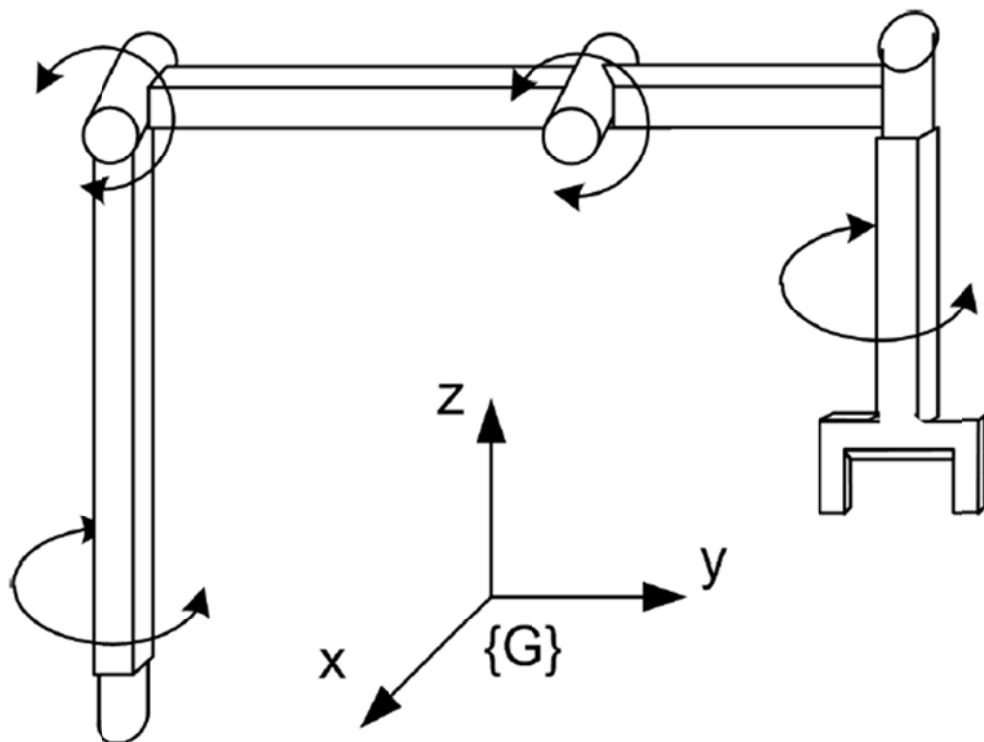


WOLFMAN Automatika, 1.D_AUT	Fakultet elektrotehnike i računarstva Zagreb Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo	23.10.2011.
	OSNOVE ROBOTIKE	
	INVERZNA KINEMATIKA MANIPULATORA 2. domaća zadaća, grupa D	

