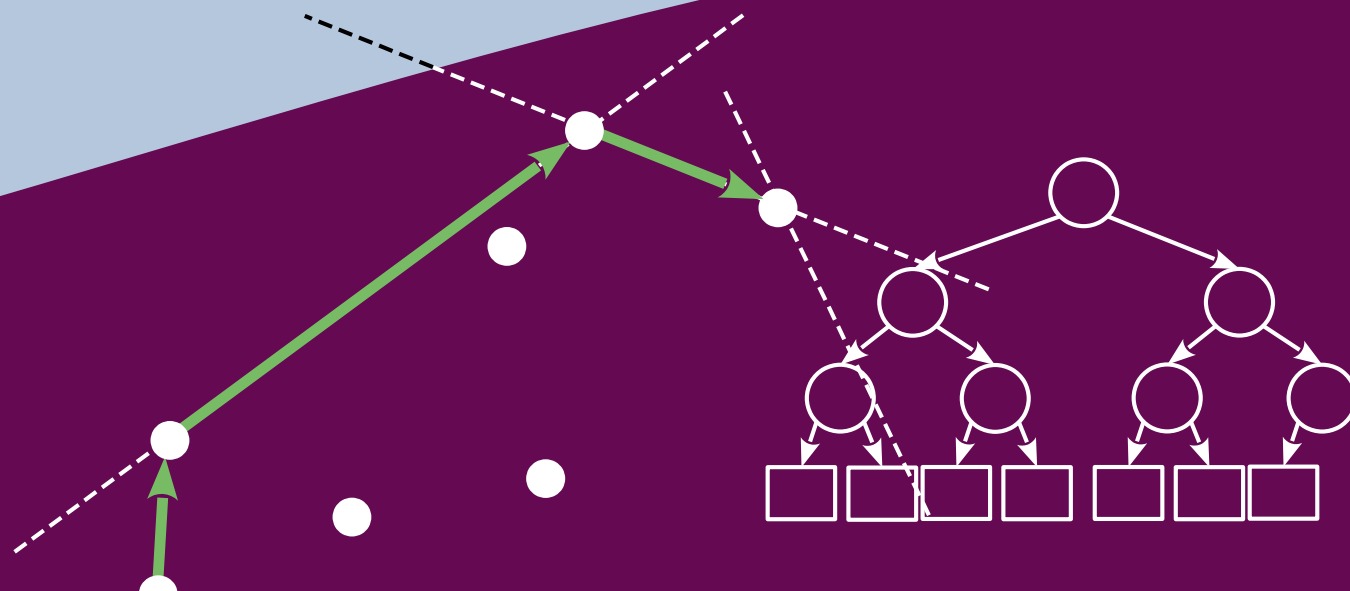
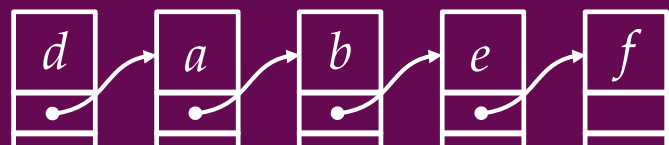
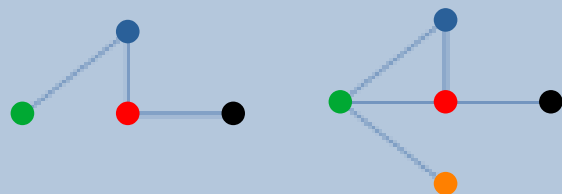


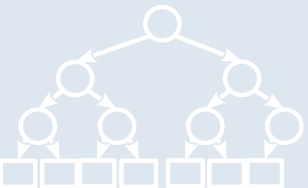
# Napredni algoritmi i strukture podataka

Tjedan 5: Linearno programiranje



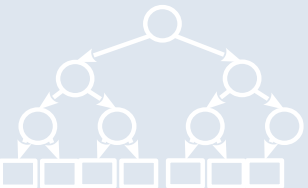
# Što je linearni program (LP)?

- Dosta **generalna** klasa problema koja se može rješavati efikasno
- Brojne primjene u industriji
  - Lanci nabave
  - Raspoređivanje
  - Optimizacije u električnim mrežama
- Spada u kategoriju **konveksnih optimizacijskih problema**
  - LP je prva podkategorija koja je efikasno riješena (cca 1940tih)
  - Ostale kategorije su slijedile kasnije, otvoreno područje istraživanja



# Što je linearni program (LP)?

- Rješavanje linearnih programa je dignuto na razinu industrijske pouzdanosti
  - Pouzdani i brzi alati
    - Gurobi – trenutno najbrži rješavač
    - Python – **scipy.optimize.linprog**
    - Čak integrirani u Excel
- Bitni i za dizajn i analizu algoritama, npr.
  - Algoritmi nad grafovima
  - Približni algoritmi



# Linearni program (LP)?! Generalno...

minimizirati

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

uz uvjet

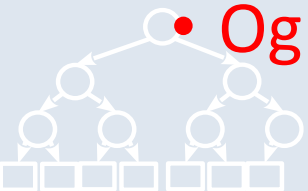
$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{e}$$

pri čemu je:  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^k$ ,

matrica  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , matrica  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{k \times n}$

- Ciljna funkcija  $f$  (*objective function, cost function*)
- Varijable odluke  $\mathbf{x}$  (*control, structural, decision variables*)
- Ograničenja sa parametrima  $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{D}, \mathbf{e}$  (*constraints*)

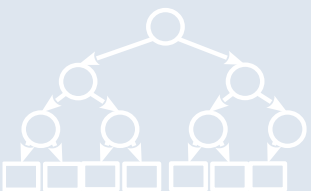


# Primjer I – humanitarni transportni problem

- Pfizer proizvodi cjepiva za COVID-19 te ima proizvodne pogone u tri mjesta T1...3 s raspoloživim kapacitetima zadanim u tablici. Naručitelji su iz četiri mjesta O1...4 sa potrebama zadanim u zadnjem retku tablice. Jedinični transportni troškovi za sve kombinacije proizvodnih pogona i naručitelja su navedeni u tablici.
- Kako na najefikasniji način zadovoljiti potrebe naručitelja?

Transportni troškovi

|      | O1  | O2  | O3  | O4  | Kap. |
|------|-----|-----|-----|-----|------|
| T1   | 10  | 9   | 14  | 8   | 432  |
| T2   | 7   | 11  | 9   | 11  | 138  |
| T3   | 8   | 12  | 12  | 9   | 35   |
| Nar. | 500 | 200 | 115 | 100 |      |



# Primjer I – humanitarni transportni problem

$x_{ij}$  - količina isporučenu iz  $i$ -te tvornice  $j$ -tom naručitelju

$c_{ij}$  - trošak transporta po jedinici između  $i$  i  $j$

$$\min \left( \sum_{i,j} x_{ij} c_{ij} \right)$$

uz uvjete  $\sum_j x_{ij} \leq s_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3$

$$\sum_i x_{ij} = d_j \quad ; \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$x_{ij} \geq 0$$



# Primjer II – optimalno uparivanje u online datingu

Na dating siteu u hetero rubrici postoji  $M$  muškaraca i  $F$  žena. Na temelju popunjenih upitnika raznim modelima su izračunate kompatibilnosti za sve potencijalne parove. Site želi upariti

sve u parove da bi ukupna suma  
normaliziranih kompatibilnosti bila  
što veća (utilitarizam).

| kompatibilnosti |    |    |    |    |
|-----------------|----|----|----|----|
|                 | M1 | M2 | M3 | M4 |
| F1              | 9  | 1  | 8  | 7  |
| F2              | 1  | 2  | 1  | 7  |
| F3              | 8  | 2  | 4  | 8  |
| F4              | 2  | 4  | 6  | 4  |

