



Born to cheat,  
forced to pass

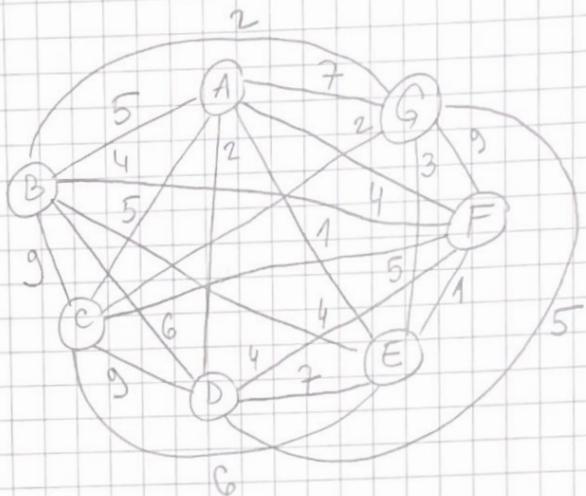
1.) TEG. PUTNIK

1<sup>o</sup>) MIN SPAGLO

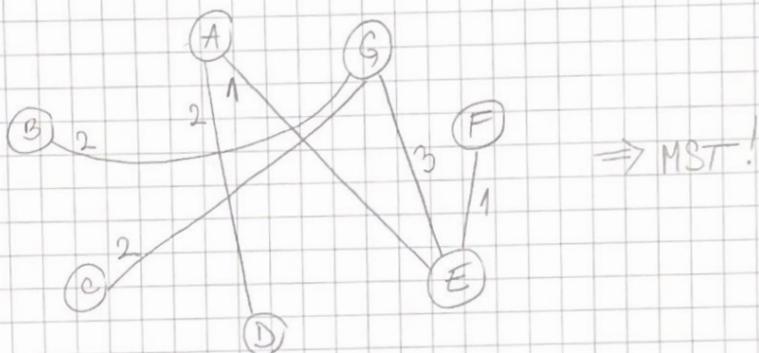
2<sup>o</sup>) EULERIJA

3<sup>o</sup>) E. KRUS

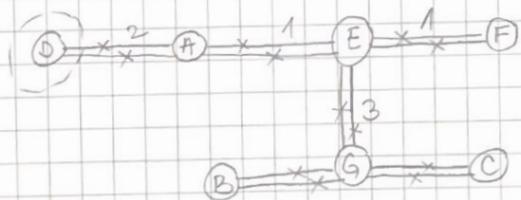
4<sup>o</sup>) H. CIKLUS



-5p



EULERIJA:



EULEROV KRUG: D-A-E-F-E-G-B-G-C-G-E-A-D

HAMILTONOV CIKLUS:

D-A-E-F-G-B-C-D

$$\text{PROŠAK} = 2 + 1 + 1 + 9 + 2 + 9 + 9 = 33 \quad //$$

✓

③ WFI

$k=0$

$$D = \begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ C & 0 & 1 & 0 & 6 & 2 \\ D & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ E & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\Pi^0 = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 & 1 & x \\ x & x & x & 2 \\ x & 3 & x & 3 \\ x & 4 & x & x \\ 5 & x & 5 & x \end{bmatrix}$$

$$D' = \begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ C & 0 & 1 & 0 & 6 & 2 \\ D & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ E & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\Pi^1 = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 & 1 & x \\ x & x & x & 2 \\ x & 3 & x & 3 \\ x & 4 & x & x \\ 5 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$k=1$

$$D^2 = \begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0 & 3 & 3 & 2 & 12 \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ C & 0 & 1 & 0 & 6 & 2 \\ D & 0 & 2 & 0 & 0 & 11 \\ E & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\Pi^2 = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 2 \\ x & x & x & 2 \\ x & 3 & x & 3 \\ x & 4 & x & 2 \\ 5 & 1 & 5 & x \end{bmatrix}$$

$$D^3 = \begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ C & 0 & 1 & 0 & 6 & 2 \\ D & 0 & 2 & 0 & 0 & 11 \\ E & 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\Pi^3 = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 3 \\ x & x & x & 2 \\ x & 3 & x & 3 \\ x & 4 & x & 2 \\ 5 & 3 & 5 & x \end{bmatrix}$$

$k=4$

$$D^4 = \begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ C & 0 & 1 & 0 & 6 & 2 \\ D & 0 & 2 & 0 & 0 & 11 \\ E & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\Pi^4 = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 3 \\ x & x & x & 2 \\ x & 3 & x & 3 \\ x & 4 & x & 2 \\ 5 & 4 & 5 & x \end{bmatrix}$$

$$D^5 = \begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ B & 10 & 0 & 1 & 8 & 9 \\ C & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ D & 12 & 2 & 13 & 0 & 11 \\ E & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\Pi^5 = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & x & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & x & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 5 & x & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 5 & x \end{bmatrix}$$

$$D-A = 12$$

j

$$i = 4 \\ j = 1$$

$D-A :$

$$\uparrow k = \Pi_{ij}^5 = \Pi_{41}^5 = 5 = E$$

$$k-1 = \Pi_{ik}^5 = \Pi_{45}^5 = 2 = B$$

$$k-2 = \Pi_{i(k-1)}^5 = \Pi_{42}^5 = 4 = D$$

$$k-3 = \Pi_{i(k-2)}^5 = \Pi_{44}^5 = X$$

$D-B-E-A$

NAJKRACÍ PUT

//

✓

$$5. \quad c = 11, \quad d = 0.37$$

	1	2	3	4	5	6
N	2	3	5	7	11	22
D	1	2	3	3	4	10

$$\epsilon_{\text{slab}} = 1 - d = 1 - 0.37 = 0.63$$

$$N = 22$$

$$m = 6$$

$$M = \epsilon_{\text{slab}} \cdot N/m = 2.31$$

$$v' = \text{FLOOR}(v/\mu)$$

	1	2	3	4	5	6
N	0	1	2	3	4	9
D	1	2	③	③	④	10

↑    ↑    ↑    ↑

$$N_1' = \text{FLOOR}(2/2.31) = 0$$

$$N_2' = \text{FLOOR}(3/2.31) = 1$$

$$N_3' = \text{FLOOR}(5/2.31) = 2$$

$$N_4' = \text{FLOOR}(7/2.31) = 3$$

$$N_5' = \text{FLOOR}(11/2.31) = 4$$

$$N_6' = \text{FLOOR}(22/2.31) = 9$$

N	{1}	{1,2}	{1,2,3}	{1,2,3,4}	{1,2,3,4,5}	{1,2,3,4,5,6}	
0	0'	0'	0'	0'	0'	0'	0
1	12	2	2	2	2	2	2
2	12	12	3	3	3	3	3
3	12	12	5	3	4	3	3
4	12	12	12	5	5	4	4
5	12	12	12	6	6	6	6
6	12	12	12	8	7	7	7
7	12	12	12	12	9	7	7
8	12	12	12	12	9	9	9
9	12	12	12	12	10	10	10
10	12	12	12	12	12	12	12

U2IMAH  
(12 ≠ 10)      NE U2IMAH  
(10 = 10)

$$\text{SVAR } 5 \Rightarrow v' = 4 \quad \Rightarrow v - v' = 11 - 4 = 7$$

$$\text{SVAR } 1 \Rightarrow v' = 0$$

# Napredni algoritmi i strukture podataka – jesenski ispitni rok

28. kolovoza 2020.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 35), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi, iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (4; -2) Opišite, sažeto, kako u RB stablu nastaje stanje koje modeliramo pomoću dvostrukog crnog čvora. Drugim riječima, objasnite kada se u RB stablu pojavljuje dvostruko crni čvor.
2. (10) Potpuno povezana, unaprijedna (*feedforward*) troslojna neuronska mreža (ANN; *Artificial Neural Network*) ima strukturu  $2 \times 3 \times 2$ , pri čemu je aktivacijska funkcija neurona u skrivenom sloju tangens hiperbolni (tanh), dok je u izlaznom sloju aktivacijska funkcija za izlaz 1 sigmoid, a za izlaz 2 je Adaline. Provedite prvi korak uvježbavanja te mreže (jednom osvježiti sve parametare) algoritmom koračnog uvježbavanja (*on-line learning*) ako se podatci za uvježbavanje uzimaju redom iz sljedeće tablice.

ulaz 1	ulaz 2	izlaz 1	izlaz 2
-1	3	0.4	-2
-1	6	0.2	-6
-9	4	-0.4	8
5	-3	0.4	-9

Početne vrijednosti svih parametara mreže postavite na nula, a zatrebaju li Vam još neke veličine, pridijelite im vrijednosti po vlastitom nahođenju, samo jasno navedite svoj izbor i kratko objasnite ulogu te veličine.

Napomena:  $\tanh(x)=2\sigma(2x)-1$

3. (5; -5) Koje su tvrdnje istinite?
  - a) Dinamičko programiranje je posebna vrsta (grana) linearog programiranja.
  - b) Kada je primjenjiva lakoma (*greedy*) strategija, primjenjivo je i dinamičko programiranje.
  - c) Kada je primjenjivo dinamičko programiranje, primjenjiva je i lakoma (*greedy*) strategija.
  - d) Nužan uvjet za primjenu dinamičkog programiranja je preklopulenost podproblema (*overlapping subproblems*), a dovoljan optimalna podstruktura (*optimal substructure*) problema.
  - e) Nužan uvjet za primjenu dinamičkog programiranja je optimalna podstruktura (*optimal substructure*) problema, a dovoljan preklopulenost podproblema (*overlapping subproblems*).

