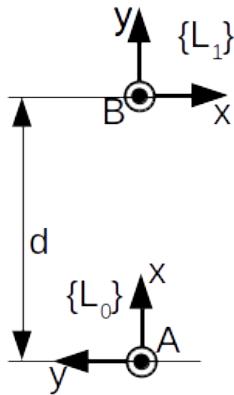
$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_2 * \mathbf{T}_1^{-1}.$$

Kako se traži položaj L_1 u koordinatama L_0 , potrebno je prethodni izraz invertirati čime se dobije tražena transformacija \mathbf{T}_3 :

$$\mathbf{T}_3 = (\mathbf{T}_2 * \mathbf{T}_1^{-1})^{-1} = \mathbf{T}_1 * \mathbf{T}_2^{-1}.$$

Invertiranjem matrice \mathbf{T}_2 i množenjem, dobije se konačno rješenje:

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & d \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Slika 3: Koordinatni sustavi robota u industrijskom okruženju nakon pomaka A robota.

Nakon pomaka robota A, roboti se nalaze u položaju sa slike 3. Kao što je vidljivo iz rješenja, relativni odnos koordinatnih sustava identičan je kao da je robot B rotiran za -90° , ali to ne odgovara stvarnom položaju robota u prostoru.

- e) Odgovor na pitanje je li moguće pomak zapisati jednom matricom transformacije potrebno je razmotriti u kontekstu postojećeg odnosa koordinatnih sustava koji je opisan matricom \mathbf{T}_3 . Imajući \mathbf{T}_3 u vidu, pitanje se svodi na to može li se novi odnos koordinatnih sustava dobiti u obliku $\mathbf{T}_x * \mathbf{T}_3$ (alternativno $\mathbf{T}_3 * \mathbf{T}_x$). S obzirom na to da se pomaci odvijaju u dva različita koordinatna sustava, pomak nije trivijalno zapisati pomoću samo jedne matrice te se načelno zapisuje u obliku $\mathbf{T}_{x1} * \mathbf{T}_3 * \mathbf{T}_{x2}$, pri čemu je \mathbf{T}_{x1} definiran u L_0 , a \mathbf{T}_{x2} u L_1 . Ipak, s obzirom na to da se radi o homogenim matricama transformacija koje uvijek imaju inverz, uvijek postoji rješenje sljedećih jednadžbi:

$$\mathbf{X} * \mathbf{T}_3 = \mathbf{T}_{x1} * \mathbf{T}_3 * \mathbf{T}_{x2}$$

$$\mathbf{T}_3 * \mathbf{X} = \mathbf{T}_{x1} * \mathbf{T}_3 * \mathbf{T}_{x2}$$

tako da je teoretski moguće pomak zapisati jednom matricom transformacije, ali najčešće nije praktično, kao što se i vidi iz proračuna matrice \mathbf{T}_4 .

Traženi pomak se može razložiti na rotaciju $\mathbf{T}_{R_{L_1}}$ oko z osi L_1 za -45° i translaciju $\mathbf{T}_{T_{L_0}}$ po osi y L_0 za d_1 . Matrice su sljedećeg oblika ($\sqrt{2}/2 \approx 0.707$):

$$\mathbf{T}_{R_{L_1}} = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0 & 0 \\ -0.707 & 0.707 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{T_{L_0}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

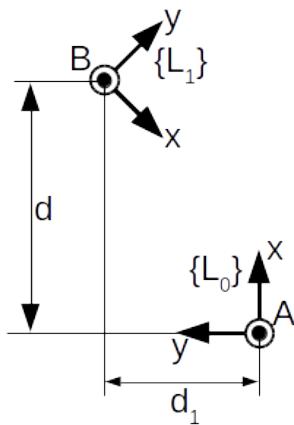
Tada se \mathbf{T}_4 može izračunati na sljedeći način:

$$\mathbf{T}_4 = \mathbf{T}_{T_{L_0}} * \mathbf{T}_3 * \mathbf{T}_{R_{L_1}}$$

te se kao konačan rezultat dobije:

$$\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} -0.707 & 0.707 & 0 & d \\ -0.707 & -0.707 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Položaj robota u prostoru prikazan je slikom 4.



Slika 4: Koordinatni sustavi robota u industrijskom okruženju nakon pomaka obaju robova.

- f) Prvo je potrebno uzeti u obzir da su trenutne koordinate L_1 u odnosu na L_0 zapisane matricom \mathbf{T}_4 , pa se koordinate L_0 u L_1 mogu dobiti kao \mathbf{T}_4^{-1} . Kako su koordinate vrha alata robota A u odnosu na L_0 zapisane matricom \mathbf{T}_A , koordinate vrha alata robota A u L_1 dobiju se umnoškom matrica transformacije $\mathbf{T}_4^{-1} * \mathbf{T}_A$. Sada matrica $\mathbf{T}_4^{-1} * \mathbf{T}_A$ opisuje položaj i orientaciju vrha alata robota A te je potrebno samo odrediti položaj i orientaciju koordinatnog sustava L_1 u koordinatama vrha alata robota B, što se dobije invertiranjem matrice \mathbf{T}_B . Sada matrica \mathbf{T}_B^{-1} opisuje koordinate L_1 u odnosu na vrh alata robota B, dok $\mathbf{T}_4^{-1} * \mathbf{T}_A$ opisuje koordinate vrha alata robota A u odnosu na L_1 te je potrebno ulančati te dvije transformacije kako bi se dobilo konačno rješenje:

$$\mathbf{T}_B^A = \mathbf{T}_B^{-1} * \mathbf{T}_4^{-1} * \mathbf{T}_A$$

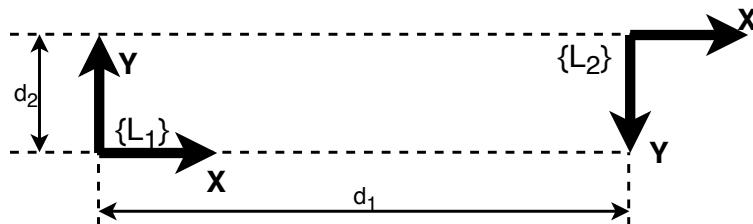
Ekvivalentno rješenje je i:

$$\mathbf{T}_B^A = (\mathbf{T}_A^{-1} * \mathbf{T}_4 * \mathbf{T}_B)^{-1}$$

koje se dobije sličnim postupkom u kojem je prvi korak izraziti položaj i orientaciju vrha alata robota B u koordinatama vrha alata robota A pa se onda cijeli izraz invertira.

5. ZADATAK

U nekom industrijskom postrojenju nalaze se dva robota montirana na pokretnim bazama. Roboti su pozicionirani kao na Slici 5, pri čemu je robotu A pridružen koordinatni sustav L_1 , a robotu B koordinatni sustav L_2 .



Slika 5: Koordinatni sustavi robota u industrijskom okruženju.

- Pod pretpostavkom da su koordinatni sustavi L_1 i L_2 desno orijentirani, odredite i skicirajte smjer z osiju za oba koordinatna sustava.
- Zapišite položaj i orientaciju koordinatnog sustava L_1 u koordinatama koordinatnog sustava L_2 u obliku matrice homogene transformacije \mathbf{T}_1 .

- c) Napišite matricu homogene transformacije \mathbf{T}_2 koja opisuje rotaciju oko osi z nekog koordinatnog sustava za 45° .
- d) Robot B premješten je unutar postrojenja rotacijom za 45° oko z osi koordinatnog sustava L_1 . Korištenjem \mathbf{T}_1 i \mathbf{T}_2 , izračunajte matricu homogene transformacije \mathbf{T}_3 koja opisuje položaj i orientaciju koordinatnog sustava L_2 u koordinatama koordinatnog sustava L_1 nakon premještanja robota B. Skicirajte položaj robota nakon obavljenog premještanja i skicirajte koordinatne sustave robota.
- e) Robot A iz trenutnog je položaja (nakon premještanja robota B) premješten na način da je zarotiran za -90° oko z osi koordinatnog sustava L_2 uz istovremeni pomak po y osi koordinatnog sustava L_1 za iznos $-d_t$. Zapišite matrice transformacije koje opisuju spomenute pomake (rotaciju i translaciju zasebno).
- f) Korištenjem matrica iz prethodnog dijela zadatka, izračunajte matricu homogene transformacije \mathbf{T}_4 koja opisuje položaj i orientaciju koordinatnog sustava L_1 u koordinatama koordinatnog sustava L_2 nakon premještanja robota A. Skicirajte položaj robota nakon obavljenog premještanja i skicirajte koordinatne sustave robota.
- g) Za početni položaj robota (Slika 5), postoji li koordinatni sustav L_0 takav da su matrice transformacije koje opisuju položaj i orientaciju sustava L_1 i L_2 u koordinatama L_0 :

$$\mathbf{T}_{L_0}^{L_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{L_0}^{L_2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & a + d_1 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}?$$

Obrazložite svoj odgovor.

RJEŠENJE

- a) Po pravilu desne ruke može se zaključiti kako os z koordinatnog sustava L_1 pokazuje iz papira (označava se simbolom \odot), dok os z koordinatnog sustava L_2 pokazuje u papir (označava se simbolom \otimes).
- b) Problem se može razložiti na određivanje orijentacije i translacije. Iz slike 5 se može iščitati kako su x osi koordinatnih sustava L_1 i L_2 paralelne, tj $x_1 = x_2$. Isto tako vrijedi $y_1 = -y_2$ te $z_1 = -z_2$. Stoga je matrica rotacije koja opisuje orijentaciju L_1 u odnosu na L_2 sljedećeg oblika;

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & 0 & 0 \\ y_2 & -1 & 0 \\ z_2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Translacija odnosno pozicija L_1 u koordinatama L_2 se također može očitati iz slike 5 gdje se vidi kako je L_1 pomaknut u negativnom smjeru x osi L_2 za iznos d_1 te u pozitivnom smjeru y osi L_2 za iznos d_2 . Ta translacija se može zapisati u obliku vektora:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_{L_1} \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{L_1} \\ -d_1 \\ d_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Konačno, matrica transformacije koja opisuje položaj i orientaciju sustava L_1 u koordinatama L_2 je:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -d_1 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- c) Prvo je potrebno napisati općeniti oblik matrice rotacije oko z osi, a onda se uvrsti vrijednost $\theta = 45^\circ$:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- d) S obzirom na to da je pomak robota B definiran u koordinatnom sustavu L_1 , potrebno je izraziti početni položaj L_2 u koordinatama L_1 , što se dobije invertiranjem matrice \mathbf{T}_1 . Položaj koordinatnog sustava L_2 u koordinatama L_1 nakon pomicanja robota B dobije se korištenjem \mathbf{T}_2 i inverza matrice \mathbf{T}_1 na sljedeći način:

$$\mathbf{T}_3 = \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}d_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}d_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}d_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}d_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- e) Matrica rotacije oko z osi koordinatnog sustava L_2 za $\theta = -90^\circ$ je oblika:

$$\mathbf{R}_{z_{L_2}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrica translacije po y osi koordinatnog sustava L_1 za iznos $-d_t$ je oblika:

$$\mathbf{T}_{y_{L_1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -d_t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- f) U d) dijelu zadatka izračunata je matrica \mathbf{T}_3 koja opisuje položaj L_2 u odnosu na L_1 . Kako se u ovom dijelu zadatka L_1 pomiče u odnosu na L_2 , poželjno je izraziti položaj i orientaciju L_1 u koordinatama L_2 , što se dobije invertiranjem matrice \mathbf{T}_3 . Kako se rotacija definira u koordinatama L_2 , ta transformacija množi inverz matrice \mathbf{T}_3 s lijeve strane, dok translacija (definirana u koordinatama L_1) množi taj inverz s desne strane, pa se dobije konačan izraz za matricu \mathbf{T}_4 :

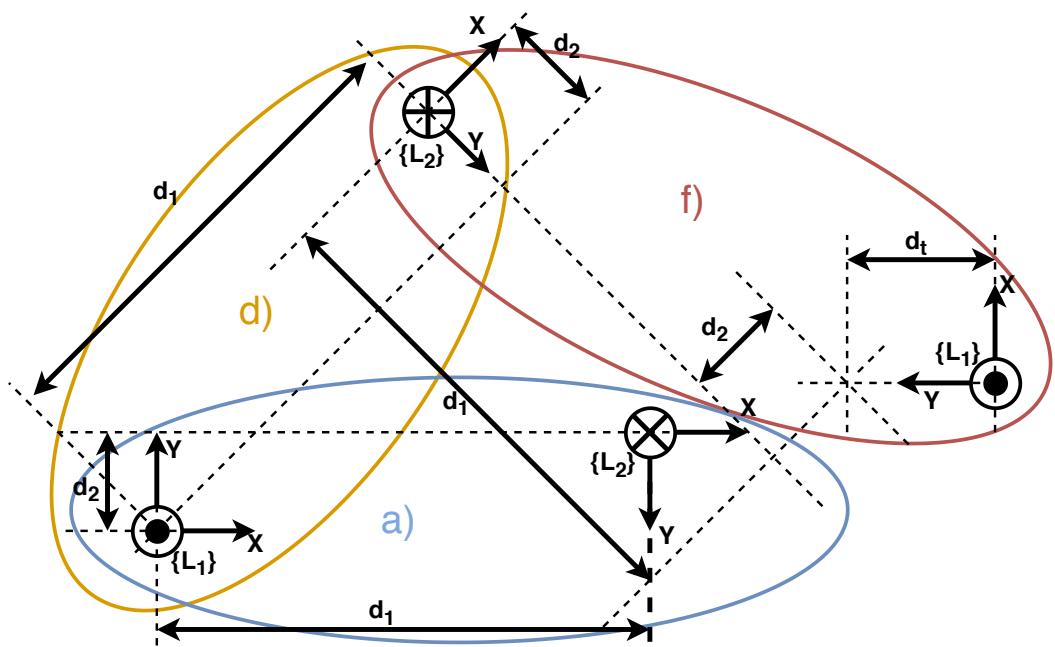
$$\mathbf{T}_4 = \mathbf{R}_{z_{L_2}} \cdot \mathbf{T}_3^{-1} \cdot \mathbf{T}_{y_{L_1}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & d_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}d_t \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & d_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}d_t \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- g) Postojanje L_0 može se ispitati na više načina, jedan od njih je da bi u slučaju postojanja L_0 trebala vrijediti sljedeća jednakost:

$$\mathbf{T}_{L_0}^{L_1} = \mathbf{T}_{L_0}^{L_2} \cdot \mathbf{T}_1,$$

za koju se lako utvrdi da ne vrijedi, što implicira da L_0 ne postoji. Sličan zaključak se može izvesti i izravnim uvidom u stvarne i očekivane orientacije osiju L_1 i L_2 (primjerice, prema vrijednostima u $\mathbf{T}_{L_0}^{L_1}$ i $\mathbf{T}_{L_0}^{L_2}$ koordinatni sustavi L_1 i L_2 trebali imati jednako orijentirane z osi, a prema a) dijelu zadatka to nije slučaj).

Skice položaja koordinatnih sustava pridruženih robotima u postrojenju prikazane su na slici 6.

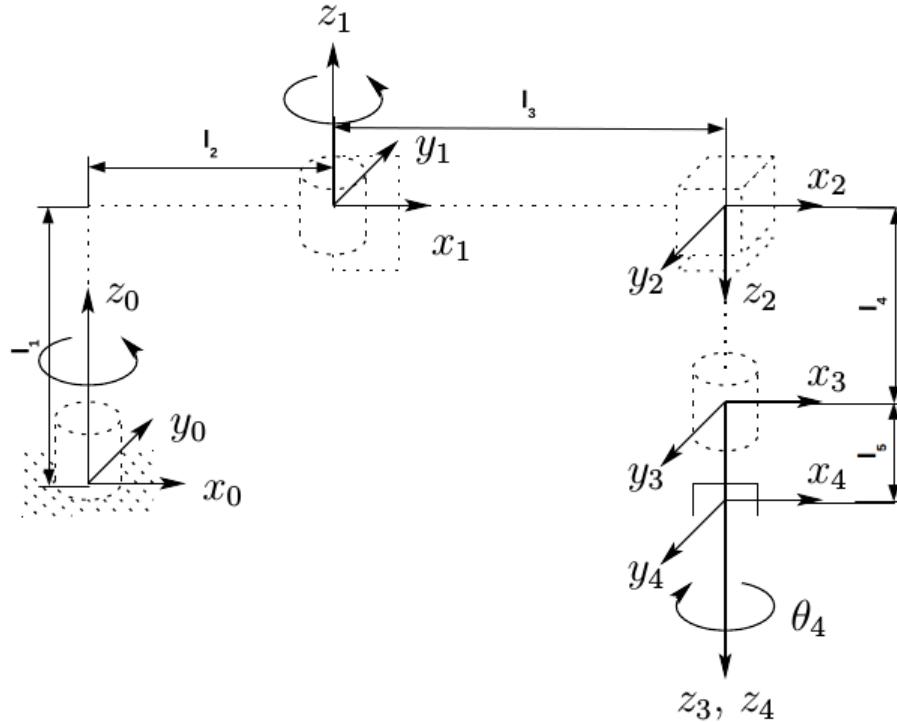


Slika 6: Položaj i orijentacija koordinatnih sustava nakon pomaka robota u skladištu.

Direktna kinematika

6. ZADATAK

Na slici 7 prikazan je SCARA (RRTR) robot s postavljenim koordinatnim sustavima zglobova, za kojeg je potrebno:



Slika 7: Koordinatni sustavi pridruženi zglobovima SCARA robota RRRT konfiguracije

- Odredite kinematičke parametre robota prema Denavit-Hartenbergovu postupku.
- Odredite vrijednosti varijabli zglobova robota u položaju sa Slike 7.
- Neka je z koordinata vrha alata jednaka $-q_3 - D$. Odredite D u ovisnosti o vrijednostima zglobova i duljinama sa slike 7.

RJEŠENJE

S obzirom na to da su koordinatni sustavi već postavljeni, potrebno je obratiti pažnju na to uđovoljavaju li kriterijima DH metode, to jest, je li moguće sve pomake između koordinatnih sustava opisati korištenjem kinematičkih parametara iz DH metode (rotacija oko i pomak po z_{i_1} te rotacija oko i pomak po x_i).

Za koordinatne sustave L_0 i L_1 , pomak l_1 definiran je po z_0 ($d_1 = l_1$), a pomak l_1 definiran je po x_1 ($a_1 = l_2$). Nakon provjere može se uočiti kako je x_1 okomit na z_0 i z_1 pa se rotacija može opisati. Kako su i x i z osi ta dva koordinatna sustava paralelne slijedi $\theta_1 = q_1$, $\alpha_1 = 0$.

Za koordinatne sustave L_1 i L_2 , pomak l_3 definiran je po x_2 ($a_2 = l_3$), a pomak po z_1 ne postoji ($d_2 = 0$). Vektor x_2 okomit je na z_1 i z_2 pa se rotacija može opisati. x osi su paralelne pa je $\theta_2 = q_2$, a z osi imaju suprotnu orijentaciju pa je $\alpha_2 = \pm\pi$.

Za koordinatne sustave L_2 i L_3 , pomak l_4 definiran je po z_2 ($d_3 = q_3 + l_4$ jer se radi o translacijskom zglobu), a pomak po x_3 ne postoji ($a_3 = 0$). Vektor x_3 okomit je na z_2 i z_3 pa se rotacija može opisati. x osi su paralelne pa je $\theta_3 = 0$ (translacijski zglob), a z osi su paralelne i jednakorijentirane pa je $\alpha_3 = 0$.

Za koordinatne sustave L_3 i L_4 , pomak l_5 definiran je po z_3 ($d_4 = l_5$), a pomak po x_4 ne postoji ($a_4 = 0$). Vektor x_4 okomit je na z_2 i z_3 pa se rotacija može opisati. x osi su paralelne pa je $\theta_4 = q_4$, a z osi su paralelne i jednako orijentirane pa je $\alpha_4 = 0$.

Konačno, kinematički parametri robota sa slike 7 dani su u tablici 1.

Tablica 1: Kinematički parametri robota sa slike 7.

	θ_i	d_i	α_i	a_i
0 … 1	q_1	l_1	0	l_2
1 … 2	q_2	0	$\pm\pi$	l_3
2 … 3	0	$q_3 + l_4$	0	0
3 … 4	q_4	l_5	0	0

Vrijednosti varijabli zglobova u položaju sa slike 7 odgovaraju upravo početnim uvjetima iz tablice 1, pa je $\mathbf{Q}_0 = [0, 0, l_4, 0]$. Alternativno se može reći, uz naglasak da je direktna kinematika riješena tako da su u matrice već uvršteni početni uvjeti iz tablice kinematičkih parametara, da su vrijednosti varijabli zglobova u položaju sa slike $\mathbf{Q}_0 = [0, 0, 0, 0]$.

Odrediti vrijednost D u ovisnosti o vrijednostima zglobova moguće je na dva načina. Prvi način je proračunati jednadžbu manipulatora te izdvojiti izraz za z koordinatu vrha alata manipulatora u ovisnosti o vrijednostima zglobova, čime izračun vrijednosti D postaje trivijalan. Iako valjan pristup, proračun jednadžbe manipulatora može biti dugotrajan proces, pa se može razmislati o alternativnom pristupu.

Pogledom na sliku 7, može se uočiti kako na z koordinatu vrha alata uopće ne utječe rotacijski zglobovi robota. Isto tako, može se uočiti da istu z koordinatu definira pomak l_1 u smjeru z_0 te pomaci $q_3 + l_4$ i l_5 po osi z_2 . S obzirom na to da se radi o SCARA robotu, karakteristika kojeg je da su sve osi zglobova paralelne, pomak po z_2 se može jednostavno definirati i kao pomak po z_0 , samo je potrebno paziti na predznake, pošto su z_0 i z_2 suprotno orijentirani. Sada je moguće zapisati:

$$z_{alat} = -q_3 - D = l_1 - (q_3 + l_4) - l_5 = l_1 - l_4 - l_5 - q_3$$

te slijedi:

$$-D = l_1 - l_4 - l_5 \rightarrow D = l_4 + l_5 - l_1$$

7. ZADATAK

Na slici 8 prikazan je RRTR robot. Za robota sa slike 8:

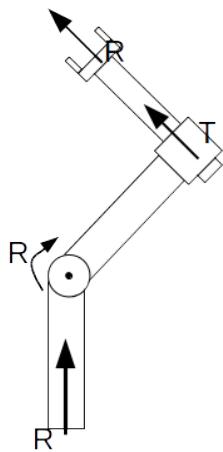
- Postavite koordinatni sustav alata L_4 .
- Postavite koordinatne sustave zglobova prema pravilima Denavit-Hartenbergova postupka.
- Skicirajte radni prostor robota. Kako se naziva ovaj tip robota s obzirom na izgled radnog prostora?

RJEŠENJE

Koordinatni sustav alata robota postavlja se u vrh alata, na način tako da se vektoru prilaza alata pridruži z os a vektoru zatvaranja alata pridruži y os. x os se onda postavi tako da koordinatni sustav alata bude desno orijentiran.

Koordinatni sustav baze postavlja se u bazu robota, pri čemu se z_0 os postavlja u os djelovanja prvog zgloba. x os baze može se postaviti proizvoljno dok god je okomita na z_0 . Za koordinatni sustav drugog zgloba robota, s obzirom na označen pozitivan smjer rotacije tog zgloba, može se zaključiti da os z_1 pokazuje u papir. Ishodište tog koordinatnog sustava onda se postavlja u presjecište osi z_0 i z_1 , a os x_1 se postavlja tako da je okomit na z_0 i z_1 (pa u ovom slučaju postoje dva rješenja koja dozvoljavaju kasniji zapis odnosa tih dvaju koordinatnih sustava korištenjem DH kinematičkih parametara).

Za os z_2 tj. os trećeg zgloba može se uočiti da se ne siječe sa z_1 . U tom slučaju, ishodište koordinatnog sustava trećeg zgloba postavlja se u presjecište zajedničke okomice na z_1 i z_2 . Kod robota, ta zajednička

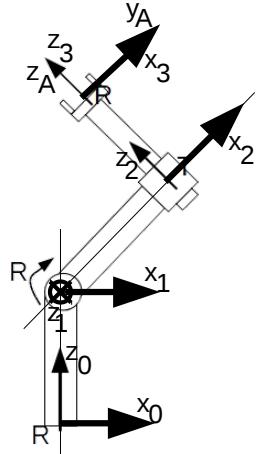


Slika 8: Robot RRTR konfiguracije iz zadatka 7.

okomica se najčešće pruža dužinom robotskog članka, kao što se vidi i na slici 9. Os x_2 potrebno je postaviti tako da se pomak između ta dva koordinatna sustava može opisati, te se postavlja u smjeru zajedničke okomice (slično kao i za drugi zglob, orijentacija x osi može imati dva rješenja).

Os z_3 leži na istom pravcu kao i z_2 pa je ishodište koordinatnog sustava četvrtozgloba moguće postaviti bilo gdje duž osi z_2 . U tom slučaju, poželjno je ishodište postaviti tako da pomak između dva susjedna koordinatna sustava odgovara duljini pridruženog članka robota. Kad osi z leže na istom pravcu, os x_3 je moguće postaviti proizvoljno, ali preporuča se postaviti ju tako da je što jednostavnije opisati rotaciju od x_2 prema x_3 , pa se najčešće postavlja tako da su osi x paralelne.

Jedno od mogućih rješenja za postavljanje koordinatnih sustava prikazano je na slici 9.

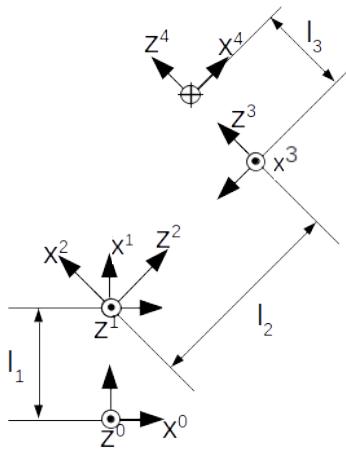


Slika 9: Koordinatni sustavi robota RRTR konfiguracije iz zadatka 7.

Radni prostor robota je kugla sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava pridruženog prvom zglobu, a radijus te kugle je zbroj duljina drugog i trećeg članka. Pri tom se prepostavlja da rotacijski zglobovi nema ograničenja, a da je translacijski zglob ograničen duljinom trećeg članka robota. Kako je radni prostor kugla, a robot ima i translacijski zglob, robot iz zadatka spada u kategoriju sfernih robota.

8. ZADATAK

Na slici 10 prikazan je robot s postavljenim koordinatnim sustavima zglobova. Zglobovi kojima su pridružene osi z_0 , z_1 i z_3 su rotacijski, dok je zglob kojem je pridružena os z_2 translacijski. Kut između osiju x_1 i z_2 je 45° .



Slika 10: Koordinatni sustavi pridruženi zglobovima robota iz zadatka 8.

- Odredite kinematičke parametre robota prema Denavit-Hartenbergovu postupku.
- Odredite vrijednosti varijabli zglobova robota u položaju sa Slike 10.

RJEŠENJE

Tablica 2: Kinematički parametri robota sa slike 10.