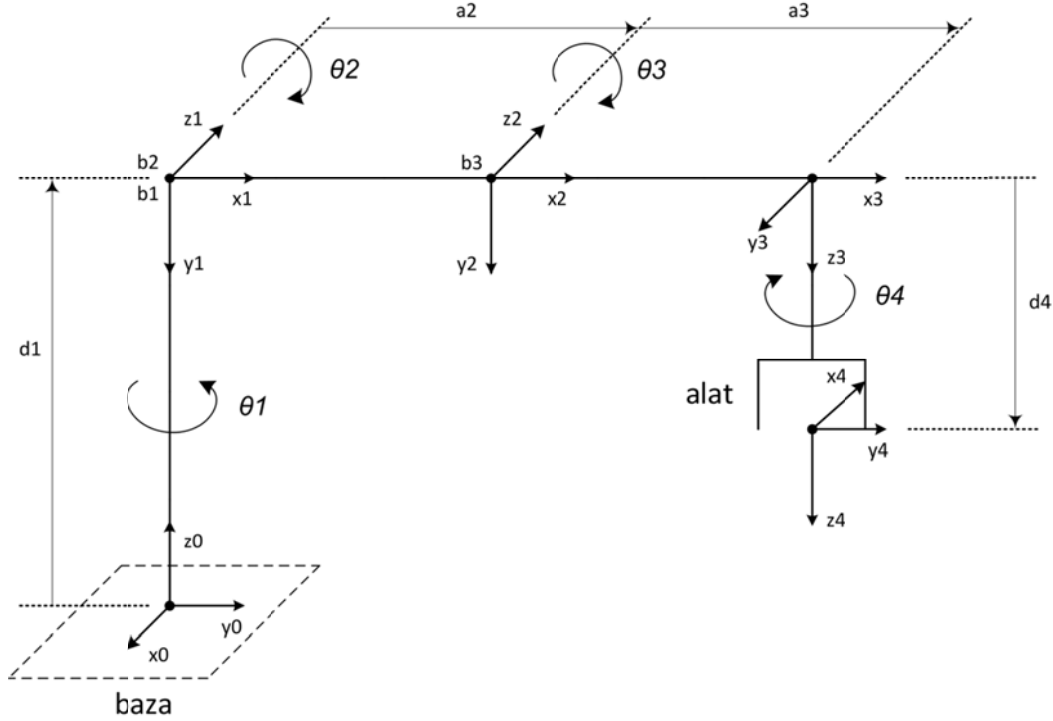


Slika 2.1. Rotacijska konfiguracija manipulatora.

Na temelju matrične jednadžbe manipulatora određene u 1. domaćoj zadaći, riješite inverzni kinematički problem za otvoreni kinematički lanac prikazan slikom 2.1. Pri rješavanju obratite pažnju na potencijalne višeznačnosti i singularitete u rješenjima.

Rješenje:

Na slici 2.2. shematski je prikazan manipulator sa slike 2.1. i označeni su svi koordinatni sustavi te parametri po Denavit-Hartenbergovoj metodi.



Slika 2.2. Koordinatni sustavi manipulatora zadanog na slici 2.1.

U sklopu prve domaće zadaće određena je matična jednažba zadanog manipulatora koja glasi (uz skraćeni zapis: $S_{ij} := \sin(q_i + q_j)$ i $C_{ij} := \cos(q_i + q_j)$, tj. $S_i := \sin(q_i)$ i $C_i := \cos(q_i)$):

$$\mathbf{T}_{baza}^{alat} = \begin{bmatrix} C_1 C_{23} C_4 + S_1 S_4 & C_4 S_1 - C_1 C_{23} S_4 & -C_1 S_{23} & C_1 (a_2 C_2 + a_3 C_{23} - d_4 S_{23}) \\ C_{23} C_4 S_1 - C_1 S_4 & -C_1 C_4 - C_{23} S_1 S_4 & -S_1 S_{23} & S_1 (a_2 C_2 + a_3 C_{23} - d_4 S_{23}) \\ -C_4 S_{23} & S_{23} S_4 & -C_{23} & d_1 - d_4 C_{23} - a_2 S_2 - a_3 S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2-1)$$

Matrica (2-1) je oblika:

$$\mathbf{T}_{baza}^{alat}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{q}) & \mathbf{p}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{v}_0^T & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_0^T = [0 \quad 0 \quad 0], \quad (2-2)$$

gdje je matrica $\mathbf{R}(\mathbf{q})$ dimenzija 3×3 i određuje orijentaciju alata, a vektor $\mathbf{p}(\mathbf{q})$, čije su dimenzije 3×1 , definira položaj vrha alata, tj. koordinate vrha alata u odnose na koordinatni sustav baze [1].