## Kombinatorni problem

Naivno rješenje: ispitati sve kombinacije  $F$ - $M$ . Treba ispitati  $F!$  kombinacija (ako je  $F=M$ )



# Primjer II – optimalno uparivanje u online datingu

$x_{ij}$  - 1 ako je  $i$  uparen sa  $j$ , 0 inače

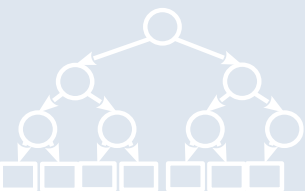
$k_{ij}$  – kompatibilnost za uparivanje  $(i,j)$

$$\max \left( \sum_{i,j} x_{ij} k_{ij} \right)$$

uz uvjete  $\sum_j x_{ij} = 1, \forall i = 1, \dots, F$

$$\sum_i x_{ij} = 1, \forall j = 1, \dots, M$$

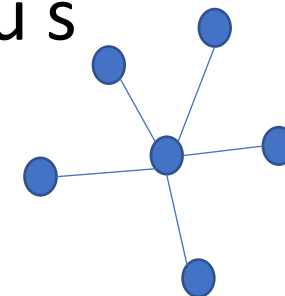
$$x_{ij} \geq 0$$





# Primjer III – bežične raspodijeljene mreže

Centralna postaja treba ostvariti pouzdanu bežičnu komunikaciju s  $N$  raspodijeljenih senzora za praćenje klimatskih promjena.



Senzori se napajaju Sunčevom energijom i važno je smanjiti njihovu potrošnju. Signal  $i$ -tog senzora do centralne postaje stiže **prigušen**. Ako  $i$ -ta senzor emitira snagom  $p_i$ , centralna postaja prima signal snage  $\lambda_i \cdot p_i$  ( $\lambda < 1$ ). Tijekom komunikacije s  $i$ -tim senzorom, signali svih drugih senzora koji dolaze u centralnu postaju predstavljaju smetnju i komunikacija je moguća samo ako je omjer signal/šum najmanje  $\rho_i$ .

Kolike trebaju biti emitivne snage  $p_i$  senzora kako bi se ostvarila pouzdana komunikacija uz najmanju moguću potrošnju energije?



# Primjer III – bežične raspodijeljene mreže

Ukupna potrošnja je proporcionalna ukupnoj snazi pa ćemo to minimizirati:

$$\min \left( \sum_{i=1}^N p_i \right)$$

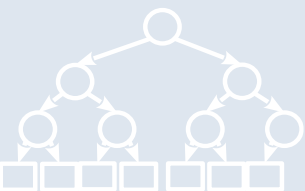
uz uvjete

$$\frac{\lambda_i p_i}{\sum_{j \neq i} \lambda_j p_j} \geq \rho_i \quad ; \quad i, j = 1, \dots, N$$

$$p_k \geq 0 \quad ; \quad k = 1, \dots, N$$

Budući da uvjetne (ne)jednadžbe moraju biti linearne po  $p_k$ , prevodimo ih u oblik

$$\lambda_i p_i - \rho_i \sum_{j \neq i} \lambda_j p_j \geq 0$$



# LP formulacije

- Općenita formulacija je „neuredna”
- Dvije formulacije kojima težimo radi lakšeg rješavanja i pisanja algoritama
  - **Kanonska forma LP** – idealna za geometrijsku perspektivu
  - **Standardna forma LP** – idealna za algebarsku perspektivu
- Svi ostali LP se mogu prevesti u obje forme\*

\*pročitajte o transformacijama u skripti



# Kanonska forma LP

minimizirati  
uz uvjet

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}$$
$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

pri čemu je:  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ , matrica  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .



# Standardna forma LP

minimizirati

uz uvjet

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

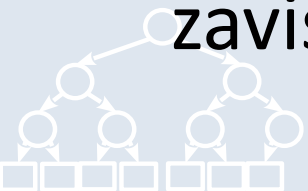
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

pri čemu je:  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  i  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ , matrica  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

---

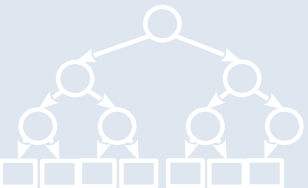
Nije dio definicije, ali pretpostavljat ćemo u sklopu predavanja da je  $\text{rang}(\mathbf{A}) = m$  i  $m < n$ . Ako je rang manji, linearno-zavisna ograničenja se mogu ukloniti.



# Grafička metoda - primjer

$$\begin{array}{ll}\max & x_1 + 5 \cdot x_2 \\ \text{uz uvjete} & \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 30 \\ 12 \end{bmatrix} \\ & x \geq 0\end{array}$$

[GeoGebra](#) – interaktivna geometrija



# Grafička metoda - primjer

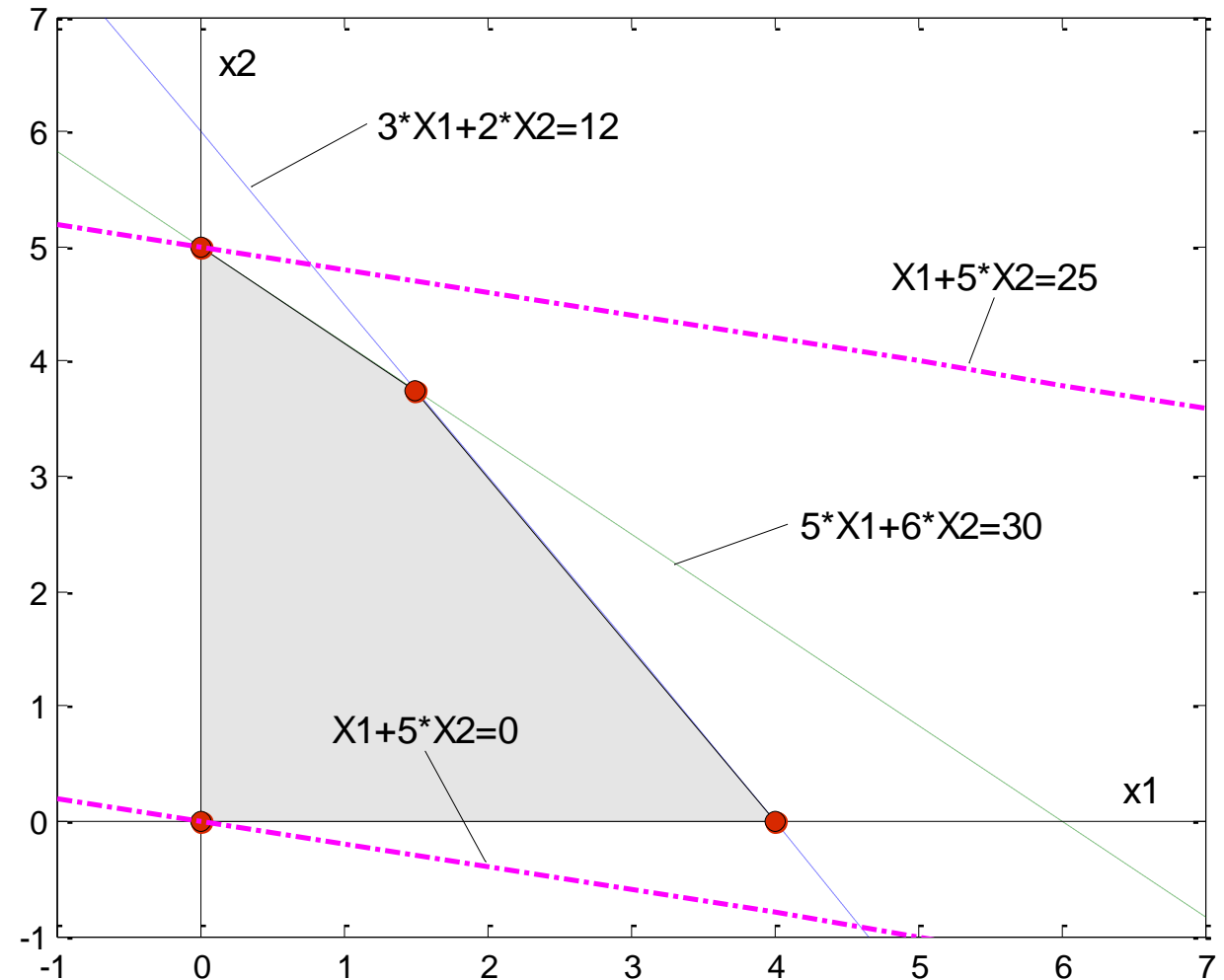
$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 5 \cdot x_2 \\ \text{uz uvjete} \quad & \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 30 \\ 12 \end{bmatrix} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Rješenje je sjecište pravca  $x_1 + 5 \cdot x_2 = f$  s prostorom svih mogućih rješenja (sivi poligon na slici) za koje je  $f$  najveća.

