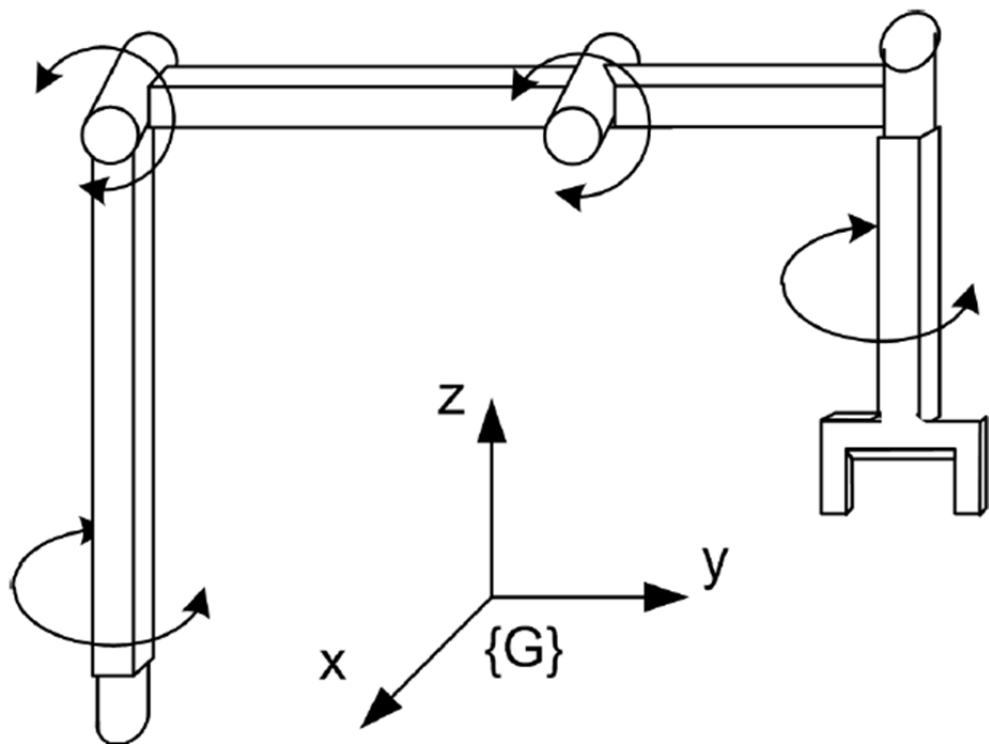


Wolfman Automatika, 1.D_AUT	Fakultet elektrotehnike i računarstva Zagreb Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo	20.10.2011.
	<b>OSNOVE ROBOTIKE</b>	
	DIREKTNA KINEMATIKA MANIPULATORA 1. domaća zadaća, grupa D	



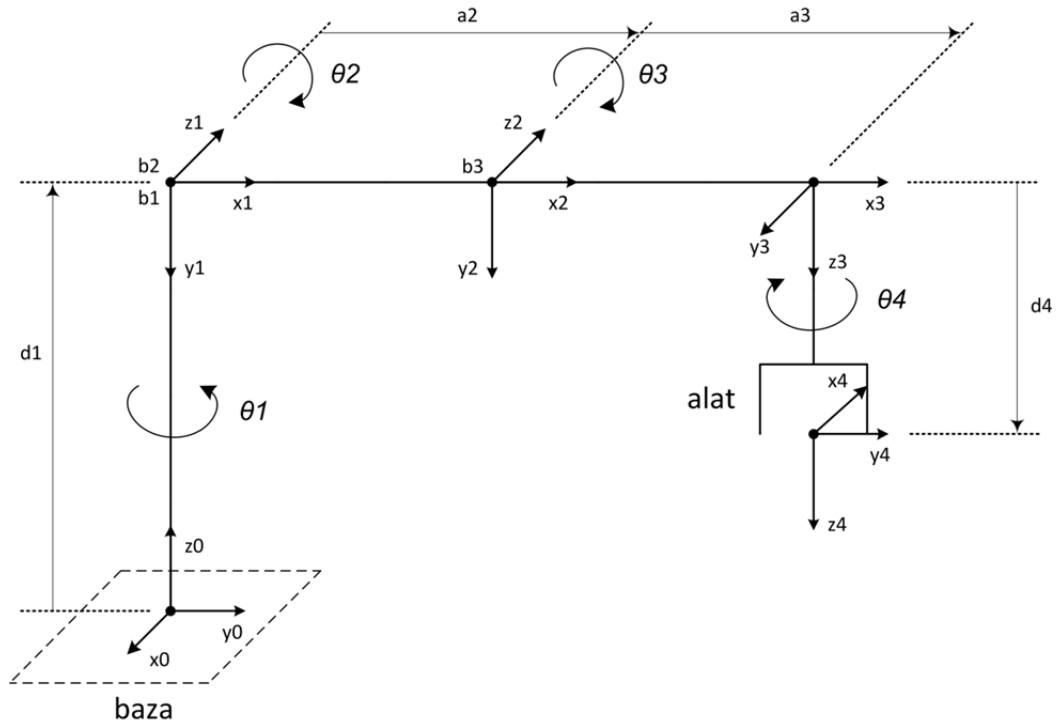
Slika 1.1. Rotacijska konfiguracija manipulatora.

