Napredni algoritmi i strukture podataka – završni ispit

28. siječnja 2014.

1. (5; –1) Koje od sljedećih tvrdnji o strukturi Trie **nisu** istinite (možda i više njih)?
   a) Broj razina u strukturi jednak je broju znakova u najdužoj pohranjenoj riječi (razine se broje od jedan).
   b) Broj razina u strukturi manji je od broja znakova u najdužoj pohranjenoj riječi ako je sljedeća riječ po broju znakova puno kraća od najdulje.
   c) U strukturi Trie postoje 2 vrste čvorova.
   d) Unutarnji čvorovi u strukturi Trie ne sadrže podatke, nego samo ključeve.
   e) Građa strukture Trie ne ovisi o redoslijedu upisa podataka.

Rješenje:

a) Broj razina u strukturi jednak je broju znakova u najdužoj pohranjenoj riječi (razine se broje od jedan).

   Točno, svaki znak riječi sprema se u jedan unutrašnji čvor. Dakle, najdulja riječ stvara nadulji put od korijena do lista u strukturi.

b) Broj razina u strukturi manji je od broja znakova u najdužoj pohranjenoj riječi ako je sljedeća riječ po broju znakova puno kraća od najdulje.

   Netočno, broj razina ovisi isključivo o najdužoj riječi.

c) U strukturi Trie postoje 2 vrste čvorova.

   Točno, unutarnji čvorovi sadrže dijelove ključa, dok listovi sadrže podatke koji se spremaju.

d) Unutarnji čvorovi u strukturi Trie ne sadrže podatke, nego samo ključeve.

   Netočno, unutarnji čvorovi služe za pohranu dijelova ključa, a ne za cijele ključeve.

e) Građa strukture Trie ne ovisi o redoslijedu upisa podataka.

   Točno, građa strukture Trie ovisi samo o pohranjenim riječima (ključevima), a ne o redoslijedu upisa podataka.

Netočni odgovori: b i d

2. (4; –0.5) Navedite četiri (4) od pet definicijskih pravila crveno-crnih stabala.

Rješenje

Definicijska pravila:

1. Svaki čvor je crven ili crn
2. Korijen je crn
3. Svaki list je crn (svaki čvor koji ne sadrži informaciju, odnosno NULL ili sentinel čvor)
4. Oba potomka crvenog čvora su crna
5. Svaka staza od nekog čvora do (bilo kojeg) lista koji je njegov potomak prolazi istim brojem crnih čvorova

3. (8) Napišite pseudo kod Kruskalovog algoritma za pronalazak najkraćeg razapinjućeg stabla. Naputak: očekuje se pseudo kod na visokoj razini; svega nekoliko točno navedenih koraka.

Rješenje

Počevši od bridova s najmanjim težinama, gradimo stablo na način da uvijek odabiremo brid koji ne stvara ciklus sa već odabranim bridovima u stablu. U slučaju da u nekom koraku imamo višestruku mogućnost odabira brida za ulaz u stablo, odabir je proizvoljan. Taj postupak radimo dok stablo ne prolazi kroz sve čvorove u grafu, odnosno dok nemamo najkraće razapinjuće stablo.

Pseudokod:

```
bridovi = sortiraj bridove grafa uzlazno

za svaki i = 0 do ( i < broj bridova i broj odabranih bridova < broj vrhova – 1)
        ako brid(i) ne stvara ciklus sa bridovima iz stabla
                dodaj brid(i) u stablo
```

4. (10) Riješiti sljedeći problem:

max $7x1 + 3x2 + 9x3 + 2x4$

uz uvjete

$$\begin{aligned} x1 + x2 &\le 1 \\ x3 + x4 &\le 1 \\ -x1 - x3 &\le -1 \\ -x2 - x4 &\le -1 \\ x1, x2, x3, x4 &\ge 0 \end{aligned}$$

Rješenje

Vektor ograničenja mora biti >= 0, pa zadnja dva uvjeta množimo sa -1:

x1 + x3 >= 1
x2 + x4 >= 1

Transformacijama, odnosno dodavanjem slack i surpluks varijabli dolazimo do problema:

min -7x1 – 3x2 – 9x3 - 2x4

x1	x2			+ s1				= 1
		x3	x4		+ s2			= 1
x1		x3				-s3		= 1
	x2		x4				-s4	= 1

x1,x2,x3,x4,s1,s2,s3 ≥ 0

Početno rješenje: [0, 0, 0, 0, 1, 1, -1, -1] nije lako uočljivo (ne zadovoljava uvjet xi >=0) te moramo izgraditi umjetni problem i koristiti dvofazni postupak.