**Rješenje**

$$x = [0, 5]^T$$

$$f_{\max} = 25$$

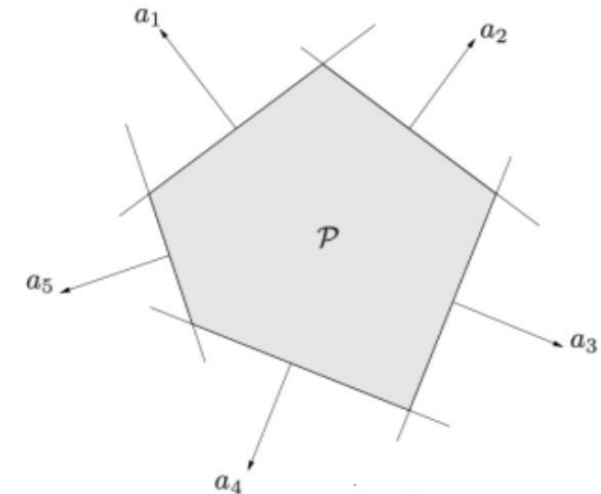
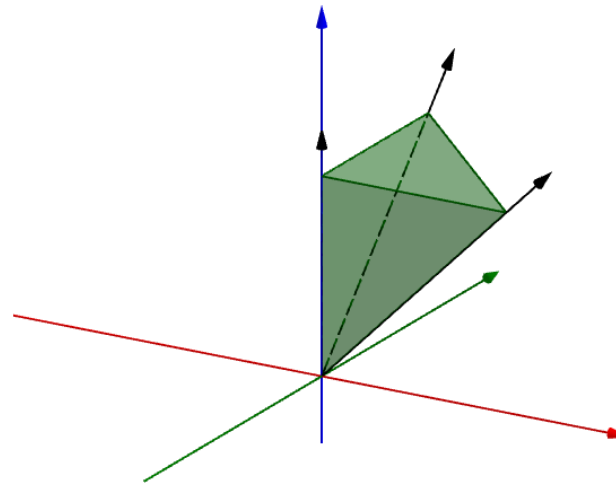
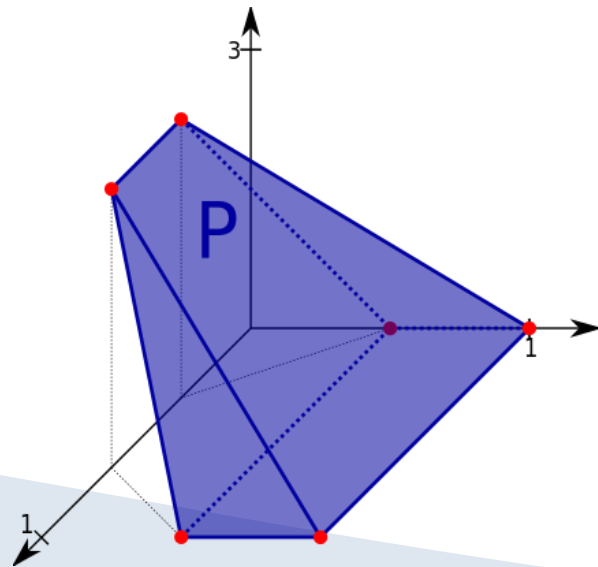


# Geometrijska analiza

**Definicija. Konveksni politop** u n-dimenzionalnom prostoru jest skup vektora (točaka):

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

- Ograničenja linearnih programa!





# Geometrijska analiza

Tijela opisana ograničenjima u LP su konveksni politopi  $P$

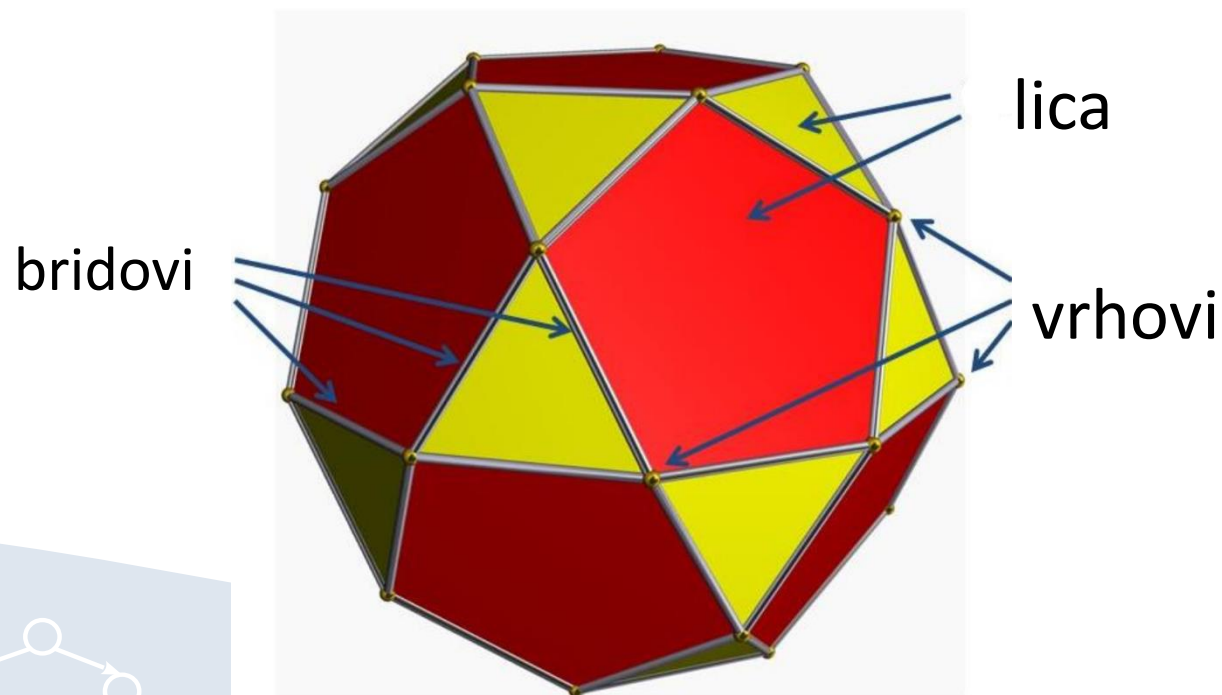
$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$



# Geometrijska analiza

Tijela opisana ograničenjima u LP su konveksni politopi  $P$

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$



**Definicija. Aktivno ograničenje** u nekoj točki  $x$  je svako ograničenje koje je ispunjeno sa jednakosti u toj točki  $x$ .