Napomena: u ovom zadatku se može steći najviše 5 bodova, ali i dobiti do 5 negativnih bodova. Vi navodite tvrdnje koje smatraate istinitima, a prilikom bodovanja će se prepostaviti da tvrdnje koje niste naveli smatraete neistinitima. Time će Vaši odgovori postati vektor s 5 elemenata ISTINA ili NEISTINA, a bodovanje će se provesti kao binarna usporedba s točnim vektorom. Svaka podudarnost elemenata u vektoru Vaših odgovora i odgovarajućih elemenata u točnom vektoru donijet će 1 bod, a nepodudarnost -1 bod. Jedini način da se ovaj zadatak boduje s nula (0) bodova jest da uopće ništa ne napišete.

4. (10) U prazno B-stablo 2. reda upišite redom sljedeće elemente:  
 26, 4, 22, 16, 30, 17, 31, 20, 6, 1, 21 i 27.

5. (9) Bondy-Chvatalovim algoritmom (tj. koristeći Bondy-Chvatalov teorem) pronađite Hamiltonov ciklus u grafu zadanim sljedećom matricom susjedstva (udaljenosti).

	1	2	3	4	5	6
1		7				2
2	7				1	
3				4		3
4			4		3	1
5		1		3		4
6	2		3	1	4	

6. (12) Za skup S zadan sljedećim nejednadžbama:

$$\begin{aligned} z &\geq 3 \\ 2x + y + 2z &\leq 18 \\ -2x + y + 2z &\leq 6 \\ -y + z &\leq 4 \end{aligned} .$$

- a) (6) Odredite je li skup S neprazan.  
 b) (6) Kako biste odredili da li je skup S u prvom ortantu (tj. da li su sve koordinate svih točaka skupa S nenegativne)? Ne trebate provoditi postupak, ali specificirajte sve potrebno za početak postupka te detaljno opišite nastavak postupka.

*Napomena: Pod a) i b) se priznaju odgovori nastali na temelju provođenja efikasnih algoritamskih postupaka.*

# NAPREDNI ALGORITMI I STRUKTURE PODATAKA

1. JESENSKI ROK

a.g. 2019/2020

## ZADATAK 1 (4 2) OZNAKE: struktura stablo RB

Opišite, sažeto, kako u RB stablu nastaje stanje koje modeliramo pomoću dvostruko crnog čvora. Drugim riječima, objasnite kada se u RB stablu pojavljuje dvostruko crni čvor.

### ODGOVOR 1

BODOVI: 4

To se događa prilikom brisanja. Kako u RB stablu brišemo kopiranjem, onda ćemo čvor kojeg brišemo kopirati u neki list, čvor u kojem smo upisali ono što brišemo premjestiti (kopirati) u čvor kojeg brišemo. Tada se može dogoditi da je taj čvor kojeg je bilo lako obrisati bio crn, a ako je i njegov roditelj crn, onda dolazimo do stanja dvostruko crnog čvora.

## ZADATAK 2 (10) OZNAKE: neuronska mreža backpropagation adaline tanh

Potpuno povezana, unaprijedna (feedforward) troslojna neuronska mreža (ANN; *Artificial Neural Network*) ima strukturu  $2 \times 3 \times 2$ , pri čemu je sloju tangens hiperbolni (tanh), dok je u izlaznom sloju aktivacijska funkcija za izlaz 1 sigmoid, a za izlaz 2 je Adaline. Provedite prvi korak uvježbavanja te mreže (jednom osvježiti sve parametare) algoritmom koračnog uvježbavanja (*on-line learning*) ako se podatci za uvježbavanje uzimaju redom iz sljedeće tablice.

ulaz 1	ulaz 2	izlaz 1	izlaz 2
-1	3	0.4	-2
-1	6	0.2	-6
-9	4	-0.4	8
5	-3	0.4	-9

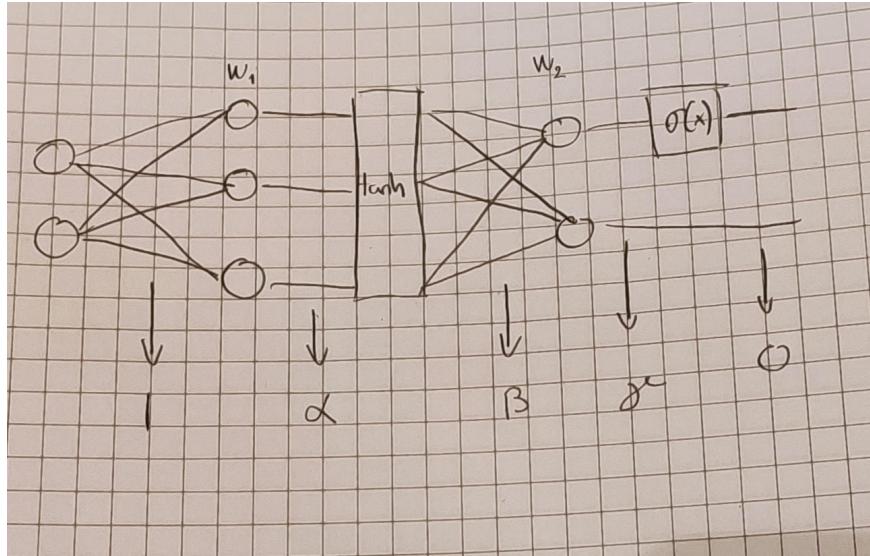
Početne vrijednosti svih parametara mreže postavite na nula, a zatrebaju li Vam još neke veličine, pridijelite im vrijednosti po vlastitom nahođenju, samo jasno navedite svoj izbor i kratko objasnite ulogu te veličine.

Napomena:  $\tanh(x) = 2\sigma(2x) - 1$

## ODGOVOR 1

BODOVI: 10

Prvo skicirajmo mrežu:



Pojedine tokove u mreži označili smo s  $I$  (input),  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  i  $O$  (output). Znamo da nam trebaju gradijenti za svaki tok izuzev ulaza, kao i gradijenti za svaki skup parametara. Osim označenih  $W_1$  i  $W_2$  imamo i  $b_1$  i  $b_2$ . Umjesto da pišemo parcijalne derivacije, pisat ćemo gradijent prefiksiran s nablom. Na primjer, umjesto  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial O}$  pišemo  $\nabla O$ .

Dakle, potrebni su nam sljedeći gradijenti:

- $\nabla O$ ,  $\nabla \gamma$ ,  $\nabla \beta$ ,  $\nabla \alpha$
- $\nabla W_2$ ,  $\nabla b_2$ ,  $\nabla W_1$ ,  $\nabla b_1$

Prvi gradijenti su gradijenti specifičnog toka, tj. točke unutar mreže. Drugi gradijenti su gradijenti po parametrima, koje koristimo za ažuriranje parametara.

Podrazumijevana funkcija gubitka  $\mathcal{L}$  je MSE:

$$\mathcal{L}(\text{target}, \text{prediction}) = \frac{1}{2} (\text{target} - \text{prediction})^2 \quad (1)$$

Prvi gradijent kojeg možemo izračunati je  $\nabla O$ . On je derivacija gubitka po izlazu (predictionu) je

$$\nabla O = \text{prediction} - \text{target} \quad (2)$$

Ako ovo pretvorimo u matrični oblik, dobivamo:

$$\nabla O = \begin{bmatrix} O_0 - Y_0 \\ O_1 - Y_1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

nazovemo li prediction vektor  $\vec{O}$ , a target vektor  $\vec{Y}$ .

S obzirom na to da je  $\nabla\gamma$  kompozitna funkcija, morat ćemo  $\frac{\partial O}{\partial\gamma}$  raspisati matrično:

$$\frac{\partial O}{\partial\gamma} = \begin{bmatrix} \sigma(\gamma_0)(1 - \sigma(\gamma_0)) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_0(1 - O_0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Stoga uz ulančano pravilo vrijedi

$$\nabla\gamma = \begin{bmatrix} \nabla O_0 \cdot O_0(1 - O_0) \\ \nabla O_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Sada nas zanimaju gradijenti parametara ( $\nabla W_2$  i  $\nabla b_2$ ). Prvo trebamo  $\frac{\partial\gamma}{\partial W_2}$  i  $\frac{\partial\gamma}{\partial b_2}$ , a oni su istog oblika kao i  $W_2$  i  $b_2$ :

$$\frac{\partial\gamma}{\partial W_2} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_0 \\ \beta_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial\gamma}{\partial b_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

pa kad primijenimo ulančano pravilo dobivamo

$$\nabla W_2 = \begin{bmatrix} \beta_0 \nabla \gamma_0 & \beta_0 \nabla \gamma_1 \\ \beta_1 \nabla \gamma_0 & \beta_1 \nabla \gamma_1 \\ \beta_2 \nabla \gamma_0 & \beta_2 \nabla \gamma_1 \end{bmatrix} \quad \nabla b_2 = \begin{bmatrix} \nabla \gamma_0 \\ \nabla \gamma_1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Zatim tražimo  $\nabla\beta$ , a to je težinska suma težina po retcima sa zadnjim gradijentom toka (u našem slučaju s  $\gamma$ ):

$$\nabla\beta = \begin{bmatrix} W_2^{0,0} \nabla \gamma_0 + W_2^{0,1} \nabla \gamma_1 \\ W_2^{1,0} \nabla \gamma_0 + W_2^{1,1} \nabla \gamma_1 \\ W_2^{2,0} \nabla \gamma_0 + W_2^{2,1} \nabla \gamma_1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Slično kao i prije, trebamo pomnožiti naš gradijent elementwise s gradijentom aktivacijske funkcije. Uz zadatak smo dobili hint:

$$\tanh(x) = 2\sigma(2x) - 1 \quad (9)$$

pa stoga možemo reći

$$\frac{\partial \tanh(x)}{\partial x} = 4\sigma(x) \cdot^* (1 - \sigma(x)) \quad (10)$$

intuitivno, kada gledate  $\tanh(x)$ , to je sigmoida koja je samo duplo izdužena u visinu. Povećanje u visinu će kvadratno povećati gradijent, a  $2^2 = 4$ .