Faza 1:

U zadnja dva retka unosimo umjetne varijable a1 i a2, a funkcija za prvu fazu nam iznosi z = a1 + a2. Pa imamo:

min a1 + a2

uz:
x1 + x2 + s1 = 1
x3 + x4 + s2 = 1
x1 + x3 –s3 + a1 = 1
x2 + x4 -s4 + a2= 1
x1,x2,x3,x4,s1,s2,s3,a1,a2 ≥ 0

Gradimo kanonsku tablicu:

B	x1	x2	x3	x4	s1	s2	s3	s4	a1	a2	y
s1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
s2	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
a1	1	0	1	0	0	0	-1	0	1	0	1
a2	0	1	0	1	0	0	0	-1	0	1	1
c	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0

Pravilna kanonska tablica mora imati sve faktore redukcije na mjestima baričnih varijabli jednake 0, a ova tablica ima 1. Tako da cijelu matricu množimo sa matricom$\left\{\begin{matrix} I_m & 0 \\ -c_B^T & 1 \end{matrix}\right\}$. Kod nas c_B^T iznosi [0 0 1 1]. Nakon toga radimo stožerni razvoj.

B	**x1**	x2	x3	x4	s1	s2	s3	s4	a1	a2	y
s1	**1**	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
s2	**0**	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
a1	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**0**	**1**	**0**	**1**
a2	**0**	1	0	1	0	0	0	-1	0	1	1
c	**-1**	-1	-1	-1	0	0	1	1	0	0	-2

Stožerni razvoj radimo oko pozicije 3,1. Čime varijabla x1 ulazi u bazu.

B	x1	**x2**	x3	x4	s1	s2	s3	s4	a1	a2	y
s1	**0**	**1**	**-1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**-1**	**0**	**0**
s2	0	**0**	1	1	0	1	0	0	0	0	1
x1	1	**0**	1	0	0	0	-1	0	1	0	1
a2	0	**1**	0	1	0	0	0	-1	0	1	1
c	0	**-1**	0	-1	0	0	0	1	1	0	-1

Sada imamo stožerni razvoj oko pozicije 1,2 i time u bazu ulazi x2.

B	x1	x2	**x3**	x4	s1	s2	s3	s4	a1	a2	y
x2	0	1	**-1**	0	1	0	1	0	-1	0	0
s2	0	0	**1**	1	0	1	0	0	0	0	1
x1	1	0	**1**	0	0	0	-1	0	1	0	1
a2	**0**	**0**	**1**	**1**	**-1**	**0**	**-1**	**-1**	**1**	**1**	**1**
c	0	0	**-1**	-1	1	0	1	1	0	0	-1

Nastavljamo stožerni razvoj oko 4,3. Time u bazu stavljamo x3.

B	x1	x2	x3	x4	s1	s2	s3	s4	a1	a2	y
x2	0	1	0	1	0	0	0	-1	0	1	1
s2	0	0	0	0	1	1	1	1	-1	-1	0
x1	1	0	0	-1	1	0	0	1	0	-1	0
x3	0	0	1	1	-1	0	-1	-1	1	1	1
c	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**

Pošto u vektoru c nemamo negativnih vrijednosti našli smo optimalno rješenje, a pošto nam je optimum umjetne funkcije jednak 0, to znači da nam i originalan problem ima optimalno rješenje.

Faza 2:

Vraćamo se u originalni problem, minimizaciju funkcije -7x1 – 3x2 – 9x3 - 2x4.
Odbacujemo umjetne varijable i u zadnji redak pišemo koeficijente izvorne funkcije.

B	x1	x2	x3	x4	s1	s2	s3	s4	y
x2	0	1	0	1	0	0	0	-1	1
s2	0	0	0	0	1	1	1	1	0
x1	1	0	0	-1	1	0	0	1	0
x3	0	0	1	1	-1	0	-1	-1	1
c	-7	-3	-9	-2	0	0	0	0	0

Želimo nule ispod varijabli u bazi pa opet množimo matricu uz c_B^T jednak
[3 0 7 9 1].

B	x1	x2	x3	x4	s1	s2	**s3**	s4	y
x2	0	1	0	1	0	0	**0**	-1	1
s2	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**
x1	1	0	0	-1	1	0	**0**	1	0
x3	0	0	1	1	-1	0	**-1**	-1	1
c	0	0	0	3	-2	0	**-9**	-5	12

Radimo stožerni razvoj oko pozicije 2, 7.

B	x1	x2	x3	x4	s1	s2	s3	s4	y
x2	0	1	0	1	0	0	0	-1	1
s2	0	0	0	0	1	1	1	1	0
x1	1	0	0	-1	1	0	0	1	0
x3	0	1	1	1	0	1	0	0	1
c	0	0	0	3	7	9	0	4	**12**

Sve vrijednosti u c su veće ili jednake nula što znači da smo gotovi.
Optimalno rješenje nam je 12, koje dobijemo uz vrijednosti
x1 = 0, x2 = 1, x3 = 1, x4 = 0.