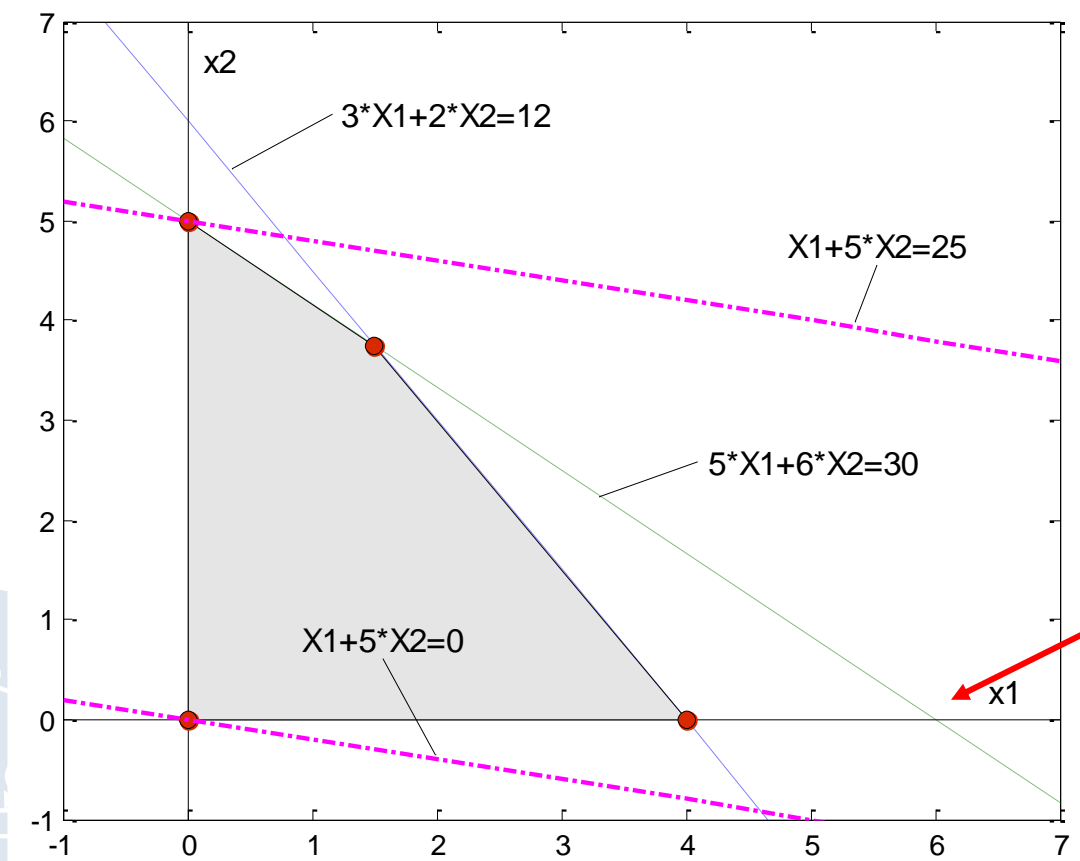
**Definicija.** U  $n$ -dimenzionalnom prostoru, **vrh politopa** je definiran kao presjecište barem  $n$  aktivnih linearno nezavisnih ograničenja pri čemu su ostala ograničenja zadovoljena.



# Geometrijska analiza

Tijela opisana ograničenjima u LP su konveksni politopi  $P$

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$



**Definicija.** U  $n$ -dimenzionalnom prostoru, **vrh politopa** je definiran kao presjecište barem  $n$  aktivnih linearno nezavisnih ograničenja pri čemu su ostala ograničenja zadovoljena.

**Oprez!** Nije svako presjecište  $n$  aktivnih ograničenja **vrh**! Neaktivna ograničenja moraju biti ispoštovana da bismo bili u vrhu.

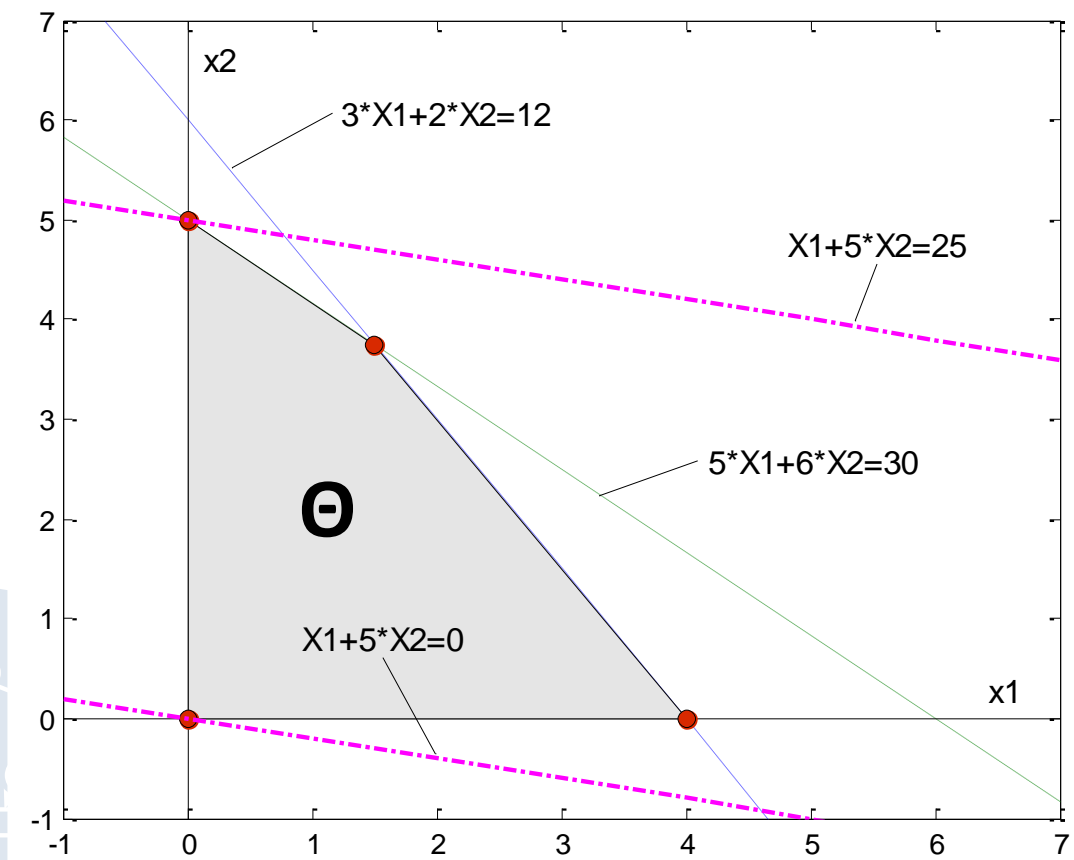
Susjedi?