Rješavanje inverznog kinematičkog problema kreće od određivanja vektora \mathbf{w} , koji je definiran na ovaj način [1]:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ e^{q_4/\pi} \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}, \quad (2-3)$$

gdje je \mathbf{r}^3 treći stupac vektora \mathbf{R} . Uvažavanjem izraza (2-2) možemo uvrštavanjem iz (2-1) u (2-3) dobiti konkretan vektor \mathbf{w} :

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} C_1(a_2C_2 + a_3C_{23} - d_4S_{23}) \\ S_1(a_2C_2 + a_3C_{23} - d_4S_{23}) \\ d_1 - d_4C_{23} - a_2S_2 - a_3S_{23} \\ -e^{q_4/\pi}C_1S_{23} \\ -e^{q_4/\pi}S_1S_{23} \\ -e^{q_4/\pi}C_{23} \end{bmatrix}. \quad (2-4)$$

Sada možemo krenuti s rješavanjem. Odmah uočavamo da su w_1 i w_2 praktički razlikuju samo za C_1 , tj. S_1 koji množe identičan veliki izraz u zagradi. Dijeljenjem w_2 i w_1 dobivamo $\tan q_1$, a korištenjem funkcije $\text{atan2}(y, x)$ dobivamo izraz za q_1 :

$$q_1 = \text{atan2}(w_2, w_1). \quad (2-5)$$

Varijable q_2 i q_3 je malo teže odrediti. Izračunajmo zato prvo $q_{23} = q_2 + q_3$. Množenjem w_4 sa C_1 te w_5 sa S_1 dobivamo:

$$\begin{aligned} C_1w_4 &= -e^{\frac{q_4}{\pi}} \cdot C_1^2S_{23}, \\ S_1w_5 &= -e^{\frac{q_4}{\pi}} \cdot S_1^2S_{23}. \end{aligned}$$

Zbrajanjem dobivenih izraza te dijeljenjem sa w_6 slijedi:

$$\frac{-(C_1w_4 + S_1w_5)}{-w_6} = \frac{S_{23}}{C_{23}} = \tan q_{23},$$

pa opet pomoću atan2 funkcije dobivamo izraz za q_{23} :

$$q_{23} = \text{atan2}(-(C_1w_4 + S_1w_5), -w_6). \quad (2-6)$$

Sada definirajmo dvije pomoćne varijable:

$$\begin{aligned} p_1 &= C_1w_1 + S_1w_2 + d_4S_{23} = a_2C_2 + a_3C_{23}, \\ p_2 &= d_1 - d_4C_{23} - w_3 = a_2S_2 + a_3S_{23}. \end{aligned}$$

Primijetimo da su nam te dvije varijable poznate, jer iz izraza (2-5) i (2-6) znamo S_1 i C_1 , odnosno S_{23} i C_{23} . Prebacivanje poznatoga na jednu stranu i nepoznatoga na drugu te dijeljenjem gornje dvije jednačbe dobivamo:

$$\frac{p_2 - a_3S_{23}}{p_1 - a_3C_{23}} = \frac{S_2}{C_2} = \tan q_2$$

Iz čega slijedi varijabla q_2 :

$$q_2 = \text{atan2}((p_2 - a_3S_{23}), (p_1 - a_3C_{23})). \quad (2-7)$$

Sada kada su poznati i q_{23} i q_2 lako dobivamo q_3 :

$$q_3 = q_{23} - q_2. \quad (2-8)$$

Kvadriranjem i zbrajanjem w_4 , w_5 , i w_6 dobivamo:

$$w_4^2 + w_5^2 + w_6^2 = e^{2q_4/\pi},$$

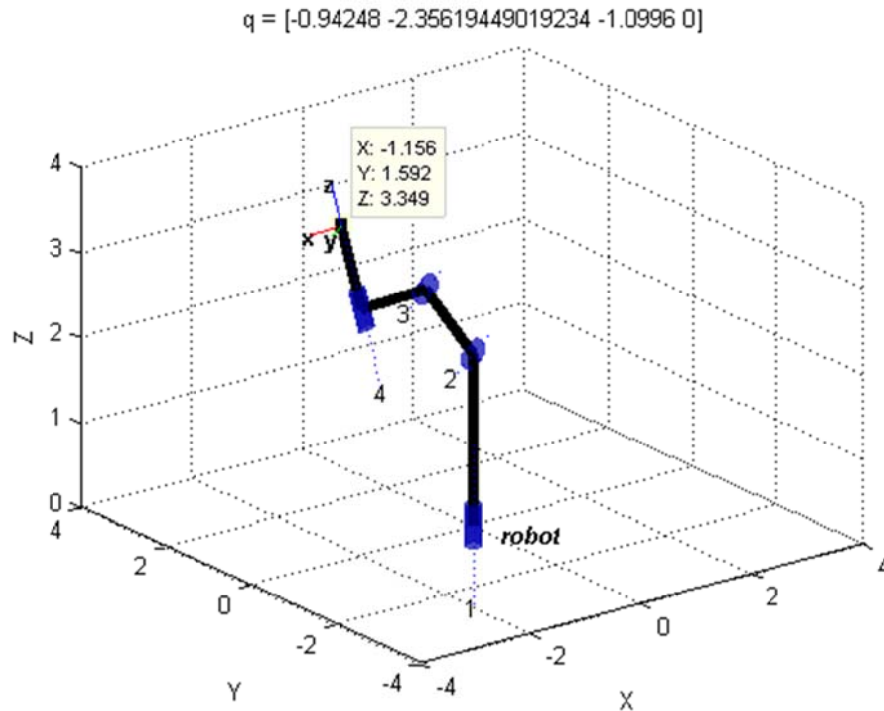
iz čega slijedi izraz za posljednju varijablu zglobova manipulatora:

$$q_4 = \frac{\pi}{2} \ln(w_4^2 + w_5^2 + w_6^2). \quad (2-9)$$

Prema izrazima (2-5) – (2-9) ukupno rješenje inverznog kinematičkog problema zadanog manipulatora glasi:

$$\begin{aligned} q_1 &= \text{atan2}(w_2, w_1), \\ q_{23} &= \text{atan2}(-(C_1 w_4 + S_1 w_5), -w_6), \\ p_1 &= C_1 w_1 + S_1 w_2 + d_4 S_{23}, \\ p_2 &= d_1 - d_4 C_{23} - w_3, \\ q_2 &= \text{atan2}((p_2 - a_3 S_{23}), (p_1 - a_3 C_{23})), \\ q_3 &= q_{23} - q_2, \\ q_4 &= \frac{\pi}{2} \ln(w_4^2 + w_5^2 + w_6^2). \end{aligned}$$

Iz gornjih jednadžbi vidimo da je rješenje inverznog problema kinematike zadanog robotskog manipulatora određeno jednoznačno. Jedini problem koji se može javiti je kod takvih položaja robota u kojima je alat „zabačen“ iza „leđa“ robota (slika 2.3.).



Slika 2.3. Položaj robota za koji gornje jednadžbe nverzne kinematike neće dati ispravne vrijednosti varijabli zglobova.

Problem je u tome što se varijabla q_1 računa preko funkcije atan2 od x i y koordinati vrhova alata. Za gornji slučaj bi po izrazu (2-5) za varijablu q_1 dobili:

$$q_1 = \text{atan2}(1.592, -1.156) = 2.1988,$$

što ne odgovara pravoj vrijednosti -0.94248. Pogrešno određen q_1 rezultira pogrešnim određivanjem i ostalih varijabli. No, ako u programskoj implementaciji možemo detektirati da je dobiveni vektor q pogrešan, onda u idućoj iteraciji možemo izračunati q_1 smanjiti za π čime ćemo dobiti ispravan zakret baze, a iz ispravnog q_1 ćemo onda dobiti i ispravne ostale varijable zglobova. Programska implementacija solvera inverzne kinematike za ovaj robotski manipulator opisana je u sklopu izvještaja za 1. laboratorijsku vježbu.

Literatura

- [1] Kovačić, Z.; Bogdan, S.; Krajči, V.: *Osnove robotike*. Graphis, Zagreb, 2002.