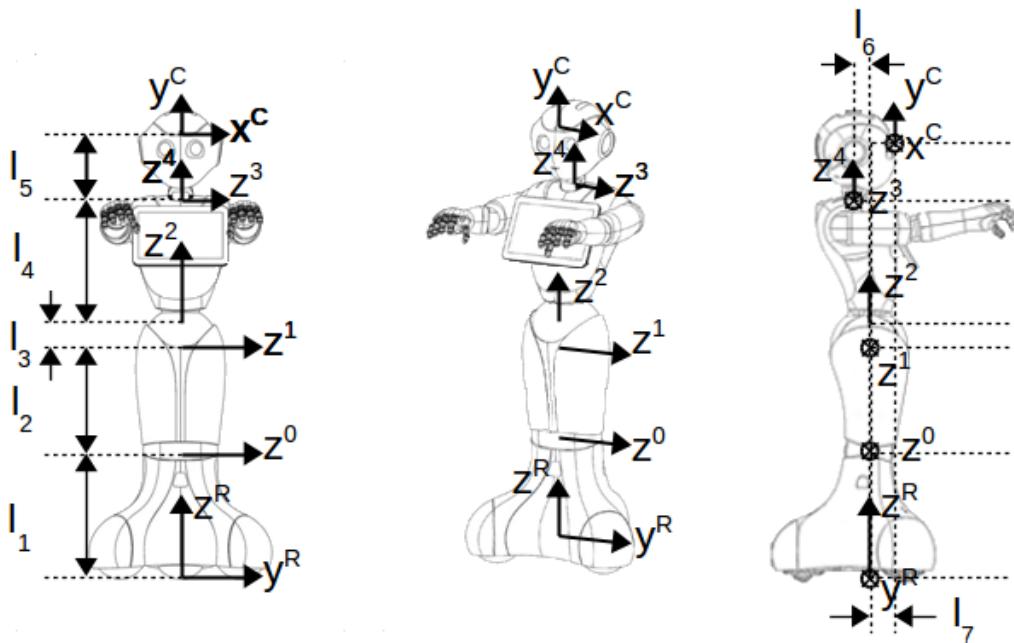
	θ_i	d_i	α_i	a_i
0 … 1	$q_1 + \frac{\pi}{2}$	0	0	l_1
1 … 2	$q_2 + \frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0
2 … 3	$\frac{\pi}{2}$	$q_3 + l_2$	$\frac{\pi}{2}$	0
3 … 4	$q_4 + \frac{\pi}{2}$	l_3	0	0

Vrijednosti varijabli zglobova u položaju sa slike 10 odgovaraju upravo početnim uvjetima iz tablice 2, pa je $\mathbf{Q}_0 = [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, l_2, \frac{\pi}{2}]$. Alternativno se može reći, uz naglasak da je direktna kinematika riješena tako da su u matrice već uvršteni početni uvjeti iz tablice kinematičkih parametara, da su vrijednosti varijabli zglobova u položaju sa slike $\mathbf{Q}_0 = [0, 0, 0, 0]$.

9. ZADATAK

Poduzeće za nadzor i čuvanje skladišnih prostora LARICS Security d.o.o zaposlilo je nekoliko robota Pepper koji patroliraju prostorom tijekom noći. Za vrijeme njihova rada, operater u centrali nadzire video koji se uživo prenosi s robota. Vaš je zadatak omogućiti robotu da, znajući zakrete svojih zglobova, operateru pošalje položaj i orientaciju svoje kamere u odnosu na svoju bazu. Kako biste rješili problem direktnе kinematike za robota Pepper, čija je konstrukcija zajedno s označenim osima prikazana na Slici 11, trebate riješiti sljedeće zadatke:

- (5b) Postavite koordinatne sustave zglobova L_0, L_1, L_2, L_3, L_4 zglobova prema pravilima Denavit-Hartenbergova postupka, korištenjem postojećih osiju z^0, z^1, z^2, z^3 i z^4 koje su označene na Slici 11. Potrebno je osigurati da ishodište koordinatnog sustava L_0 bude u presjecištu osiju z^R i z^0 , te da je $\mathbf{x}^0 = \mathbf{z}^0 \times \mathbf{z}^R$ (pripaziti na orijentaciju). Postavite koordinatni sustav vrha alata, odnosno kamere, L_C , pri čemu je potrebno osigurati da se ishodište L_C nalazi u točki označenoj na slici, za što je dozvoljeno koristiti dodatne koordinatne sustave. Također postavite koordinatne sustav L_R koji nije pridružen zglobu robota ali je potreban za proračun. Potrebno je osigurati da svi koordinatni sustavi budu desno orijentirani.
- Odredite tablicu kinematičkih parametara robota Pepper prema Denavit-Hartenbergovu postupku za kinematički lanac od L_0 do L_C .



Slika 11: Osi robota Pepper.

- c) Odredite vrijednosti varijabli zglobova robota u položaju sa Slike 11.
- d) Odredite položaj i orijentaciju koordinatnog sustava L_0 u koordinatama koordinatnog sustava L_R u obliku matrice homogene transformacije \mathbf{T}_R^0 .
- e) Odredite izraz u obliku umnoška matrica homogene transformacije za položaj i orijentaciju koordinatnog sustava kamere L_C u koordinatama koordinatnog sustava L_R .
- f) Robotom Pepper upravlja se pomoću brzinskih petlji brzinama \dot{p}_x^R , \dot{p}_y^R te kutnom brzinom $\dot{\theta}^R$ koja je definirana kao brzina zakretanja oko osi z^R . Kako se robot giba u 2D prostoru, njegova trenutna pozicija i orijentacija može se u nekom globalnom koordinatnom sustavu L_G zapisati kao $[p_x^G, p_y^G, \theta^G]$. Uz poznate vrijednosti $[p_x^G, p_y^G, \theta^G]$ te dodatnu pretpostavku da je os z^G paralelna i jednako orijentirana kao z^R , odredite brzine robota $[\dot{p}_x^R, \dot{p}_y^R, \dot{\theta}^R]$ kao funkcije \dot{p}_x^R , \dot{p}_y^R te $\dot{\theta}^R$.

10. ZADATAK

Na slici 12 prikazan je RRRT robot s tri paralelne R osi te jednom translacijskom osi.

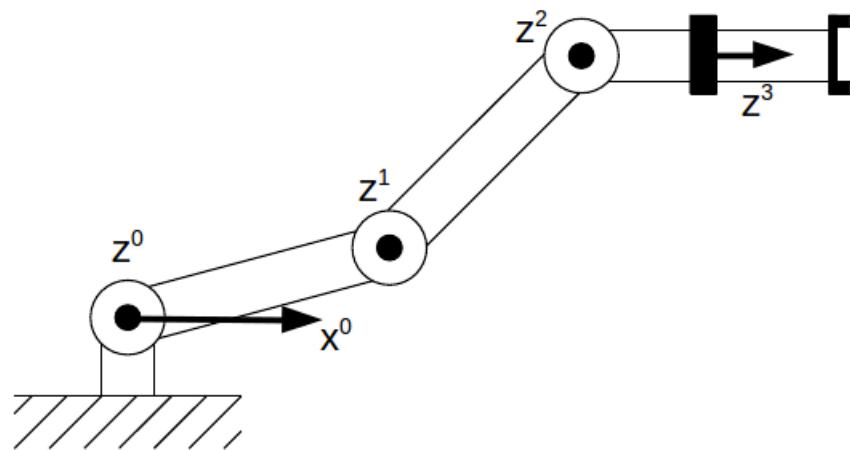
Za robota sa slike 12:

- Postavite koordinatni sustav alata L_A .
- Postavite koordinatne sustave zglobova prema pravilima Denavit-Hartenbergova postupka.
- Skicirajte radni prostor robota. Kako se naziva ovaj tip robota s obzirom na izgled radnog prostora?

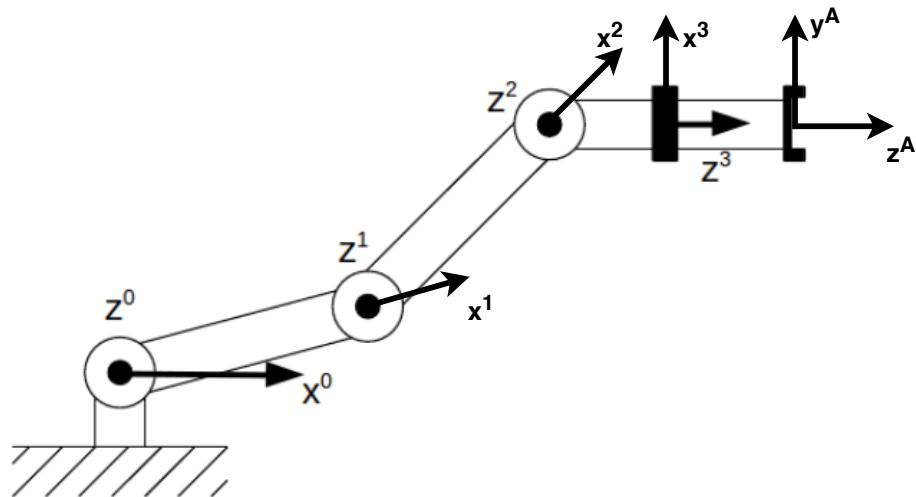
RJEŠENJE

Rješenje postavljanja koordinatnih sustava prikazano je na slici 13.

Radni prostor ovakvog robota je krug sa središtem u ishodištu L_0 koordinatnog sustava koji se prostire u ravnini razapetoj s x^0 i y^0 , a radijus kruga određen je zbrojem duljina članaka robota. S obzirom na izgled radnog prostora, radi se o planarnom robotu.



Slika 12: Robot RRRT konfiguracije



Slika 13: Koordinatni sustavi postavljeni prema DH metodi za robota RRRT konfiguracije

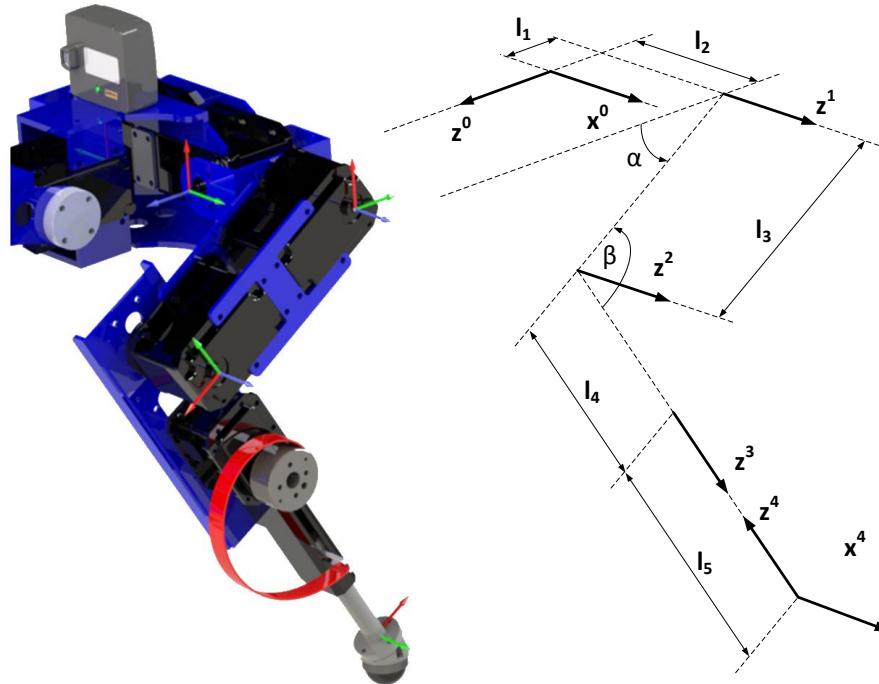
11. ZADATAK

Stabilno hodanje četveronožnog robota Dyanrobin po neravnom terenu ostvaruje se pažljivim proračunom mjestra na koje će robot postaviti vrh noge. Kako bi se vrh noge postavio u željenu točku potrebno je riješiti direktnu kinematiku noge robota koja se može modelirati kao manipulator RRRT konfiguracije. Osi zglobova robotske noge prikazane su na Slici 14.

- Postavite koordinatne sustave zglobova prema pravilima Denavit-Hartenbergova postupka. Potrebno je osigurati da ishodišta koordinatnog sustava baze L_0 i koordinatnog sustava vrha noge L_4 budu postavljena kao na Slici 14. Ako je potrebno, koristite dodatne koordinatne sustave kako biste to osigurali.

Napomena: os x^4 je paralelna s osi z^2

- Odredite kinematičke parametre noge Dyanrobin robota prema Denavit-Hartenbergovu postupku.
- Odredite vrijednosti varijabli zglobova u položaju sa Slike 14.



Slika 14: Osi zglobova noge robota Dynarobin.

- d) Pri provođenju eksperimenata s robotom Dynarobin koristi se Optitrack sustav za praćenje kojem je pridružen koordinatni sustav L_{ot} . Ako je za neki položaj robota konfiguracija vrha noge Dynarobina (L_4) u koordinatnom sustavu Optitracka dana u obliku pozicije $\mathbf{p} = [10, 3, 0]^T$ te Eulerovih kuteva prema $z - y - x$ konvenciji $\mathbf{e} = [0, 0, \pi/2]^T$, odredite matricu transformacije \mathbf{T}_{ot}^4 .
- e) Položaj i orientacija baze noge robota (L_0) u koordinatnom sustavu robota L_R , koji se nalazi u centru mase robota, dana je matricom \mathbf{T}_R^0 . Uz poznato rješenje direktnе kinematike u obliku matrice \mathbf{T}_0^4 te poznatu matricu \mathbf{T}_{ot}^4 koja opisuje položaj i orientaciju vrha noge robota u koordinatnom sustavu Optitracka, odredite izraz za konfiguraciju centra mase robota u koordinatnom sustavu Optitracka, \mathbf{T}_{ot}^R .

12. ZADATAK

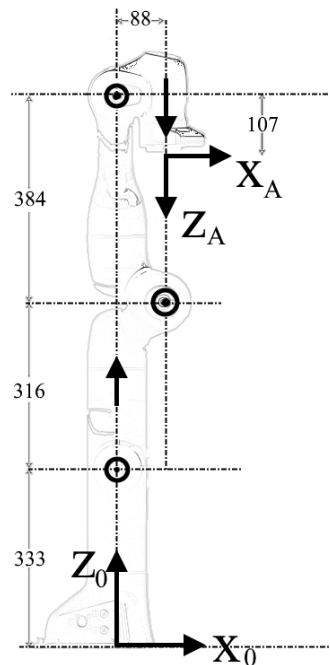
Za robotsku ruku sa 6 stupnjeva slobode prikazanu na slici 15:

- Postavite koordinatne sustave prema Denavit-Hartenbergovim pravilima.
- Odredite Vrijednosti Denavit Hartenbergovih parametara robota. Dozvoljeno je koristit općenite oznake umjesto numeričkih vrijednosti za duljine članaka.
- Odredite početne uvjete zglobova robota.
- Skicirajte robota u položaju. $\mathbf{q} = [0, -\frac{\pi}{2}, 0, 0, \frac{\pi}{2}, 0]^T$.

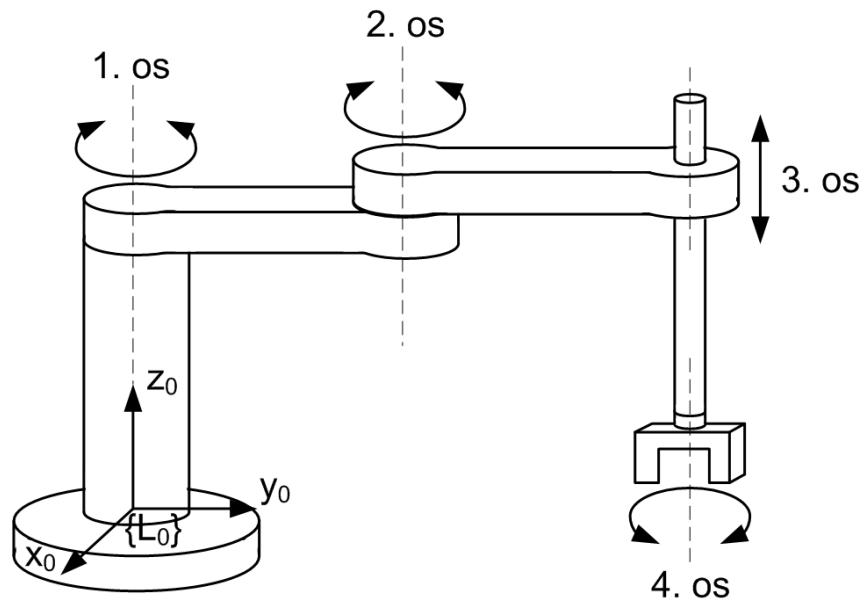
13. ZADATAK

Za četveroosno SCARA manipulator, prikazan slikom 16, odredite:

- Postavite koordinatne sustave zglobova prema pravilima Denavit-Hartenbergova postupka.
- Odredite kinematičke parametre robota prema Denavit-Hartenbergovu postupku.



Slika 15: Shema robota sa 6 stupnjeva slobode. Svi zglobovi su rotacijski, te su na slici označeni u pozitivnom smjeru rotiranja. Označani su početni koordinatni sustav i krajnji koordinatni sustav alata.



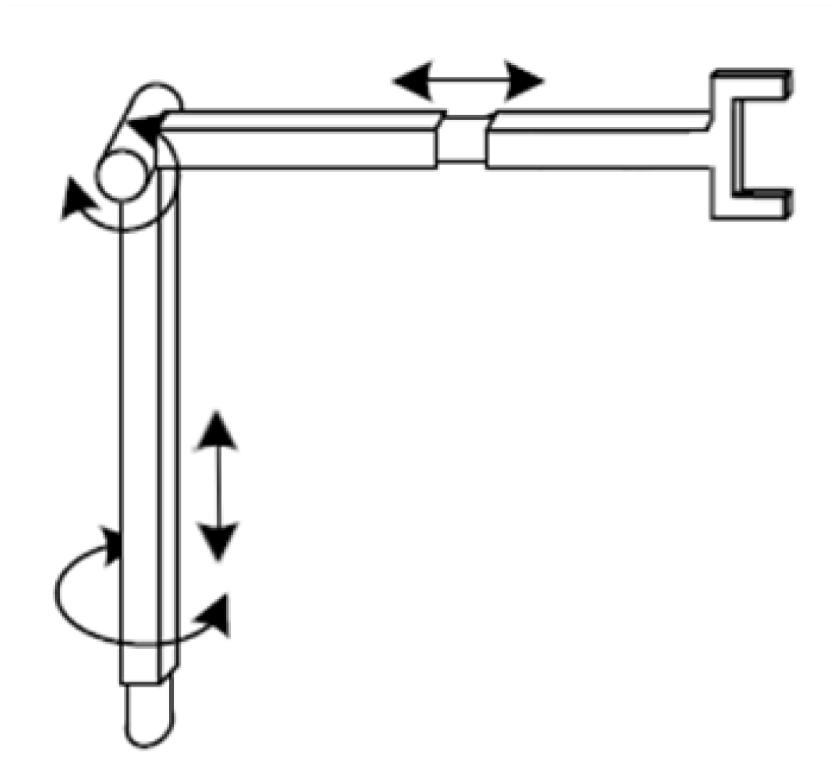
Slika 16: RRTR Scara manipulator.

c) Odredite matrice transformacije T_0^1 i T_2^3 .

d) Skicirajte radni prostor robota.

14. ZADATAK

Za četveroosni manipulator RTRT konfiguracije, prikazan slikom 17, odredite:



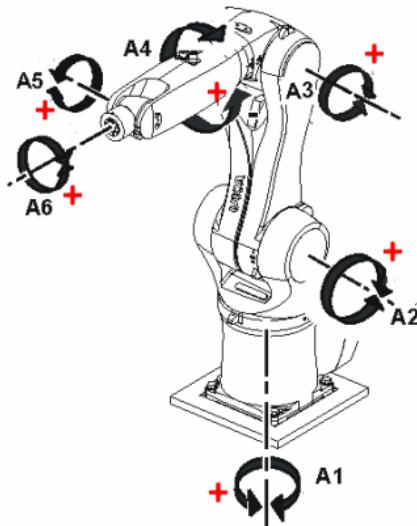
Slika 17: Robotski manipulator RTRT konfiguracije.

- a) Postavite koordinatne sustave zglobova prema pravilima Denavit-Hartenbergova postupka.
- b) Odredite kinematičke parametre robota prema Denavit-Hartenbergovu postupku.
- c) Odredite matrice transformacije T_0^1 i T_2^3 .
- d) Skicirajte radni prostor robota.

Inverzna kinematika

15. ZADATAK

Robotska ruka sa šest zglobova s pripadajućim dimenzijsama izraženim u milimetrima prikazana je na slici 19. Zglobovi robota i osi rotacije, skupa sa pozitivnim smjerom rotacije označenim crvenim + prikazani su na slici 18:



Slika 18: Robotska ruka s pripadajućim osima. Crvenom bojom označen je pozitivan smjer rotacije zglobova.

- Prema pravilima DH metode skicirajte osi i koordinante sustave zglobova robota.
- Prema DH metodi, korištenjem dostupnih mjera robota, sastavite DH tablicu robota.
- Vodeći računa da je za vrijednosti zglobova $\mathbf{q} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ robot položen kao na slici 18, skicirajte položaj robota za vektor zglobova $\mathbf{q} = [0 \ 0 \ 90 \ 0 \ -90 \ 0]^T$

Pretpostavite da je, nažalost, peti zglob robota zaglavio u položaju $q_5 = 0$. Kao alat, robot koristi brusilicu. Prilikom brušenja potrebno je osigurati da se vektor normale površine koju brusite poklapa s negativnim vektorom osi alata brusilice (z os koordinatnog sustava alata).

- Vodeći računa o prethodno navedenim ograničenjima postavite i zapišite vektor konfiguracije alata.
- Riješite problem inverzne kinematike za navedeni slučaj kada se zaglavio 5. zglob robota.

RJEŠENJE

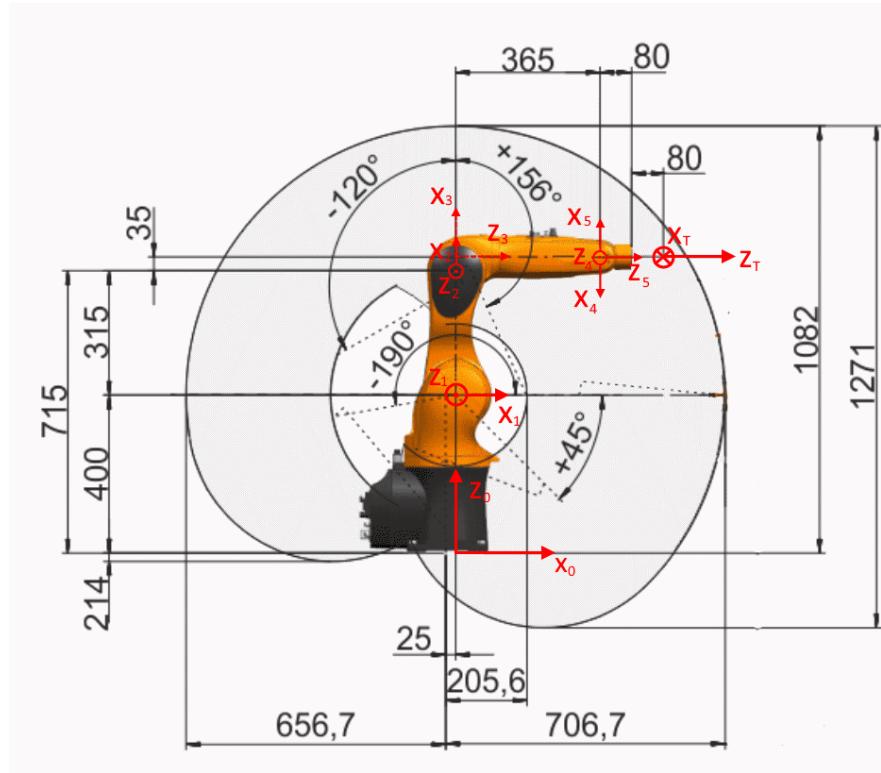
DH Tablicu gore navedenog robota pronađite u 3, a sliku rješenja na 19, pri tome na 20 pronađite skicu položaja robota za zadane vrijednosti zglobova vodeći računa o početnim uvjetima.

Vektor konfiguracije alata izdvajamo na sljedeći način:

$$\mathbf{w}_0^T = \begin{bmatrix} 35 \cos(Q_1) (15 \cos(Q_2 + Q_3) - 9 \sin(Q_2) - \sin(Q_2 + Q_3)) \\ 35 \sin(Q_1) (15 \cos(Q_2 + Q_3) - 9 \sin(Q_2) - \sin(Q_2 + Q_3)) \\ 5 (63 \cos(Q_2) + 7 \cos(Q_2 + Q_3) + 105 \sin(Q_2 + Q_3) + 80) \\ e^{\frac{Q_4+Q_6}{\pi}} \cos(Q_1) \cos(Q_2 + Q_3) \\ e^{\frac{Q_4+Q_6}{\pi}} \cos(Q_2 + Q_3) \sin(Q_1) \\ e^{\frac{Q_4+Q_6}{\pi}} \sin(Q_2 + Q_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix}$$

	Θ	d	α	a
1	q_1	400	$\frac{\pi}{2}$	0
2	$q_2 + \frac{\pi}{2}$	0	0	315
3	q_3	0	$-\frac{\pi}{2}$	35
4	$q_4 + \pi$	365	$-\frac{\pi}{2}$	0
5	$q_5 + \pi$	0	$\frac{\pi}{2}$	0
6	$q_5 - \frac{\pi}{2}$	160	0	0

Tablica 3: Tablica DH parametara robota



Slika 19: Robotska ruka s pripadajućim dimenzijama izraženim u milimetrima. Crvenom bojom označen je koordinatni sustav alata robota, te x os koordinatnog sustava baze.



Slika 20: Rješenje postavljanja osi za robotski manipulator KUKA KR.

Konačan algoritam rješavanja inverznog kinematičkog problema dan je sljedećim postupkom. Pri tome valja voditi računa da je redoslijed koraka bitan za konačno rješenje problema.

- Prvi korak je odrediti $Q_4 + Q_6$ koji će nažalost ostati neodređeni, odnosno u sklopu zbroja pošto uz zakočen $q_5 = 0$ dolazi do gubitka dodatnog stupnja slobode jer su osi z_3 i z_6 na istom pravcu.

$$Q_4 + Q_6 = \frac{\pi}{2} \ln(w_4^2 + w_5^2 + w_6^2)$$

- Potom izračunamo Q_1

$$Q_1 = \text{atan2}(w_2, w_1) + k \cdot \pi, k \in 0, 1$$

- Zatim izrazimo $(Q_2 + Q_3)$ preko w_5

$$(Q_2 + Q_3) = \begin{cases} \pi - \arcsin(w_6 \cdot e^{\frac{-Q_4 - Q_6}{\pi}}) \\ \arcsin(w_6 \cdot e^{\frac{-Q_4 - Q_6}{\pi}}) \end{cases}$$

- Te ih uvrstimo u w_3 da bi izracunali Q_2

$$Q_2 = \pm \cos \left(\frac{\frac{w_3}{5} - 7C_{23} - 105S_{23} - 80}{63} \right)$$

- Ostaje trivijalno izračunati Q_3 što nas na kraju ostavlja sa 8 višezačnih rješenja koja moramo provjeriti.

Napomena: Dozvoljeno je koristiti Matlab za množenje matrica, ali se preporuča da sami vježbate ručno množenje s uvrštenim brojevima. Kada promatraste slučaj zaglavljenog zglobova i rješavate problem inverzne kinematike, slobodno uvrstite vrijednost zglobova kao konstantu u vektor konfiguracije alata.

16. ZADATAK

Matrica SCARA RRTR manipulatora sa slike 10 dana je izrazom:

$$\mathbf{T}_0^4 = \begin{bmatrix} \cos(q_1 + q_2 - q_4) & \sin(q_1 + q_2 - q_4) & 0 & l_2 \cos(q_1) + l_3 \cos(q_1 + q_2) \\ \sin(q_1 + q_2 - q_4) & -\cos(q_1 + q_2 - q_4) & 0 & l_2 \sin(q_1) + l_3 \sin(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 & -1 & -q_3 - D \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

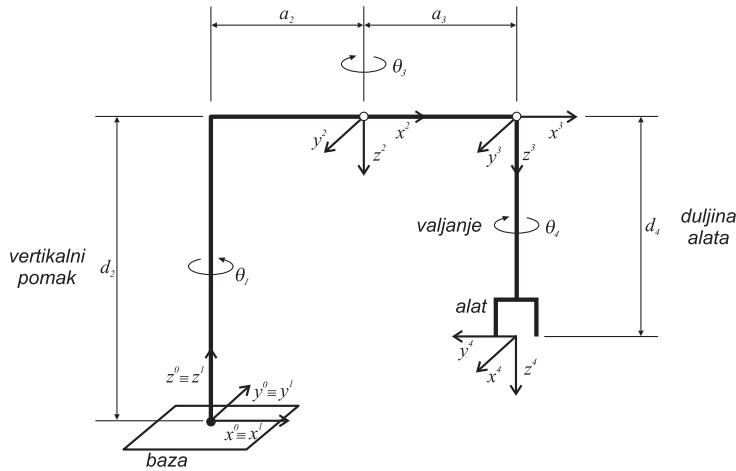
- Riješite problem inverzne kinematike za manipulator;
- Koji je minimalni broj redundantnih rješenja inverzne kinematike za ovaj manipulator? Obrazložite odgovor.