19/58

# Geometrijska analiza

- **Definicija.** Skup  $\Theta$  je **konveksni skup** ako sadrži sve točke ravne spojnice između bilo kog para točaka iz skupa  $\Theta$ .

$$\forall x, y \in \Theta, \forall \alpha \in (0, 1): \alpha x + (1 - \alpha)y \in \Theta$$

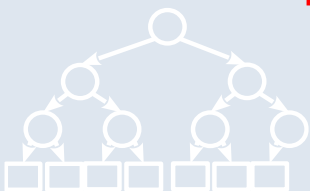
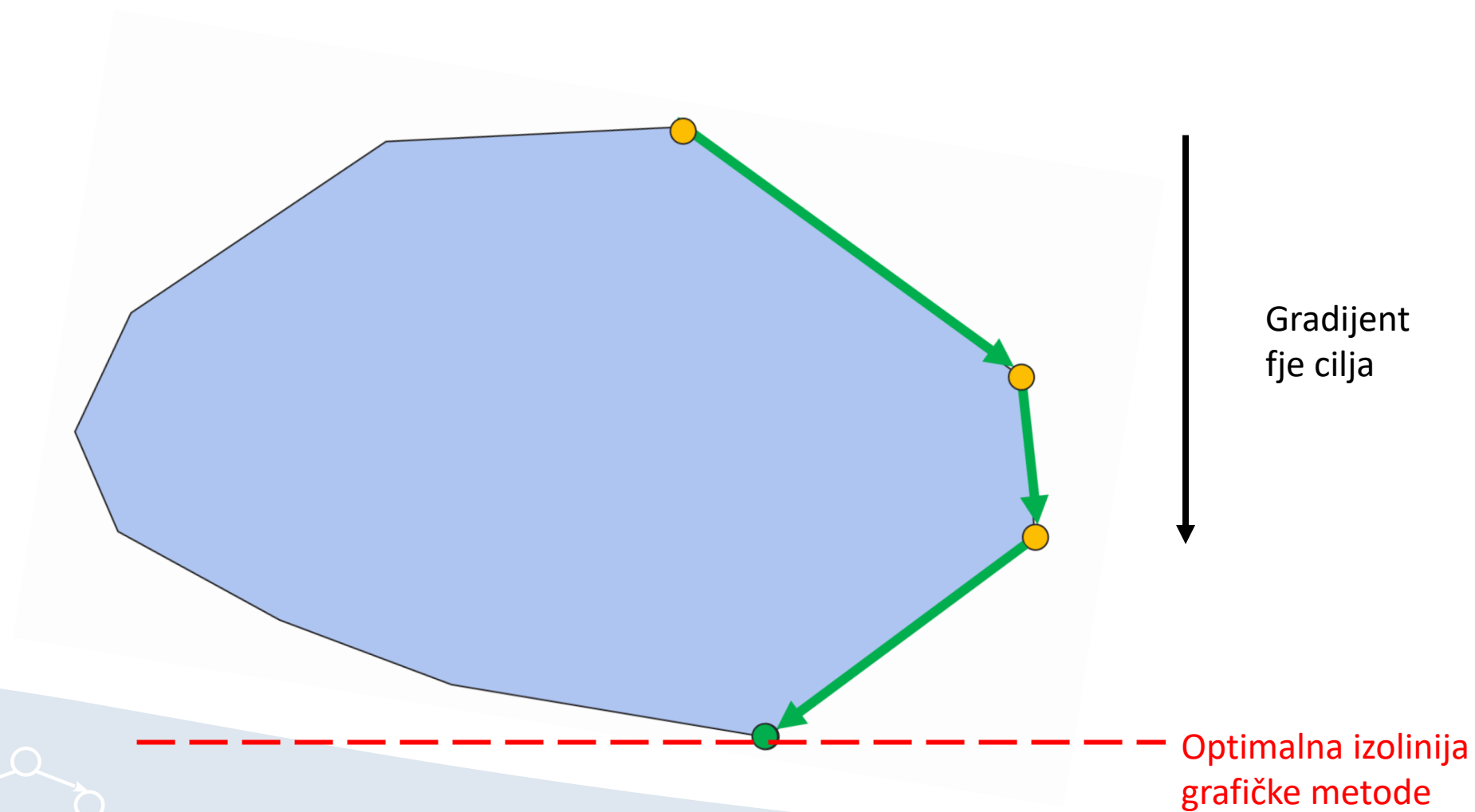


- **Definicija.** **Ekstrem** konveksnog skupa  $\Theta$  je svaka točka  $x \in \Theta$  koja nije na ravnoj spojnici ikakvih drugih dviju točaka skupa  $\Theta$ .

$$(\nexists x_1, x_2 \in \Theta \setminus \{x\}) (\nexists \alpha \in (0, 1)) \\ x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$$

- Ekstremi u politopu su **vrhovi** – geometrijski koncept

# Simplex - ideja



# Simplex – ulazni problem

Za simpleks koristimo **LP u standardnoj formi**

minimizirati

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

uz uvjet

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

pri čemu je:  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  i  $\mathbf{b} \geq 0$ , matrica  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\text{rang}(\mathbf{A}) = m$  i  $m < n$

Imamo  $m$  ograničenja jednakosti,  $n$  ograničenja nejednakosti ( $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ )

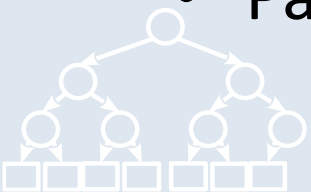
Nalazimo se u  $n$ -dimenzionalnom prostoru ( $n \geq m$ )

**Vrhovi** određeni sa  $n$  aktivnih ograničenja (oprez!)



# Simplex – jezgra metode

- Nalazimo se u  $n$ -dimenzionalnom prostoru ( $n \geq m$ )
  - Vrhovi određeni sa  $n$  **aktivnih ograničenja**
  - $m$  **aktivnih ograničenja je već fiksirano**
  - „**Proizvoljnih**” ( $n-m$ ) bираmo među nejednakostima
    - **One fiksiraju vrijednosti ( $n-m$ ) varijabli na 0**
    - Te varijable ćemo nazivati **nebazičnima**
    - Kad ih uvrstimo u  $m$  ograničenja, dobijemo sustav  $m$  jednažbi sa  $m$  nepoznanica! (znamo riješiti iz linearne algebre) – varijable koje rješavamo nazivamo **bazične**
- Particionira se skup svih varijabli na **bazične** i **nebazične**



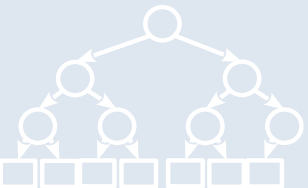
# Simplex – definicije

**Definicija. Bazično rješenje** sustava  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  je vektor  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_B^T \mathbf{0}]$ , gdje je  $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ , a  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  odabrana baza (stupci u matrici  $\mathbf{A}$ ) u sustavu od  $m$  jednadžbi s  $n$  nepoznanica, pri čemu je  $m < n$  i  $\det(\mathbf{B}) \neq 0$ .

## Teorem (osnovni teorem linearnog programiranja):

Promatrajmo linearni problem u standardnoj formi. Vrijedi sljedeće:

1. Ako postoji bilo kakvo rješenje, postoji i **izvedivo bazično rješenje**.
2. Ako postoji optimalno rješenje, postoji i bazično optimalno rješenje.





# Tabličenje

Hajdemo staviti sve parametre u tablicu:

- $m+1$  redaka
- $n+1$  stupaca

| $c^T$ | 0   |
|-------|-----|
| $A$   | $b$ |



# Tabličenje

- Particioniranje  $A$  po stupcima na bazične  $B$  i nebazične  $N$  stupac-vektore

| $c_B^T$ | $c_N^T$ | 0   |
|---------|---------|-----|
| $B$     | $N$     | $b$ |

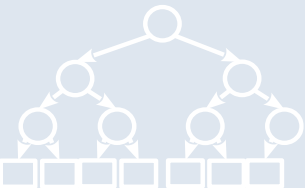


# Simplex tableau

Iterativno implicitno izračunavanje inverza  $B^{-1}$

- Efikasnije izvođenje jer se susjedni vrhovi razlikuju samo u **jednom aktivnom ograničenju** (koje postavlja neku drugu varijablu na 0)

| faktori redukcije po<br>bridovima |                         | -fja cilja              |
|-----------------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $0^T$                             | $c_N^T - c_B^T B^{-1}N$ | $-c_B^T B^{-1}b$        |
| $I$                               | $B^{-1}N$               | $B^{-1}b$               |
| bridovi do susjednih<br>baz.rješ  |                         | Vrijednosti<br>baz.var. |