*Za otvoreni kinematički lanac prikazan slikom 1.1. potrebno je:*

- 1. odrediti DH parametre,*
- 2. odrediti matrice transformacije između susjednih koordinatnih sustava,*
- 3. odrediti matricu transformacije između koordinatnog sustava pridruženog alatu i koordinatnog sustava pridruženog bazi (matričnu jednadžbu manipulatora),*
- 4. navesti početne vrijednosti varijabli zglobova  $q$  koje odgovaraju položaju manipulatora na slici 1.1.*

Rješenje:

Praćenjem koraka Denavit-Hartenbergove metode (u daljnjem tekstu DH metoda) [1] dolazimo do slike 1.2. na kojoj su označeni svi koordinatni sustavi i parametri manipulatora.



Slika 1.2. Koordinatni sustavi manipulatora zadanog na slici 1.1.

Sa slike 1.2. lako očitavamo kinematičke parametre:

$$1. \text{ os: } \theta_1 = q_1, d_1 = d_1, a_1 = 0, \alpha_1 = -\frac{\pi}{2}. \quad (1-1)$$

$$2. \text{ os: } \theta_2 = q_2, d_2 = 0, a_2 = a_2, \alpha_2 = 0. \quad (1-2)$$

$$3. \text{ os: } \theta_3 = q_3, d_3 = 0, a_3 = a_3, \alpha_3 = -\frac{\pi}{2}. \quad (1-3)$$

$$4. \text{ os: } \theta_4 = q_4, d_4 = d_4, a_4 = 0, \alpha_4 = 0. \quad (1-4)$$

Prema slici 1.2. možemo odrediti i početne vrijednosti varijabli zglobova  $\mathbf{q}$  koje odgovaraju položaju robota sa slike 1.1.:

$$\mathbf{q}_0 = [q_{1,0} \quad q_{2,0} \quad q_{3,0} \quad q_{4,0}]^T = [\pi/2 \quad 0 \quad 0 \quad -\pi/2]^T. \quad (1-5)$$

Za dobivanje matrične jednadžbe potrebne su matrice homogene transformacije, dobivene uz poznate kinematičke parametre. Općenita matrica homogene transformacije koja povezuje koordinatni sustav  $k$  s prethodnim koordinatnim sustavom  $k-1$  u lancu, ima sljedeći oblik [1] (uz skraćeni zapis:  $C := \cos, S := \sin$ ):

$$T_{k-1}^k = \begin{bmatrix} C\theta_k & -C\alpha_k S\theta_k & S\alpha_k S\theta_k & a_k C\theta_k \\ S\theta_k & C\alpha_k C\theta_k & -S\alpha_k C\theta_k & a_k S\theta_k \\ 0 & S\alpha_k & C\alpha_k & d_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1-6)$$

Sada jednostavnim uvrštavanjem parametara (1-1) do (1-4) u opću matricu (1-6) dobivamo sljedeće matrice (uz skraćeni zapis:  $C_k := \cos q_k$ ,  $S_k := \sin q_k$ ):

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_1^2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^3 = \begin{bmatrix} C_3 & 0 & -S_3 & a_3 C_3 \\ S_3 & 0 & C_3 & a_3 S_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_3^4 = \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & 0 \\ S_4 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1-7)$$

Matrična jednadžba manipulatora se dobiva množenjem matrica homogene transformacije (1-7) na sljedeći način:

$$\mathbf{T}_{baza}^{alat} = \mathbf{T}_0^4(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_0^1(q_1) \cdot \mathbf{T}_1^2(q_2) \cdot \mathbf{T}_2^3(q_3) \cdot \mathbf{T}_3^4(q_4). \quad (1-8)$$