Sada možemo dobiti i  $\nabla\alpha$ . Uvezši u obzir da vrijedi

$$\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} = 4\sigma(\alpha) \cdot^* (1 - \sigma(\alpha)) \quad (11)$$

uz ulančano pravilo možemo pisati

$$\nabla\alpha = \begin{bmatrix} 4\sigma(\alpha_0)(1 - \sigma(\alpha_0)) \nabla \beta_0 \\ 4\sigma(\alpha_1)(1 - \sigma(\alpha_1)) \nabla \beta_1 \\ 4\sigma(\alpha_2)(1 - \sigma(\alpha_2)) \nabla \beta_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Finalno, ponovimo sve slično kao u jednadžbi (6):

$$\frac{\partial \gamma}{\partial W_1} = \begin{bmatrix} I_0 & I_0 & I_0 \\ I_1 & I_1 & I_1 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \gamma}{\partial b_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

pa uz ulančano pravilo dobivamo

$$\nabla W_1 = \begin{bmatrix} I_0 \nabla \alpha_0 & I_0 \nabla \alpha_1 & I_0 \nabla \alpha_2 \\ I_1 \nabla \alpha_0 & I_1 \nabla \alpha_1 & I_1 \nabla \alpha_2 \end{bmatrix} \quad \nabla b_1 = \begin{bmatrix} \nabla \alpha_0 \\ \nabla \alpha_1 \\ \nabla \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Time smo izračunali sve što nam treba pa možemo krenuti na prvi korak učenja.

### Forward pass

Sve težine su na 0, tj. vrijedi:

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Kada propustimo prvi primjerak kroz mrežu, dobivamo sljedeće tokove:

$$I = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad O = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

### Backward pass

Sukladno izračunatim gradijentima, pišemo:

$$\nabla O = \begin{bmatrix} 0.5 - 0.4 \\ 0 - (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\nabla \gamma = \begin{bmatrix} 0.1 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.025 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\nabla W_2 = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0.025 & 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 0.025 & 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 0.025 & 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\nabla b_2 = \begin{bmatrix} 0.025 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\nabla \beta = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0.1 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 0.1 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 0.1 + 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\nabla \alpha = \begin{bmatrix} 4 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0 \\ 4 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0 \\ 4 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\nabla W_1 = \begin{bmatrix} -1 \cdot 0 & -1 \cdot 0 & -1 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\nabla b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

### Ažuriranje parametara

Pravilom

$$\theta^k = \theta^{k-1} - \eta \nabla \theta^{k-1} \quad (26)$$

ažuriramo težine uz stopu učenja 1 (tj. uz  $\eta = 1$ ):

$$W'_1 = \begin{bmatrix} 0 - 0 & 0 - 0 & 0 - 0 \\ 0 - 0 & 0 - 0 & 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$b'_1 = \begin{bmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$W'_2 = \begin{bmatrix} 0 - 0 & 0 - 0 \\ 0 - 0 & 0 - 0 \\ 0 - 0 & 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$b'_2 = \begin{bmatrix} 0 - 0.025 \\ 0 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.025 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

ZADATAK 3 (5 5)  
OZNAKE: **dinamičko programiranje**

Koje su tvrdnje istinite?

- a) Dinamičko programiranje je posebna vrsta (grana) linearног programiranja.
- b) Kada je primjenjiva lakoma (*greedy*) strategija, primjenjivo je i dinamičko programiranje.
- c) Kada je primjenjivo dinamičko programiranje, primjenjiva je i lakoma (*greedy*) strategija.
- d) Nužan uvjet za primjenu dinamičkog programiranja je prekopljenost podproblema (*overlapping subproblems*), a dovoljan optimalna podstruktura (*optimal substructure*) problema.
- e) Nužan uvjet za primjenu dinamičkog programiranja je optimalna podstruktura (*optimal substructure*) problema, a dovoljan prekopljenost podproblema (*overlapping subproblems*).

Napomena: u ovom zadatku se može steći najviše 5 bodova, ali i dobiti do 5 negativnih bodova. Vi navodite tvrdnje koje smatrate istinitima, a prilikom bodovanja će se pretpostaviti da tvrdnje koje niste naveli smatrate neistinitima. Time će Vaši odgovori postati vektor s 5 elemenata *ISTINA* ili *NEISTINA*, a bodovanje će se provesti kao binarna usporedba s točnim vektorom. Svaka podudarnost elemenata u vektoru Vaših odgovora i odgovarajućih elemenata u točnom vektoru donijet će 1 bod, a nepodudarnost -1 bod. Jedini način da se ovaj zadatak bude s nula (0) bodova jest da uopće ništa ne napišete.

ODGOVOR 1

BODOVI: 5

- a) točno
- b) točno (iako pitanje je što znači **primjenjivo**, dosta greedy strategija ne profitira od dinamičkog programiranja)
- c) netočno (npr. 0-1 knapsack)
- d) netočno (oba su nužni uvjeti)
- e) netočno (oba su nužni uvjeti)

ZADATAK 4      (10)  
OZNAKE:    **stablo**    **B stablo**    **dodavanje**

U prazno B-stablo 2. reda upišite redom sljedeće elemente:

26, 4, 22, 16, 30, 17, 31, 20, 6, 1, 21

ODGOVOR 1

BODOVI: 10

B-stablo drugog reda postoji ako i samo ako je savršeno stablo. S obzirom na to da se radi o on-line dodavanju elemenata, ovo će biti moguće samo za unos 26, a nakon 2. unosa više ne možemo napraviti B-stablo koje zadovoljava sva pravila B-stabla. Nadalje, S obzirom na to da s 12 elemenata ne možemo stvoriti savršeno stablo, čak i da sve elemente upišemo odjednom ne postoji rješenje zadatka. Prema tome, odgovor za sve bodove je: **zadatak je krivo zadan i rješenje ne postoji.**

**Komentar:** Riješio sam ovaj zadatak kao AVL stablo i dobio 6 bodova.

ZADATAK 5      (9)  
OZNAKE:    **graf**   **Hamilton**   **Bondy-Chvatal**

Bondy-Chvatalovim algoritmom (tj. koristeći Bondy-Chvatalov teorem) pronađite Hamiltonov ciklus u grafu zadanim sljedećom matricom susjedstva (udaljenosti):

	1	2	3	4	5	6	
1		7					2
2	7						1
3				4			3
4			4		3		1
5		1		3			4
6	2		3	1	4		

ODGOVOR 1

BODOVI: 9

TODO

ZADATAK 6 (12)  
OZNAKE: simpleks nejednadžba skup linearni program

Za skup S zadan sljedećim nejednadžbama:

$$\begin{array}{rcl} z & \geq & 3 \\ 2x + y + 2z & \leq & 18 \\ -2x + y + 2z & \leq & 6 \\ -y + z & \leq & 4 \end{array}$$

- a) (6) Odredite je li skup S neprezan.
- b) (6) Kako biste odredili da li je skup S u prvom ortantu (tj. jesu li sve koordinate svih točaka skupa S nenegativne)? Ne trebate provoditi postupak, ali specificirajte sve potrebno za početak postupka te detaljno opišite nastavak postupka.

*Napomena: Pod a) i b) se priznaju odgovori nastali na temelju provođenja efikasnih algoritamskih postupaka.*

ODGOVOR 1

BODOVI: 6

Riješio sam zadatak riješavanjem sustava jednadžbi pod rangom. Dakle pronalazio sam rangove varijabli i postavljao parove jednadžbi. Od tih parova sam zbog linearnosti problema dobio granične točke i uzimao sam stroži dobiveni uvjet. Za to sam dobio 6 bodova, a prof. Brčić mi je rekao što je zapravo trebalo napraviti, pa neka netko tko to zna nadopuni (jer ja ne znam xD):

- a) dvofazni simpleks, treba pokazati da je optimum sintetičke ciljne funkcije 0
- b) 2 linearna programa (iako je prof. Brčić rekao da se može i jednim al da je dosta teže)

## Napredni algoritmi i strukture podataka – drugi jesenski ispitni rok

8. rujna 2020.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 35), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi,iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (10) Na raspolaganju imate sljedeće podatke:

$x_1$	$x_2$	izlaz
-1	3	0.1
-1	6	-0.2
-9	4	0.9
5	-3	-0.4

Neuron sa aktivacijskom funkcijom tangens hiperbolni ( $\tanh$ ) s dva ulaza i pomakom (bias) treba uvježbati na dva načina navedena dolje (**a** i **b** dio zadatka). Za svaki način provedite jedan korak uvježbavanja do najboljih parametara izračunljivih u jednom koraku (tj. koristite izravan postupak, ukoliko je primjenjiv, ili inače koristite iterativni postupak).

- a) (5) Za optimizaciju imate na raspolaganju **SVE** podatke u tablici.
- b) (5) Za optimizaciju imate na raspolaganju **samo prva dva retka podataka** iz tablice (tj. preostali podatci kao da ne postoje).