17. ZADATAK

Matrica SCARA RTRR manipulatora prikazanog Slikom 21 dana je izrazom:

$$\mathbf{T}_0^4 = \begin{bmatrix} \cos(q_1 - q_3 - q_4) & \sin(q_1 - q_3 - q_4) & 0 & a_2 \cos(q_1) + a_3 \cos(q_1 - q_3) \\ \sin(q_1 - q_3 - q_4) & -\cos(q_1 - q_3 - q_4) & 0 & a_2 \sin(q_1) + a_3 \sin(q_1 - q_3) \\ 0 & 0 & -1 & q_2 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Riješite problem inverzne kinematike za manipulator sa Slike 21;
- Koji je minimalni broj redundantnih rješenja inverzne kinematike za ovaj manipulator? Obrazložite odgovor;



Slika 21: SCARA RTRR konfiguracija.

RJEŠENJE

Pogledajmo prvo poziciju vrha alata i označimo:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \cos(q_1) + a_3 \cos(q_1 - q_3) \\ a_2 \sin(q_1) + a_3 \sin(q_1 - q_3) \\ q_2 - d_4 \end{bmatrix}$$

Može se uočiti da je rješenje za q_2 trivijalno:

$$q_2 = z + d_4$$

Iz slike robota, potpomognuto činjenicom da znamo da se radi o SCARA robotu, može se zaključiti kako doseg robota ovisi isključivo o zakretu q_3 , pa se može pisati:

$$\begin{aligned} x^2 &= a_2^2 C_1^2 + 2a_2 a_3 C_1 C_{1-3} + a_3^2 C_{1-3}^2 \\ y^2 &= a_2^2 S_1^2 + 2a_2 a_3 S_1 S_{1-3} + a_3^2 S_{1-3}^2 \\ x^2 + y^2 &= a_2^2 + 2a_2 a_3 (S_1 S_{1-3} + C_1 C_{1-3}) + a_3^2 \end{aligned}$$

iz čega slijedi:

$$\frac{x^2 + y^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2 a_3} = S_1 S_{1-3} + C_1 C_{1-3} = C_{1-(1-3)} = C_3$$

te je rješenje za q_3 :

$$q_3 = \pm \arccos \frac{x^2 + y^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2 a_3}$$

Uz poznat q_3 , sada se može odrediti q_1 . Prvo je potrebno izdvojiti x i y izraze, raspisati korištenjem adicijskih formula iz konfiguracije alata te iz njih proračunati vrijednosti S_1 i C_1 :

$$\begin{aligned} x &= a_2 C_1 + a_3 C_1 C_3 + a_3 S_1 S_3 \rightarrow & C_1 &= \frac{x - a_3 S_1 S_3}{a_2 + a_3 C_3} \\ y &= a_2 S_1 + a_3 S_1 C_3 - a_3 C_1 S_3 \rightarrow & S_1 &= \frac{y + a_3 C_1 S_3}{a_2 + a_3 C_3} \end{aligned}$$

Sada se prethodno određen izraz za S_1 uvrsti u C_1 i pa se dobije:

$$C_1 = \frac{x - a_3 S_3 \frac{y + a_3 C_1 S_3}{a_2 + a_3 C_3}}{a_2 + a_3 C_3} = \frac{(a_2 + a_3 C_3)x - a_3 S_3(y + a_3 C_1 S_3)}{(a_2 + a_3 C_3)^2}$$

a nakon izlučivanja C_1 i sređivanja se dobije:

$$C_1 = \frac{(a_2 + a_3 C_3)x - a_3 S_3 y}{(a_2 + a_3 C_3)^2 + a_3^2 S_3^2}$$

Može se uočiti kako izraz za C_1 ovisi samo o već poznatom q_3 pa bi rješenje moglo biti:

$$q_1 = \pm \arccos \frac{(a_2 + a_3 C_3)x - a_3 S_3 y}{(a_2 + a_3 C_3)^2 + a_3^2 S_3^2}$$

Ipak, ako se promotri prethodni izraz, može se uočiti kako on nije definiran ako je nazivnik razlomka jednak 0. U ovom slučaju ta situacija je moguća ako je $a_2 = a_3$, pa to rješenje inverzne nije valjano jer će rezultirati pogreškom pri izračunu ako je nazivnik jednak 0. Međutim, ispravno rješenje se može odrediti tako da se postupak obavljen za C_1 ponovi za S_1 , tj da se izraz za C_1 uvrsti u S_1 :

$$C_1 = \frac{x - a_3 S_1 S_3}{a_2 + a_3 C_3} \longrightarrow S_1 = \frac{y + a_3 C_1 S_3}{a_2 + a_3 C_3}$$

Postupkom sličnim kao za C_1 dobije se sljedeći izraz za S_1 :

$$S_1 = \frac{(a_2 + a_3 C_3)y + a_3 S_3 x}{(a_2 + a_3 C_3)^2 + a_3^2 S_3^2}$$

Sada imamo sljedeća dva izraza:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{(a_2 + a_3 C_3)y + a_3 S_3 x}{(a_2 + a_3 C_3)^2 + a_3^2 S_3^2} \\ C_1 &= \frac{(a_2 + a_3 C_3)x - a_3 S_3 y}{(a_2 + a_3 C_3)^2 + a_3^2 S_3^2} \end{aligned}$$

Njihovim dijeljenjem dobije se:

$$\frac{S_1}{C_1} = \tan(q_1) = \frac{(a_2 + a_3 C_3)y + a_3 S_3 x}{(a_2 + a_3 C_3)x - a_3 S_3 y}$$

Ovdje je važno napomenuti kako se nazivnik izraza za S_1 i C_1 može pokratiti jer je sigurno nenegativan. U slučaju da nazivnik može biti i pozitivan i negativan, potrebno je cijele izraze S_1 i C_1 predati funkciji atan2 kako bi se ispravno odredio kvadrant u kojem se rješenje nalazi. Dodatno se može primjetiti da iako ponovo u nazivniku imamo izraz koji možda može poprimiti vrijednost 0, to više nije problem jer je rješenje za q_1 dano izrazom:

$$q_1 = \text{atan2}[(a_2 + a_3 C_3)y + a_3 S_3 x, (a_2 + a_3 C_3)x - a_3 S_3 y]$$

a funkcija atan2 je definirana i može se izračunati i kad je $(a_2 + a_3 C_3)x - a_3 S_3 y = 0$ (iako vrijednost atan2 funkcije neće biti definirana kad su i brojnik i nazivnik jednaki 0, u tom slučaju neće doći do greške dijeljenja s 0 kao što bi bio slučaj da se koristi arcsin ili \arccos na izrazima za S_1 ili C_1).

Ostaje još odrediti zakret q_4 za koji se iz rješenja direktnog kinematika robota može odmah uočiti kako utječe samo na orientaciju alata. Ovisno o tome kako je orientacija zadana, može postojati više načina rješavanja.

Primjeri s određivanjem q_4 korištenjem eksponencijalne funkcije i Eulerovih kuteva dani su u knjizi, a ovdje ćemo razmotriti situaciju kad je orientacija zadana matricom rotacije \mathbf{R}_0^4 :

$$\mathbf{R}_0^4 = \begin{bmatrix} \cos(q_1 - q_3 - q_4) & \sin(q_1 - q_3 - q_4) & 0 \\ \sin(q_1 - q_3 - q_4) & -\cos(q_1 - q_3 - q_4) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Kako su vrijednosti za q_1 i q_3 već poznate, bilo koji element matrice R može se koristiti za određivanje q_4 :

$$q_1 - q_3 - q_4 = \arccos(R_{11}) = \arcsin(R_{12}) = \arcsin(R_{21}) = -\arccos(R_{22})$$

Međutim, kako svaki od navedenih izraza ima više rješenja, umjesto da provjeravamo koji od arccos i arcsin parova je ispravan, možemo ponovo izraz svesti na $\text{atan}2$ tako da podijelimo izraze za S_{1-3-4} i C_{1-3-4} :

$$\tan(q_1 - q_3 - q_4) = \frac{S_{1-3-4}}{C_{1-3-4}} = \frac{R_{21}}{R_{11}}$$

pa se kao rješenje za q_4 dobije:

$$\begin{aligned} q_1 - q_3 - q_4 &= \text{atan}2(R_{21}, R_{11}) \\ q_4 &= -\text{atan}2(R_{21}, R_{11}) - q_1 + q_3 \end{aligned}$$

Konačno, rješenje inverzne kinematike za robota sa slike 21 dano je sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned} q_2 &= z + d_4 \\ q_3 &= \pm \arccos \frac{x^2 + y^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \\ q_1 &= \text{atan}2[(a_2 + a_3C_3)y + a_3S_3x, (a_2 + a_3C_3)x - a_3S_3y] \\ q_4 &= -\text{atan}2(R_{21}, R_{11}) - q_1 + q_3 \end{aligned}$$

S obzirom na to da postoji samo jedno rješenje za q_2 , dva rješenja za q_3 , a da su uz odabran q_3 zakreti q_1 i q_4 jednoznačno određeni, minimalni broj redundantnih rješenja inverzne kinematike za ovaj manipulator je dva.

18. ZADATAK

Matrica SCARA TRRR manipulatora dana je izrazom:

$$\mathbf{T}_0^4 = \begin{bmatrix} \cos(q_2 + q_3 - q_4) & \sin(q_2 + q_3 - q_4) & 0 & a_2 \cos(q_2) + a_3 \cos(q_2 + q_3) \\ \sin(q_2 + q_3 - q_4) & -\cos(q_2 + q_3 - q_4) & 0 & a_2 \sin(q_2) + a_3 \sin(q_2 + q_3) \\ 0 & 0 & -1 & q_1 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Riješite problem inverzne kinematike za zadani manipulator;
- b) Koji je minimalni broj redundantnih rješenja inverzne kinematike za ovaj manipulator? Obrazložite odgovor;
- c) Koja su moguća rješenja q jednadžbe $x = \sin(q)$ na intervalu $q \in [-\pi, \pi]$?

19. ZADATAK

Pozicija vrha alata robota s 3 rotacijske osi dana je izrazom:

$$\mathbf{p}_0^T = \begin{bmatrix} \cos(q_1)(a_2 \cos(q_2) + a_3 \cos(q_2 + q_3)) \\ \sin(q_1)(a_2 \cos(q_2) + a_3 \cos(q_2 + q_3)) \\ d_1 - a_2 \sin(q_2) - a_3 \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix}.$$

- a) Izračunajte pomak vrha alata $\Delta\mathbf{p} = [\Delta x, \Delta y, \Delta z]^T$ u ovisnosti o promjeni zakreta zglobova $\Delta\mathbf{q} = [\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3]^T$.

RJEŠENJE

Potrebno je prisjetiti se veze između $\Delta\mathbf{p}$ i $\Delta\mathbf{q}$ koja je definirana Jacobian matricom odnosno matricom koja povezuje male pomake zakreta zglobova s malim pomacima vrha alata:

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{J}_{3 \times 3} \Delta\mathbf{q}$$

Dimenzija Jacobian matrice, s obzirom na to da se promatra samo pozicija vrha alata robota te da se radi o robotu s tri stupnja slobode je 3×3 , pa se može pisati:

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{J}_{3 \times 3} \Delta \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{q}$$

Parcijalnim deriviranjem vrijednosti u $\Delta \mathbf{p}$ dobije se:

$$\Delta \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_1(a_2C_2 + a_3C_{23}) & -C_1(a_2S_2 + a_3S_{23}) & -C_1(a_3S_{23}) \\ C_1(a_2C_2 + a_3C_{23}) & S_1(a_2S_2 + a_3S_{23}) & S_1(a_3S_{23}) \\ 0 & -a_2C_2 - a_3C_{23} & -a_3C_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \Delta q_3 \end{bmatrix}$$

U slučaju da je potrebno iz zadatog $\Delta \mathbf{p}$ izračunati $\Delta \mathbf{q}$, postupak za proračun Jacobian matrice je identičan, samo je potrebno invertirati \mathbf{J} :

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{J}^{-1} \Delta \mathbf{p}$$

20. ZADATAK

Matrica transformacije robota dana je sljedećom matricom

$$\mathbf{T}_0^4 = \begin{bmatrix} \cos(q_1 + q_2 - q_4) & \sin(q_1 + q_2 - q_4) & 0 & l_2 \cos(q_1) + l_3 \cos(q_1 + q_2) \\ \sin(q_1 + q_2 - q_4) & -\cos(q_1 + q_2 - q_4) & 0 & l_2 \sin(q_1) + l_3 \sin(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 & -1 & -q_3 - D \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- a) S obzirom na \mathbf{z}_0^4 , što možemo zaključiti o kakvom se robotu radi?
- b) Pretpostavite da znate početni položaj robota $\mathbf{q} = [\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \sqrt{l}, \frac{\pi}{3}]^T$, i da se robot u prostoru alata pomaknuo za $\Delta \mathbf{p} = [-0.2l, 0.2l, -0.2l]^T$. Izračunajte pomak u prostoru zglobova robota $\Delta \mathbf{q}$, pri tome vodeći računa da je $l_2 = l_3/2$.

RJEŠENJE

- a) Ne mijenja se orijentacija z osi, što upućuje na to da su sve osi robota paralelne pa se može zaključiti da se radi o scara robotu.

b)

$$\mathbf{J}(q_i) = \begin{bmatrix} -l_2 \sin(q_1) - l_3 \sin(q_1 + q_2) & -l_3 \sin(q_1 + q_2) & 0 & 0 \\ l_2 \cos(q_1) + l_3 \cos(q_1 + q_2) & l_3 \cos(q_1 + q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{q} = [\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \sqrt{l}, \frac{\pi}{3}]) = \begin{bmatrix} -l_2 & 0 & 0 & 0 \\ l_3 & l_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{J}^{-1} \Delta \mathbf{p} = \begin{bmatrix} -l_2 & 0 & 0 & 0 \\ l_3 & l_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -0.2l \\ 0.2l \\ -0.2l \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{p} = \begin{bmatrix} -0.2l \\ 0.2l \\ -0.2l \end{bmatrix} = \mathbf{J} \Delta \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -l_2 & 0 & 0 & 0 \\ l_3 & l_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \Delta q_3 \end{bmatrix}$$

$$-0.2l = -l_2 \Delta q_1$$

$$0.2l = l_3 \Delta q_1 + l_3 \Delta q_2$$

$$-0.2l = -\Delta q_3$$

Planiranje trajektorije

Prepostavimo da željena putanja robota u prostoru zglobova nije potpuno definirana, nego su zadane samo spojne točke na toj krivulji, kao što su početak i kraj krivulje, te neke moguće međutočke. Tada je potrebno provesti interpolaciju između spojnih točaka kako bi se dobila glatka putanja.

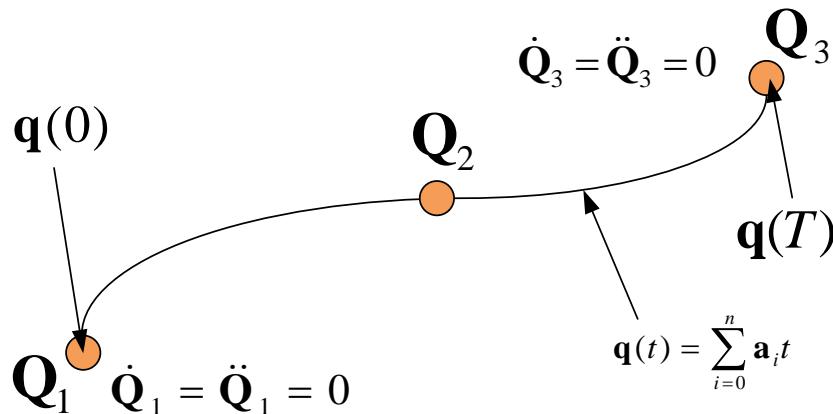
Općenito, interpolacija se može provesti polinomom n-tog stupnja $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$:

$$\mathbf{q}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n. \quad (1)$$

Takav polinom sadrži $n + 1$ koeficijent a_i te zathjeva $n + 1$ uvjet kako bi se oni jednoznačno odredili. Postoje dva tipa uvjeta: predefinirane pozicije kroz koje alat robota mora proći; ili kombinirani uvjeti pozicije, brzine, akceleracije i trzaja kroz dvije točke koji dodatno osiguravaju glatkoću dinamike putanje. Problem određivanja koeficijenta polinoma svodi se na skup linearnih algebarskih jednadžbi te se može rješiti numerički.

Primjer 1

Na slici 22 prikazane su tri točke \mathbf{Q}_i kroz koje se robotski manipulator treba gibati, počevši gibanje u prvoj točki \mathbf{Q}_1 i završivši u \mathbf{Q}_3 . Potrebno je odrediti stupanj jedinstvenog polinoma s kojim se može opisati takvo gibanje te postaviti potrebne algebarske jednadžbe kojima se mogu odrediti koeficijenti polinoma. Budući da robot započinje gibanje u točki \mathbf{Q}_1 , može se zaključiti kako u trenutku $t = 0$, za



Slika 22: Interpoliranje gibanja robota jedinstvenim polinomom n -tog stupnja

jedinstveni polinom $\mathbf{q}(t)$ mora vrijediti sljedeće:

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{Q}_1. \quad (2)$$

Robot miruje na početku trajektorije, stoga izjednačavamo prvu i drugu derivaciju jedinstvenog polinoma (brzinu i akceleraciju) s nulom:

$$\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0} \quad (3)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Isti način razmišljajmo na krajnju točku trajektorije, kada je $t = T$, stoga vrijede jednadžbe:

$$\mathbf{q}(T) = \mathbf{Q}_3 \quad (5)$$

$$\dot{\mathbf{q}}(T) = \mathbf{0} \quad (6)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}(T) = \mathbf{0} \quad (7)$$

Preostaje odrediti uvjet da polinom $\mathbf{q}(t)$, prođe kroz točku \mathbf{Q}_2 u nekom trenutku $t = t_2$,

$$\mathbf{q}(t_2) = \mathbf{Q}_2. \quad (8)$$

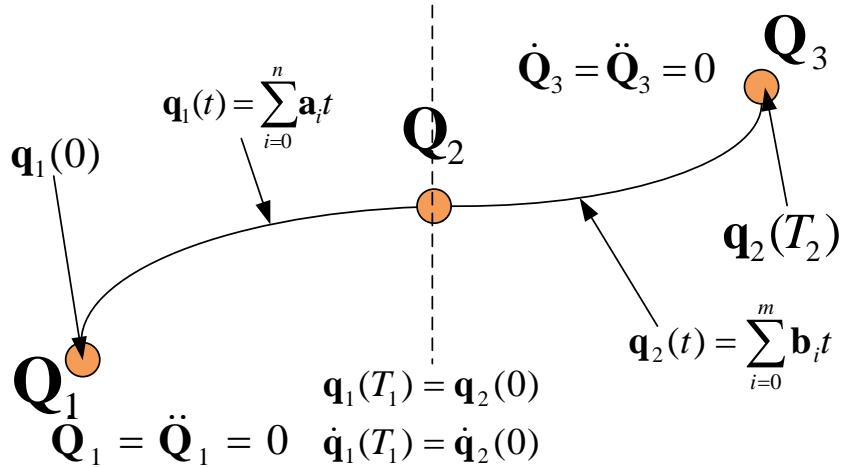
Ovim je postupkom u potpunosti određen skup algebarskih jednadžbi kojim je definiran polinom $\mathbf{q}(t)$. Budući da postoji točno 7 uvjeta, minimalan stupanj polinoma potrebnog za opisati navedeno gibanje je 6. Konačno, uvrštavanjem uvjeta (2) do (8) u jednadžbu (1) dobije se skup jednadžbi polinoma:

$$\begin{aligned} a_0 &= Q_1 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= 0 \\ a_0 + a_1 t_2 + a_2 t_2^2 + a_3 t_2^3 + a_4 t_2^4 + a_5 t_2^5 + a_6 t_2^6 &= Q_2 \\ a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3 + a_4 T^4 + a_5 T^5 + a_6 T^6 &= Q_3 \\ a_1 + 2a_2 T + 3a_3 T^2 + 4a_4 T^3 + 5a_5 T^4 + 6a_6 T^5 &= 0 \\ 2a_2 T + 6a_3 T + 12a_4 T^2 + 20a_5 T^3 + 30a_6 T^4 &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Nadalje, planiranje putanje može se pojednostaviti na način da se ista podijeli na segmente koji se zasebno interpoliraju polinomima nižeg stupnja. Ukoliko segmenti zadovoljavaju dodatne uvjete neprekinutosti u spojnim točkama, interpolacijske funkcije zovu se Spline funkcije. Primjer takvog pristupa interpoliranju je Ho-Cookova metoda.

Primjer 2

Za slučaj iz Primjera 1 potrebno je provesti interpolaciju pomoću dvije spline funkcije \mathbf{q}_1 i \mathbf{q}_2 . Pri tome treba osigurati kontinuiranost brzina u spojnoj točki polinoma \mathbf{Q}_2 . Algebarski uvjeti prikazani su u



Slika 23: Interpoliranje gibanja robota s dva polinoma

sljedećoj tablici:

Tablica 4: Tablica algebarskih uvjeta polinoma iz Primjera 2

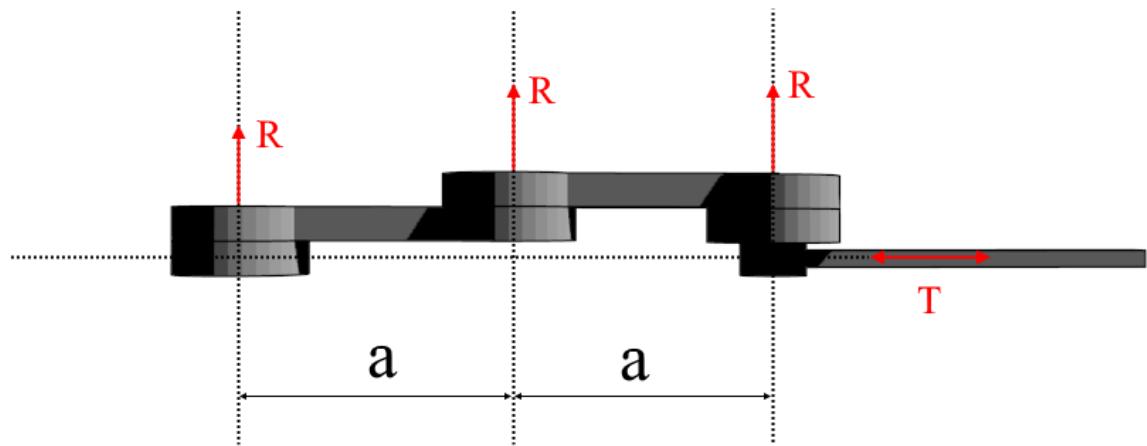
	$\mathbf{q}_1(t)$	$\mathbf{q}_2(t)$
1	$\mathbf{q}_1(0) = \mathbf{Q}_1$	$\mathbf{q}_2(0) = \mathbf{Q}_2$
2	$\mathbf{q}_1(T_1) = \mathbf{Q}_2$	$\mathbf{q}_2(T_2) = \mathbf{Q}_3$
3	$\dot{\mathbf{q}}_1(0) = 0$	$\dot{\mathbf{q}}_2(T_2) = 0$
4	$\ddot{\mathbf{q}}_1(0) = 0$	$\ddot{\mathbf{q}}_2(T_2) = 0$
5		$\dot{\mathbf{q}}_2(0) = \dot{\mathbf{q}}_1(T_1)$

Iz slike i tablice slijedi da će polinomi 1 i 2 biti različitog stupnja. Dodatni uvjet neprekinutosti brzine u točki \mathbf{Q}_2 uzrokovao je da se poveća stupanj polinoma \mathbf{q}_2 . Stoga stupanj prvog polinoma iznosi 3, koji nastavlja polinom 4 stupnja.

Sva vremena trajektorije određuju se iterativnim postupkom i nisu a priori poznata. To znači da se za početne uvjete postavljaju parametrička vremena $|\mathbf{Q}_{i+1} - \mathbf{Q}_i|$, koja se kroz iterativni postupak optimiraju kako bi se dobile trajektorije koje robot fizički može odraditi u najkraćem mogućem roku.

21. ZADATAK

Na slici 24, prikazan je RRRT robot s označenim osima i potrebnim dimenzijama. Vaš zadatak je izraditi planer trajektorije kojim će se omogućiti inspekcija pukotina na zidu sonarskom sondom. Možete prepostaviti da će sonda uspješno izmjeriti neovisno o kutu prema površini.



Slika 24: RRRT robot s označenim osima i potrebnim dimenzijama.

Odjel za konstrukciju, osmislio je i izradio dizajn okruženja inspekcije površine ultrazvukom, prikazan na slici 25. Odjel za ispitivanje kvalitete navodi da je za provedbu inspekcije potrebno odraditi putanju oblika pravca između W_A i W_B . Kako bi inspekcija bila pouzdana, potrebno je ostvariti točnost praćenja pozicije putanje u iznosu $\epsilon_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2}L$.

RJEŠENJE

Na temelju navedenog:

- Provedite Taylorov postupak najmanjih odstupanja i odredite točke putanje kojima će se zadovoljiti uvjeti pouzdanosti inspekcije.

Prije nego što započnemo Taylorov postupak izračunat ćemo inverzna rješenja prikazana na slici:

$$\mathbf{q}_A = [135 \quad -90 \quad -45 \quad L]^T$$

$$\mathbf{q}_B = [-135 \quad 90 \quad 45 \quad L]^T$$

1. U prvom koraku Taylorovog postupka računamo:

$$\mathbf{q}_m = \frac{\mathbf{q}_A + \mathbf{q}_B}{2} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad L]^T, \mathbf{W}_m = [(1 + \sqrt{2})L \quad 0 \quad 0]^T$$

Promatraljući u prostoru alata, srednja točka postaje:

$$\mathbf{W}_M = [L \ 0 \ 0]^T$$

Pa odstupanje od željene putanje glasi:

$$|\mathbf{W}_M - \mathbf{W}_m| = \sqrt{2}L$$

Što je više od dopuštenog odstupanja $\epsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pa $\mathbf{W}_M = \mathbf{W}_C$ postaje nova točka putanje, točka C. Budući da je robot RRRT kinematički redundantan, postoji beskonačno mnogo rješenja koja zadovoljavaju konfiguraciju alata \mathbf{W}_C . Jedno moguće rješenje glasi:

$$\mathbf{q}_C = [-45 \ 90 \ -45 \ 0]^T$$

2. U sljedećem koraku postupak ponavljamo za gibanje od točke \mathbf{W}_A do \mathbf{W}_C .

$$\mathbf{q}_m = \frac{\mathbf{q}_A + \mathbf{q}_C}{2} = [45 \ 0 \ -45 \ \frac{L}{2}]^T, \mathbf{W}_m = [\frac{3L}{2} \ L \ 0]^T$$

Promatraljući u prostoru alata, srednja točka postaje:

$$\mathbf{W}_M = [L \ \frac{L}{2} \ 0]^T$$

Pa odstupanje od željene putanje glasi:

$$|\mathbf{W}_M - \mathbf{W}_m| = \frac{\sqrt{2}}{2}L$$

Što je odstupanje koje zadovoljava kriterij te nije potrebno dodati točku $\mathbf{W}_M = \mathbf{W}_E$

3. Još je potrebno provjeriti odstupanje u segmentu \mathbf{W}_C do \mathbf{W}_B .

$$\mathbf{q}_m = \frac{\mathbf{q}_B + \mathbf{q}_C}{2} = [-90 \ 90 \ 0 \ \frac{L}{2}]^T, \mathbf{W}_m = [\frac{L}{2} + a \ -a \ 0]^T$$

Promatraljući u prostoru alata, srednja točka postaje:

$$\mathbf{W}_M = [L \ -\frac{L}{2} \ 0]^T$$

Pa odstupanje od željene putanje glasi:

$$|\mathbf{W}_M - \mathbf{W}_m| = \frac{(2 - \sqrt{2})L}{2} \quad (10)$$

Što je odstupanje koje zadovoljava kriterij te nije potrebno dodati točku $\mathbf{W}_M = \mathbf{W}_D$

- Skicirajte konfiguraciju robota za sve točke putanje određene Taylorovim postupkom.