# Simplex – pseudokod

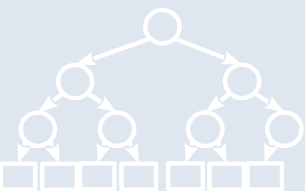
1. **Početak** iz izvedivog bazičnog rješenja u simpleks tablici
2. Optimalno? Ako su svi faktori redukcije nenegativni, **STOP**
3. Tranzicija u boljeg susjeda:
  - a) Odabir ulazne nebazične varijable koja odgovara stupcu  $q$
  - b) Odabir izlazne bazične varijable koja odgovara retku  $p$ . Ako ne postoji – problem je neograničen, **STOP**
  - c) Gauss-Jordan eliminacija za pivot  $(p, q)$
4. Povratak na korak 2



# Simplex – pseudokod

- Odabir ulazne nebazične varijable koja odgovara stupcu  $q$ 
  - Odabere se neka koja ima **NEGATIVNI** faktor redukcije
- Odabir izlazne bazične varijable  $x_{[p]}$  koja odgovara retku  $p$ 
  - $p = \operatorname{argmin}_{i \in \{1, \dots, m\}} \{x_{[i]} / B^{-1}A_{iq} \mid B^{-1}A_{iq} > 0\}$

\*[p] označava odabir varijable preko reference retkom

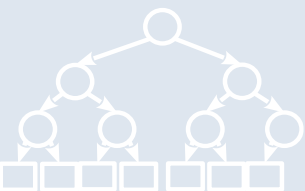


# Simplex – primjer

$$\begin{array}{ll}\max & 7x_1 + 6x_2 \\ \text{uz} & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 4x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

Uvođenjem dviju *slack* varijabli  $x_3$  i  $x_4$  prevodimo LP u standardnu formu

$$\begin{array}{ll}\min & -7x_1 - 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ \text{uz} & 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 + 4x_2 + \quad + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\end{array}$$



# Simplex – primjer

Tablični zapis je

|       | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $b = \text{RHS}$ |         |
|-------|-------|-------|-------|-------|------------------|---------|
| $c^T$ | $-7$  | $-6$  | $0$   | $0$   | $0$              | $= r^T$ |
|       | $2$   | $1$   | $1$   | $0$   | $3$              |         |
|       | $1$   | $4$   | $0$   | $1$   | $4$              |         |

- Tablica već valjana, vrijedi  $r_i = c_i$
- najlakše je odabrati početnu bazu  $\mathbf{B}_0 = [\mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4] = \mathbf{I}_2$ 
  - bazično rješenje  $\mathbf{x}_{(0)} = [0 \ 0 \ 3 \ 4]^T$ ,  $f(\mathbf{x}_{(0)})=0$
- Nulti redak sadrži faktore redukcije
  - ima negativnih pa nije optimum



# Simplex – primjer

Tablični zapis je

|       | $a_1$     | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | RHS      |         |
|-------|-----------|-------|-------|-------|----------|---------|
| $c^T$ | <b>-7</b> | -6    | 0     | 0     | 0        | $= r^T$ |
|       | <b>2</b>  | 1     | 1     | 0     | <b>3</b> |         |
|       | <b>1</b>  | 4     | 0     | 1     | <b>4</b> |         |

Nulti redak ima negativne faktore redukcije pa nije optimum!

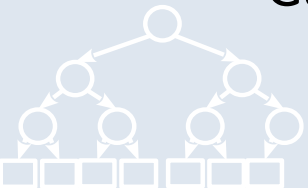
Odabiremo **q=1** (prvi stupčani vektor,  $a_1$ , ulazi u bazu)

Odabiremo redak p koji odgovara izlaznom vektoru

$$p = \operatorname{argmin}_{i \in \{1,2\}} \{x_{[i]} / B^{-1}A_{i1} ; B^{-1}A_{i1} > 0\} = \operatorname{argmin}\{3/2, 4/1\} = 1$$

Pivot (1,1): u bazu ulazi  $a_1$ , a izlazi  $a_3$

Gauss-Jordanova eliminacija tako da  $a_1 = [0, 1, 0]^T$





# Simplex – primjer

Tablični zapis je

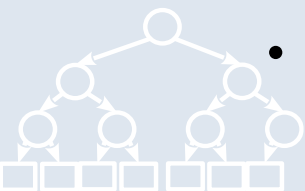
|                | $\mathbf{a}_1$ | $\mathbf{a}_2$ | $\mathbf{a}_3$ | $\mathbf{a}_4$ | RHS |                  |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----|------------------|
| $\mathbf{c}^T$ | -7             | -6             | 0              | 0              | 0   | $= \mathbf{r}^T$ |
|                | 2              | 1              | 1              | 0              | 3   |                  |
|                | 1              | 4              | 0              | 1              | 4   |                  |

- Pivot (1,1): u bazu ulazi  $\mathbf{a}_1$ , a izlazi  $\mathbf{a}_3$

|                | $\mathbf{a}_1$ | $\mathbf{a}_2$ | $\mathbf{a}_3$ | $\mathbf{a}_4$ | RHS  |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|------|
| $\mathbf{r}^T$ | 0              | -5/2           | 7/2            | 0              | 21/2 |
|                | 1              | 1/2            | 1/2            | 0              | 3/2  |
|                | 0              | 7/2            | -1/2           | 1              | 5/2  |

Nova baza  $\mathbf{B}_1 = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_4] = \mathbf{I}_2$

- rješenje  $\mathbf{x}_{(1)} = [3/2 \ 0 \ 0 \ 5/2]^T$ ,  $f(\mathbf{x}_{(1)}) = -21/2$



# Simplex – primjer

|       | $a_1$ | $a_2$  | $a_3$  | $a_4$ | RHS    |
|-------|-------|--------|--------|-------|--------|
| $r^T$ | 0     | $-5/2$ | $7/2$  | 0     | $21/2$ |
|       | 1     | $1/2$  | $1/2$  | 0     | $3/2$  |
|       | 0     | $7/2$  | $-1/2$ | 1     | $5/2$  |

- Negativan faktor redukcije  $r_2$  - nije optimum!
- Odabir stupca  $q=2$
- Odabir retka
  - $p = \operatorname{argmin}_{i \in \{1,2\}} \{x_{[i]} / B^{-1}A_{i2} ; B^{-1}A_{i2} > 0\} = \operatorname{argmin}\{3, 5/7\} = 2$
- Pivot (2,2)



# Simplex – primjer

|       | $a_1$ | $a_2$  | $a_3$  | $a_4$ | RHS    |
|-------|-------|--------|--------|-------|--------|
| $r^T$ | 0     | $-5/2$ | $7/2$  | 0     | $21/2$ |
|       | 1     | $1/2$  | $1/2$  | 0     | $3/2$  |
|       | 0     | $7/2$  | $-1/2$ | 1     | $5/2$  |

- Pivot (2,2): u bazu ulazi  $a_2$ , a izlazi  $a_4$

|       | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$  | $a_4$  | RHS    |
|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| $r^T$ | 0     | 0     | $22/7$ | $5/7$  | $86/7$ |
|       | 1     | 0     | $4/7$  | $-1/7$ | $8/7$  |
|       | 0     | 1     | $-1/7$ | $2/7$  | $5/7$  |



# Simplex – primjer

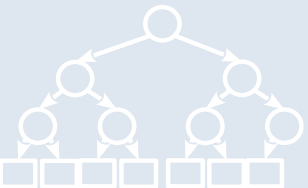
|                | $\mathbf{a}_1$ | $\mathbf{a}_2$ | $\mathbf{a}_3$ | $\mathbf{a}_4$ | RHS    |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--------|
| $\mathbf{r}^T$ | 0              | 0              | $22/7$         | $5/7$          | $86/7$ |
|                | 1              | 0              | $4/7$          | $-1/7$         | $8/7$  |
|                | 0              | 1              | $-1/7$         | $2/7$          | $5/7$  |