*U slučaju primjene iterativnih postupaka, početne vrijednosti svih parametara neurona postavite na 1 te koristite stopu učenja  $\alpha=0.1$ . Zatrebaju li Vam još neke veličine, pridijelite im vrijednosti po vlastitom nahođenju, samo jasno navedite svoj izbor i kratko objasnite ulogu te veličine.*

Napomena:  $\tanh(x)=2 \text{ sigmoid}(2x)-1$

2. (5; -5) Koje su tvrdnje istinite?

- a) Svi listovi uravnoteženog binarnog stabla uvijek se nalaze u dvije najniže razine.
- b) Pravilno AVL stablo nije nužno savršeno uravnoteženo.
- c) B-stablo nije nužno savršeno uravnoteženo.
- d) Funkcija dobrote (fitness) u svakom trenutku odražava udaljenost pojedine jedinke od najboljeg mogućeg rješenja (globalnog optimuma).
- e) Mala vjerojatnost trajnog ostanka genetskog algoritma u okolini lokalnog ekstrema ciljne (objective) funkcije postiže se ponajviše zahvaljujući mehanizmu križanja jedinki.

Napomena: u ovom zadatku se može steći najviše 5 bodova, ali i dobiti do 5 negativnih bodova. Vi navodite tvrdnje koje smatraste istinitima, a prilikom bodovanja će se prepostaviti da tvrdnje koje niste naveli smatraste neistinitima. Time će Vaši odgovori postati vektor s 5 elemenata **ISTINA** ili **NEISTINA**, a bodovanje će se provesti kao binarna usporedba s točnim vektorom. Svaka podudarnost elemenata u vektoru Vaših odgovora i odgovarajućih elemenata u točnom vektoru donijet će 1 bod, a nepodudarnost -1 bod. Jedini način da se ovaj zadatak boduje s nula (0) bodova jest da uopće ništa ne napišete.

3. (7) Popis elemenata u nekom crveno-crnom (RB) stablu, redom od korijena prema nižim razinama s lijeva na desno do posljednjeg lista, je sljedeći:  
 8, 5, 13, 4, 7, 11, 15, 3, 6, 10, 12, 14 i 9.
- a) (4) Skicirajte to stablo.  
 b) (3) Uklonite redom elemente 15, 11 i 14.
4. (9) Trgujete valutama te želite zaraditi brzim cikličkim transakcijama iskorištavajući neefikasnosti tržišta. Naime, tražite situacije (devizna arbitraža) gdje krenuvši iz jedne valute, nizom brzih razmjena, se možete vratiti u polaznu valutu sa većim iznosom od polaznog. Postoji li arbitraža u tečaju danom u tablici ispod? Koristite efikasan postupak koji će odgovoriti na pitanje.

	USD	EUR	GBP	CHF	CAD
USD	1	0.741	0.657	1.061	1.011
EUR	1.35	1	0.889	1.433	1.366
GBP	1.521	1.126	1	1.614	1.538
CHF	0.943	0.698	0.62	1	0.953
CAD	0.955	0.732	0.65	1.049	1

Napomena: Izračune provodite sa preciznošću na 3 decimalna mesta, sa zaokruživanjem na bliže ukoliko je potrebno. Primjer devizne arbitraže: krenete sa 1 USD, mijenjate valute nekim redoslijedom, te u konačnici sve promijenite natrag u USD i završite sa 1.1 USD.

5. (8) Za ulazno polje brojeva  $A=[a_1, a_2, \dots, a_n]$  prebrojite sve podsekvence za koje vrijedi da je umnožak njihovih elemenata manji od ulaznog parametra L.
- a) (4) Napišite pseudokod algoritma koji bi riješio zadani problem. **Ne priznaje se iscrpna pretraga koja iskušava sve kombinacije.**
- b) (4) Provedite algoritam iz a) nad  $A=[2,3,4,5]$  i  $L=16$ .

Napomena: Podsekvenca je bilo koji niz nastao izbacivanjem 0 ili više elemenata iz A, pri čemu se redoslijed preostalih elemenata ne mijenja. Npr.  $[a_2, a_5, a_9]$  je podsekvenca od A (ukoliko je  $n >= 9$ ).

6. (11) Odgovorite na sljedeća pitanja glede linearнog programiranja i simpleksa:
- a) (4) Napišite proizvoljnu kanonsku simpleks tablicu dimenzija  $4 \times 7$  (4 retka i 7 stupaca) koja opisuje bazično **nedopustivo (neizvedivo, nemoguće)** rješenje. Prikladno označite sve elemente tablice i njihovo značenje.
- b) (3) Napišite proizvoljnu kanonsku simpleks tablicu dimenzija  $4 \times 7$  na temelju koje biste mogli zaključiti da polazni linearni program **nema dopustivo bazično rješenje**. Prikladno označite elemente tablice na temelju kojih ste donijeli zaključak, te napišite njihovo značenje.
- c) (4) Napišite proizvoljnu kanonsku simpleks tablicu dimenzija  $4 \times 7$  na temelju koje biste mogli zaključiti da linearni program **nema optimalno rješenje** zbog neomeđenosti prostora mogućih rješenja. Prikladno označite elemente tablice na temelju kojih ste donijeli zaključak, te napišite njihovo značenje.

# Napredni algoritmi i strukture podataka – ispit ljetnog roka

10. srpnja 2020.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 boda** (prag 35), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi, iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (5) Skicirajte strukturu Trie koja sadrži riječi:  
MUD, MUDDY, MULLET, MULDER i MUDDLE
  
2. (9) Skicirajte crveno-crno stablo koje zadovoljava sljedeće kriterije:
  - a) sadrži kao elemente brojeve od 0 do 11, tj.  
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11
  - b) ima maksimalnu razliku između razina "njoplíćeg" i "njadubljeg" lista
  
3. (3) Koje su poveznice Eulerovog ciklusa i problema kineskog poštara?
  
4. (5) Postavite crveno crna stabla u relaciju s B stablima i objasnite vezu detaljno.
  
5. (9) Zadana je potpuno povezana, unaprijedna (*feedforward*) troslojna neuronska mreža strukture 3x4x2. Aktivacijska funkcija svih neurona u mreži je opća sigmoid.
  - a) (1) Skicirati tu mrežu.
  - b) (8) Provedite prvi korak uvježbavanja te mreže (jednom osvježiti sve parametare) algoritmom koračnog uvježbavanja (*on-line learning*) ako se podatci za uvježbavanje uzimaju redom iz sljedeće tablice:

<b>ulaz 1</b>	<b>ulaz 2</b>	<b>ulaz3</b>	<b>izlaz 1</b>	<b>izlaz 2</b>
-1.8	-6.7	-2	-1	-1.5
-0.5	3.2	0.2	1.1	0.5
1.7	1	0.9	1	-3
3.6	-0.4	3	8	-1

Početne vrijednosti svih parametara mreže postavite na jedan, a zatrebaju li Vam još neke veličine, pridijelite im vrijednosti po vlastitom nahođenju, samo jasno navedite svoj izbor i kratko naznačite što ta veličina predstavlja.

6. (10) Linearni program:

$$\max z = 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 4x_4$$

$$\text{uz } 8x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 \leq 10$$

$$-2x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 \leq -6$$

$$x_4 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

a) (6) riješite simpleks metodom

b) (4) riješite grafički za slučaj da vrijedi  $x_3=0, x_4=3$ .

7. (9) Pronađite najkraći put od vrha A do vrha D u usmjerrenom grafu zadanim sljedećom matricom udaljenosti (slova u tablici su oznake vrhova).

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		7			8	5	1	
B			8					9
C				7		3	-8	4
D						1		
E						4		3
F				7				
G			5					
H				-5				

Napomena: Rješenje treba biti pronađeno koristeći efikasni sistematski pristup za rješavanje ovakvog tipa problema.

RJEŠENJA:

1. Na papiru

2. Na papiru

3. a

4. a,b,c,d

5. Na papiru

6.

Predmeti poredani po rastućim iznosima cijena/vrijednost

	<b>IC</b>	<b>čarape</b>	<b>vodič</b>	<b>štap</b>	<b>cipele</b>	<b>šator</b>
0	0	0	0	0	0	0
200	0	6	6	6	6	6
400	0	6	10	10	10	10
600	<b><u>19</u></b>	19	19	19	19	19
800	19	<b><u>25</u></b>	25	25	25	25
1000	19	25	29	29	29	29
1200	19	25	<b><u>35</u></b>	35	35	35

{IC naočale,čarape,vodič} vrijednosti 35

## Napredni algoritmi i strukture podataka – međuispit

18. studenog 2019.

Ovaj ispit donosi ukupno **42 boda** (prag 10,5), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi,iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (10) Namjeravate prepješaćiti Camino de Santiago. Imate na raspolaganju ruksak od 27 litara i razmatrate sljedeći skup stvari za ponijeti na put:

	vreća za spavanje	krema za sunce	tenisice	karte	lijekovi	tematska knjiga	topla odjeća	dodatno rublje
Volumen	16	4	12	8	4	4	20	4
Subjektivno doživljena korisnost (više je bolje)	38	10	27	19	3	2	40	5

Koje ćete stvari odabrati s ciljem maksimizacije ukupne korisnosti?

2. (7) Binarno stablo za pretraživanje ima 10 elemenata, a nastalo je upisivanjem redom: 30, 1, 21, 48, 46, 24, 18, 45, 2 i 23. Prikažite uravnotežavanje tog stabla **DSW** algoritmom.