Rješenje: Vidi sliku 26

- Za dobivene točke putanje isplanirate trajektoriju koja miruje na početku i kraju (u točkama W_A i W_B). Smatra se da robot miruje ako su mu brzina i akceleracija jednake 0. Pri tome koristite metodu minimalnog stupnja jedinstvenog polinoma, tako da između svake točke gibanje traje točno 1s.

Rješenje: Budući da putanja dobivena Taylorovim postupkom sadržava 3 točke, A,C i B, gibanje ima dva segmenta, te prema tome traje $T = 2s$. U trenutku $t = \tau = 1s$ robot se nalazi u središnjoj točki t . Prema tome možemo postaviti sljedeće uvjete na polinom $\mathbf{q}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(0) &= \mathbf{q}_A, \mathbf{q}(\tau) = \mathbf{q}_C, \mathbf{q}(T) = \mathbf{q}_B \\ \dot{\mathbf{q}}(0) &= 0, \dot{\mathbf{q}}(T) = 0 \\ \ddot{\mathbf{q}}(0) &= 0, \ddot{\mathbf{q}}(T) = 0 \end{aligned}$$

što čini ukupno 7 jednadžbi. Polinom kojim će se opisati gibanje prema tome mora biti 6. stupnja:

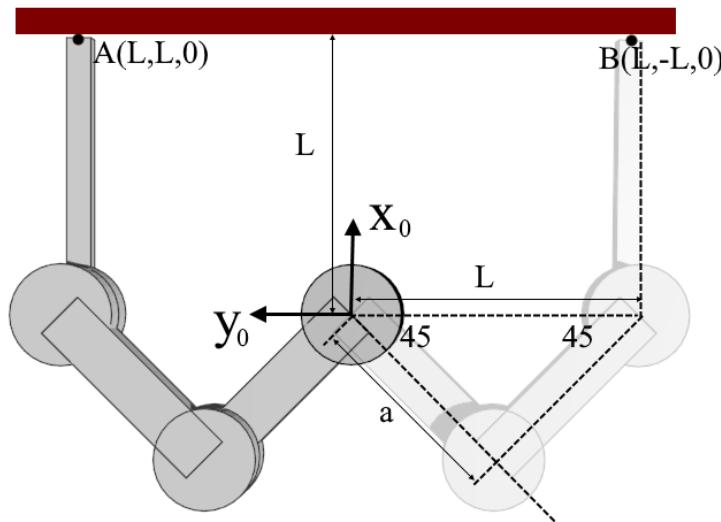
$$\begin{aligned}\mathbf{q}(t) &= \mathbf{a}_6 * t^6 + \mathbf{a}_5 * t^5 + \dots + \mathbf{a}_0 \\ \dot{\mathbf{q}}(t) &= 6\mathbf{a}_6 * t^5 + 5\mathbf{a}_5 * t^4 + \dots + \mathbf{a}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) &= 30\mathbf{a}_6 * t^4 + 20\mathbf{a}_5 * t^3 + \dots + 2\mathbf{a}_2\end{aligned}$$

Postovaljanjem jednadžbi dolazimo do rješenja u obliku matričnog zapisa (prije uvrštavanja vrijednosti τ i T):

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ T^6 & T^5 & T^4 & T^3 & T^2 & T & 1 \\ \tau^6 & \tau^5 & \tau^4 & \tau^3 & \tau^2 & \tau & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6T^5 & 5T^4 & 4T^3 & 3T^2 & 2T & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 30T^4 & 20T^3 & 12T^2 & 6T & 2 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{a}_6 \\ \mathbf{a}_5 \\ \mathbf{a}_4 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_A \\ \mathbf{q}_C \\ \mathbf{q}_B \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Nužno je naglasiti da su u ovom slučaju koefficijenti \mathbf{a}_i vektori kao i vektori zglobova \mathbf{q} dimenzije 4×1 .

Napomena: Dozvoljeno je koristiti Matlab za računanje i crtanje odziva. Sve korake proračuna potrebno je jasno pokazati i napisati.

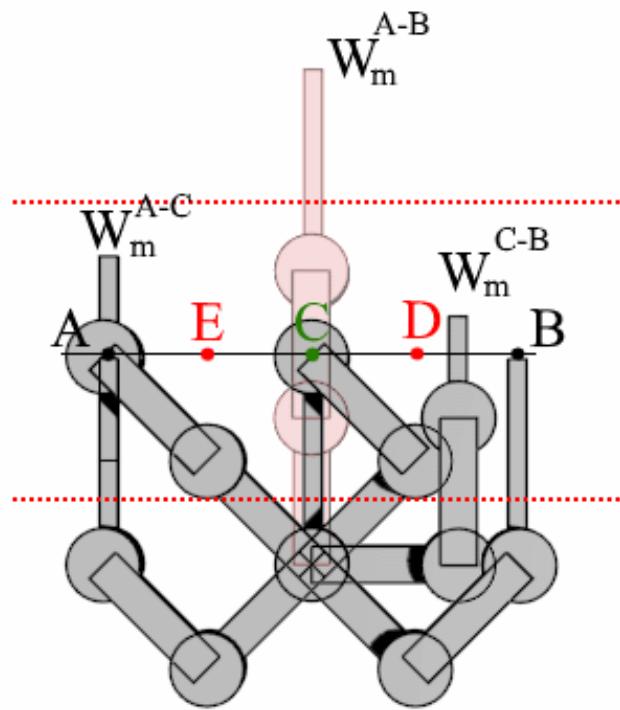


Slika 25: Na lijevoj strani prikazana je robotska ruka u nultom, tj. početnom položaju, dok je na desnoj strani prikazana u krajnjem B položaju. Sve vrijednosti zadane su u koordinatnom sustavu L_0 . Između točaka W_1 i W_2 robot mora odraditi inspekciju, tako da pri tome svojom putanjom pređe put označen dužinom koja spaja te dvije točke. Kao garancija uspješno provedene inspekcije potrebno je zadovoljiti točnost slijedenja trajektorije u iznosu $\epsilon_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2} L$.

22. ZADATAK

Putanja zgloba robota određena je s tri točke (q_1, q_2, q_3) , pri čemu je svakoj točki pridružen trenutak u kojem se zglob nalazi u toj točki (t_1, t_2, t_3) . Uvjeti za interpolaciju trajektorije dani su u Tablici 2, a općeniti polinom kojim se interpolira segment trajektorije dan je sljedećim izrazom:

$$Q_i(t) = a_0 + a_1(t - t_i) + a_2(t - t_i)^2 + \dots, \quad \text{za } t_i < t < t_{i+1}$$



Slika 26: Rješenje položaja robota prilikom provođenja Taylorovog postupka planiranje putanje. Vektor konfiguracije alata \mathbf{W}_m^{A-B} narušava granice putanje (isprekidana crvene linije) pa se dodaje nova točka C u putanju alata. Konfiguracije alata \mathbf{W}_m^{A-C} i \mathbf{W}_m^{C-B} ne narušavaju zadana ograničenja pa samim time nije potrebno dodati točke E i D.

Tablica 5: Rubni uvjeti za planiranje trajektorije

(q_1, t_1)	(q_2, t_2)	(q_3, t_3)
$Q(t_1) = q_1$	$Q(t_2) = q_2$	$Q(t_3) = q_3$
$\dot{Q}(t_1) = 0$		$\dot{Q}(t_3) = 0$
$\ddot{Q}(t_1) = 0$		$\ddot{Q}(t_3) = 0$

- Napišite općeniti izraz za polinom $Q(t)$ kojim ćete interpolirati trajektoriju kroz sve tri točke, uz uvjete iz Tablice 5. Objasnite stupanj korištenog polinoma;
- Odredite izraze za polinome $Q_1(t)$ i $Q_2(t)$ uzimajući u obzir zadane rubne uvjete iz Tablice 5. Kao rješenje za polinome dovoljno je postaviti sustav u matričnom obliku $\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{q}$.

RJEŠENJE

U prvom dijelu zadatka potrebno je interpolirati trajektoriju kroz sve tri točke, a iz tablice 5 može se uočiti kako postoji 7 uvjeta na trajektoriju robota kroz sve tri točke. Kako postoji 7 uvjeta, potreban je polinom koji ima 7 slobodnih koeficijenata, tj polinom 6. stupnja:

$$Q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 + a_6 t^6$$

U drugom dijelu zadatka, potrebno je svaki od segmenata interpolirati zasebnim polinomima. Iz tablice

5 iščitavamo rubne uvjete za prvi segment, a to su:

$$Q_1(t_1) = q_1$$

$$Q_1(t_2) = q_2$$

$$\dot{Q}_1(t_1) = 0$$

$$\ddot{Q}_1(t_1) = 0.$$

Kako imamo 4 uvjeta za prvi segment, potrebno je interpolirati trajektoriju polinomom trećeg stupnja:

$$Q_1(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$$

Sada vrijedi:

$$\begin{aligned} Q_1(t_1) = q_1 &\rightarrow a_0 + a_1t_1 + a_2t_1^2 + a_3t_1^3 = q_1 \\ Q_1(t_2) = q_2 &\rightarrow a_0 + a_1t_2 + a_2t_2^2 + a_3t_2^3 = q_2 \\ \dot{Q}_1(t_1) = 0 &\rightarrow a_1 + 2a_2t_1 + 3a_3t_1^2 = 0 \\ \ddot{Q}_1(t_1) = 0 &\rightarrow 2a_2 + 6a_3t_1 = 0. \end{aligned}$$

Prethodne izraze potrebno je zapisati u matričnom obliku $\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{q}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 \\ 0 & 1 & 2t_1 & 3t_1^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

iz čega se uz poznate vrijednosti t_1 , t_2 , q_1 i q_2 lako odredi rješenje za koeficijente polinoma Q_1 . Sada je potrebno provesti sličan postupak za drugi segment trajektorije, za kojeg iz tablice 5 iščitavamo sljedeće rubne uvjete:

$$Q_2(t_2) = q_2$$

$$Q_2(t_3) = q_3$$

$$\dot{Q}_2(t_3) = 0$$

$$\ddot{Q}_2(t_3) = 0.$$

pa je ponovno potreban polinom trećeg stupnja:

$$Q_2(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3.$$

Sličnim postupkom kao za prvi segment dobije se sljedeće rješenje:

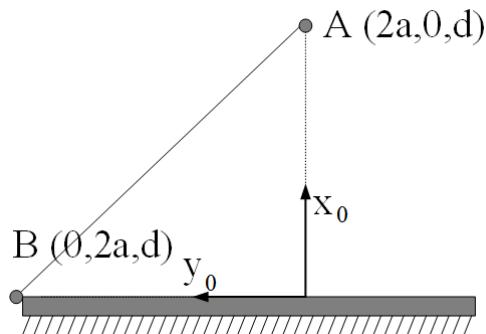
$$\begin{bmatrix} 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 \\ 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 \\ 0 & 1 & 2t_3 & 3t_3^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Slično kao u primjeru 2, da je uz uvjete iz tablice 5 u zadatku bilo potrebno osigurati i neprekinitost brzine na cijeloj trajektoriji, bilo bi dodatno potrebno osigurati da je $\dot{Q}_1(t_2) = \dot{Q}_2(t_2)$ (na segmentima je neprekinitost brzine osigurana činjenicom da se koriste polinomi te ju je potrebno osigurati u međutočkama), što je uvjet na polinom Q_2 (jer se prije proračuna koeficijenata za Q_1 ne zna kojom će brzinom robot doći u točku (q_2, t_2)). To znači da bi polinom Q_2 trebao biti četvrtog stupnja. Postupak za zapis rješenja u matričnom obliku je isti, samo što bi matrica \mathbf{T} bila dimenzija 5×5 .

23. ZADATAK

U nekom industrijskom postrojenju nalazi se robot pričvršćen na fiksnu bazu L_0 . Robot ima zadatak pravocrtno obraditi predmet gibajući se od točke A prema točki B na slici 27. Robot je zadan DH tablicom 6.

- Skicirajte robota u početnom položaju
- Provode Taylorov postupak najmanjih odstupanja vodeći računa da je željena točnost obrade predmeta $\epsilon \leq 0.5a$
- Za putanju dobivenu Taylorovim postupkom provede postupak planiranja trajektorije jedinstvenim polinomom tako da zadovoljite mirovanje ($\dot{q} = 0$) na početku i kraju trajektorije.
- Optimirajte prethodno dobivenu trajektoriju tako da zadovoljite najbrže moguće gibanje. Pri tome vodite računa da je proizvođač postavio ograničenja brzina zglobova na sljedeći način: Translacijski 0.5 m/s , Rotacijski 0.5 rad/s



Slika 27: Koordinatni sustav baze robota i radni prostor u industrijskom okruženju.

θ	d	α	a
q_1	$\frac{d}{2}$	0	0
0	q_2	$\frac{\pi}{2}$	0
q_3	0	0	a
q_4	0	0	a

Tablica 6: Tablica DH parametara RTRR robota

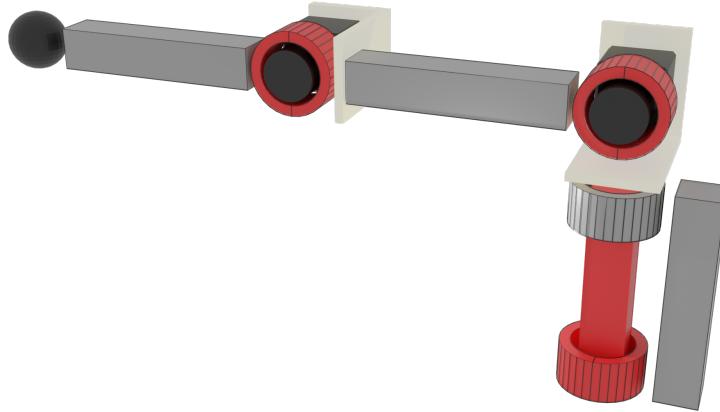
RJEŠENJE

Prema zadanoj DH tablici parametara, direktnim uvrštavanjem moguće je odrediti matricu transformacije $\mathbf{T}_0^T(\mathbf{q})$, to jest rješenje direktne kinematike. S druge strane, rješenje inverzne kinematike moguće je odrediti analitičkim pristupom ili geometrijskom metodom. U ovom će se rješenju skicirati geometrijski pristup.

- Skica robota u početnom položaju prikazana je slikom 28.
- Korak 1:** Taylorov postupak najmanjih odstupanja započinjemo prvim korakom, provjerom odstupanja sredine puta u prostoru zglobova $\mathbf{q}_m = \frac{\mathbf{q}_A - \mathbf{q}_B}{2}$ od sredine predviđene putanje $\mathbf{p}_M = \frac{\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_B}{2}$. Pri tome usporedbu provodimo u kartezijskom prostoru, prema tome, direktnom kinematičkom računamo $\mathbf{p}_m(\mathbf{q}_m) \sim \mathbf{T}_0^T(\mathbf{q}_m)$ (Vidi tablicu 7). Računanjem euklidske udaljenosti točaka \mathbf{p}_m i \mathbf{p}_M

\mathbf{q}_A	\mathbf{q}_m	\mathbf{q}_B	\mathbf{p}_A	\mathbf{p}_M	\mathbf{p}_B	\mathbf{p}_m
0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$2a$	a	0	$\sqrt{2}a$
$\frac{d}{2}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{d}{2}$	0	a	$2a$	$\sqrt{2}a$
0	0	0	d	d	d	d
0	0	0				

Tablica 7: Tablica prvog koraka Taylorovog postupka



Slika 28: Skica robota u početnom položaju $\mathbf{q} = [0, 0, 0, 0]$. Crvenom bojom istaknuti su zglobovi robota.

dobit ćemo:

$$\|\mathbf{p}_m - \mathbf{p}_M\| = a \left(2 - \sqrt{2} \right) > \epsilon = 0.5a.$$

Radi postizanja željene točnosti odstupanja ϵ rezultat prvog koraka Taylorov postupka je dodati novu točku putanje $\mathbf{p}_C = \mathbf{p}_M$. Pri tome, položaj zglobova \mathbf{q}_C , računamo pomoću inverzne kinematike.

Korak 2: Rekurzijom, Taylorov postupak se nastavlja između točaka \mathbf{p}_A i \mathbf{p}_C , odnosno \mathbf{p}_B i \mathbf{p}_C . Provjera između točaka \mathbf{p}_A i \mathbf{p}_C rezultira veličinama prikazanim u tablici 8. Računanjem euklidske

\mathbf{q}_A	\mathbf{q}_m	\mathbf{q}_C	\mathbf{p}_A	\mathbf{p}_M	\mathbf{p}_C	\mathbf{p}_m
0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$2a$	$3\frac{a}{2}$	a	$1.7071a$
$\frac{d}{2}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{d}{2}$	0	$\frac{a}{2}$	a	$0.7071a$
0	$-\frac{\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{4}$	d	d	d	d
0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$				

Tablica 8: Tablica drugog koraka Taylorovog postupka

udaljenosti točaka \mathbf{p}_m i \mathbf{p}_M dobit ćemo:

$$\|\mathbf{p}_m - \mathbf{p}_M\| \sim 0.2929a < \epsilon = 0.5a.$$

Sukladno rezultatu nije potrebno dodati novu točku putanje. Isti postupak potrebno je ponoviti između točaka \mathbf{p}_B i \mathbf{p}_C , ali kako je položaj robota simetričan s obzirom na zadane točke putanje rezultat će biti isti.

- c) Uz postojeće uvjete položaja robota \mathbf{p}_A , \mathbf{p}_B i \mathbf{p}_C , potrebno je uključiti dodatne uvjete $\dot{\mathbf{q}}(0) = 0$ i $\dot{\mathbf{q}}(\Delta t_C + \Delta t_B) = 0$. Pri čemu se vremena Δt_C i Δt_B razmatraju kao parametrijsko vrijeme:

$$\Delta t_C = \max\|\mathbf{q}_C - \mathbf{q}_A\| = \frac{\pi}{2}, \Delta t_B = \max\|\mathbf{q}_B - \mathbf{q}_C\| = \frac{\pi}{2}.$$

Ukupno 5 uvjeta moguće je udovoljiti polinomom 4. stupnja koji ima 5 slobodnih parametara:

$$q_i(t) = a_{4,i}t^4 + a_{3,i}t^3 + a_{2,i}t^2 + a_{1,i}t + a_{0,i}, \forall i \in 1 \dots 4$$

$$\dot{q}_i(t) = 4a_{4,i}t^3 + 3a_{3,i}t^2 + 2a_{2,i}t + a_{1,i}, \forall i \in 1 \dots 4$$

Zbog jednostavnosti promatrati ćemo samo zglob 4 koji ujedno prelazi i naj dulji put, pa prema tome mora ostvariti najbrže gibanje. Rješavanjem prethodno navedenih uvjeta, dobiju se sljedeće jednadžbe za koeficijente polinoma:

$$q_4(0) = 0 \longrightarrow a_{0,4} = 0$$

$$\dot{q}_4(0) = 0 \longrightarrow a_{1,4} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{4,4} \\ a_{3,4} \\ a_{2,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Delta t_B + \Delta t_C)^4 & (\Delta t_B + \Delta t_C)^3 & (\Delta t_B + \Delta t_C)^2 \\ \Delta t_C^4 & \Delta t_C^3 & \Delta t_C^2 \\ 4(\Delta t_B + \Delta t_C)^3 & 3(\Delta t_B + \Delta t_C)^2 & 2(\Delta t_B + \Delta t_C) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) Maksimalna brzina trajektorije može se odrediti izjednačavanjem njezine prve derivacije s nulom:

$$\ddot{q}_4(t) = 12a_{4,4}t^2 + 6a_{3,4}t + 2a_{2,4} = 0.$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe možemo odrediti trenutak t_{max} u kojem se postiže maksimalna brzina trajektorije:

$$t_{max} = \frac{-6a_{3,4} \pm \sqrt{36a_{3,4}^2 - 92a_{4,4}a_{2,4}}}{24a_{4,4}}$$

Uvrštavanjem tako dobivenih vremena u jednadžbu brzine možemo izračunati $\dot{q}_{4,max}$. Ukoliko je ta brzina veće od dozvoljenog maksimuma $0.5 \frac{rad}{s}$, računa se faktor skaliranja,

$$s = \frac{\dot{q}_{4,max}}{0.5}$$

te se vremena Δt_C i Δt_B pomnože s faktorom skaliranja. Čitav postupak se ponavlja dok nije zadovoljen dinamički uvjet maksimalne dozvoljene brzine.

Rezultat provođenja ovog iterativnog postupka priložen je u tablici 9.

iter	Δt_C	Δt_B	t_{max}	s	$\dot{q}_{4,max}$	$a_{4,4}$	$a_{3,4}$	$a_{2,4}$
1	1.5708	1.5708	0.62687	3.0714	1.5357	0.25801	-1.6211	2.5465
2	4.8245	4.8245	1.9254	1	0.5	0.0028993	-0.055952	0.26994

Tablica 9: Tablica optimiranja brzine trajektorije

24. ZADATAK

Vrh alata planarnog dvoosnog TT manipulatora nalazi se u točki $a = (x_a, y_a)$ i miruje. Za obavljanje nekog zadatka potrebno je prvo dovesti alat u točku $b = (x_b, y_b)$ i zatim ga zaustaviti u točki $c = (x_c, y_c)$.

- Isplanirajte trajektoriju vrha alata robota kroz navedene točke metodom *splineova* s minimalnim stupnjem polinoma koja osigurava kontinuiranost brzina vrha alata. Dovoljno je postaviti matričnu jednadžbu za koeficijente polinoma.
- Napišite općeniti izraz za parametričko vrijeme kod planiranja trajektorije Ho-Cook metodom.
- Ako je parametričko vrijeme za prvi segment dvostruko veće od parametričkog vremena za drugi segment trajektorije, kakav će biti odnos konačnih vremena prelaska segmenata trajektorije nakon završetka planiranja gibanja Ho-Cook metodom?

25. ZADATAK

Autopilot zrakoplova mora izvesti manevar skretanja koji započinje u točki p_1 , pri čemu je trenutna brzina zrakoplova v_1 . Manevar završava u točki p_1 s brzinom zrakoplova v_2 .

- Koji je minimalni stupanj polinoma kojim autopilot mora interpolirati trajektoriju zrakoplova kako bi osigurao da zrakoplov prođe zadanim točkama uz zadane brzine?
- Odredite izraze za koeficijente polinoma koji interpolira trajektoriju zrakoplova ako je trajanje manevra T .
- Koji je minimalni stupanj polinoma koji može osigurati i jednolikost brzina na početku i na kraju manevra?

26. ZADATAK

Autopilot zrakoplova mora izvesti manevar skretanja koji započinje u točki \mathbf{p}_1 , pri čemu je trenutna brzina zrakoplova \mathbf{v}_1 . Manevar završava u točki \mathbf{p}_2 .

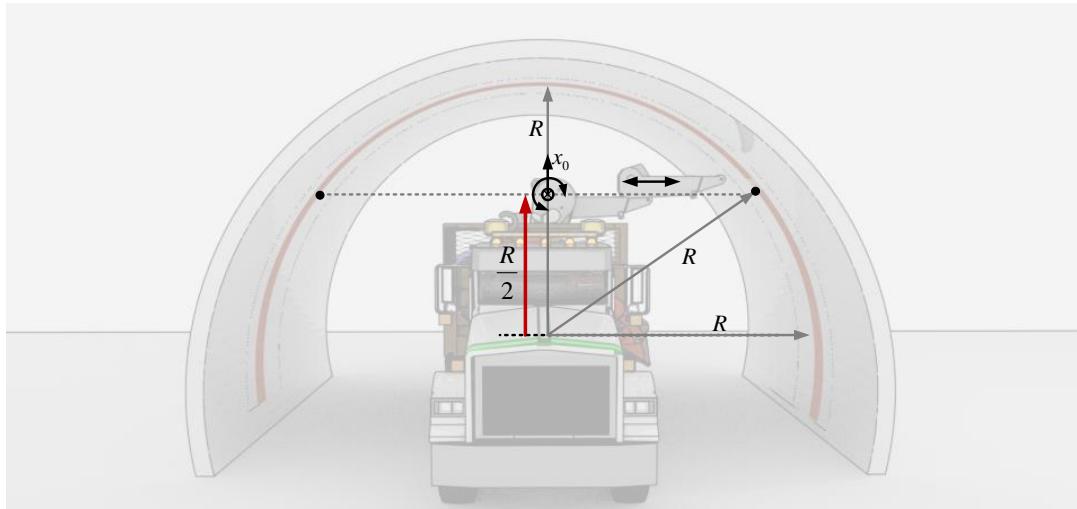
- Koji je minimalni stupanj polinoma kojim autopilot mora interpolirati trajektoriju zrakoplova kako bi osigurao da zrakoplov prođe zadanim točkama?
- Odredite izraze za koeficijente polinoma koji interpolira trajektoriju zrakoplova ako je trajanje manevra T .
- Koji je minimalni stupanj polinoma koji može osigurati i postizanje željene brzine na kraju manevra, \mathbf{v}_1 , i jednolikost brzina na početku i na kraju manevra?

27. ZADATAK

Tvrtka ROBO-Skladgradnja dobila je posao bojanja tunela Mala Kapela. Radi ubrzavanja i automatiziranja postupka tvrtka je investirala u robotsku ruku koja je pričvršćena na vozilo. Građevinski odjel izvršio je potrebne izmjere i označio ih na slici 29. Vaš zadatak je:

- Odrediti DH parametre robota s obzirom na koordinatni sustav L_0 . Pri tome zanemarite sitno odstupanje translacijskog zglobova vidljivo u x_0 osi.
- Koristeći se Taylorovim postupkom, odredite putanju robota kojom će se izvršiti bojanje tunela, ako znate da je potrebna točnost $\epsilon = \frac{\sqrt{3}-1}{2} R$
- Za dobivenu putanju isplanirajte trajektoriju oba zglobova, jedinstvenim polinomom, tako da osigurate mirovanje ($\dot{q} = 0$) na početku i kraju trajektorije.

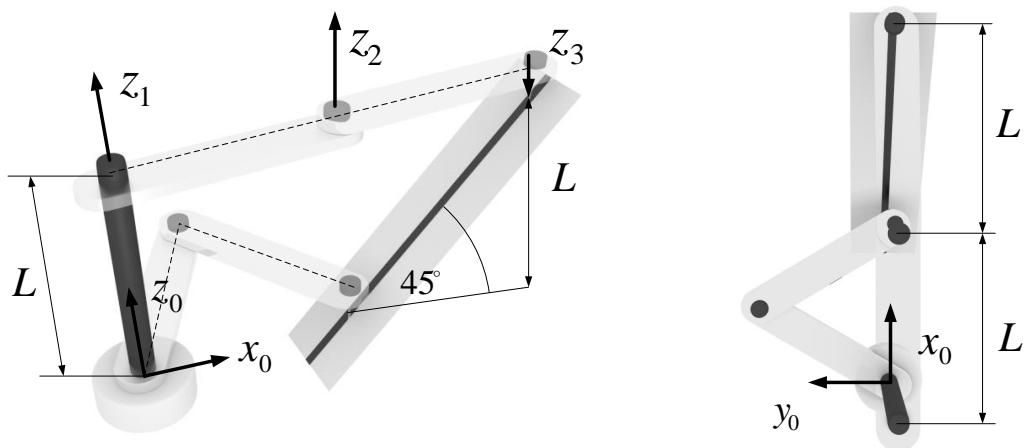
Napomena: Koristite parametrijsko vrijeme. Vodite računa da je željeno gibanje robota kružnica, a ne pravac te da je tunel simetričan s obje strane kamiona.



Slika 29: TR robot konstruiran za primjenu u bojanju tunela.

28. ZADATAK

SCARA robot TRR namjenjen je obradi lima u tvornicama. Na slici 30 prikazan je prilikom obrade lima nakošenog pod kutem od 45 stupnjeva u odnosu na bazu robota. Robot mora pravocrtno izrezati limenu ploču unutar dimenzija označenih na slici.



Slika 30: SCARA robot TRR pri obradi materijala.