- nema negativnih faktora redukcije
  - Optimum!
- Baza  $\mathbf{B}_2 = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2] = \mathbf{I}_2$ 
  - Rješenje  $\mathbf{x}^* = [8/7 \ 5/7 \ 0 \ 0]^T$ ,  $f(\mathbf{x}^*) = -86/7$
- Rješenje polaznog problema
  - $x_1 = 8/7$  i  $x_2 = 5/7$
  - $f_{\max} = 86/7$



# Simplex – problem početne baze!

- Nekad se nakon pretvorbe u standardni oblik ne vidi odmah bazično rješenje!
- Dvofazni simpleks – rješavaju se 2 LPa u nizu
  - 1. FAZA – **pomoćni umjetni korak** za naći početno bazično rješenje
    - Uvijek ima svoju trivijalnu početnu bazu (tako je konstruiran)
  - 2. FAZA – zapravo rješava LP od interesa



# Dvofazni simpleks – umjetni problem

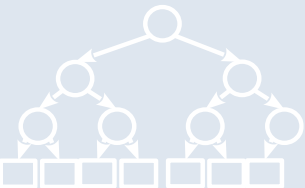
- Pretp. da imamo problem u standardnoj formi

$$\begin{array}{ll} \text{minimizirati} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{uz uvjet} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

pri čemu imamo  $m$  ograničenja jednakosti. Dodajemo  **$m$**  umjetnih varijabli da bismo stvorili jediničnu podmatricu

***NOVI PROBLEM LP':***

$$\begin{array}{ll} \text{minimizirati} & \mathbf{1}^T \mathbf{x}_{n+1:n+m} \\ \text{uz uvjet} & [\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_m] [\mathbf{x}_{1:n} \mid \mathbf{x}_{n+1:n+m}] = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_{1:n+m} \geq \mathbf{0} \end{array}$$



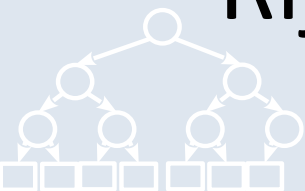
# Dvofazni simpleks – 1. FAZA

- Riješimo novi problem već definiranim postupkom
- Tri moguća ishoda:
  1. Optimum  $f_{LP}^* \neq 0 \Rightarrow$  *originalni LP neizvediv!* **KRAJ!**
  2. Optimum  $f_{LP}^* = 0$ 
    - a) Sve umjetne varijable su nebazične. Adaptacija za 2. FAZU
    - b) Neke umjetne varijable su bazične. Izvodi iteracije simpleksa dok ne izađu sve umjetne varijable iz baze. Adaptacija za 2. FAZU



# Dvofazni simpleks – 2. FAZA

- Adaptacija tablice od LP' (sadrži bazu za originalni LP)
  1. Pobrisati kolone umjetnih varijabli
  2. Zamijeniti fju cilja originalnom
  3. Dvesti prvi red u faktore redukcije
- Riješiti LP od te točke nadalje





# Dvofazni simpleks – primjer

$$\min 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{uz } 4x_1 + 2x_2 \geq 12$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

standardna forma:

$$\min 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{uz } 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 12$$

$$x_1 + 4x_2 - x_4 = 6$$

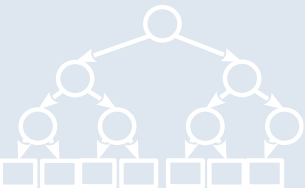
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$



# Dvofazni simpleks – primjer

Dodajemo dvije nove varijable i novu fju cilja

|                | $\mathbf{a}_1$ | $\mathbf{a}_2$ | $\mathbf{a}_3$ | $\mathbf{a}_4$ | $\mathbf{a}_5$ | $\mathbf{a}_6$ | $\mathbf{b} = \text{RHS}$ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---------------------------|
| $\mathbf{c}^T$ | 0              | 0              | 0              | 0              | 1              | 1              | 0                         |
|                | 4              | 2              | -1             | 0              | 1              | 0              | 12                        |
|                | 1              | 4              | 0              | -1             | 0              | 1              | 6                         |



# Dvofazni simpleks – primjer

*Nakon nekoliko iteracija...*

|                | $\mathbf{a}_1$ | $\mathbf{a}_2$ | $\mathbf{a}_3$ | $\mathbf{a}_4$ | $\mathbf{a}_5$ | $\mathbf{a}_6$ | RHS    |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--------|
| $\mathbf{r}^T$ | 0              | 0              | 0              | 0              | 1              | 1              | 0      |
|                | 1              | 0              | $-2/7$         | $1/7$          | $2/7$          | $-1/7$         | $18/7$ |
|                | 0              | 1              | $1/14$         | $-2/7$         | $-1/14$        | $2/7$          | $6/7$  |

baza  $\mathbf{B}_2 = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2] = \mathbf{I}_2$

faktori redukcije su nenegativni -> **OPTIMUM** umjetnog problema

umjetne varijable su =0 i umjetna ciljna funkcija =0

gotova 1. FAZA



# Dvofazni simpleks – primjer

2. faza – iz prethodne tablice se izbace stupci umjetnih varijabli i zamijeni se ciljna fja

|                | $\mathbf{a}_1$ | $\mathbf{a}_2$ | $\mathbf{a}_3$ | $\mathbf{a}_4$ | RHS    |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--------|
| $\mathbf{c}^T$ | 2              | 3              | 0              | 0              | 0      |
|                | 1              | 0              | $-2/7$         | $1/7$          | $18/7$ |
|                | 0              | 1              | $1/14$         | $-2/7$         | $6/7$  |

**Ispravak 0-tog retka** - eliminacijom iznad baznih stupaca



# Dvofazni simpleks – primjer

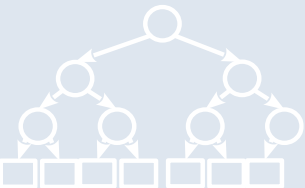
|       | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$  | $a_4$  | RHS     |
|-------|-------|-------|--------|--------|---------|
| $r^T$ | 0     | 0     | $5/14$ | $4/7$  | $-54/7$ |
|       | 1     | 0     | $-2/7$ | $1/7$  | $18/7$  |
|       | 0     | 1     | $1/14$ | $-2/7$ | $6/7$   |

- nema negativnih faktora redukcije
  - **OPTIMUM**
  - Rješenje proširenog izvornog problema je  
 $\mathbf{x} = [18/7 \ 6/7 \ 0 \ 0]^T$
  - rješenje izvornog problema  $\mathbf{x} = [18/7 \ 6/7]^T$ ,  $f(\mathbf{x})=54/7$



# Dualnost

- Teorija nastala poopćenjem metode Lagrangeovih množitelja
- Svaki LP (kojeg ćemo zvati „primal”) ima svoj povezani LP kojeg zovemo „dual”



# Dualnost – kanonska forma

minimizirati

uz uvjet

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

• Dual:

maksimizirati

uz uvjet

$$\mathbf{b}^T \mathbf{y}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$



# Dual - izvođenje

| primal                         | dual                 |
|--------------------------------|----------------------|
| broj ograničenja               | broj varijabli       |
| broj varijabli                 | broj ograničenja     |
| rhs                            | funkcija cilja       |
| funkcija cilja                 | rhs                  |
| <b>A</b> matrica koeficijenata | <b>A<sup>T</sup></b> |
| jednakost                      | urs varijabla        |
| urs varijabla                  | jednakost            |
| $\leq$ ograničenje             | $\geq$ varijabla     |
| $\geq$ ograničenje             | $\leq$ varijabla     |
| $\geq$ varijabla               | $\geq$ ograničenje   |
| $\leq$ varijabla               | $\leq$ ograničenje   |





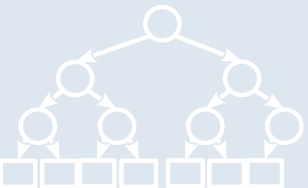
# Veze duala i primala - teoremi

- „Dual duala je primal”
- Slaba dualnost
- Jaka dualnost
- Komplementarnost



# Veze duala i primala - teoremi

- Slaba dualnost
  - Ako je  $x$  izvedivo primalno rješenje i  $y$  je izvedivo dualno rješenje, tada je  $y^T b \leq c^T x$
- Jaka dualnost
  - Ako linearni program ima optimalno rješenje, onda ga ima i dual i njihove vrijednosti su jednake.