3. (9) Skicirajte promjene u početno praznom **AVL stablu** uslijed:

- a) (5) upisivanja redom sljedećih četrnaest brojeva:

7, 39, 11, 31, 33, 38, 9, 29, 5, 36, 13, 4, 32 i 47.

- b) (4) brisanja redom:

4, 47 i 13.

4. (5) Gradijentnom metodom pronaći minimum funkcije  $f(x) = (x - 2)^2 - 7$ . Provedite barem 5 iteracija gradijentne metode i na temelju rezultata procijenite vrijednost  $x$ -a za koji funkcija postiže minimum. Neka je  $\alpha = 0,25$ . Međurezultate zaokružujte na četiri decimalna mjesta. Početna točka neka je  $x = -5$ .
5. (11) Neuronska mreža  $2 \times 2 \times 1$  na ulaz prima signale nula ili jedan. Mreža je potpuno povezana i unaprijedna te svaki neuron kao aktivacijsku funkciju ima opću sigmoid.
- (1) Nacrtati ovu mrežu.
  - (9) Nacrtati tablicu ulaza i izlaza koja je jednaka **NOR** tablici istine te provesti jedan korak koračnog uvježbavanja mreže prema toj tablici.
  - (1) Opisati nastavak postupka uvježbavanja mreže.

# Napredni algoritmi i strukture podataka – završni ispit

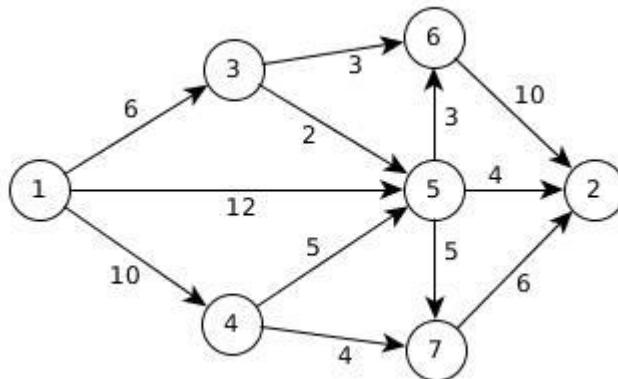
27. siječnja 2020.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 15), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi, iza ;)! Boduju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (10) Riješite sljedeći linearni problem:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 - 3x_2 + 6x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 \leq 5 \\ & -x_2 + 3x_3 \leq 3 \\ & 5x_1 - x_3 \geq 8 \\ & x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

2. (8) Tvrta „Noodles“ želi preko svoje cjevovodne infrastrukture (na slici) slati što je moguće više nafte iz Al Shaheen polja (čvor A) do rafinerije u Mesaieedu (čvor H). Kapaciteti pojedinih cjevovodnih pravaca (po sekundi) su poznati i naznačeni na skici.
- (a) (4) Odredite najveći protok nafte kroz cjevovodnu infrastrukturu u sekundi.  
(b) (4) Napišite (crtež nije dovoljan!) minimalni presjek. Dovoljan je samo jedan, ako ih ima više.



3. (11) U početno prazno B-stablo 4. reda upišite sljedeće elemente (ima ih 15):

28, 97, 13, 46, 14, 39, 75, 12, 83, 71, 95, 22, 54, 5, 49.

- (a) (6) Skicirajte to stablo.  
(b) (5) Uklonite redom elemente 28, 14 i 39.

Napomena: U a) dijelu zadatka, promjene stabla potrebno je crtati tek nakon dodanog devetog elementa (broja 83).

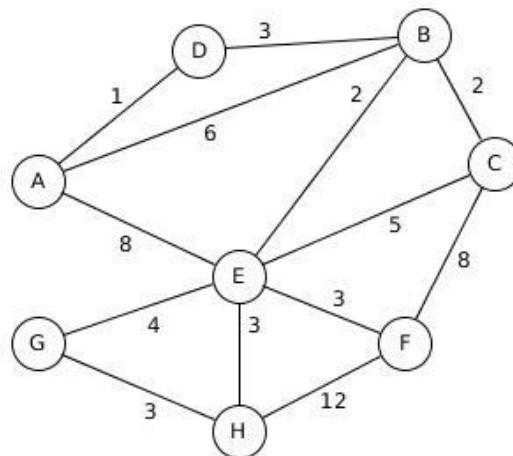
4. (7) WFI algoritmom pronađite udaljenosti među svim čvorovima u grafu zadanim u 6. zadatku s uklonjenim vrhovima A, D i G.
5. (7) Uz pomoć Bondy-Chvatalovog teorema pronađite Hamiltonov ciklus u neusmjerenom jednostavnom grafu G zadanim matricom susjedstva ispod. Početni odabrani Hamiltonov ciklus mora sadržavati barem jedan brid iz maksimalno proširenog grafa  $G'$ .

Konačno rješenje neka bude ispis obilaska koji kreće iz vrha a.

	a	b	c	d	e	f
a	0	0	0	1	1	1
b		0	1	0	1	1
c			0	1	0	0
d				0	1	0
e					0	0
f						0

Napomena: morate ilustrirati slijed koraka koji jasno pokazuju razumijevanje algoritma.

6. (8) Mile iz Hrvatskih cesta mora proći neimenovanom gradskom četvrti i iscrtati linije prometnih traka na svim ulicama. Pronađite mu obilazak (i njegovu duljinu!) koji bi mu osigurao najmanji napor. Mile kreće od raskrižja u čvoru F na slici 1.



# Napredni algoritmi i strukture podataka – zimski ispitni rok

10. veljače 2020.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 35), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi, iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (12) Riješite sljedeći linearni program:

$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 8x_4 \\ \text{uz } &8x_1 + 2x_2 - x_4 \geq 1 \\ &-2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ &x_1 \leq 3 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Napomena: Ukoliko je potrebno, rezultate zaokružujte na 3 decimalna mjesta.

2. (9) U inicijalno prazno **AVL stablo**:

- (5) Dodajte redom sljedeće elemente:

1, 19, 25, 23, 22, 24, 15, 20, 21, 18, 17

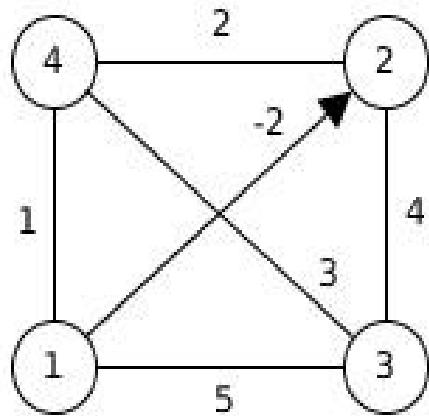
- (4) Uklonite redom sljedeće elemente:

1, 17, 15

Napomena: prikazujte vašu strukturu nakon svake značajnije promjene uslijed uravnotežavanja.

3. (10) Unaprijedno povezanu neuronsku mrežu želite uvježbati za izvođenje operacija logičko NAND i NOR nad dva binarna ulaza. Arhitektura mreže jest  $2 \times 4 \times 2$  gdje su aktivacijske funkcije skrivenog sloja Adaline, a izlaznog sloja sigmoidi.
  - (2) Složite tablicu podataka za uvježbavanje. Tablica neka bude sortirana po vrijednostima ulaza.
  - (1) Skicirajte navedenu mrežu (naznačite aktivacijske funkcije!).
  - (7) Obavite jedan korak koračnog uvježbavanja mreže u kojoj su **svi** parametri inicijalizirani **na jedan**.

4. (8) Poštar na motociklu proizvođača Tomos kreće iz čvora 1 (grafo na Slici 1) u dostavu pošiljki po svim ulicama. Težine označavaju napor. Nakon obilaska se mora vratiti u čvor 1. Ponađite obilazak najmanjeg napora. Također, napišite napornost takvog obilaska.



**Slika 1**

5. (11) Lopov je provalio u dućan s proizvodima 1, 2, 3 od kojih 1 i 2 ima u neograničenim količinama, a proizvoda 3 ima 4 komada. S druge strane, lopov ima naprtnjaču volumena 11. Dotični je, poznajući vrijednosti i zauzeća, brzo formulirao svoj problem kao sljedeći:

$$\begin{aligned}
 \max z &= 1.5x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
 \text{uz } &x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 11 \\
 &x_3 \leq 4 \\
 &x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}_0
 \end{aligned}$$

Ponađite najbolji „ulov”, tj. najvrjedniji sadržaj naprtnjače.

*Napomena: morate ilustrirati slijed koraka koji jasno pokazuju razumijevanje algoritma. Iscrpna pretraga vrijedi 0 bodova. Izvođenje algoritma mora dokazati da je pronađeno rješenje optimalno.*

# Napredni algoritmi i strukture podataka – zimski ispitni rok

16. srpnja 2019.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 35), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Boduju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (10) U inicijalno prazno crveno-crno stablo

- a) (6) Unesite redom sljedeće elemente:

29, 34, 26, 5, 15, 3, 32, 40, 14, 38, 9, 6

- b) (4) Obrišite redom sljedeće elemente:

15, 14

2. (10) Zadana je potpuno povezana, unaprijedna (*feedforward*) troslojna neuronska mreža strukture 2x5x3. Aktivacijska funkcija svih neurona u mreži je opća sigmoid.

- a) (1) Skicirati tu mrežu.