- a) Metodom Taylorovih najmanjih odstupanja odredite potrebnii broj točaka kako biste obradili površinu. Robot mora krenuti od točke $(2L, 0, L)$ a završiti obradu u točki $(L, 0, 0)$. Pri tome robot mora obraditi materijal po dužini koja spaja te dvije točke, s odstupanjem mjerenim po Euklidskoj udaljenosti $\|\cdot\| < \frac{\sqrt{3}}{2}L$.

Pozicija vrha alata TRR robota dana je sljedećim izrazom:

$$\mathbf{P}_0^3 = \begin{bmatrix} L \cos(q_2) + L \cos(q_2 + q_3) \\ L \sin(q_2) + L \sin(q_2 + q_3) \\ q_1 \end{bmatrix}.$$

29. ZADATAK

Robotska TT ruka koristi se za brušenje zakrivljene grede kao što je prikazano na slici 31. Vrijednosti varijabli zglobova robota u položaju sa slike 31 su $\mathbf{q} = [0, 0]^T$. Vaš zadatak je:

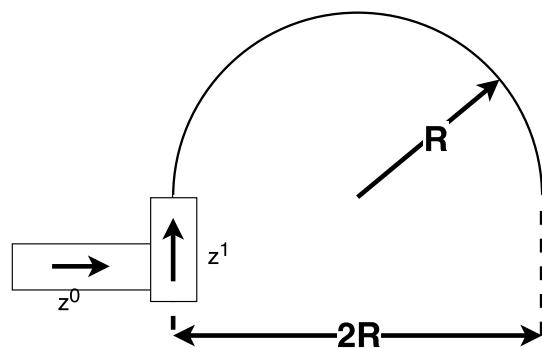
- a) Koristeći se Taylorovim postupkom, odredite putanju robota kojom će se izvršiti brušenje grede, ako znate da je potrebna točnost $\epsilon < \frac{R}{2}$.
- b) Prepostavite da se robotom upravlja zadavanjem početne i krajnje točke u prostoru zglobova te da je prvi zglob robota za brušenje značajno brži od drugog. Skicirajte putanju vrha alata robota pri takvom upravljanju korištenjem točaka iz prvog dijela zadatka.

Napomena: Koristite parametrijsko vrijeme. Vodite računa da je greda oblika polukružnice. Zanemarite ograničenja zglobova i debljine članaka.

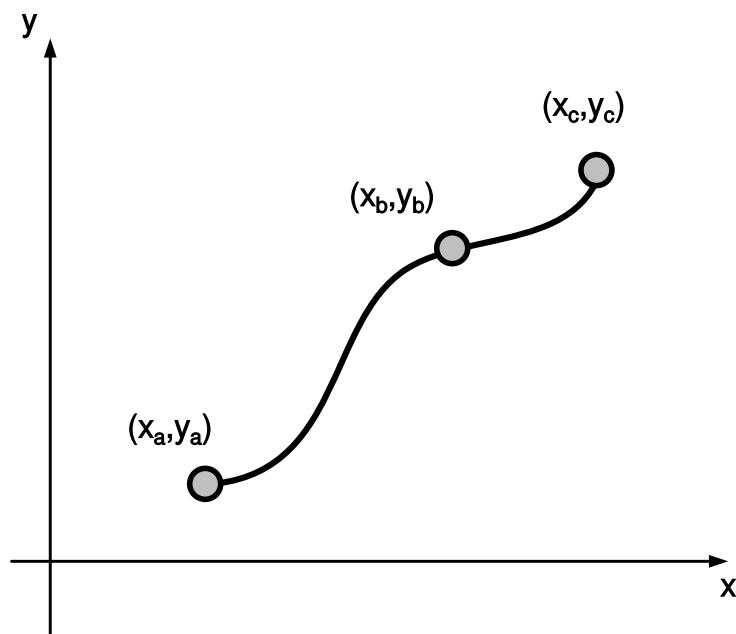
30. ZADATAK

Na Slici 32 prikazana je zadana putanja vrha alata dvoosnog planarnog TT manipulatora kroz tri točke a, b, c.

Ispolnirajte trajektoriju robota kroz navedene točke metodom Splineova s *minimalnim* stupnjem polinoma. Pri tome prepostavite početne uvjete brzina $v_x = v_y = 0$ te uvjet kontinuiranosti brzina. *Nije dozvoljeno* postavljati dodatne uvjete na trajektoriju.



Slika 31: TT robot za brušenje grede.



Slika 32: Putanja vrha alata TT robota

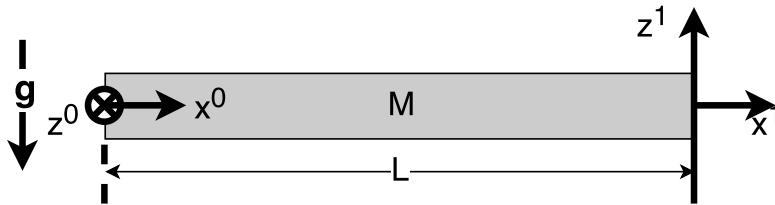
Dinamika krutog tijela

31. ZADATAK

Robotski članak mase M i duljine L treba zavrtiti oko osi z^0 , kao što je prikazano na slici 33. Zanemarivši trenje u zglobovima, Lagrange-Eulerovom metodom:

- Odredite koliki je zakretni moment potreban da biste vrtili štap oko osi z^0 .
- Odredite razliku momenta potrebnog za vrtnju štapa oko osi z^0 i momenta potrebnog da biste štap vrtili oko osi z^1 u položaju sa slike 33.

Napomena: Pazite na smjer djelovanja gravitacijske sile.



Slika 33: Članak robotskog manipulatora.

RJEŠENJE

Lagrange-Eulerova metoda temelji se na poznavanju kinetičke i potencijalne energije tijela. Kinetiku energiju čine moment tromosti i kutna brzina te masa i linearna brzina tijela. Razmatrana potencijalna energija je gravitacijska potencijalna energija koju čine masa i pozicija tijela. Prema tome, prvi korak rješavanja zadatka je određivanje pozicije i brzine robotskog članka.

Poziciju članka određujemo pomoću matrice transformacije, za koju je potrebno postaviti koordinatne osi prema DH pravilima. S obzirom da su z osi članka zadane u zadatku, preostaje postaviti preostale osi (x odnosno y) vodeći računa o pravilima DH metode. Jedno od mogućih rješenja prikazano je na slici 34. Za tako postavljene koordinatne sustave vrijede DH parametri prikazani u tablici i sljedeća matrica transformacije.

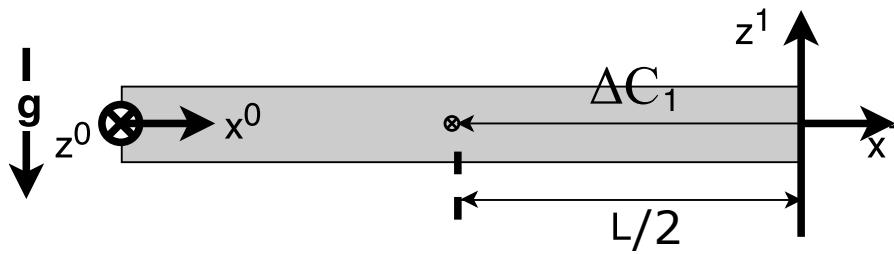
$$T_0^1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & Lc_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & Ls_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Θ	d	α	a
q_1	0	$\frac{\pi}{2}$	L

S obzirom da gravitacija djeluje u centru mase članka robota, potrebno je odrediti poziciju centra mase roboata u odnosu na koordinatni sustav L_0 . S obzirom da transformacijska matrica T_0^1 preslikava koordinate sustava L_1 u koordinatni sustav L_0 , potrebno je odrediti koordinate centra mase članka 1 u koordinatom sustavu L_1 . Potom ih pomoću matrice transformacije T_0^1 jednostavno preslikamo u koordinatni sustav L_0 . Prema slici 34 te koordinate glase:

$$\Delta \mathbf{C}_1 = [-\Delta C \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T = \left[-\frac{L}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \right]^T$$

Pri tome koristimo zapis u homogenim koordinatama. Nakon transformacije i množenja s matricom pretvorbe homogenih koordinata H , dobije se izraz za poziciju centra mase članka u koordinatnom sustavu baze, L_0 .



Slika 34: Pomak koordinatnog sustava L_1 u centar mase članka za ΔC_1 , promatran iz koordinatnog sustava L_1 .

$$C_1 = HT_0^1 \Delta C_1 = \frac{L}{2} [c_1 \quad s_1 \quad 0]^T$$

Gravitacijski vektor u koordinatnom sustavu L_0 glasi $\mathbf{g} = g [0 \quad 1 \quad 0]^T$. Konačno pišemo izraz za gravitacijsku potencijalnu energiju članka:

$$E_g = mg\mathbf{c} = mg\frac{L}{2} [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} c_1 \\ s_1 \\ 0 \end{bmatrix}^T = mg\frac{L}{2} s_1$$

Kinetičku energiju čine masa i moment inercije, zajedno s linearom i kutnom brzinom tijela. Iz izraza 31 vidljivo je da se pozicija centra mase članka mijenja ovisno o zakretu q_1 . Kako bismo odredili brzinu članka, potrebno je derivirati izraz za poziciju 31. Pri tome valja imati na umu kako je pozicija funkcija zakreta. Rješenje stoga uključuje parcijalnu derivaciju pozicije po zakretu, te parcijalnu derivaciju zakreta po vremenu.

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} &= \frac{L}{2} \left[\frac{d}{dt} \cos(q_1) \quad \frac{d}{dt} \sin(q_1) \quad 0 \right]^T \\ &= \frac{L}{2} \left[\frac{\partial \cos(q_1)}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial t} \quad \frac{\partial \sin(q_1)}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial t} \quad 0 \right]^T \\ &= \frac{L}{2} \frac{\partial q_1}{\partial t} [-\sin(q_1) \quad \cos(q_1) \quad 0]^T \end{aligned}$$

S druge strane kutna brzina članka očito je povezana sa zakretom q_1 oko zadane osi z_0 , tj. s njegovom brzinom $\omega = \frac{\partial q_1}{\partial t}$. Preostaje još postaviti smjer vektora kutne brzine u smjeru osi z_0 oko koje se članak rotira. Vektor kutne brzine stoga glasi:

$$\hat{\omega}_1 = \frac{\partial q_1}{\partial t} [0 \quad 0 \quad 1]^T$$

Vektori što množe brzinu zakreta članka $\frac{\partial q_1}{\partial t}$ dio su Jacobian matrice. Jacobian matrica općenito preslikava brzine zakreta zglobova robota u linijske i kutne brzine članka. U ovom slučaju, Jacobian matrica glasi:

$$\begin{aligned} J^1 &= \left[-\frac{L}{2} s_1 \quad \frac{L}{2} c_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \right]^T \\ A^T &= -\frac{L}{2} [-s_1 \quad c_1 \quad 0]; B = [0 \quad 0 \quad 1]^T \end{aligned}$$

U određivanju kinetičke energije preostaje još samo odrediti moment tromosti članka. Moment tromosti članka određuje se s obzirom na njegov centar mase. U tu svrhu koordinatni sustav L_1 translatiramo po x_1 u centar mase prvog (i jedinog) članka L_{c1} 34. Potom računamo tenzor momenta tromosti, vodeći računa o infitezimalnoj širini štapa u odnosu na njegovu duljinu:

$$D_{ck}|_{k=1} = D_{c1} = m \frac{L^2}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = m \frac{L^2}{12} diag(0, 1, 1)$$

pri čemu se uvodi skraćeni zapis $diag(0, 1, 1)$, koji označava dijagonalnu matricu čiji su elementi na dijagonali jednaki elementima u zagradi skraćenog zapisa. Kako bi izračunali moment kojim je potrebno zavrtiti članak, potrebno je tenzor inercija članka transformirati iz koordinatnog sustava centra mase u koordinatni sustav hvatišta, tj. baze L_0 . Izdvojimo li rotacijski dio R_0^1 matrice transformacije T_0^1 , možemo pisati izraz za transformaciju momenta tromosti članka:

$$D_1 = R_0^1 D_{c1} R_0^{1T} = m \frac{L^2}{12} \begin{bmatrix} s_1^2 & -s_1 c_1 & 0 \\ -s_1 c_1 & c_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kinetičku energiju štapa čine rotacijska i translacijska kinetička energija zajedno. Ukupnu kinetičku energiju računamo izrazom:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \hat{\omega}_1^T \times D_1 \times \hat{\omega}_1 + \frac{1}{2} m_1 v_1^T \times v_1 \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}_1 [B^T \times D_1 \times B] \dot{q}_1 + \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1 [A^T \times A] \dot{q}_1 = \frac{L^2}{6} m_1 \dot{q}_1 \end{aligned}$$

Lagrangeova funkcija definira se kao razlika između kinetičke i potencijalne energije. Prema tome, Lagrangeova jednadžba za dani zadatak glasi:

$$\begin{aligned} L(q_1, \dot{q}_1) &= E_k(q_1, \dot{q}_1) - E_g(q_1, \dot{q}_1) \\ &= \frac{L^2}{6} m_1 \dot{q}_1^2 - m_1 g \frac{L}{2} c_1 \end{aligned}$$

Primjenom Lagrange-Eulerove metode moment M_1 kojim Ivica mora zavrtiti štap glasi:

$$M_1 = \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial t} L(q_1, \dot{q}_1) - \frac{\partial}{\partial t} L(q_1, q_1) = \frac{m_1 L^2}{3} \ddot{q} - g m_1 c_1 \frac{L}{2}$$

32. ZADATAK

Izračunajte kinetičku energiju RT manipulatora sa slike 35! Pri tome su mase članaka m_1 i m_2 , a širina članka je zanemariva u odnosu na duljinu.

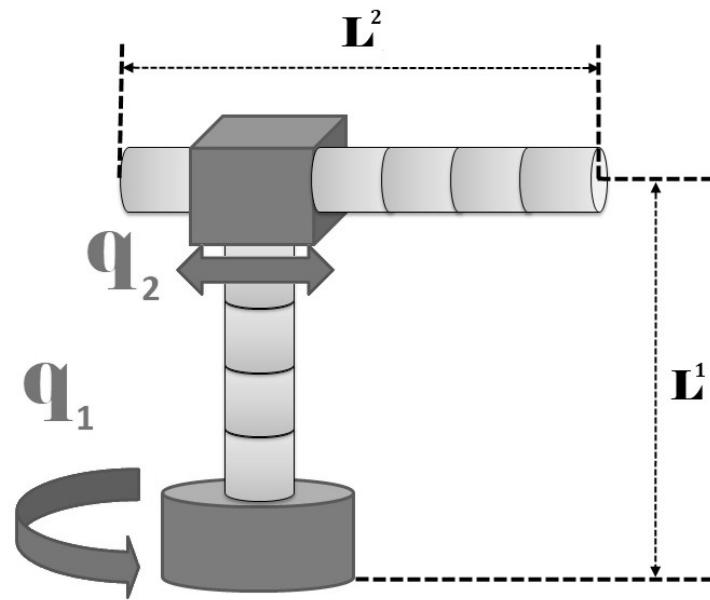
RJEŠENJE

Rješenje počinje s postavljanjem koordinatnih sustava zglobova prema pravilima DH postupka te određivanjem matrica transformacije zglobova. Postavljene osi prikazane su na slici 36. DH parametri prikazani su u tablici s pripadajućim matricama transformacija 11 i 12.

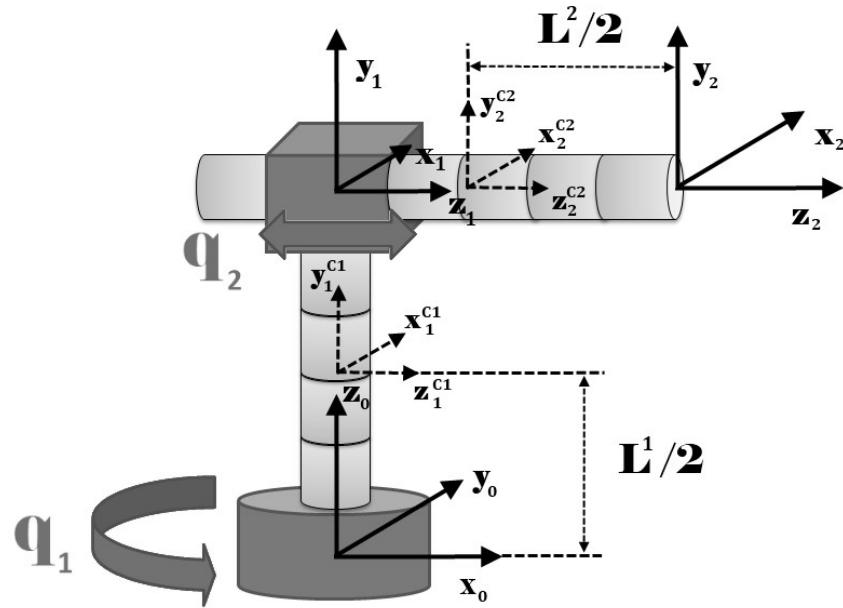
Θ	d	α	a
$q_1 + \frac{\pi}{2}$	L_1	$\frac{\pi}{2}$	0
0	$L_2 + q_2$	0	0

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} -s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$T_0^2 = \begin{bmatrix} -s_1 & 0 & c_1 & (L_2 + q_2) c_1 \\ c_1 & 0 & -s_1 & (L_2 + q_2) s_1 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$



Slika 35: RT manipulator.



Slika 36: RT manipulator s postavljenim koordinatnim sustavima zglobova i članaka.

Potom postavljamo koordinatne sustave centra mase članka. Koordinatni sustav centra mase prvoga članka postavlja se tako da se koordinatni sustav L_1 translatira u centar mase prvog članka. Koordinatni sustav centra mase drugog članka dobije se translatiranjem koordinatnog sustava L_2 u centar mase drugog članka. Općenito, centar mase n-tog članka dobije se translatiranjem koordinatnog sustava L_n u njegov centar mase. Vektori translacije koordinatnog sustava L_n u centar mase n-tog članka ΔC_n promatraju se u koordinatnom sustavu L_n . Vektori translacije prvog i drugog članka dani su jednadžbama:

$$\Delta C_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{L_1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (13)$$

$$\Delta C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{L_2}{2} & 1 \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

Pri tome koristimo zapis u homogenim koordinatama. Nakon transformacije i množenja s matricom pretvorbe homogenih koordinata H , dobije se izraz za pozicije centara mase članaka u koordinatnom sustavu baze, L_0 .

$$C_2 = HT_0^2 \Delta C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{L_1}{2} \end{bmatrix}^T \quad (15)$$

$$C_2 = HT_0^2 \Delta C_2 = \left[\left(q_2 - \frac{L_2}{2} \right) c_1 \quad \left(q_2 - \frac{L_2}{2} \right) s_1 \quad 0 \right]^T \quad (16)$$

Kako bismo odredili brzinu članka, potrebno je izračunati Jacobian matrice članaka. Jacobijan matrica preslikava brzine zglobova u linijske i kutne brzine članka. Pošto zadani robot ima 2 zgloba, iz formalnih razloga Jacobian matrica mora imati 2 stupca, po jedan za svaki zglob robota. S druge strane, očito je da linijski pomak drugog zgloba ne utječe niti na promjenu pozicije niti na promjenu orijentacije prvog članka. Zato je drugi stupac Jacobijan matrice J^1 nul-sutpac. Jacobian matrica prvoga članka glasi:

$$J^1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial q_1} & 0 \\ \xi_1 z_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Drugi zglob dakako translatira drugi članak, pa samim time utječe na poziciju njegovog centra mase. Nadalje, prvi zglob zakreće i drugi članak te stoga mijenja njegovu orijentaciju. Iz ovog razmatranja slijedi da Jacobijan matrica drugog članka J^2 ima oba stupca $\frac{\partial C_2}{\partial q_1}, \frac{\partial C_2}{\partial q_2}$ različita od nule. Budući da je drugi zglob translacijski, ne utječe na promjenu orijentacije drugog članka.

$$J^2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_2}{\partial q_1} & \frac{\partial C_2}{\partial q_2} \\ \xi_1 z_1 & \xi_2 z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{L_2}{2} + q_2\right) s_1 & c_1 \\ -\left(\frac{L_2}{2} + q_2\right) c_1 & s_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Za određivanje kinetičke energije manipulatora potrebno je dodatno odrediti mase i momente inercije članaka. Kao u prethodnom zadatku, započinjemo s određivanjem momenta inercije članaka u koordinatnim sustavima centra mase, koji u ovom slučaju glase:

$$D_{C1} = \frac{m_1 L_1^2}{12} \text{dijag}(1, 0, 1) \quad (19)$$

$$D_{C2} = \frac{m_2 L_2^2}{12} \text{dijag}(1, 1, 0) \quad (20)$$

Potom dobivene momente inercije, pomoću matrica R_0^1 i R_0^2 , transformiramo u koordinatni sustav baze L_0 :

$$D_1 = R_0^1 D_{C1} R_0^{1T} = \begin{bmatrix} s_1^2 + c_1^2 & -s_1 c_1 & 0 \\ -s_1 c_1 & s_1^2 + c_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$D_2 = R_0^2 D_{C2} R_0^{2T} = \begin{bmatrix} s_1^2 & -s_1 c_1 & 0 \\ -s_1 c_1 & c_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

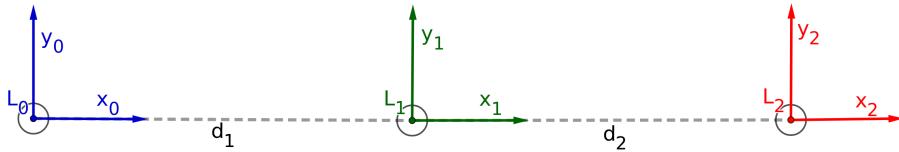
Konačno imamo sve elemente potrebne za računanje kinetičke energije manipulatora:

$$\begin{aligned} E_k &= \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{2} \vec{\omega}_i^T \mathbf{D}_i \vec{\omega}_i + \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^T \times \vec{v}_i \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2] \left\{ \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{B}_i + m_i \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i \right\} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \\ &= \dot{q}_1 \frac{m_2}{3} (L_2^2 + 3L_2 q_2 + 3q_2^2) + \dot{q}_2^2 m_2 \end{aligned} \quad (23)$$

33. ZADATAK

Koristeći sliku 37 i D-H parametre robota opisane u Tablici 10 potrebno je koristeći Lagrangeovu funkciju izvesti dinamički model manipulatora.

RJEŠENJE



Slika 37: Na slici se nalazi RR manipulator. Sastoji se od dva članka duljine d_1 i d_2 te dva rotacijska zgoba čije su osi rotacije jedinični vektori \hat{z}_0 i \hat{z}_1 . Pretpostaviti da su članci infinitezimalno tanki homogeni štapovi mase m_1 , odnosno m_2 .

Θ	α	d	a
q_0	0	0	d_1
q_1	0	0	d_2

Tablica 10: Denavit-Hartenberg parametri za zadani manipulator na slici 37.

- Koristeći Lagrangeovu funkciju izvesti dinamički model manipulatora.
- homogene matrice transformacija \mathbf{T}_0^1 i \mathbf{T}_0^2

$$\mathbf{T}_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & d_1 \cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & d_1 \sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_1^2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & d_2 \cos(q_2) \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & d_2 \sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_0^2 = \mathbf{T}_0^1 \cdot \mathbf{T}_1^2 = \begin{bmatrix} \cos(q_1 + q_2) & -\sin(q_1 + q_2) & 0 & d_2 \cos(q_1 + q_2) + d_1 \cos(q_1) \\ \sin(q_1 + q_2) & \cos(q_1 + q_2) & 0 & d_2 \sin(q_1 + q_2) + d_1 \sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- jakobijske centra mase prvog i drugog članka $\mathbf{J}_1(\vec{q})$ i $\mathbf{J}_2(\vec{q})$,

Translacijski dio prve Jakobijske matrice $\mathbf{A}^1(\vec{q})$:

$$\Delta \mathbf{c}_1 = \left[-\frac{d_1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \right]^T$$

$$\vec{\mathbf{c}}_0^1 = \mathcal{H}_1 \cdot \mathbf{T}_0^1 \Delta \mathbf{c}_1 = \left[\frac{d_1}{2} \cos(q_1) \quad \frac{d_1}{2} \sin(q_1) \quad 0 \right]^T$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{c}}_0^1}{dt} = \frac{\partial \vec{\mathbf{c}}_0^1}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{\mathbf{c}}_0^1}{\partial q_2} \dot{q}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{d_1}{2} \sin(q_1) & 0 \\ \frac{d_1}{2} \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^1(\vec{q}) \dot{\vec{q}}$$

Rotacijski dio prve Jakobijske matrice $\mathbf{B}^1(\vec{q})$:

$$\vec{\varphi}_1 = q_1 \hat{\mathbf{z}}_0^0$$

$$\frac{d\vec{\varphi}_1}{dt} = \frac{\partial \vec{\varphi}_1}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{\varphi}_1}{\partial q_2} \dot{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^1(\vec{q}) \dot{\vec{q}}$$

Translacijski dio druge Jakobijske matrice $\mathbf{A}^2(\vec{q})$:

$$\Delta \mathbf{c}_2 = \left[-\frac{d_2}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \right]^T$$

$$\vec{\mathbf{c}}_0^2 = \mathcal{H}_1 \cdot \mathbf{T}_0^2 \Delta \mathbf{c}_2 = \left[\frac{d_2}{2} \cos(q_1 + q_2) + d_1 \cos(q_1) \quad \frac{d_2}{2} \sin(q_1 + q_2) + d_1 \sin(q_1) \quad 0 \right]^T$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{c}}_0^2}{dt} = \frac{\partial \vec{\mathbf{c}}_0^2}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{\mathbf{c}}_0^2}{\partial q_2} \dot{q}_2$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{d_2}{2} \sin(q_1 + q_2) - d_1 \sin(q_1) & -\frac{d_2}{2} \sin(q_1 + q_2) \\ \frac{d_2}{2} \cos(q_1 + q_2) + d_1 \cos(q_1) & \frac{d_2}{2} \cos(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^2(\vec{q}) \dot{\vec{q}}$$

Rotacijski dio druge Jakobijeve matrice $\mathbf{B}^2(\vec{\mathbf{q}})$

$$\vec{\varphi}_2 = q_1 \hat{\mathbf{z}}_0^0 + q_2 \hat{\mathbf{z}}_0^1$$

$$\frac{d\vec{\varphi}_2}{dt} = \frac{\partial \vec{\varphi}_2}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{\varphi}_2}{\partial q_2} \dot{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^2(\vec{\mathbf{q}}) \dot{\vec{\mathbf{q}}}$$

Konačan izraz Jakobijskih matrica:

$$\mathbf{J}_1(\vec{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^1(\vec{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{B}^1(\vec{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d_1}{2} \sin(q_1) & 0 \\ \frac{d_1}{2} \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_2(\vec{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^2(\vec{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{B}^2(\vec{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d_2}{2} \sin(q_1 + q_2) - d_1 \sin(q_1) & -\frac{d_2}{2} \sin(q_1 + q_2) \\ \frac{d_2}{2} \cos(q_1 + q_2) + d_1 \cos(q_1) & \frac{d_2}{2} \cos(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- tenzor inercije manipulatora $\mathbf{D}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$,

Tenzor inercije prvog članka u baznom koordinatnom sustavu \mathbf{I}_0^1 :

$$\mathbf{I}_1^1 = \frac{m_1 d_1^2}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_0^1 = R_0^1 I_1^1 (R_0^1)^T = \frac{m_1 d_1^2}{12} \begin{bmatrix} \sin(q_1)^2 & -\sin(q_1) \cos(q_1) & 0 \\ -\sin(q_1) \cos(q_1) & \cos(q_1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tenzor inercije drugog članka u baznom koordinatnom sustavu \mathbf{I}_0^2 :

$$\mathbf{I}_2^2 = \frac{m_2 d_2^2}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_0^2 = R_0^2 I_2^2 (R_0^2)^T$$

$$= \frac{m_2 d_2^2}{12} \begin{bmatrix} \sin(q_1 + q_2)^2 & -\sin(q_1 + q_2) \cos(q_1 + q_2) & 0 \\ -\sin(q_1 + q_2) \cos(q_1 + q_2) & \cos(q_1 + q_2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tenzor inercije manipulatora $\mathbf{D}(\vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}})$:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}}) &= \sum_{k=1}^2 \left[(\mathbf{A}^k)^T m_k \mathbf{A}^k + (\mathbf{B}^k)^T \mathbf{I}_0^k \mathbf{B}^k \right] \\ &= m_1 \begin{bmatrix} \frac{d_1^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} \frac{3d_1^2 + d_2^2 + 3d_1 d_2 \cos(q_2)}{3} & \frac{2d_2^2 + 3d_1 d_2 \cos(q_2)}{6} \\ \frac{2d_2^2 + 3d_1 d_2 \cos(q_2)}{6} & \frac{d_2^2}{3} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