# Veze duala i primala - teoremi

## • Komplementarnost

- Ako su  $x$  i  $y$  izvediva rješenja primala i duala, onda su **optimalna** ako i samo ako vrijedi:

$$x_j(c_j - y^T A_{:,j}) = 0, \forall j$$

Faktor  
redukcije  
varijable  $x_j$

$$y_i(A_{i,:}x - b_i) = 0, \forall i$$

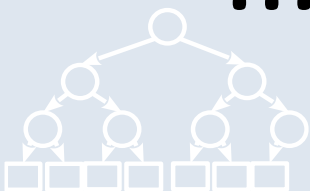
Dopunjenje  
i-tog  
ograničenja  
primala



# Dualnost - korisnost

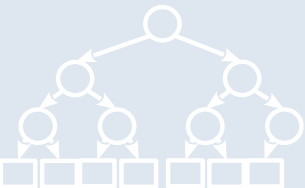
- Ekonomska interpretacija – cijene nad ograničenim resursima
- Minimax teorem u teoriji igara
- Analiza osjetljivosti
- Dualna simpleksna metoda

• ...

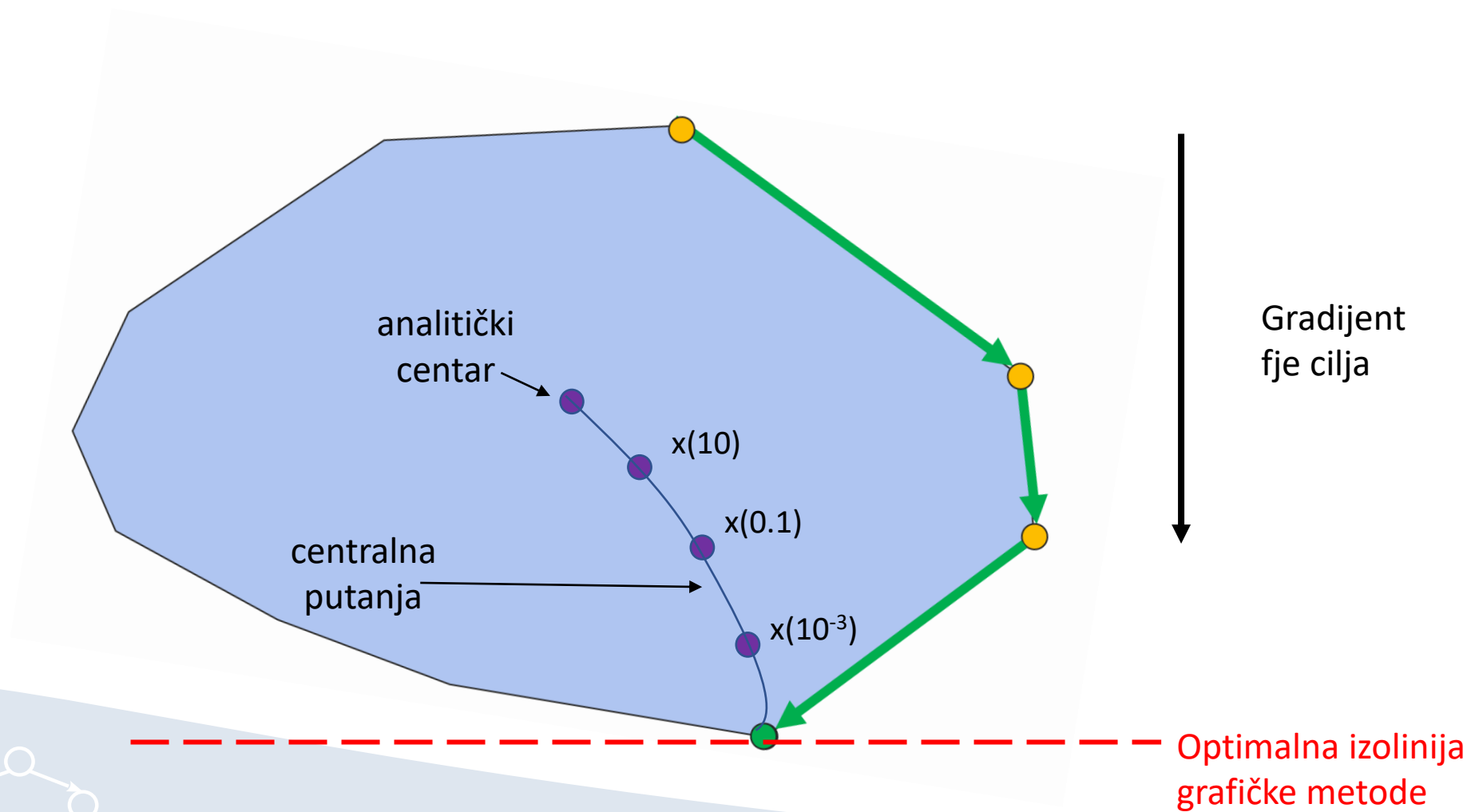


# Simplex – problem!

- Klee-Minty 1972. – konstrukcija perturbirane jedinične hiperkocke za popularna pravila biranja pivota
- Simplex u najgorem slučaju ima eksponencijalnu složenost
- LP je unutar klase problema P



# Metoda unutarnjih točaka - ideja



# Metoda unutarnjih točaka – ideja 1/3

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{uz uvjet} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

---

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{uz uvjet} & \mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{s} = \mathbf{c} \\ & \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{array}$$



# Metoda unutarnjih točaka – ideja 2/3

min  
uz uvjet

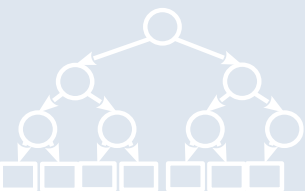
$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mu \mathbf{1}^T \log(\mathbf{x})$$
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Barijerni  
problemi!

Logaritamska  
barijera

max  
uz uvjet

$$\mathbf{b}^T \mathbf{y} + \mu \mathbf{1}^T \log(\mathbf{s})$$
$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{s} = \mathbf{c}$$





# Metoda unutarnjih točaka – ideja 3/3

## KKT uvjeti za $\mu$ -barijerne probleme

$$Ax(\mu) = b$$

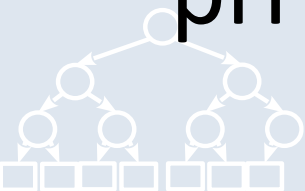
$$x(\mu) \geq 0$$

$$A^T y(\mu) + s(\mu) = c$$

$$s(\mu) \geq 0$$

$$X(\mu)S(\mu)\mathbf{1} = \mathbf{1}\mu$$

pri čemu  $X(\mu) = \text{diag}(x(\mu))$ ,  $S(\mu) = \text{diag}(s(\mu))$



# Primalni algoritam praćenja putanje

- Barijerni problem „pretežak” iz KKT
- Taylorov raspis barijerne fje cilja do kvadratnog člana
- Optimizacija Taylorove aproksimacije metodom Lagrangeovih množitelja za pronalazak minimizirajućeg smjera iz trenutne točke