- b) (8) Provedite prvi korak uvježbavanja te mreže (jednom osvježiti sve parametare) algoritmom koračnog uvježbavanja (*on-line learning*) ako se podatci za uvježbavanje uzimaju redom iz sljedeće tablice:

ulaz 1	ulaz 2	izlaz 1	izlaz 2	izlaz 3
-2	1	1.35	6.51	0
7	1	4	-3	0
-1	-4	-2.5	-1.5	1
6	4	5	-1	1

Početne vrijednosti svih parametara mreže postavite na **jedan**, a zatrebaju li Vam još neke veličine, pridijelite im vrijednosti po vlastitom nahođenju, samo jasno navedite svoj izbor i kratko naznačite što ta veličina predstavlja.

- c) (1) Objasniti nastavak postupka, tj. kako bi započeo sljedeći korak uvježbavanja mreže.

*Uputa: dovoljna je i samo jedna dobro sročena rečenica. Naravno, svako podrobnije objašnjenje je dobrodošlo i smanjit će mogućnost zabune prilikom ocjenjivanja.*

3. (10) Usmjereni graf je zadan matricom udaljenosti (slova u tablici su oznake vrhova).

		Odredište					
		A	B	C	D	E	F
rvoz	A		12	11			
	B				9		7
	C					12	
	D		4	9			17
	E				6		5
	F						

- a) (6) Pronađite maksimalni tok između A i F.  
 b) (4) Modelirajte zadani problem maksimalnog toka kao linearni program.

4. (10) Riješite simpleks metodom sljedeći linearni program:

$$\max z = -3x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 4x_4$$

$$\begin{aligned} \text{uz } & 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 \geq 0.5 \\ & 6x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 \leq 3 \\ & x_4 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

5. (10) Pronađite minimalno razapinjuće stablo Dijkstrinim algoritmom na neusmjerenom grafu zadanom sljedećom matricom udaljenosti (slova u tablici su oznake vrhova, dane samo vrijednosti u gornjoj trokutastoj matrici, kako je matrica simetrična).

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		6	10			3	6	
B						-2	-1	
C				7			1	
D					3		5	4
E								4
F							-3	
G								3
H								

## Napredni algoritmi i strukture podataka – međuispit

28. studenoga 2018.

Ovaj ispit donosi ukupno **42 boda** (prag 10,5), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi,iza ;)! Buduju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (3; -1) Ovisi li struktura B-stabla o redoslijedu upisivanja podataka?

*Naputak: odgovorite samo s DA ili NE.*

2. (10) Skicirajte polazno prazno **AVL stablo** uslijed sljedećih promjena (redom kojim su navedene):
  - a) (6) upisivanja redom: 18, 31, 33, 17, 23, 37, 3, 8, 1 i 40
  - b) (4) uklanjanja 33 pa 40.

3. (6) Genetskim algoritmom rješava se problem u domeni  $[-4,12]$  koristeći kromosome veličine 8 bitova.

- a) (3) Kolika je najmanja udaljenost (razlika brojeva) dvaju susjednih elemenata domene prikazivih kromosomima?
- b) (3) Koji je četvrti najmanji prikazivi element domene?

*Napomena: Oba odgovora izračunajte s preciznošću od barem 3 znamenke iza decimalne točke.*

4. (12) Potpuno povezana, unaprijedna (*feedforward*) troslojna neuronska mreža strukture 4x3x2 je dio sustava iz kojeg na ulaze mreže dolaze signali. Aktivacijska funkcija svih neurona skrivenog i izlaznog sloja u mreži je opća sigmoid.

- a) (1) Skicirajte ovu mrežu.
- b) (9) Provedite prvi korak uvježbavanja te mreže (provesti cijeli račun potreban za osvježavanje svih parametara) ako ju treba uvježbati za aproksimaciju funkcije definirane vrijednostima u nekolicini točaka. Ti podatci se, redom, koriste za uvježbavanje mreže:

ulaz1	ulaz2	ulaz3	ulaz4	izlaz1	izlaz2
2	1	-4	3	0.3	0.75
4	2	3	1	0	0
-1	0	1	4	0.25	0
3	-1	-1	0	0	0.25

Početne vrijednosti svih parametara mreže postavite na nula, a zatrebaju li Vam još neke veličine, pridijelite im vrijednosti po vlastitom nahođenju, samo jasno navedite svoj izbor i kratko naznačite što ta veličina predstavlja.

- c) (2) Opišite nastavak postupka uvježbavanja mreže.

5. (11) Neovlašteno ste upali u on-line sustav prodaje karata za koncerte i imate 25min prije nego li Vas otkriju. Odaberite karte koje ćete uzeti ako su Vam dostupne one navedene u sljedećoj tablici:

	Post Malone	A.Grande	M&M	SoP	Cinkuši	김광석
Trajanje dohvata [min]	12	10	8	6	2	4
Vrijednost [HRK]	1200	1100	900	1000	400	800

# Napredni algoritmi i strukture podataka – završni ispit

5. veljače 2019.

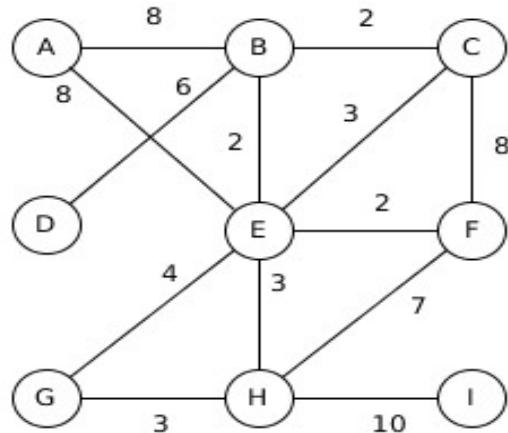
*Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 15), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi,iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.*

1. (10) U polazno praznu C++ strukturu podataka `std::set`, koja je ostvarena **crveno-crnim stablom**, unose se i iz nje brišu brojevi. Skicirajte promjene strukture tijekom:
  - (a) (6) dodavanja, redom:  
20 , 4, 27, 28, 24, 21, 22, 25, 23, 7
  - (b) (4) brisanja, redom: 4 i 7.
  
2. (12) Tvornica proizvodi mlijeko i Oreo<sup>®</sup> kekse. Njihove količine označimo s  $x_1$  (u litrama) i  $x_2$  (u kg). Na tržištu postoji potražnja za 2000 litara mlijeka i 350 kg Oreo<sup>®</sup> keksa te se više od toga sigurno neće moći prodati. Prodajna cijena mlijeka je 7 kn/l, a keksa 50 kn/kg. Također, prevladavajuće mnjenje je da se Oreo<sup>®</sup> keksi mogu jesti samo s mlijekom (bez ulaska u detalje rituala). U skladu s tim, istraživanje tržišta je rezultiralo modelom koji kaže da  $-x_1+4 \cdot x_2$  ne smije nadmašiti 400. Istodobno, radi ograničenja proizvodnog procesa,  $3 \cdot x_1+4 \cdot x_2$  ne smije nadmašiti 6800. Vaša je zadaća odrediti količine mlijeka i keksa koje treba proizvesti, a da se ostvari najveća zarada.
  - (a) (3) Postavite problem kao linearni optimizacijski problem.
  - (b) (4) Grafički pronadite rješenje.
  - (c) (5) Riješite problem simpleks algoritmom.

*Napomena: Bude li potrebno, rezultate zaokružujte na 2 decimalna mjesta.*

3. (11) Marija je izgubila mačku Silvestra te je, sva uzrujana, preko noći izradila letke koje namjerava polijepiti po susjedstvu, uzduž ulica, na svakih nekoliko metara. Pomozite joj pronalaženjem najkraćeg obilaska naselja pogodnog za ostvarenje Marijinog nauma, kao i duljinu tog obilaska. Model naselja je na slici 1 (na sljedećoj stranici), a Marija kreće od svoje kuće koju označava čvor F.

4. (7) Za graf na slici 1, najučinkovitijim općenitim algoritmom za ovakav graf pronađite udaljenosti od čvora F do svih ostalih.



Slika 1

5. (4; -2) Dodamo li težinama svih bridova u grafu na slici 1 isti pozitivan broj, hoće li najkraće putanje između svaka dva čvora ostati iste?

*Naputak: odgovorite samo s DA ili NE.*

6. (6) Bavite se istraživanjem tržišta i razvili ste model u kojem čvorovi predstavljaju tržišne subjekte, a ciklusi u grafu, čije pojave i ponavljanja brojite, ukazuju na oligopoliju i dogovaranje cijena koji su zabranjeni Zakonom o zaštiti tržišnog natjecanja. Tijekom analize Vam slijedno pristižu podatci o relacijama među akterima na "slobodnom" tržištu. Za detekciju ciklusa među anonimiziranim akterima 1 do 6 koristite Disjoint-Set strukturu. Prikažite promjene u polazno „praznoj“ Disjoint-Set strukturi uslijed sljedećih zahtjeva:

- Union(1,6), Union(4,5)
- Union(3,6)
- Union(5,3)

*Napomena: ispišite Disjoint-Set strukturu na početku te nakon svakog označenog zahtjeva.*

# Napredni algoritmi i strukture podataka – zimski ispitni rok

19. veljače 2019.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 35), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi,iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (10) Sljedeći linearni program:

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 - 5x_2 - 3x_3 \\ \text{uz } &8x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ &-2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ &x_1 \leq -3 \\ &x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- a) (4) Riješite grafički za  $x_3=0$ .
- b) (2) Pretvorite u kanonski oblik.
- c) (4) Riješite simpleks postupkom.

Napomena: Ukoliko je potrebno, rezultate zaokružujte na 3 decimalna mjesta.