- ukupnu kinetičku energiju $\mathcal{T}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}}) &= \frac{(\dot{\vec{\mathbf{q}}})^T \mathbf{D}(\vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}}) \dot{\vec{\mathbf{q}}}}{2} \\ &= \dot{q}_1^2 \left(\frac{d_1^2 m_1}{6} + \frac{m_2 d_1^2}{2} + \frac{m_2 \cos(q_2) d_1 d_2}{2} + \frac{m_2 d_2^2}{6} \right) + \\ &\quad \dot{q}_1 \dot{q}_2 \left(\frac{m_2 \cos(q_2) d_1 d_2}{2} + \frac{m_2 d_2^2}{3} \right) + \\ &\quad \dot{q}_2^2 \left(\frac{m_2 d_2^2}{6} \right)\end{aligned}$$

- Dinamički model manipulatora (bez utjecaja trenja)

Vektor gravitacije u koordinatnom sustavu L_0 :

$$\vec{\mathbf{g}} = g \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Ukupna potencijalna energija manipulatora $\mathcal{U}(\vec{\mathbf{q}})$:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(\vec{\mathbf{q}}) &= -\vec{\mathbf{g}}^T \sum_{k=1}^2 m_k \vec{\mathbf{c}}_0^k \\ &= m_1 \left(\frac{d_1 g \sin(q_1)}{2} \right) + m_2 \left(d_1 g \sin(q_1) + \frac{d_2 g \sin(q_1 + q_2)}{2} \right)\end{aligned}$$

Lagrangeva funkcija $\mathcal{L}(\vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}})$ i potrebne derivacije:

$$\mathcal{L}(\vec{\mathbf{q}}, \dot{\vec{\mathbf{q}}}) = \mathcal{T}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) - \mathcal{U}(\vec{\mathbf{q}})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} &= m_1 \left(-\frac{d_1 g \cos(q_1)}{2} \right) + m_2 \left(-\frac{g d_2 \cos(q_1 + q_2) + 2 g d_1 \cos(q_1)}{2} \right) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} &= m_1 \frac{d_1^2 \dot{q}_1}{3} + m_2 \left[d_1^2 \dot{q}_1 + \frac{d_2^2}{3} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + d_1 d_2 \cos(q_2) \left(\dot{q}_1 + \frac{\dot{q}_2}{2} \right) \right] \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) &= m_1 \frac{d_1^2 \ddot{q}_1}{3} + m_2 \left[d_1^2 \ddot{q}_1 + \frac{d_2^2}{3} (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \right. \\ &\quad + d_1 d_2 \cos(q_2) \left(\ddot{q}_1 + \frac{\dot{q}_2}{2} \right) \\ &\quad \left. - d_1 d_2 \dot{q}_2 \sin(q_2) \left(\dot{q}_1 + \frac{\dot{q}_2}{2} \right) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} &= -d_2 m_2 \left[\frac{d_1 \sin(q_2) \dot{q}_1}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \frac{g \cos(q_1 + q_2)}{2} \right] \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{d_2^2 m_2}{3} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \frac{d_1 d_2 \dot{q}_1 m_2 \cos(q_2)}{2} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) &= \frac{d_2^2 m_2}{3} (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + \frac{d_1 d_2 \ddot{q}_1 m_2 \cos(q_2)}{2} - \frac{d_1 d_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 \sin(q_2)}{2}\end{aligned}$$

Slijede Lagrangeove jednadžbe gibanja:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} &= \mathcal{Q}_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} &= \mathcal{Q}_2\end{aligned}$$

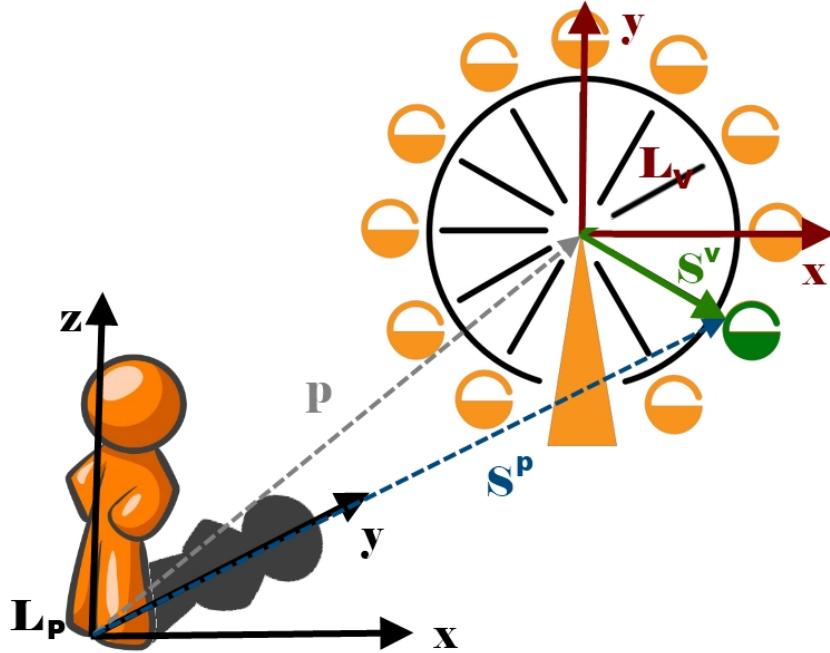
Gdje su \mathcal{Q}_1 i \mathcal{Q}_2 momenti prvog, odnosno drugog aktuatora manipulatora.

Sređivanjem (33) i (33) slijedi dinamički model manipulatora:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_2 &= m_2 d_2 \left[\frac{d_2}{3} + \frac{d_1 \cos(q_2)}{2} \right] \ddot{q}_1 + \frac{d_2^2 m_2}{3} \ddot{q}_2 + \\ &\quad m_2 d_2 \left[\frac{d_1 \sin(q_2)}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{g \cos(q_1 + q_2)}{2} \right] \\ \mathcal{Q}_1 &= \left[\frac{m_1 d_1^2}{3} + m_2 d_1^2 + m_2 d_2 \left(\frac{d_2}{3} + d_1 \cos(q_2) \right) \right] \ddot{q}_1 + \\ &\quad m_2 d_2 \left[\frac{d_2}{3} + \frac{d_1 \cos(q_2)}{2} \right] \ddot{q}_2 - \\ &\quad m_2 d_1 d_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - \frac{m_2 d_1 d_2 \sin(q_2)}{2} \dot{q}_2^2 + \\ &\quad m_1 \frac{d_1 g \cos(q_1)}{2} + m_2 \frac{g d_2 \cos(q_1 + q_2) + 2 g d_1 \cos(q_1)}{2} \end{aligned}$$

VREMENSKE PROMJENE VEKTORA U INERCIJALnim SUSTAVIMA

Prije nego što pristupimo rješavanju zadatka, razmotrimo jednostavnu situaciju na slici 38. Ova slika može pomoći u razjašnjavanju odnosa između fiksnog i pomičnog koordinatnog sustava, gdje vrtuljak predstavlja pomični, rotirajući sustav, dok mirni promatrač na zemlji predstavlja fiksni sustav. U odnosu na ishodište rotirajućeg koordinatnog sustava L_V , zelena kabina vrtuljka udaljena je za \mathbf{S}_v . Vrtuljak je udaljen od promatrača za konstantan iznos \mathbf{p} . Za udaljenost zelene kabine od nepomičnog sustava promatrača, zapisanu u fiksnom koordinatnom sustavu promatrača možemo pisati:



Slika 38: Opis slike.

$$\mathbf{S}_P(t) = \mathbf{p}_P + \mathbf{R}_P^V(t)\mathbf{S}_V(t) \quad (24)$$

gdje $\mathbf{R}_P^V(t)$ predstavlja matricu rotacije, zapisanu pomoću Eulerovih kuteva ϕ , θ i ψ :

$$\mathbf{R}_P^V(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} c\phi c\theta & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ s\phi c\theta & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi \end{bmatrix} \quad (25)$$

S obzirom da se vrtuljak ne miče s mesta, \mathbf{p} je konstantan vektor. Vrtuljak, a samim time i njegov koordinatni sustav vrte se brzinom $\boldsymbol{\Omega}_V$. Zbog te vrtnje, zelena se kabina u infitezimalno kratkom vremenu dt , u odnosu na koordinatni sustav promatrača dodatno zakrene za $\Delta\mathbf{R}_P^V = \mathbf{R}_P^V(\partial\phi, \partial\theta, \partial\psi)$. Formalno zapisano, vrtnja će u infitezimalno kratkom vremenu pomaknuti kabinu na novu udaljenost $\mathbf{S}_P(t + dt)$:

$$\mathbf{S}_P(t + dt) = \mathbf{p}_P + \mathbf{R}_P^V(\partial\phi, \partial\theta, \partial\psi)\mathbf{R}_P^V(t)\mathbf{S}_V(t + dt) \quad (26)$$

Nadalje, možemo zamisliti da se pod stalnim utjecajem gravitacijske, a pogotovo centrifugalne sile kabina pomiče u koordinatnom sustavu vrtuljka. Zbog toga se vektor $\mathbf{S}_V(t)$ u infitezimalno kratkom vremenu pomakne za iznos $\Delta\mathbf{S}_V$:

$$\mathbf{S}_V(t + dt) = \mathbf{S}_V(t) + \Delta\mathbf{S}_V \quad (27)$$

$\Delta\mathbf{S}_V$ je u stvari linearne promjene vektora, čiji je smjer u kordinatnom sustavu vrtuljka konstantan, a iznos se mijenja ovisno o promjeni duljine udaljenosti. Konačna promjena položaja zelene kabine linearne je kombinacija rotacijske i translacijske promjene vektora:

$$\mathbf{S}_P(t + dt) = \mathbf{p}_P + \Delta \mathbf{R}_P^V \mathbf{R}_P^V(t) [\mathbf{S}_V(t) + \Delta \mathbf{S}_V] \quad (28)$$

Uz aproksimaju malih kuteva i zanemarujući članove višeg reda, infinitezimalna rotacijska matrica $\Delta \mathbf{R}_P^V$ postaje:

$$\Delta \mathbf{R}_P^V(\partial\phi, \partial\theta, \partial\psi) = \begin{bmatrix} c\partial\phi c\partial\theta & c\partial\phi s\partial\theta s\partial\psi - s\partial\phi c\partial\psi & c\partial\phi s\partial\theta c\partial\psi + s\partial\phi s\partial\psi \\ s\partial\phi c\partial\theta & s\partial\phi s\partial\theta s\partial\psi + c\partial\phi c\partial\psi & s\partial\phi s\partial\theta c\partial\psi - c\partial\phi s\partial\psi \\ -s\partial\theta & c\partial\theta s\partial\psi & c\partial\theta c\partial\psi \end{bmatrix}$$

approx. $c\alpha_\phi \ll 1, s\alpha_\phi \ll \alpha$

$$d\mathbf{R}_P^V = \begin{bmatrix} 1 & -\partial\phi & \partial\theta \\ \partial\phi & 1 & -\partial\psi \\ -\partial\theta & \partial\psi & 1 \end{bmatrix}$$

Provjerite da vrijedi sljedeće:

$$d\mathbf{R}_P^V = \mathbf{I}_{3 \times 3} + \hat{\omega}dt \rightarrow d\mathbf{R}_P^V \mathbf{R}_P^V \mathbf{S}_V = \mathbf{I}_{3 \times 3} \mathbf{R}_P^V \mathbf{S}_V + \omega dt \times \mathbf{R}_P^V \mathbf{S}_V, \quad \omega = \left[\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad \frac{\partial\theta}{\partial t} \quad \frac{\partial\phi}{\partial t} \right]^T \quad (29)$$

gdje je ω vektor kutne brzine $\left[\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad \frac{\partial\theta}{\partial t} \quad \frac{\partial\phi}{\partial t} \right]^T$, $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ jedinična matrica 3. reda, a \times označava vektorski produkt. Iz prethodnog razmatranja slijedi:

$$\mathbf{S}_P(t + dt) = \mathbf{p}_P + \mathbf{I}_{3 \times 3} \mathbf{R}_P^V(t) \mathbf{S}_V(t) + \omega dt \times \mathbf{R}_P^V(t) \mathbf{S}_V(t) + \mathbf{I}_{3 \times 3} \mathbf{R}_P^V(t) \Delta \mathbf{S}_V + \omega dt \times \mathbf{R}_P^V(t) \Delta \mathbf{S}_V$$

$$\mathbf{S}_P(t + dt) = \mathbf{S}_P(t) + \omega dt \times \mathbf{R}_P^V(t) \mathbf{S}_V(t) + \mathbf{R}_P^V(t) \Delta \mathbf{S}_V + \omega dt \times \mathbf{R}_P^V(t) \Delta \mathbf{S}_V$$

Zbog umnoška dvaju infinitezimalnih komponenti, posljednji dio prethodnog izraza $\omega dt \times \mathbf{R}_P^V(t) \Delta \mathbf{S}_V$ se može zanemariti pa vrijedi:

$$\mathbf{S}_P(t + dt) - \mathbf{S}_P(t) = \omega dt \times \mathbf{R}_P^V \mathbf{S}_V + \mathbf{R}_P^V \Delta \mathbf{S}_V \quad (30)$$

Konačno, nakon što jednadžbu 30 s lijeve i desne strane podijelimo s infinitezimalnim vremenom dt dobijemo izraz za derivaciju pozicije zelene kabine u koordinatnom sustavu promatrača:

$$\frac{\partial \mathbf{S}_P(t)}{\partial t} = \omega \times \mathbf{R}_P^V \mathbf{S}_V + \mathbf{R}_P^V \dot{\mathbf{S}}_V \quad (31)$$

Promotrimo na trenutak prethodnu jednadžbu. Ona kaže da se derivacija vektora u koordinatnom sustavu promatrača sastoji od vektorskog umnoška rotacije koordinatnog sustava vrtuljka i vektora udaljenosti zelene kabine te skalarne derivacije duljine vektora udaljenosti kabine. Dodatno, matrični umnožak \mathbf{R}_P^V govori, da se svi vektori izražavaju u koordinatnom sustavu promatrača. U robotici će to za posljedicu imati, da se svi vektori izražavaju u koordinatnom sustavu baze. Prema tome, kutna brzina ω mora biti izražena u koordinatnom sustavu promatrača, isto kao i transformirani vektor udaljenosti kabine. Skalarana derivacija vektora udaljenosti kabine, govori koliko se promjenila duljina vektora \mathbf{S}_V . Općenito, za \mathbf{S}_V može se pisati:

$$\mathbf{S}_V = \|\mathbf{S}_V\| \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{bmatrix}^T \quad (32)$$

gdje je $\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{bmatrix}^T$ jedinični vektor smjera. Skalarna derivacija u tom slučaju glasi:

$$\dot{\mathbf{S}}_V = \frac{\partial \|\mathbf{S}_V\|}{\partial t} \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{bmatrix}^T \quad (33)$$

IZVOD NE JEDNADŽBI UNAPRIJED - $\dot{\omega}^k$

$$\begin{aligned}
\omega^k &= \omega^{k-1} + \xi_k z^{k-1} \dot{q}_k \\
\dot{\omega}^k &= \dot{\omega}^{k-1} + \xi_k \frac{d}{dt}(z^{k-1} \dot{q}_k) \\
\frac{d}{dt}(z^{k-1} \dot{q}_k) &= z^{k-1} \frac{d}{dt} \dot{q}_k + \dot{q}_k \frac{d}{dt} z^{k-1} \\
\frac{d}{dt} z^{k-1} &= \omega^{k-1} \times z^{k-1} + \dot{z}^{k-1} \\
\frac{d}{dt}(z^{k-1} \dot{q}_k) &= z^{k-1} \ddot{q}_k + \omega^{k-1} \times (z^{k-1} \dot{q}_k) \\
\dot{\omega}^k &= \dot{\omega}^{k-1} + \xi_k [z^{k-1} \ddot{q}_k + \omega^{k-1} \times (z^{k-1} \dot{q}_k)]
\end{aligned}$$

IZVOD NE JEDNADŽBI UNAPRIJED - v^k

$$\begin{aligned}
v^k &= v^{k-1} + \frac{d}{dt} \Delta s^k \\
\frac{d}{dt} \Delta s^k &= \omega^k \times \Delta s^k + \dot{\Delta s}^k \\
\dot{\Delta s}^k &= (1 - \xi_k) z^{k-1} \dot{q}_k \\
\frac{d}{dt} \Delta s^k &= \omega^k \times \Delta s^k + (1 - \xi_k) z^{k-1} \dot{q}_k \\
v^k &= v^{k-1} + \omega^k \times \Delta s^k + (1 - \xi_k) z^{k-1} \dot{q}_k
\end{aligned}$$

IZVOD NE JEDNADŽBI UNAPRIJED - \dot{v}^k

$$\begin{aligned}
v^k &= \dot{v}^{k-1} + \frac{d}{dt} (\omega^k \times \Delta s^k) + (1 - \xi_k) \frac{d}{dt} (z^{k-1} \dot{q}_k) \\
\frac{d}{dt} (\omega^k \times \Delta s^k) &= \frac{d}{dt} (\omega^k) \times \Delta s^k + \omega^k \times \frac{d}{dt} (\Delta s^k) \\
\frac{d}{dt} (\omega^k \times \Delta s^k) &= \dot{\omega}^k \times \Delta s^k + \omega^k \times [\omega^k \times \Delta s^k + (1 - \xi_k) (z^{k-1} \dot{q}_k)] \\
\frac{d}{dt} (\omega^k \times \Delta s^k) &= \dot{\omega}^k \times \Delta s^k + \omega^k \times (\omega^k \times \Delta s^k) + (1 - \xi_k) \omega^k \times (z^{k-1} \dot{q}_k) \\
\dot{v}^k &= \dot{v}^{k-1} + \dot{\omega}^k \times \Delta s^k + \omega^k \times (\omega^k \times \Delta s^k) + (1 - \xi_k) \omega^k \times (z^{k-1} \dot{q}_k) + \\
&\quad + (1 - \xi_k) [z^{k-1} \ddot{q}_k + \omega^{k-1} \times (z^{k-1} \dot{q}_k)] \\
v^k &= \dot{v}^{k-1} + \dot{\omega}^k \times \Delta s^k + \omega^k \times (\omega^k \times \Delta s^k) + \\
&\quad + (1 - \xi_k) [\omega^k \times (z^{k-1} \dot{q}_k) + z^{k-1} \ddot{q}_k + \omega^{k-1} \times (z^{k-1} \dot{q}_k)] \\
\xi_k = 0 &\rightarrow \omega^k = \omega^{k-1} + \xi_k z^{k-1} \dot{q}_k \rightarrow \omega^k = \omega^{k-1} \\
v^k &= \dot{v}^{k-1} + \dot{\omega}^k \times \Delta s^k + \omega^k \times (\omega^k \times \Delta s^k) + (1 - \xi_k) [2\omega^k \times (z^{k-1} \dot{q}_k) + z^{k-1} \ddot{q}_k]
\end{aligned}$$

34. ZADATAK

Nakon što smo razradili osnove deriviranja u inercijalnim sustavima, potrebno je stečeno znanje primjeniti na konkretnom robotu prikazanom na slici 35.

- a) Koordinatni sustav baze L_0

S obzrom da baza miruje, za vektore kutne i linijske brzine baze vrijedi:

$$\boldsymbol{\omega}^0 = 0; \mathbf{v}^0 = 0 \quad (34)$$

b) Koordinatni sustav L_1

Sljedeći koordinatni sustav, je koordinatni sustav 2., translacijskog zgloba robota, L_1 . S obzirom da je prvi zglob robota rotacijski, jasno je da se koordinatni sustav L_1 zakreće ovisno o rotaciji prvog zgloba, te njegova kutna brzina glasi:

$$\boldsymbol{\omega}^1 = \dot{q}_1 z^0 \quad (35)$$

U robotici, kutne brzine zglobova uvijek pišemo u obliku $\dot{q}_k z^{k-1}$, budući da je taj oblik neposredan rezultat postavljanja koordinatnih osi robota prema pravilima DH metode. Pri tome je z^{k-1} izražen u koordinatnom sustavu baze.

Prema prethodno rečenom, koordinatni sustav L_1 ponaša se prema koordinatnom sustavu baze L_0 , kao vrtuljak prema nepomičnom promatraču te vrijedi jednadžba 31. Kao što nas je u slučaju vrtuljka zanimala udaljenost zelene kabine od centra rotacije, tj. koordinatnog sustava vrtuljka, tako nas u robotici zanimala udaljenost koordinatnog sustava L_1 od koordinatnog sustava L_0 . Najjednostavniji način da izračunamo tu udaljenost jest da oduzmemo vektore transformacije T_0^0 i T_0^1 . Točnije, oduzmemo četvrte stupce tih vektora, s obzirom da, u općem slučaju, četvrti stupac transformacijske matrice T_0^k sadrži informaciju od udaljenosti k -tog koordinatnog sustava od baze. Osim toga, matrice T_0^k sadrže informacije o pozicijama promatrano iz baze robota pa nije potrebno, kao u jednadžbi 31 dodatno transformirati vektore. Stoga možemo pisati:

$$\begin{aligned} \Delta S^1 &= \mathbf{H}(\mathbf{T}_0^1 - \mathbf{T}_0^0) = \mathbf{H}(\mathbf{T}_0^1 - \mathbf{I}_{4 \times 4}) \\ \Delta S^1 &= [0 \ 0 \ L_1]^T \end{aligned} \quad (36)$$

Brzina koordinatnog sustava L_1 upravo je jedanka vremenskoj derivaciji vektora ΔS^1 :

$$\mathbf{v}^1 = \boldsymbol{\omega}^1 \times \Delta \mathbf{S}^1 + \Delta \dot{\mathbf{S}}^1 = 0 \quad (37)$$

Prethodni rezultat nimalo ne čudi s obzirom da nema translacije koja bi promjenila duljinu prvog članka, a kutna brzina $\boldsymbol{\omega}^1$ okomita je na vektor $\Delta \mathbf{S}^1$.

c) Koordinatni sustav alata

Određivanje linijskih i kutnih brzina robota završavamo s brzinama alata, tj. koordinatnim sustavom L_2 . Pomaci koordinatnog sustava L_1 posredno pomiču koordinatni sustav L_2 . Prema tome, kutna brzina koordinatnog sustava L_2 vektorski je zbroj kutne brzine koordinatnog sustava L_1 i zakreta 2. zgloba. Pošto je drugi zglob translacijski te samim time ne proizvodi rotaciju, kutna brzina alata glasi:

$$\boldsymbol{\omega}^2 = \boldsymbol{\omega}^1 + \dot{q}_2 z^1 = \boldsymbol{\omega}^1 \quad (38)$$

Na sličan način određujemo brzinu alata, kao zbroj linijske brzine L_1 i vremenske derivacije vektora ΔS^2 u odnosu na koordinatni sustav L_1 :

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^1 + \frac{\partial}{\partial t} \Delta S^2 \quad (39)$$

Vektor ΔS^2 , kao udaljenost koordinatnog sustava L_1 od L_2 , određujemo tako da oduzmemo:

$$\Delta S^2 = \mathbf{H}(\mathbf{T}_0^2 - \mathbf{T}_0^1) = (L_2 + q_2) [c_1 \ s_1 \ 0]^T \quad (40)$$

Konačno, računamo brzinu alata:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^2 &= \boldsymbol{\omega}^2 \times \Delta \mathbf{S}^2 + \Delta \dot{\mathbf{S}}^2 \\ &= (L_2 + q_2) [-s_1 \ c_1 \ 0]^T + \dot{q}_2 [c_1 \ s_1 \ 0]^T \end{aligned} \quad (41)$$

Prvi dio rješenja odnosi se na vektorski umnožak $\boldsymbol{\omega}^2 \times \Delta \mathbf{S}^2$. Drugi se dio odnosi na skalarnu derivaciju vektora $\Delta \mathbf{S}^2$. Primijetite da je vektor $[c_1 \ s_1 \ 0]^T$ u stvari jediničan vektor, a izraz $(L_2 + q_2)$ što ga množi duljina tog vektora. Prema pravilima, skalarna derivacija odnosi se samo na deriviranje duljine vektora, dakle izraza $(L_2 + q_2)$.