Uvrštavanjem matrica (1-7) u izraz (1-8) (napravljeno u Matlabu – pogledati prilog A) dobivamo sljedeću matričnu jednadžbu manipulatora (uz skraćeni zapis:  $S_{ij} := \sin(q_i + q_j)$  i  $C_{ij} := \cos(q_i + q_j)$ ):

$$\mathbf{T}_0^4 = \begin{bmatrix} C_1 C_{23} C_4 + S_1 S_4 & C_4 S_1 - C_1 C_{23} S_4 & -C_1 S_{23} & C_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23} - d_4 S_{23}) \\ C_{23} C_4 S_1 - C_1 S_4 & -C_1 C_4 - C_{23} S_1 S_4 & -S_1 S_{23} & S_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23} - d_4 S_{23}) \\ -C_4 S_{23} & S_{23} S_4 & -C_{23} & d_1 - d_4 C_{23} - a_2 S_2 - a_3 S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1-9)$$

Matrica (1-9) je oblika:

$$\mathbf{T}_{baza}^{alat}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{q}) & \mathbf{p}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{v}_0^T & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_0^T = [0 \quad 0 \quad 0], \quad (1-10)$$

gdje je matrica  $\mathbf{R}(\mathbf{q})$  dimenzija  $3 \times 3$  i određuje orijentaciju alata, a vektor  $\mathbf{p}(\mathbf{q})$ , čije su dimenzije  $3 \times 1$ , definira položaj vrha alata, tj. koordinate vrha alata u odnosu na koordinatni sustav baze [1]. Prema izrazu (1-10), iz (1-9) slijedi za  $\mathbf{p}(\mathbf{q})$ :

$$\mathbf{p}(\mathbf{q}) = [C_1 \rho \quad S_1 \rho \quad d_1 - d_4 C_{23} - a_2 S_2 - a_3 S_{23}]^T, \quad (1-11)$$

gdje je  $\rho = a_2 C_2 + a_3 C_{23} - d_4 S_{23}$ .

Ako uvrstimo u (1-11) početne vrijednosti varijabli zglobova iz izraza (1-5) dobivamo:

$$\mathbf{p}(\mathbf{q}_0) = [x_{alat} \quad y_{alat} \quad z_{alat}]^T = [0 \quad a_2 + a_3 \quad d_1 - d_4]^T, \quad (1-12)$$

što su uistinu početne vrijednosti koordinata vrha alata u odnosu na bazu manipulatora, u što se možemo uvjeriti na slici 1.2.

Slično možemo izračunati i  $\mathbf{R}(\mathbf{q}_0)$  za početne vrijednosti kutova (pogledati prilog A):

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}_0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1-13)$$

U matrici  $\mathbf{R}(\mathbf{q})$  prvi stupac predstavlja orijentaciju okomitog vektora alata ( $x_4$ ), drugi stupac vektora klizanja alata ( $y_4$ ), a treći stupac vektora približavanja ( $z_4$ ), u odnosu na koordinatni sustav baze manipulatora. Iz matrice  $\mathbf{R}(\mathbf{q}_0)$  očitavamo da je okomiti vektor alata suprotno orijentiran od vektora  $x_0$  baze, vektor klizanja se poklapa sa vektorom  $y_0$  baze, a vektor približavanja je suprotno orijentiran od vektora  $z_0$  baze. To se poklapa sa oznakama na slici 1.2. pa je matrična jednadžba zadovoljena za slučaj početnih kutova.