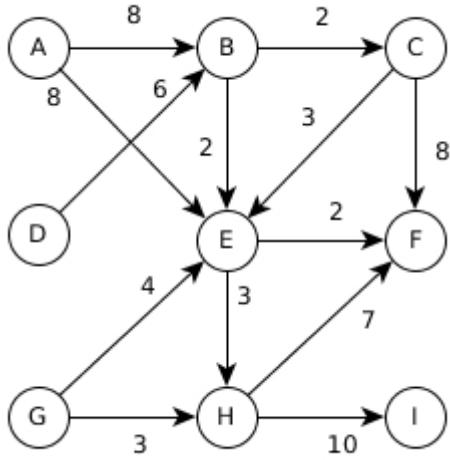
2. (9) U memoriji se nalazi neuravnoteženo binarno stablo za pretraživanje, ovdje zadano ispisom elemenata po razinama:

15, 11, 30, 7, 20, 9, 17, 28, 8, 25

- a) (2) Nacrtajte to stablo
- b) (7) Bez kopiranja elemenata, uravnotežite postojeće stablo prikladnim algoritmom u savršeno uravnoteženo stablo.

Napomena: prikazujte vašu strukturu nakon svake značajnije promjene uslijed uravnotežavanja.

3. (11) Unaprijedno povezanu neuronsku mrežu s jednim skrivenim slojem koji sadrži 4 neurona želite uvježbati za izvođenje operacija logičko I i ILI nad dva binarna ulaza.
  - a) (2) Složite tablicu podataka za uvježbavanje. Tablica neka bude sortirana po vrijednostima ulaza.
  - b) (2) Skicirajte navedenu mrežu.
  - c) (7) Obavite jedan korak koračnog uvježbavanja mreže u kojoj su **svi** parametri inicijalizirani na jedan.
4. (8) Na grafu na slici 1 je izmodeliran elektroenergetski sustav, gdje A,D,G predstavljaju proizvođače električne energije a F i I potrošače. Ostali čvorovi i bridovi predstavljaju elektrodistribucijski sustav. Pronađite najveći tok i jakost toka energije od proizvođača do potrošača.



**Slika 1**

5. (4,-2) Koja je složenost u **O** notaciji rješavanja problema 0-1 naprtnjače sa **N** stvari i kapaciteta **C** koristeći:
- (2,-1) Dinamičko programiranje?
  - (2,-1) Backtracking?

*Naputak: Samo napišite složenost u O notaciji. Obrazloženje se ne uzima u obzir.*

6. (8) Uz pomoć Bondy-Chvatalovog teorema pronađite Hamiltonov ciklus u neusmjerenom jednostavnom grafu G zadanim maticom susjedstva ispod. Početni odabrani Hamiltonov ciklus mora sadržavati barem jedan brid iz maksimalno proširenog grafa G'. (Ako Vas zanima primjena: obilazite košarkaška igrališta radi izrade statistike zauzeća terena, ali za neke parove terena ne smijete biti videni uzastopno radi animoziteta među teritorijalno nastrojenim domicilnim timovima).

Konačno rješenje neka bude ispis obilaska koji kreće iz vrha **a**.

	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>	<b>d</b>	<b>e</b>	<b>f</b>
<b>a</b>	0	0	0	1	0	1
<b>b</b>		0	1	1	0	0
<b>c</b>			0	0	0	1
<b>d</b>				0	1	0
<b>e</b>					0	1
<b>f</b>						0

*Napomena: morate ilustrirati slijed koraka koji jasno pokazuju razumijevanje algoritma.*

# Napredni algoritmi i strukture podataka – zimski ispitni rok

9. srpnja 2018.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 35), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi,iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (3; -1) Objasnite, sažeto, čemu služi, tj. zašto je potrebna prva faza dvofaznog simpleks algoritma.
  
  
  
  
  
2. (10) Zadana je potpuno povezana, unaprijedna (*feedforward*) troslojna neuronska mreža strukture 3x4x2. Aktivacijska funkcija svih neurona u mreži je tangens hiperbolni.
  - a) (1) Skicirati tu mrežu.
  - b) (9) Provedite prvi korak uvježbavanja te mreže (jednom osvježiti sve parametare) algoritmom koračnog uvježbavanja (*on-line learning*) ako se podaci za uvježbavanje uzimaju redom iz sljedeće tablice:

<b>ulaz</b>	<b>ulaz</b>	<b>ulaz3</b>	<b>izlaz</b>	<b>izlaz</b>
<b>1</b>	<b>2</b>		<b>1</b>	<b>2</b>
-1.8	-6.7	-2	-1	-0.9
-0.5	3.2	0.2	1.1	0.5
1.7	1	0.9	1	-0.2
3.6	-0.4	3	-0.6	-1

Početne vrijednosti svih parametara mreže postavite na jedan, a zatrebau li Vam još neke veličine, pridijelite im vrijednosti po vlastitom nahođenju, samo jasno navedite svoj izbor i kratko naznačite što ta veličina predstavlja.

Naputak: Tangens hiperbolni je skalirani i translatirani sigmoid:  $\tanh(x)=2*\text{sigmoid}(x)-1$

3. (8; -4) Razmatra se problem naprtnjače kapaciteta  $C$  za  $N$  raspoloživih stvari.
  - a) (4; -2) Napišite u velikoj O notaciji **vremensku i prostornu složenost** rješenja tog problema primjenom dinamičkog programiranja.
  - b) (4; -2) Također, napišite složenosti za iscrpnu pretragu koja isprobava sve kombinacije  $N$  raspoloživih stvari.

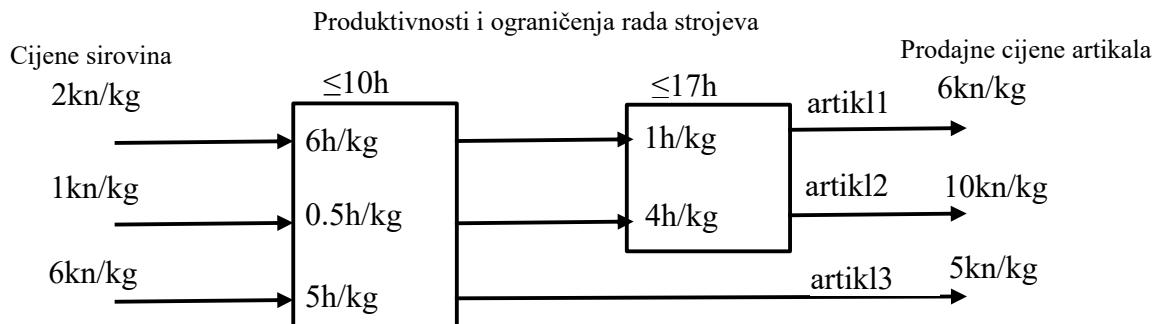
4. (9) Za graf zadan matricom udaljenosti provedite transformaciju u graf s nenegativnim bridovima koja će očuvati međusobne odnose duljina puteva.

	1	2	3	4	5
1					
2	-1				
3	1				8
4	3	0			
5	-4	2			

5. (9) U polazno prazno RB stablo:

- a) (5) upisati, redom, 16, 10, 7, 19, 18, 4, 3, 2, 5 i 1  
 b) (4) izbrisati, redom, 4, 5 i 10.

6. (11) Tvornica pomoću dva stroja proizvodi tri artikla u procesu opisanom skicom. Proces proizvodnje je bez gubitaka, a mora biti isporučeno barem 1kg prvog artikla. Pronadite optimalni plan proizvodnje (tj. koliko pojedinih artikala treba biti proizvedeno).



## Napredni algoritmi i strukture podataka – međuispit

20. studenog 2017.

Ovaj ispit donosi ukupno **42 boda** (prag 10,5), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi,iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (10) Nalazite se u dućanu i raspolažete s 1900 HRK te birate među stvarima čija će Vas kupnja razveseliti. Koje ćete stvari odabrat i ciljem maksimizacije Vašeg zadovoljstva?

	klompe	potkove	luftić	ukrasni bedž	maketu stadiona	kocka leda
Cijena [HRK]	400	300	100	900	1200	500
Zadovoljstvo (što veći broj, to bolje)	11	6	2	18	30	8

2. (10) U inicijalno prazno AVL stablo:
  - a) Redom je upisano sljedećih dvanaest elemenata: 2, 18, 3, 17, 20, 8, 9, 16, 28, 24, 11 i 29.  
Prikažite stvaranje tog stabla.
  - b) Brišite redom brojeve: 18, 29 i 28.
3. (9) Skicirajte promjene u početno praznom B-stablu trećeg reda uslijed upisivanja redom sljedećih četrnaest brojeva:

86, 69, 89, 68, 4, 85, 74, 48, 46, 83, 61, 76, 43 i 35

4. (13) Potpuno povezana, unaprijedna (*feedforward*) troslojna neuronska mreža strukture 2x2x2 je dio sustava iz kojeg na ulaze mreže dolaze signali. Aktivacijska funkcija svih neurona skrivenog i izlaznog sloja u mreži je opća sigmoid.

a) (1) Nacrtati ovu mrežu.

b) (10) Provesti prvi korak uvježbavanja te mreže (provesti cijeli račun potreban za osvježavanje svih parametara) ako ju treba uvježbati za aproksimaciju funkcije definirane definirane vrijednostima u nekolicini točaka. Ti podatci se, redom, koriste za uvježbavanje mreže:

ulaz1	ulaz2	izlaz1	izlaz2
2	3	0.5	0.25
4	1	0	0
-1	4	0.25	0
3	0	0	0.25

Početne vrijednosti svih parametara mreže postavite na nula, a zatrebaju li Vam još neke veličine, pridijelite im vrijednosti po vlastitom nahođenju, samo jasno navedite svoj izbor i kratko naznačite što ta veličina predstavlja.

c) (2) Opisati nastavak postupka uvježbavanja mreže.