35. ZADATAK

Na slici 39 prikazan je robotski manipulator koji se sastoji samo od rotacijskih zglobova. Na slici je prikazana trentuna konfiguracija robotskog manipulatora za koju treba odrediti:

- vektore $\hat{\mathbf{z}}_0^i, \Delta\mathbf{S}_i$ za svaki članak i zglob robota. Pri tome se možete služiti oznakama na slici kako bi odredili vrijednosti kuteva i duljina.

$$\hat{\mathbf{z}}_0^0 = [0 \ 0 \ 1]^T \quad \hat{\mathbf{z}}_0^1 = [0 \ 1 \ 0]^T \quad \hat{\mathbf{z}}_0^2 = [0 \ 1 \ 0]^T \quad \hat{\mathbf{z}}_0^3 = [1 \ 0 \ 0]^T \quad \hat{\mathbf{z}}_0^4 = [1 \ 0 \ 0]^T$$

$$\Delta\mathbf{S}_1 = [B \ 0 \ A]^T \quad \Delta\mathbf{S}_2 = [B \ 0 \ B]^T \quad \Delta\mathbf{S}_3 = [0 \ 0 \ 0]^T \quad \Delta\mathbf{S}_4 = [D \ 0 \ 0]^T$$

- linijsku i kutnu brzinu koordinatnog sustava L_4

$$\omega_0^1 = \omega_0^0 + \dot{q}_1 \cdot \hat{\mathbf{z}}_0^0 = \dot{q} [0 \ 0 \ 1]^T$$

$$\omega_0^2 = \omega_0^1 + \dot{q}_2 \cdot \hat{\mathbf{z}}_0^1 = \dot{q} [0 \ 1 \ 1]^T$$

$$\omega_0^3 = \omega_0^2 + \dot{q}_3 \cdot \hat{\mathbf{z}}_0^2 = \dot{q} [0 \ 2 \ 1]^T$$

$$\omega_0^4 = \omega_0^3 + \dot{q}_4 \cdot \hat{\mathbf{z}}_0^3 = \dot{q} [1 \ 2 \ 1]^T$$

$$\mathbf{v}_0^1 = \mathbf{v}_0^0 + \omega_0^1 \times \Delta\mathbf{S}_1 = \mathbf{v}_0^0 + \dot{q} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ B & 0 & A \end{vmatrix} = \dot{q} [0 \ B \ 0]^T$$

$$\mathbf{v}_0^2 = \mathbf{v}_0^1 + \omega_0^2 \times \Delta\mathbf{S}_2 = \mathbf{v}_0^1 + \dot{q} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & B \end{vmatrix} = \dot{q} [B \ 2B \ -B]^T$$

$$\mathbf{v}_0^3 = \mathbf{v}_0^2$$

$$\mathbf{v}_0^4 = \mathbf{v}_0^3 + \omega_0^4 \times \Delta\mathbf{S}_4 = \mathbf{v}_0^3 + \dot{q} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ D & 0 & 0 \end{vmatrix} = \dot{q} [B \ 2B + D \ -(2D + B)]^T$$

- Linijsku akceleraciju koordinatnog sustava L_4

$$\alpha_0^1 = \alpha_0^0 + \omega_0^0 \times \dot{q}_1 \cdot \hat{\mathbf{z}}_0^0 = \alpha_0^0 + \omega_0^0 \times \dot{q} [0 \ 0 \ 1]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$$

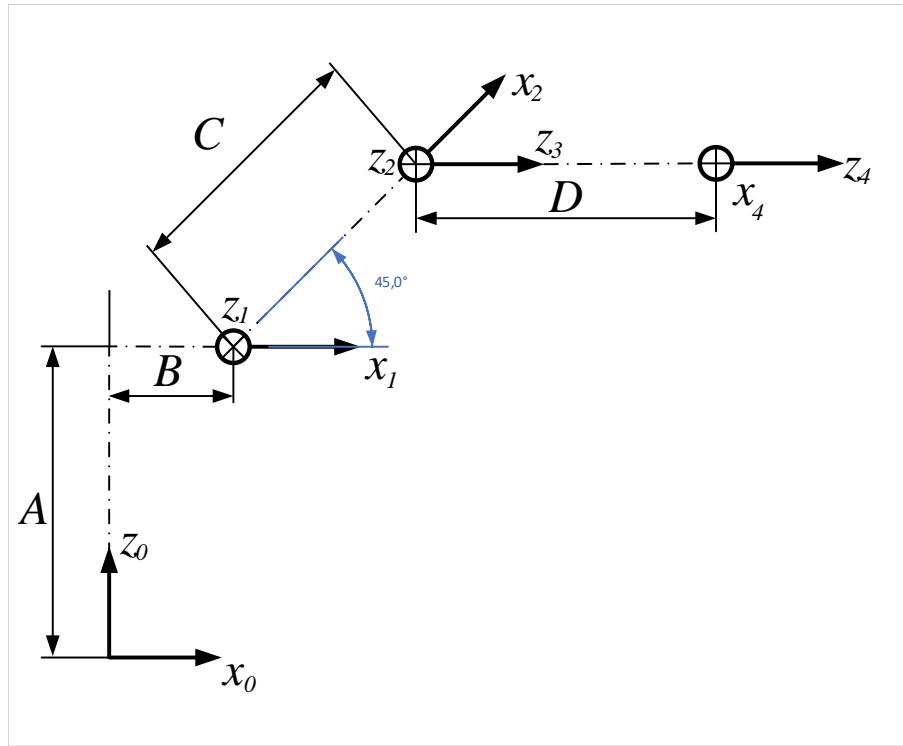
$$\alpha_0^2 = \alpha_0^1 + \omega_0^1 \times \dot{q}_2 \cdot \hat{\mathbf{z}}_0^1 = \alpha_0^1 + \omega_0^1 \times \dot{q} [0 \ 1 \ 0]^T = \dot{q}^2 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \dot{q}^2 [-1 \ 0 \ 0]^T$$

$$\alpha_0^3 = \alpha_0^2 + \omega_0^2 \times \dot{q}_3 \cdot \hat{\mathbf{z}}_0^2 = \alpha_0^2 + \dot{q}^2 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \dot{q}^2 [-2 \ 0 \ 0]^T$$

$$\alpha_0^4 = \alpha_0^3 + \omega_0^3 \times \dot{q}_4 \cdot \hat{\mathbf{z}}_0^3 = \alpha_0^3 + \dot{q}^2 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \dot{q}^2 [-2 \ 1 \ -2]^T$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_0^1 &= \mathbf{a}_0^0 + \boldsymbol{\alpha}_0^1 \times \Delta \mathbf{S}_1 + \boldsymbol{\omega}_0^1 \times (\boldsymbol{\omega}_0^1 \times \Delta \mathbf{S}_1) = \mathbf{a}_0^0 + \boldsymbol{\omega}_0^1 \times (\mathbf{v}_0^1 - \mathbf{v}_0^0) = \\
 &\dot{q}^2 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix} = \dot{q}^2 [-B \ 0 \ 0]^T \\
 \mathbf{a}_0^2 &= \mathbf{a}_0^1 + \boldsymbol{\alpha}_0^2 \times \Delta \mathbf{S}_2 + \boldsymbol{\omega}_0^2 \times (\boldsymbol{\omega}_0^2 \times \Delta \mathbf{S}_2) = \mathbf{a}_0^1 + \boldsymbol{\alpha}_0^2 \times \Delta \mathbf{S}_2 + \boldsymbol{\omega}_0^2 \times (\mathbf{v}_0^2 - \mathbf{v}_0^1) = \\
 &\mathbf{a}_0^1 + \dot{q}^2 \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 0 \\ B & 0 & B \end{vmatrix} + \dot{q}^2 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ B & B & -B \end{vmatrix} = \dot{q}^2 [-3B \ 2B \ -B]^T \\
 &\mathbf{a}_0^3 = \mathbf{a}_0^2 \\
 \mathbf{a}_0^4 &= \mathbf{a}_0^3 + \boldsymbol{\alpha}_0^4 \times \Delta \mathbf{S}_4 + \boldsymbol{\omega}_0^4 \times (\boldsymbol{\omega}_0^4 \times \Delta \mathbf{S}_4) = \mathbf{a}_0^3 + \boldsymbol{\alpha}_0^4 \times \Delta \mathbf{S}_4 + \boldsymbol{\omega}_0^4 \times (\mathbf{v}_0^4 - \mathbf{v}_0^3) = \\
 &\mathbf{a}_0^3 + \dot{q}^2 \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & -2 \\ D & 0 & 0 \end{vmatrix} + \dot{q}^2 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & D & -2D \end{vmatrix} = \dot{q}^2 [-3B - 5D \ 2B \ -B]^T
 \end{aligned}$$

Pri tome prepostavite da se svi zglobovi robota gibaju **konstantnom** brzinom \dot{q} te da se robot nalazi pričvršćen za fiksnu bazu. Također možete prepostaviti da $C = \sqrt{2}B$.



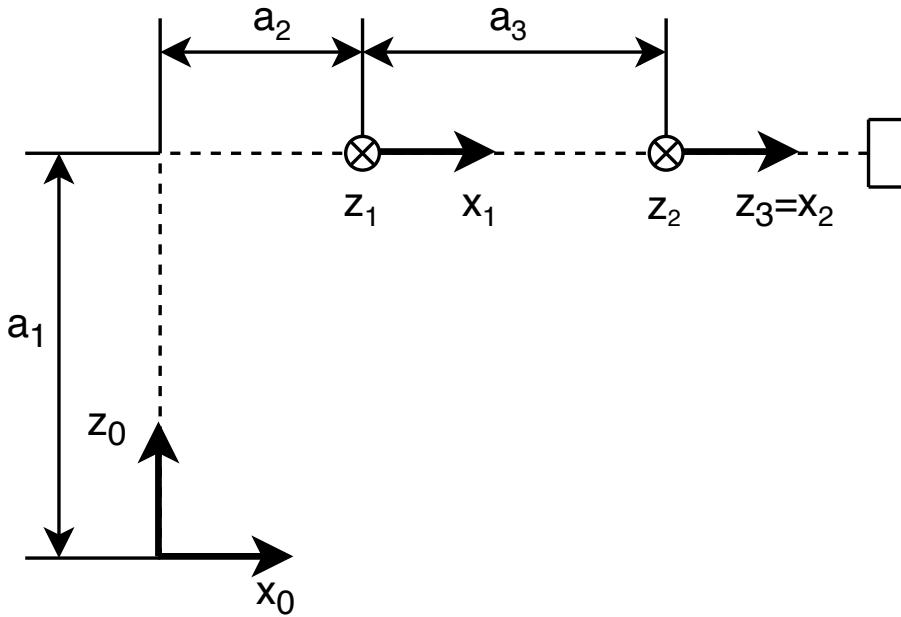
Slika 39: Prikazan je robotski manipulator koji se sastoji samo od rotacijskih zglobova. Na slici je prikazana trenutna konfiguracija robotskog manipulatora, pri čemu možete prepostaviti da $C = \sqrt{2}B$.

36. ZADATAK

Na slici 40 prikazan je robotski manipulator koji se sastoji samo od rotacijskih zglobova. Na slici je prikazana trenutna konfiguracija robotskog manipulatora za koju treba odrediti:

[Pri tome prepostavite da se svi zglobovi robota gibaju maksimalnom akceleracijom $\ddot{q}_i = a$, te da se robot nalazi pričvršćen za fiksnu bazu. Također prepostavite da vrijedi $a_1 = 2a_2 = a_3$.]

- a) vektore $\hat{\mathbf{z}}_0^i, \Delta \mathbf{S}_i$ za svaki članak i zglob robota. Pri tome se možete služiti oznakama na slici kako bi odredili vrijednosti kuteva i duljina.



Slika 40: Prikazan je robotski manipulator koji se sastoji samo od rotacijskih zglobova.

- b) kutnu i linijsku brzinu koordinatnog sustava L_3
- c) kutnu i linijsku akceleraciju koordinatnog sustava L_3

RJEŠENJE

a)

$$\hat{\mathbf{z}}_0^0 = [0 \ 0 \ 1]^T; \quad \hat{\mathbf{z}}_0^1 = [0 \ 1 \ 0]^T; \quad \hat{\mathbf{z}}_0^2 = [0 \ 1 \ 0]^T; \quad \hat{\mathbf{z}}_0^3 = [1 \ 0 \ 0]^T \quad (42)$$

Uz zamjenu $a_2 = a$:

$$\Delta \mathbf{S}_1 = [a \ 0 \ 2a]^T; \quad \Delta \mathbf{S}_2 = [2a \ 0 \ 0]^T; \quad \Delta \mathbf{S}_3 = [0 \ 0 \ 0]^T \quad (43)$$

b)

$$\omega_0^1 = \omega_0^0 + \dot{q}_1 \cdot \hat{\mathbf{z}}_0^0 = \dot{q}_1 [0 \ 0 \ 1]^T \quad (44)$$

$$\omega_0^2 = \omega_0^1 + \dot{q}_2 \cdot \hat{\mathbf{z}}_0^1 = \dot{q}_1 [0 \ 0 \ 1]^T + \dot{q}_2 [0 \ 1 \ 0]^T \quad (45)$$

$$\omega_0^3 = \omega_0^2 + \dot{q}_3 \cdot \hat{\mathbf{z}}_0^2 = \dot{q}_1 [0 \ 0 \ 1]^T + \dot{q}_2 [0 \ 1 \ 0]^T + \dot{q}_3 [0 \ 1 \ 0]^T \quad (46)$$

$$\mathbf{v}_0^1 = \mathbf{v}_0^0 + \omega_0^1 \times \Delta \mathbf{S}_1 = \mathbf{v}_0^0 + \dot{q}_1 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 2a \end{vmatrix} = \dot{q}_1 [0 \ a \ 0]^T \quad (47)$$

$$\mathbf{v}_0^2 = \mathbf{v}_0^1 + \omega_0^2 \times \Delta \mathbf{S}_2 = \mathbf{v}_0^1 + \dot{q}_1 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 2a & 0 & 0 \end{vmatrix} + \dot{q}_2 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (48)$$

$$= \dot{q}_1 [0 \ 3a \ 0]^T + \dot{q}_2 [0 \ 0 \ -2a]^T \quad (49)$$

$$\mathbf{v}_0^3 = \mathbf{v}_0^2$$

c)

$$\boldsymbol{\alpha}_0^1 = \boldsymbol{\alpha}_0^0 + \ddot{q}_1 \cdot \hat{\mathbf{z}}_0^0 + \boldsymbol{\omega}_0^0 \times \dot{\mathbf{z}}_0^0 = a_m \cdot [0 \ 0 \ 1]^T \quad (50)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_0^2 = \boldsymbol{\alpha}_0^1 + \ddot{q}_2 \cdot \hat{\mathbf{z}}_0^1 + \boldsymbol{\omega}_0^1 \times \dot{\mathbf{z}}_0^1 \quad (51)$$

$$\begin{aligned} &= a_m \cdot [0 \ 0 \ 1]^T + a_m \cdot [0 \ 1 \ 0]^T + \boldsymbol{\omega}_0^1 \times \dot{q}_2 [0 \ 1 \ 0]^T \\ &= a_m \cdot [0 \ 1 \ 1]^T + \dot{q}_1 \dot{q}_2 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= a_m \cdot [0 \ 1 \ 1]^T + \dot{q}_1 \dot{q}_2 [-1 \ 0 \ 0]^T$$

$$\boldsymbol{\alpha}_0^3 = \boldsymbol{\alpha}_0^2 + \ddot{q}_3 \cdot \hat{\mathbf{z}}_0^2 + \boldsymbol{\omega}_0^2 \times \dot{\mathbf{z}}_0^2 \quad (52)$$

$$= a_m \cdot [0 \ 1 \ 1]^T + \dot{q}_1 \dot{q}_2 [-1 \ 0 \ 0]^T + a_m \cdot [0 \ 1 \ 0]^T$$

$$+ (\dot{q}_1 \cdot [0 \ 0 \ 1]^T + \dot{q}_2 \cdot [0 \ 1 \ 0]^T) \times \dot{q}_3 \cdot [0 \ 1 \ 0]^T$$

$$= a_m \cdot [0 \ 2 \ 1]^T + \dot{q}_1 \dot{q}_2 [-1 \ 0 \ 0]^T + \dot{q}_1 \dot{q}_3 [-1 \ 0 \ 0]^T$$

$$\mathbf{a}_0^1 = \mathbf{a}_0^0 + \boldsymbol{\alpha}_0^1 \times \Delta \mathbf{S}_1 + \boldsymbol{\omega}_0^1 \times (\boldsymbol{\omega}_0^1 \times \Delta \mathbf{S}_1) \quad (53)$$

$$= a_m \cdot [0 \ a \ 0]^T + \dot{q}_1^2 [-a \ 0 \ 0]^T \quad (54)$$

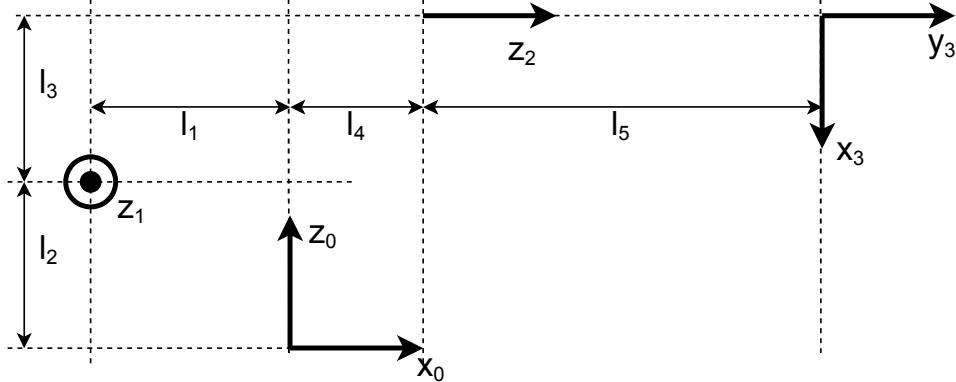
$$\mathbf{a}_0^2 = \mathbf{a}_0^1 + \boldsymbol{\alpha}_0^2 \times \Delta \mathbf{S}_2 + \boldsymbol{\omega}_0^2 \times (\boldsymbol{\omega}_0^2 \times \Delta \mathbf{S}_2) \quad (55)$$

$$= a_m \cdot [0 \ 3a \ -2a]^T + \dot{q}_1^2 [-3a \ 0 \ 0]^T + \dot{q}_2^2 [-2a \ 0 \ 0]^T \quad (56)$$

$$\mathbf{a}_0^3 = \mathbf{a}_0^2 \quad (57)$$

37. ZADATAK

Osi zglobova **troosnog RRR robota** prikazane su slikom 41.



Slika 41: Robot RRR konfiguracije u položaju za koji je potrebno rješiti zadatak.

- Riješite direktnu kinematiku tj. odredite jednadžbu manipulatora u općenitom obliku kao funkciju zakreta zglobova (matrica \mathbf{T}_0^3). **Svi zglobovi su rotacijski.** Množenje matrica transformacija možete provesti u MATLAB-u a u zadaći je potrebno predati tablicu DH parametara i konačnu matricu \mathbf{T}_0^3 .
- Izračunajte **Jacobian matricu** manipulatora u **položaju sa slike 41**. Vidljivo istaknite zapise z osiju svih zglobova u koordinatama koordinatnog sustava L_0 .
- Za položaj sa slike**, odredite **kutnu i linjsku brzinu vrha alata** i usporedite izraze s Jacobian matricom izračunatom u prethodnom dijelu zadaće. Vidljivo istaknite vektore Δs korištene pri proračunu.

d) Za položaj sa slike, odredite kutne i linijske akceleracije vrha alata.

Pri rješavanju, pretpostavite da se **svi zglobovi gibaju maksimalnom akeceleracijom a_m** , a za brzine korisite općenite izraze. Za robota sa slike 41 vrijedi $l_1 = l_2 = l_3 = 2L$, $l_4 = L$, $l_5 = 3L$.

RJEŠENJE

Nakon postavljanja koordinatnih sustava, dobiju se sljedeći DH parametri robota sa slike 41:

	Θ	d	α	a
0..1	$q_1 + \pi$	l_2	$-\frac{\pi}{2}$	l_1
1..2	$q_2 - \frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	l_3
2..3	$q_3 + \frac{\pi}{2}$	$l_1 + l_4 + l_5$	$\frac{\pi}{2}$	0

Tablica 11: Tablica DH parametara robota sa slike 41.

Iz DH parametara izračunaju se sljedeće matrice:

$$\mathbf{T}_0^1 = \begin{bmatrix} -C_1 & 0 & S_1 & -l_1 C_1 \\ -S_1 & 0 & -C_1 & -l_1 S_1 \\ 0 & -1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_1^2 = \begin{bmatrix} S_2 & 0 & -C_2 & l_3 S_2 \\ -C_2 & 0 & -S_2 & -l_3 C_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_2^3 = \begin{bmatrix} -C_3 & 0 & -S_3 & 0 \\ -S_3 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 + l_4 + l_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_0^2 = \begin{bmatrix} -C_1 S_2 & S_1 & C_1 C_2 & -l_1 C_1 - l_3 C_1 S_2 \\ -S_1 S_2 & -C_1 & S_1 C_2 & -l_1 S_1 - l_3 S_1 S_2 \\ C_2 & 0 & S_2 & l_2 + l_3 C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_0^3 = \begin{bmatrix} -S_1 S_3 + C_1 S_2 C_3 & C_1 C_2 & S_1 C_3 + C_1 S_2 S_3 & -l_1 C_1 - l_3 C_1 S_2 + (l_1 + l_4 + l_5) C_1 C_2 \\ C_1 S_3 + S_1 S_2 C_3 & S_1 C_2 & -C_1 C_3 + S_1 S_2 S_3 & -l_1 S_1 - l_3 S_1 S_2 + (l_1 + l_4 + l_5) S_1 C_2 \\ -C_2 C_3 & S_2 & -C_2 S_3 & l_2 + l_3 C_2 + (l_1 + l_4 + l_5) S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Iz navedenih matrica očitavamo sljedeće vrijednosti:

$$\begin{aligned} p_{0x}^3 &= -l_1 C_1 - l_3 C_1 S_2 + (l_1 + l_4 + l_5) C_1 C_2 \\ p_{0y}^3 &= -l_1 S_1 - l_3 S_1 S_2 + (l_1 + l_4 + l_5) S_1 C_2 \\ p_{0z}^3 &= l_2 + l_3 C_2 + (l_1 + l_4 + l_5) S_2 \end{aligned}$$

,

pa se A dio matrice Jakobijana lako odredi deriviranjem:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial p_{0x}^3}{\partial q_1} & \frac{\partial p_{0x}^3}{\partial q_2} & \frac{\partial p_{0x}^3}{\partial q_3} \\ \frac{\partial p_{0y}^3}{\partial q_1} & \frac{\partial p_{0y}^3}{\partial q_2} & \frac{\partial p_{0y}^3}{\partial q_3} \\ \frac{\partial p_{0z}^3}{\partial q_1} & \frac{\partial p_{0z}^3}{\partial q_2} & \frac{\partial p_{0z}^3}{\partial q_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 S_1 + l_3 S_1 S_2 - (l_1 + l_4 + l_5) S_1 C_2 & -l_3 C_1 C_2 - (l_1 + l_4 + l_5) C_1 S_2 & 0 \\ -l_1 C_1 - l_3 C_1 S_2 + (l_1 + l_4 + l_5) C_1 C_2 & -l_3 S_1 C_2 - (l_1 + l_4 + l_5) S_1 S_2 & 0 \\ 0 & -l_3 S_2 + (l_1 + l_4 + l_5) C_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Uz poznatu vrijednost $z_0 = [0, 0, 1]^T$, iz trećeg stupca matrica \mathbf{T}_0^1 i \mathbf{T}_0^2 očitavamo $z_1 = [S_1, -C_1, 0]^T$ i $z_2 = [C_1 C_2, S_1 C_2, S_2]^T$, pa se dobije sljedeći B dio matrice Jakobijana (svi zglobovi su rotacijski pa je $\xi_k = 1$):

$$\begin{bmatrix} 0 & S_1 & C_1 C_2 \\ 0 & -C_1 & S_1 C_2 \\ 1 & 0 & S_2 \end{bmatrix}$$

Konačno, matrica Jakobijana robota sa slike 41 je:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} l_1 S_1 + l_3 S_1 S_2 - (l_1 + l_4 + l_5) S_1 C_2 & -l_3 C_1 C_2 - (l_1 + l_4 + l_5) C_1 S_2 & 0 \\ -l_1 C_1 - l_3 C_1 S_2 + (l_1 + l_4 + l_5) C_1 C_2 & -l_3 S_1 C_2 - (l_1 + l_4 + l_5) S_1 S_2 & 0 \\ 0 & l_3 S_2 - (l_1 + l_4 + l_5) C_2 & 0 \\ 0 & S_1 & C_1 C_2 \\ 0 & -C_1 & S_1 C_2 \\ 1 & 0 & S_2 \end{bmatrix}$$

Pošto je zadano da se Jakobijan matrica odredi u položaju sa slike, potrebno je uvrstiti vrijednosti zglobova u tom položaju, što je u ovom slučaju $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0$ (uz uvrštanje L):

$$\mathbf{J}_{slika} = \begin{bmatrix} 0 & -2L & 0 \\ 4L & 0 & 0 \\ 0 & 6L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ovdje je bitno napomenuti da se u zadacima u kojima je zadano da se nešto izračuna u položaju sa slike, iz slike mogu očitati vrijednosti z osiju izravno (usporedite \mathbf{J}_{slika} i z osi očitane izravno iz slike) ali A dio matrice Jakobijana nije moguće riješiti iz slike nego je uvjek potrebno riješiti direktnu kinematiku jer je potrebno derivirati funkcije varijabli zglobova, pa tek nakon toga uvrstiti vrijednosti varijabli zglobova u položaju sa slike. Nakon uvrštanja vrijednosti sa slike, točnost proračuna može se okvirno utvrditi promatranjem elemenata matrice \mathbf{J}_{slika} i slike 41. Sa slike je vidljivo da će rotacija uzrokovana \dot{q}_1 pomaknuti vrh alata u pozitivnom y_0 smjeru, što potvrđuje element matrice $\mathbf{J}_{slika}(2, 1) = 4L$ (podsetite se što znači matrica \mathbf{J}_{slika}), dok će rotacija drugog zgloba u položaju sa slike (sada zanemarujemo eventualni pomak prvog zgloba jer se radi o infinitezimalnim pomacima) pomaknuti vrh alata u negativnom x_0 i pozitivnom z_0 smjeru, što potvrđuje i drugi stupac matrice A. Kako rotacija zadnjeg zgloba mijenja samo orientaciju ali ne i poziciju vrha alata, logično je da je posljednji stupac matrice A nul-vektor.

S druge strane, kad se traže brzine i akceleracije vrha alata u položaju sa slike, unaprijedni Newton-Euler postupak može se provesti bez rješavanja direktnе kinematike izravnim očitavanjem vrijednosti sa slike, što ćemo i napraviti u nastavku. Prvo postavljamo početne uvjete (ako nije drugče naglašeno, prepostavljamo da robot miruje i da na njega ne djeluje gravitacija):

$$v_0 = \mathbf{0}, \quad a_0 = \mathbf{0}, \quad \omega_0 = \mathbf{0}, \quad \alpha_0 = \mathbf{0}.$$

Iz slike odmah očitamo z osi svih zglobova:

$$z_0 = [0, 0, 1]', \quad z_1 = [0, -1, 0]', \quad z_2 = [1, 0, 0]',$$

i odmah primjećujemo da se poklapaju s osima izračunatim iz direktne kinematike.

Također možemo izravno očitati vektore između susjednih koordinatnih sustava pridruženih zglobovima (napomena da se L_2 pomiče na vertikalnu iznad L_1 pri rješavanju direktne kinematike):

$$\Delta s^1 = [-l_1, 0, l_2]', \quad \Delta s^2 = [0, 0, l_3]', \quad \Delta s^3 = [l_1 + l_4 + l_5, 0, 0]'$$

Sad je samo potrebno provesti rekurzivni postupak pomoću sljedećih formula (standardne unaprijedne NE formule uz uvršten $\xi_k = 1$ jer su svi zglobovi rotacijski):

$$\begin{aligned} \omega^k &= \omega^{k-1} + z^{k-1} \dot{q}_k \\ \dot{\omega}^k &= \dot{\omega}^{k-1} + z^{k-1} \ddot{q}_k + \omega^{k-1} \times (z^{k-1} \dot{q}_k) \\ v^k &= v^{k-1} + \omega^k \times \Delta s^k \\ \dot{v}^k &= \dot{v}^{k-1} + \dot{\omega}^k \times \Delta s^k + \omega^k \times (\omega^k \times \Delta s^k) \end{aligned}$$

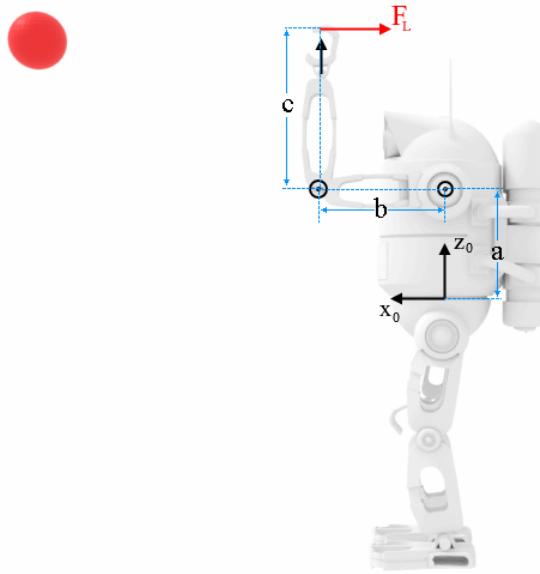
Uz uvrštanjanje L , dobiju se sljedeće vrijednosti:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}, \quad \omega_3 = \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \\ -\dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \\ \dot{\omega}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix}, \quad \dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ -\ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix}, \quad \dot{\omega}_3 = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ -\ddot{q}_2 + \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\ \ddot{q}_1 + \ddot{q}_3 + \dot{q}_2 \dot{q}_3 \end{bmatrix} \\ v_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -2L\dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -2L\dot{q}_2 \\ -2L\dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -2L\dot{q}_2 \\ 4L\dot{q}_1 \\ 6L\dot{q}_2 \end{bmatrix} \\ \dot{v}_1 &= \begin{bmatrix} 2L\dot{q}_1^2 \\ -2L\ddot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{v}_2 = \begin{bmatrix} 2L\dot{q}_1^2 - 2L\ddot{q}_2 \\ -2L\ddot{q}_1 - 4L\dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ -2L\dot{q}_2^2 \end{bmatrix}, \quad \dot{v}_3 = \begin{bmatrix} -4L\dot{q}_1^2 - 6L\dot{q}_2^2 - 2L\ddot{q}_2 \\ 4L\ddot{q}_1 - 4L\dot{q}_1 \dot{q}_2 + 6\ddot{q}_3 \\ -2L\dot{q}_2^2 + 6L\ddot{q}_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Usporedbom izraza za ω_3 i \mathbf{J}_{slika} može se primjetiti kako izračunata kutna brzina odgovara B dijelu Jakobijan matrice.

38. ZADATAK

Za završni rad Mirko radi na zadatku upravljanja humanoidnim robotom prilikom hvatanja lopte. Prilikom rada na zadatku, humanoidni robot se pokvario, i pri tome dojavio dvije greške: 1) greška kinetičke energije gornjeg dijela lijeve ruke robota (duljina b), odnosno 2) greška momenta lakta ruke. Pomozite Mirku izračunati te vrijednosti kako bi mogao otkriti što se dogodilo s robotom. Prilikom dojave greške, robot se zaustavio u položaju prikazanom na slici 42.