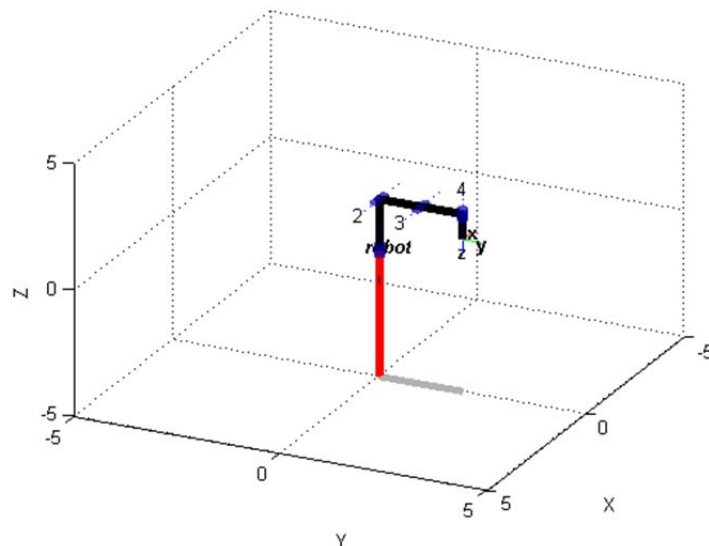
Sljedećim nizom naredbi u Matlabu možemo iscrtati robota sa DH parametrima (1-1) – (1-4), u početnom položaju koji je određen izrazom (1-5) (napomena: potrebno je instalirati Robotics Toolbox):

```
% Ovom naredbom zadajemo DH parametre. Prvi stupac su varijable q,
% drugi stupac su parametri d, treći stupac su parametri alfa, a
% zadnji stupac su parametri a.

dh = [ ...
      pi/2,    2, -pi/2,    0 ;
        0,    0,    0,    1 ;
        0,    0, -pi/2,    1 ;
      -pi/2,    1,    0,    0 ;
    ];

% Stvaranje objekta „robot“ koji je klase SerialLink (Robotics
% Toolbox ) i predstavlja naš manipulator, te plotanje s početnim
% vrijednostima varijabli zglobova.

robot = SerialLink(dh);
robot.plot([pi/2 0 0 -pi/2])
```



Slika 1.3. Rezultat plotanja konfiguracije manipulatora u Matlabu.

Nakon plotanja se dobije slika 1.3. Vidimo da položaj manipulatora na slici 1.3. odgovara položaju manipulatora na slici 1.2., tj. na slici 1.1.

## Literatura

- [1] Kovačić, Z.; Bogdan, S.; Krajči, V.: *Osnove robotike*. Graphis, Zagreb, 2002.

## Dodatak A – Matlab skripta za računanje matrične jednadžbe manipulatora

```
clear
clc

syms theta_k alfa_k a_k d_k

q = sym('q',[1 4]); % varijable zglobova
alfa = [-pi/2, 0, -pi/2, 0]; % parametri alfa
d = sym('d',[1 4]); % parametri d
a = sym('a',[1 4]); % parametri a

% Prvo definiramo općenitu matricu homogene transformacije koja povezuje
% koordinatne sustave k i k-1.
T_k = [ ...
    cos(theta_k), -cos(alfa_k)*sin(theta_k), sin(alfa_k)*sin(theta_k), ...
    a_k*cos(theta_k) ;

    sin(theta_k), cos(alfa_k)*cos(theta_k), -sin(alfa_k)*cos(theta_k), ...
    a_k*sin(theta_k) ;

    0, sin(alfa_k), cos(alfa_k), ...
    d_k ;

    0, 0, 0, ...
    1 ;

];

% Konkretna matrice koje povezuju susjedne koordinatne sustave dobivamo
% uvrštavanjem parametara u općenitu matricu T_k.
T_01 = subs(T_k, [theta_k, d_k, a_k, alfa_k], [q(1), d(1), 0, alfa(1)]);
T_12 = subs(T_k, [theta_k, d_k, a_k, alfa_k], [q(2), 0, a(2), alfa(2)]);
T_23 = subs(T_k, [theta_k, d_k, a_k, alfa_k], [q(3), 0, a(3), alfa(3)]);
T_34 = subs(T_k, [theta_k, d_k, a_k, alfa_k], [q(4), d(4), 0, alfa(4)]);

% Konačnu matričnu jednadžbu manipulatora dobivamo množenjem dobivenih matrica
% od T_01 do T_34.
T_04 = T_01 * T_12 * T_23 * T_34;

% Pojednostavljivanje dobivenih izraza.
T_04 = simple(T_04);

% Iz matrice T_04 vadimo vektor p
p = T_04(1:3,4);

% Računamo koordinate vrha alata u odnosu na koordinatni sustav baze
% manipulatora.
alat_položaj = subs(p, q, [pi/2 0 0 -pi/2])

% Iz matrice T_04 vadimo matricu R
R = T_04(1:3,1:3);

% Računamo orijentaciju alata u odnosu na koordinatni sustav baze
% manipulatora.
alat_orijentacija = subs(R, q, [pi/2 0 0 -pi/2])
```