Slika 42: Slika prikazuje situaciju robota prilikom hvatanja lopte. Sve geometrijske vrijednosti sa slike možete uzeti u obzir prilikom računanja traženih veličina. Označen je koordinatni sustav L_0 , te osi i smjer preostala tri zgloba robota.

Mirko je do sada uspio izračunati i pročitati sljedeće vrijednosti:

- Sila kojom je loptica udarila u šaku robota iznosi $\mathbf{F}_L = [-F, 0, 0]^T$

- Za vrijeme sudara, Jacobijan matrica centra mase gornjeg dijela lijeve ruke iznosila je:

$$\begin{bmatrix} b/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Prilikom sudara lakat robota gibao se konstantnom linearnom i kutnom brzinom.
- Brzine i akceleracije zglobova iznosile su: $\dot{\mathbf{q}} = [0, 1, 1, 0]$, odnosno $\ddot{\mathbf{q}} = [0, 0, 1, 0]$.

Napomena: Kinetičku energiju i momente potrebno je izraziti u prostoru zglobova, promatrano u koordinatnom sustavu L_0 . Koristite se aproksimacijom tankog štapa za članke ruke. Zbog specifične gustoće materijala, sve mase članaka jednake su njihovoj duljini.

RJEŠENJE

Prvi korak rješavanja domaće odnosi se na proračun kinetičke energije nadlaktice robota (dužina b na slici). Jednadžba kojom ćemo izračunati kinetičku energiju glasi:

$$E_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \cdot (\mathbf{A}^T \cdot m_2 \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{B}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (58)$$

pri čemu je potrebno izračunati tenzor inercije \mathbf{D}_2 , izražen oko baze robota. Za određivanje \mathbf{D}_2 , pomoći će nam tenzor inercije \mathbf{D}_{c2} izražen u koordinatnom sustavu nadlaktice:

$$\mathbf{D}_{c2} = \frac{mb^2}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{b^3}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (59)$$

Uvezši u obzir matricu rotacije, koju računamo iz slike i položaja koordinatnih sustava:

$$\mathbf{R}_0^2 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_0^2 & \hat{\mathbf{y}}_0^2 & \hat{\mathbf{z}}_0^2 \\ \hat{\mathbf{x}}_0^0 & 1 & 0 & 0 \\ \hat{\mathbf{y}}_0^0 & 0 & 0 & 1 \\ \hat{\mathbf{z}}_0^0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

možemo izračunati traženi tenzor inercije

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{R}_0^2 \cdot \mathbf{D}_{c2} \cdot \mathbf{R}_0^{2T} = \frac{b^3}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (61)$$

Konačno, izdvajanjem \mathbf{A} i \mathbf{B} komponenti matrice Jacobiana koja je zadana, možemo izračunati ukupnu energiju članka:

$$E_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b^3}{4} + \frac{b^3}{12} \right) = \frac{b^3}{6}. \quad (62)$$

Važno je istaknuti da smo reducirali dimenziju problema na početna dva zgloba, umjesto na sva četiri. Budući da samo prva dva zgloba pomiču 2. članak, to pojednostavljenje je opravdano, a dodatno je istaknuto nulama u Jacobian matrici.,

Sljedeći korak zadatka odnosi se na proračun momenta kojeg osjeća 3. zglob robota. Započinjemo zadatak tako da pomoći Jacobian matrice izračunamo brzine koordinatnog sustava centra mase 2. članka L_2^* :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_2^* \\ \boldsymbol{\omega}_2^* \end{bmatrix} = \mathbf{J}_2^* \cdot \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{b}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (63)$$

Budući da se kutne brzine koordinatnih sustava L_2 i L_2^* poklapaju, potrebno je dodatno odrediti linijsku brzinu koordinatnog sustava L_2 :

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2^* + \boldsymbol{\omega}_2 \times \Delta \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -b \end{bmatrix}. \quad (64)$$

U zadatku je navedeno da se lakat giba konstantnom brzinom, što nam omogućuje da prepostavimo $\mathbf{a}_2 = 0$ i $\boldsymbol{\alpha}_2 = 0$. Nastavljamo s Newton-Euler postupkom dok ne izračunamo brzine i akceleracije koordinatnog sutava L_4 .

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \boldsymbol{\omega}_2 + \mathbf{z}_0^2 \dot{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \mathbf{z}_0^2 \ddot{q}_3 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{z}_0^2 \dot{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

Budući da se koordinatni sustav L_2 i L_3 nalaze na istom mjestu, njihove linijske brzine i akceleracije su iste. Nadalje, budući da 4. zglob miruje kutne brzine i akceleracije koordinatnih sustava L_3 i L_4^* su također iste. Preostaje izračunati linijske brzine i akceleracije koordinatnog sutava L_4^* .

$$\mathbf{v}_4^* = \mathbf{v}_3 + \boldsymbol{\omega}_4 \times \Delta \mathbf{S}_4^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ -b \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$\mathbf{a}_4^* = \mathbf{a}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4 \times \Delta \mathbf{S}_4^* + \boldsymbol{\omega}_4 \times (\boldsymbol{\omega}_4 \times \Delta \mathbf{S}_4^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2c \end{bmatrix} \quad (67)$$

Sada možemo postaviti jednadžbe Newtonovih zakona zbroja sile i momenta koji djeluju na centar mase četvrtog članka robota (podlaktice - c):

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_L + m_4 \cdot \mathbf{a}_4^* = \begin{bmatrix} -F - 0.5c^2 \\ 0 \\ -2c^2 \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$\boldsymbol{\tau}_3 = \boldsymbol{\tau}_4 + \Delta \mathbf{S}_4^* \times \mathbf{F}_3 + (\Delta \mathbf{S}_4 - \Delta \mathbf{S}_4^*) \times \mathbf{F}_L + \mathbf{D}_4 \cdot \boldsymbol{\alpha}_4^* + \boldsymbol{\omega}_4^* \times (\mathbf{D}_4 \cdot \boldsymbol{\omega}_4^*) \quad (69)$$

$$\boldsymbol{\tau}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{c}{2} \end{bmatrix} \times \mathbf{F}_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{c}{2} \end{bmatrix} \times \mathbf{F}_4 + \frac{c^3}{12} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\frac{c^3}{12} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (70)$$

$$\boldsymbol{\tau}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{Fc}{2} + \frac{c^3}{8} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{Fc}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{c^3}{12} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (71)$$

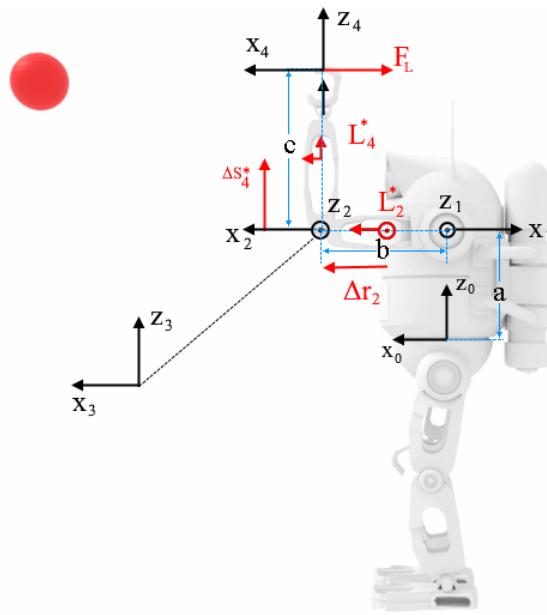
Nas zanimaju momenti u koordinatnom sustavu L_2 . Budući da se koordinatni sustavi L_2 i L_3 poklapaju, te da zbog toga ne postoji inercija članka između ta dva zgloba, vrijedi $\boldsymbol{\tau}_3 = \boldsymbol{\tau}_2$. Kako bi odredili moment koji djeluje u zglobu 3, kako se traži u zadatku, potrebno je dodatno pomnožiti vektor $\boldsymbol{\tau}_2$, sa smjerom djelovanja zgloba 3, to jest s osi \mathbf{z}_0^3 .

$$\tau_3 = \boldsymbol{\tau}_3 \cdot \mathbf{z}_0^3 = -F \cdot c + \frac{5c^3}{24} \quad (72)$$

39. ZADATAK

Za dvoosni manipulator prikazan Slikom 44 treba izračunati:

1. Tenzor inercije članaka i manipulatora
2. Kutno ubrzanje vrha alata $\dot{\omega}_2$ i linearu brzinu alata v_2 .



Slika 43: Slika prikazuje koordinatne sustave ucrtane prema DH pravilima. Crvenom bojom posebno su istaknuti vektori koji se spominju u rješenju. Koordinatni sustavi L_2 i L_3 nalaze se na istom mjestu.

Napomena: Gravitacija djeluje prema koordinatnom sustavu zemlje, kao što je prikazano na Slici 44. Matrice transformacije dane su izrazima:

$$\mathbf{T}_0^1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_1^2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

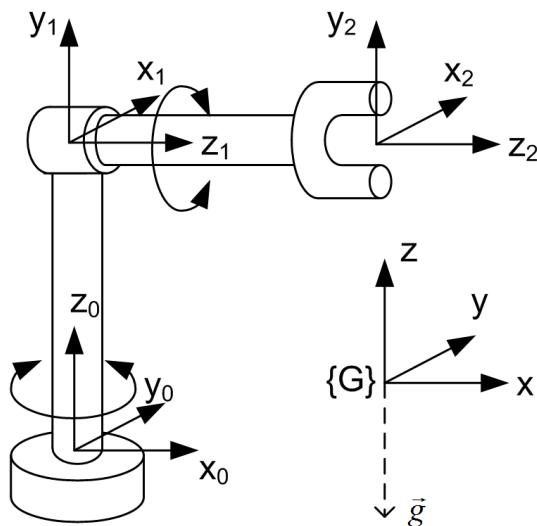
$$\mathbf{T}_0^2 = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -C_1 S_2 & S_1 & d_2 S_1 \\ S_1 C_2 & -S_1 S_2 & -C_1 & -d_2 C_1 \\ S_2 & C_2 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

40. ZADATAK

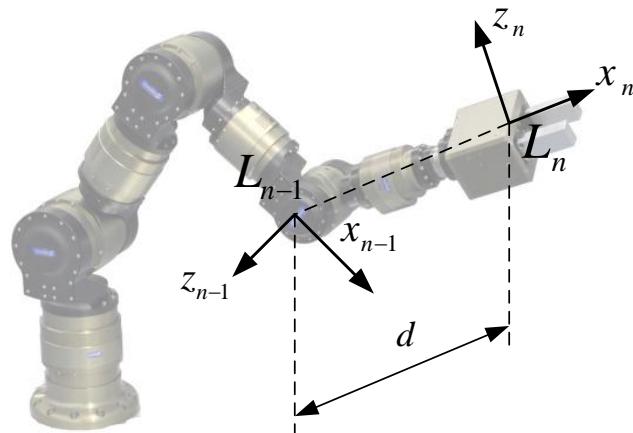
Na slici 45 prikazan je n -osni manipulator. Prepostavite da za zadani manipulator poznajete sljedeće matrice homogene transformacije:

$$\mathbf{T}_0^{n-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & x \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & y \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{n-1}^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Koristeći dostupne informacije izračunajte linearnu brzinu alata robota. Pri tome prepostavite da je brzina n -tog zgloba $\dot{q}_n = 1$, a brzine L_{n-1} iznose $\mathbf{v}_{n-1} = \left[\frac{\sqrt{2}}{4} \quad \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \frac{\sqrt{2}}{4} \right]^T$, $\boldsymbol{\omega}_{n-1} = \left[0 \quad 0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \right]^T$;
- Koristeći dostupne informacije izračunajte tenzor inercije n -tog članka robota čija je masa m_n . Prilikom proračuna koristite štapastu aproksimaciju članka.



Slika 44: Robotski manipulator iz zadatka 39.

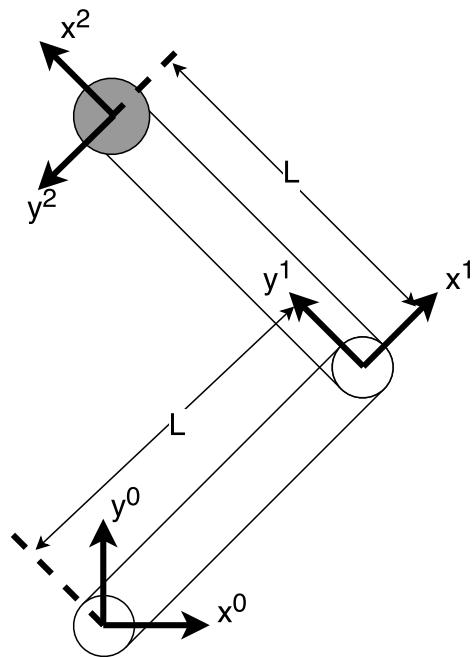


Slika 45: n-osni manipulator

41. ZADATAK

Ivica proučava knjigu iz Osnova robotike kako bi konstruirao robotsku ruku RR konfiguracije prikazanu na slici 46 koja dobacuje lopticu psu. Pomozite Ivici da ruka što bolje baca lopticu rješavanjem sljedećih zadataka:

- Odredite tablicu kinematičkih parametara robota korištenjem Denavit-Hartenbergova postupka te izraze za pozicije koordinatnih sustava L_1 i L_2 u odnosu na L_0 .
- Koristeći se Newton-Eulerovim postupkom, odredite linearnu i kutnu brzinu loptice u ovisnosti o zakretima i brzinama zakreta zglobova robota.
- Odredite izraz za linearnu brzinu loptice u položaju sa slike 46.
- Skicirajte vektor linearne brzine loptice u položaju sa slike 46 ako su brzine zglobova robota jednake.
- Ako robot otpusti lopticu u položaju sa slike 46 odredite brzinu prvog zglobova koja osigurava maksimalan dolet loptice u smjeru x_0 .

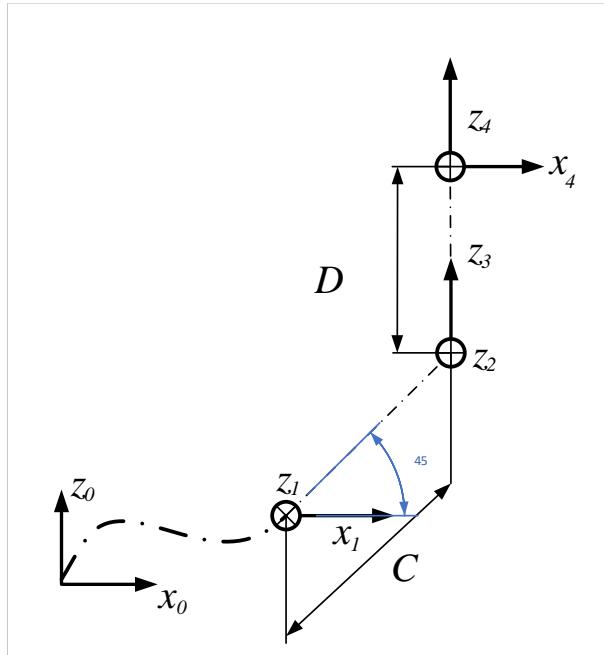


Slika 46: RR robot za bacanje loptice.

42. ZADATAK

Na slici 47 je prikazan robotski manipulator. Prepostavite da ne poznajete transformaciju od baze do L_1 , ali zato znate početne uvjete brzina i akceleracija za L_1 :

$$\omega_0^1 = [0 \ 0 \ 0]^T, \alpha_0^1 = [0 \ 0 \ 0]^T, v_0^1 = [0.5 \ 0 \ 0]^T, a_0^1 = [0 \ 0 \ 0]^T$$

Slika 47: Manipulator s četiri stupnja slobode. Svi zglobovi su rotacijski, osim zadnjeg, četvrtoog zgloba. Sve potrebne vrijednosti za računanje možete odrediti direktno iz slike. Vrijedi $D = 1$, $C = \sqrt{2}$.

- a) Ukoliko znate da su svi zglobovi, osim zadnjeg, rotacijski, te da su zglobovi u datom trenutku gibaju *konstantnim* brzinama $\dot{q}_2 = 1$, $\dot{q}_3 = 0$ i $\dot{q}_4 = 0.5$, odredite brzine i akceleracije vrha alata manipulatora u položaju sa slike 47.

43. ZADATAK

Za manipulator sa slike 47, koji se u položaju sa slike giba tako da su mu brzine i akceleracije vrha alata:

$$\boldsymbol{\omega}_0^4 = [-1 \ 1 \ 0]^T, \ \boldsymbol{\alpha}_0^4 = [0 \ 0 \ 0]^T, \ \mathbf{v}_0^4 = [1 \ 0 \ 0]^T, \ \mathbf{a}_0^4 = [-2 \ 0 \ 0]^T$$

- a) Izračunajte doprinos rotacijske komponente (momenta inercije) vidljivih članka robota ukupnom tenzoru inercije manipulatora!
- b) Izračunajte silu koja djeluje na treći zglob manipulatora, ako znate da je u zadanim trenutku i položaju sa slike 47 sila i moment kojima okolina djeluje na vrh alata manipulatora $\mathbf{F}_c = [-2, 0, 0]^T$, $\boldsymbol{\tau}_c = \mathbf{0}_{3 \times 1}$. Prepostavite da je masa $m_4 = 1$.
- c) Izvedite izraz za moment koji osjeća treći zglob robota u položaju sa slike 47. Jasno označite sve vektore koje koristite u izrazu.

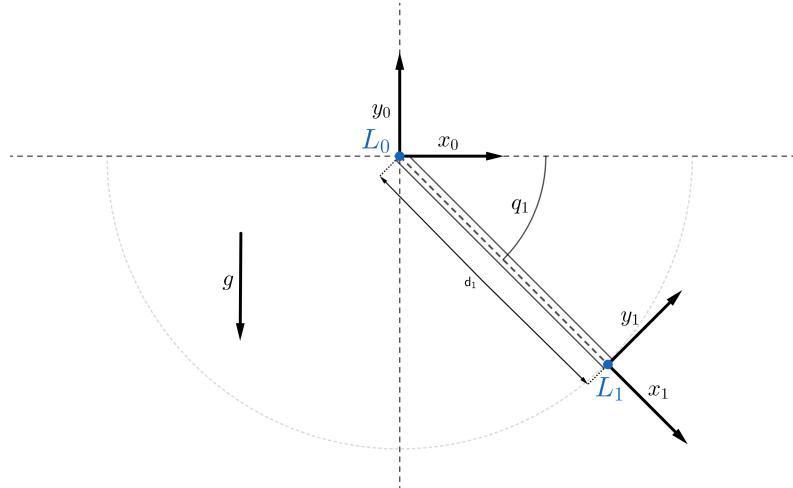
Prepostavite da ne poznajete transformaciju od baze do L_1 , ali zato znate početne uvjete brzina i akceleracija za L_1 :

$$\boldsymbol{\omega}_0^1 = [0 \ 0 \ 0]^T, \ \boldsymbol{\alpha}_0^1 = [0 \ 0 \ 0]^T, \ \mathbf{v}_0^1 = [0.5 \ 0 \ 0]^T, \ \mathbf{a}_0^1 = [0 \ 0 \ 0]^T$$

44. ZADATAK

Izračunajte ukupan tenzor inercije $\mathbf{D}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ manipulatora na slici 48, sastavljenog od jednog zgloba i jednog članka. Članak se modelira kao infinitezimalno tanak štap sa centrom mase na polovici svoje duljine, a homogena matrica transformacije \mathbf{T}_0^1 glasi:

$$\mathbf{T}_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & d_1 \cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & d_1 \sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Slika 48: Manipulator s jednim člankom i jednim rotacijskim zglobom oko \hat{z}_0 osi.

Upravljanje

Dinamički model n-osnog robotskog manipulatora glasi:

$$\mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{h}(\mathbf{q}) + \mathbf{b}(\dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (73)$$

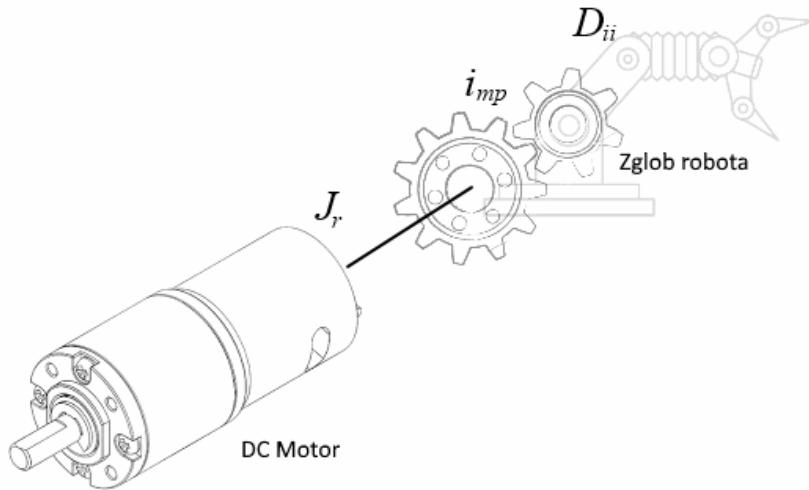
Poopćeni moment koji djeluje na svaki pojedini zglob manipulatora sadržan je u jednom retku prethodne jednadžbe. Prema tome, za neki i -ti zglob manipulatora možemo napisati jednadžbu momenta:

$$\mathbf{D}_{ii}(\mathbf{q})\ddot{q}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n D_{ij}(\mathbf{q})\ddot{q}_j + c_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + h_i(\mathbf{q}) + b_i(\dot{\mathbf{q}}) = \tau_i \quad (74)$$

Ako drugi, treći, četvrti i peti član s lijeve strane prethodne jednadžbe označimo kao moment smetnje $M_i^s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ tada prethodnu jednadžbu možemo zapisati na sljedeći način:

$$\ddot{q}_i = \frac{1}{\mathbf{D}_{ii}(\mathbf{q})} (\tau_i - M_i^s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})) \quad (75)$$

Umjesto da se zglob robota direktno spaja na osovinu motora, motor se spaja preko zupčanika s prijenosnim omjerom mehaničkog prijenosa i_{mp} , kao što je prikazano na slici 49. Jasno, pri tome sam motor posjeduje određeni moment inercije rotora J_r .



Slika 49: Prikaz priključka zgloba robota na osovinu motora posredstvom zupčanika.

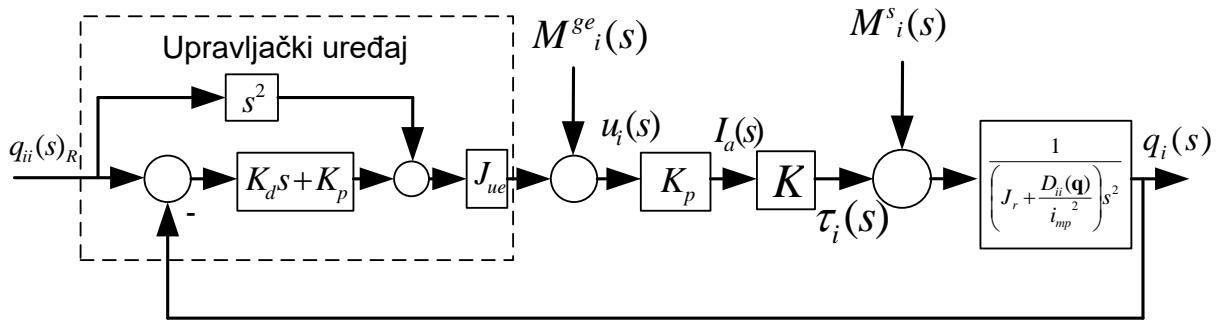
Konačno, ukupan moment inercije koji tereti upravljačku petlju motora glasi:

$$\frac{\mathbf{D}_{ii}(\mathbf{q})}{i_{mp}^2} + J_r \quad (76)$$

Kada dodamo regulacijsku petlju upravljanja momentom dobijemo sljedeću blokovsku shemu regulacijske petlje položaja uz upravljanje momentom:

Za sintezu regulatora, često su nam potrebne sljedeće vrijednosti momenta inercije: srednja vrijednost, maksimalna te minimalna. Ako poznajemo trajektoriju robota, odnosno vrijednosti zakreta svih zglobova za zadanu trajektoriju \mathbf{q} jednostavno je odrediti potrebne iznose. Na primjer, srednju vrijednost momenta inercije izračunat ćemo na sljedeći način:

$$\mathbf{D}_{sr} = \frac{1}{\|\mathbf{q}_{max} - \mathbf{q}_{min}\|} \int_{\mathbf{q}_{min}}^{\mathbf{q}_{max}} \mathbf{D}(\mathbf{q})_{ii} \cdot \delta \mathbf{q} \quad (77)$$

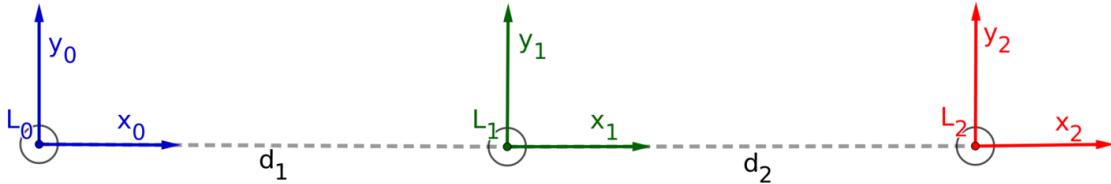


Slika 50: Blokovska shema regulacijske petlje položaja i -tog zglobo robota, uz upravljanje po momentu s kompenzacijskim proširenjem.

45. ZADATAK

Za robotski manipulator sa slike 51 s pripadajućom tablicom DH parametara 12 potrebno je projektirati PD regulator petlje položaja za upravljanje po momentu s kompenzacijskim proširenjem za oba zgloba robota. Pri tome trebate:

- Ugoditi regulatore prema MIN - MAX metodi tako da ostvarite sljedeće pokazatelje kvalitete odziva:
 $\xi_{min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\omega_{min} = 1$
- Odrediti jednadžbu estimiranog momenta sile teže kojom se provodi kompenzacija regulatora M_{ge} .
 Pri tome prepostavite da je $\mathbf{g} = [0 \ -g \ 0]^T$ zapisan u L_0 koordinatnom sustavu.



Slika 51: Na slici se nalazi RR manipulator. Sastoji se od dva članka duljine d_1 i d_2 te dva rotacijska zgloba čije su osi rotacije jedinični vektori \hat{z}_0 i \hat{z}_1 . Prepostaviti da su članci infinitezimalno tanki homogeni štapovi mase m_1 , odnosno m_2 .

Θ	α	d	a
q_0	0	0	d_1
q_1	0	0	d_2

Tablica 12: Denavit-Hartenberg parametri za zadani manipulator na slici 51.

Napomena: Možete prepostaviti da je pojačalo struje podešeno tako da vrijedi jednakost $K_P \cdot K = 1$

46. ZADATAK

- Skicirajte blokovsku shemu regulacijske petlje položaja zglobo, uz upravljanje momentom.
- Napišite prijenosnu funkciju zatvorenog kruga upravljanja položajem zglobo uz upravljanje momentom i odredite izraze za koeficijent prigušenja ζ i prirodnu frekvenciju neprigušenih oscilacija ω_n . Ako se moment tromosti zglobo poveća, kako se mijenjaju ζ i ω_n ?
- Objasnite princip hibridnog upravljanja silom dodira. Koji se tip regulatora koristi?

47. ZADATAK

Prepostavite da za neki manipulator poznajete Tenzor inercije manipulatora:

$$\mathbf{D} = \frac{M}{3} \begin{bmatrix} 2 + 2 \cdot \cos(q_2) & \frac{2+3\cos(q_2)}{2} & 0 \\ \frac{2+3\cos(q_2)}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- a) Skicirajte upravljačku petlju po momentu prvog zgloba tog robota i ugodite ju prema MIN - MAX metodi tako da ostvarite sljedeće pokazatelje kvalitete odziva: $\xi_{min} = 1$ i $\omega_{min} = 1$. Označite sve relevantne veličine u upravljačkoj petlji. Možete prepostaviti da je prijenos pojačala snage $K_p K = 1$, odnosno da je moment rotora zanemariv, a prijenosni omjer reduktora jediničan. Dopusteni raspon drugog zgloba robota je $q_2 = [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$.