# Napredni algoritmi i strukture podataka – jesenski ispitni rok

07. rujna 2018.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 35), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Boduju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (10) Skicirajte polazno prazno **AVL stablo** uslijed sljedećih promjena (redom kojim su navedene):
  - a) (6) upisivanja redom: 17, 4, 11, 9, 18, 2, 3, 15, 12, 6, 13 i 14
  - b) (4) uklanjanja 2 pa 3.
  
2. (10) Zadana je potpuno povezana, unaprijedna (*feedforward*) troslojna neuronska mreža strukture 3x4x2. Aktivacijska funkcija svih neurona izlaznog sloja jest opći sigmoid dok je aktivacijska funkcija svih ostalih neurona tangens hiperbolni.  
*Napomena:*  $\tanh(x)=2\sigma(2x)-1$ 
  - a) (1) Skicirati tu mrežu.
  - b) (8) Provedite prvi korak uvježbavanja te mreže (jednom osvježiti sve parametare) algoritmom koračnog uvježbavanja (*on-line learning*) ako se podatci za uvježbavanje uzimaju redom iz sljedeće tablice:

<b>ulaz</b>	<b>ulaz</b>	<b>ulaz3</b>	<b>izlaz</b>	<b>izlaz</b>
<b>1</b>	<b>2</b>		<b>1</b>	<b>2</b>
-1.5	4.4	-0.2	0.12	0.45
2.7	1	-0.9	0.4	0.3
-1.1	-6.7	-2	0.25	0.15
3.6	-0.4	3	0.5	0.1

Početne vrijednosti svih parametara mreže postavite na jedan, a zatrebaju li Vam još neke veličine, pridijelite im vrijednosti po vlastitom nahođenju, samo jasno navedite svoj izbor i kratko naznačite što ta veličina predstavlja.

- c) (1) Objasniti nastavak postupka, tj. kako bi započeo sljedeći korak uvježbavanja mreže.  
*Uputa: dovoljna je i samo jedna dobro sročena rečenica. Naravno, svako podrobniјe objašnjenje je dobrodošlo i smanjit će mogućnost zabune prilikom ocjenjivanja.*

3. (12) Linearni program:

$$\max z = x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 4x_4$$

$$\text{uz } 8x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 \geq 1$$

$$6x_1 - 6x_2 - x_3 + x_4 \leq 2$$

$$x_4 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- a) (7) riješite simpleks metodom
- b) (5) riješite grafički za slučaj da vrijedi  $x_3=0, x_4=1$ .

4. (10) Nalazite se u dućanu i raspolažete s 1000 HRK. Kupnja različitih stvari različito Vas uveseljava, a želite se što je moguće više oraspoložiti nakon napornog radnog dana. Koje će stvari odabratи?

	A	B	C	D	E	F	G
Cijena [HRK]	500	200	-200	1000	600	1200	700
Utjecaj na raspoloženje (što veći broj, to bolje)	8	4	5	12	7	14	10

5. (8) Pronađite minimalno razapinjuće stablo Primovim algoritmom na neusmjerenom grafu zadanom sljedećom matricom udaljenosti (slova u tablici su oznake vrhova, dane samo vrijednosti u gornjoj trokutastoj matrici, kako je matrica simetrična).

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	-6	-1			6	5	-1	
B			-4					1
C				9		3	5	4
D						-1		
E						4		3
F						-2		
G								
H								

# Napredni algoritmi i strukture podataka – završni ispit

29. siječnja 2018.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 15), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi,iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (11) Riješite sljedeći linearни program:

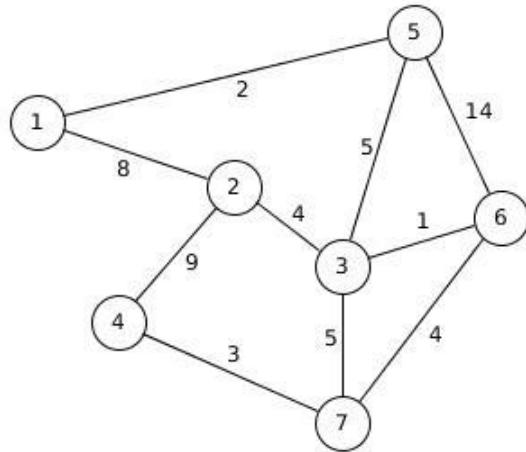
$$\begin{array}{ll} \max & -5x_1 + 6x_2 + 7x_3 \\ \text{uvjeti} & x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 5 \\ & -x_2 + 2x_3 \leq 1 \\ & x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

2. (6; -3) Navedite sve **NETOČNE** tvrdnje.

- (a) Prostor mogućih rješenja linearног programa jest konveksni politop.
- (b) Prostor mogućih rješenja linearног programa jest politop.
- (c) Poznat je algoritam polinomijalne složenosti za pronađazak Hamiltonovog ciklusa u Hamiltonovim grafovima.
- (d) Bellman-Ford jest label-setting algoritam.
- (e) Maksimalni tok u mreži jest određen kapacitetom maksimalnog presjeka.
- (f) Dijkstrin algoritam pronađazi najkraći put samo između polaznog vrha i točno jednog zadanoг vrha u grafu.

*Napomena: u ovom zadatku se može steći najviše 6 bodova, ali i dobiti do 3 negativna boda. Vi navodite tvrdnje koje smatrati neistinitima, a prilikom bodovanja će se pretpostaviti da tvrdnje koje niste naveli smatrati istinitima. Time će Vaši odgovori postati vektor sa 6 elemenata ISTINA ili NEISTINA, a bodovanje će se provesti kao binarna usporedba s točnim vektorom. Svaka podudarnost elemenata u vektoru Vaših odgovora i odgovarajućih elemenata u točnom vektoru donijet će 1 bod, a nepodudarnost -0.5 bod. Jedini način da se ovaj zadatak boduje s nula (0) bodova jest da uopće ništa ne napišete.*

3. (11) Riješite problem kineskog poštara koji kreće u obilazak iz čvora 3.



4. (11) WFI algoritmom pronađite najkraće udaljenosti među svim čvorovima u grafu zadanim u 3. zadatku ako se uklone vrhovi 6 i 7.
5. (11) U grafu zadanim simetričnom matricom udaljenosti pronađite obilazak za trgovackog putnika koji nije dulji od dvostrukе duljine najkraćeg razapinjućeg stabla. Udaljenosti zadovoljavaju nejednakost trokuta. Polazni vrh neka bude **a**.

	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>	<b>d</b>	<b>e</b>	<b>f</b>
<b>a</b>	0	1	2	2	3	4
<b>b</b>		0	1	2	2	3
<b>c</b>			0	3	2	2
<b>d</b>				0	1	5
<b>e</b>					0	4
<b>f</b>						0

Napomena: morate ilustrirati slijed koraka koji jasno pokazuju razumijevanje algoritma. Ako upotrijebite algoritam koji nije predavan na NASP-u, morate navesti izvor koji ste koristili za učenje i taj izvor mora sadržavati dokaz točnosti algoritma ili mora sadržavati referencu na neki drugi izvor s prikladnim dokazom.

# Napredni algoritmi i strukture podataka – zimski ispitni rok

12. veljače 2018.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 35), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadataka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi, iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (3; -1) Opišite, sažeto, kako u RB stablu nastaje stanje koje modeliramo pomoću dvostrukog crnog čvora. Drugim riječima, objasnite kada se u RB stablu pojavljuje dvostruko crni čvor.
2. (12) Zadana je potpuno povezana, unaprijedna (*feedforward*) troslojna neuronska mreža strukture 3x4x2. Aktivacijska funkcija svih neurona skrivenog sloja je opći sigmoid, dok je u izlaznom sloju Adaline.
  - a) (1) Skicirati tu mrežu.
  - b) (11) Provedite prvi korak uvježbavanja te mreže (jednom osvježiti sve parametare) algoritmom koračnog uvježbavanja (*on-line learning*) ako se podatci za uvježbavanje uzimaju redom iz sljedeće tablice:

ulaz 1	ulaz 2	ulaz3	izlaz 1	izlaz 2
2.0	-6.7	-2	-1	-1.5
-0.1	3.2	10.2	3.1	0.5
2.7	-1	0.9	-1	-3
4.6	-0.7	3	-4	1

Početne vrijednosti svih parametara mreže postavite na jedan, a zatrebaju li Vam još neke veličine, pridijelite im vrijednosti po vlastitom nahođenju, samo jasno navedite svoj izbor i kratko naznačite što ta veličina predstavlja.

3. (12) Za graf zadan matricom udaljenosti provedite transformaciju u graf s nenegativnim bridovima koja će očuvati međusobne odnose duljina puteva.

	1	2	3	4	5
1		1	-1		
2				4	
3		5		-2	
4					
5				-1	

4. (11) U polazno prazno AVL stablo:

- a) (6) upisati, redom, 25, 7, 24, 15, 27, 37, 47, 36 i 34  
b) (5) izbrisati, redom, 47, 37 i 27.

5. (12) Simpleks postupkom riješite sljedeći linearni program:

$$\begin{aligned} \max z &= -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 6x_4 \\ \text{uz } &x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 \leq 11 \\ &-x_1 + 8x_2 + x_3 + x_4 \leq 4 \\ &x_1 \leq -3 \\ &x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

## Napredni algoritmi i strukture podataka – međuispit

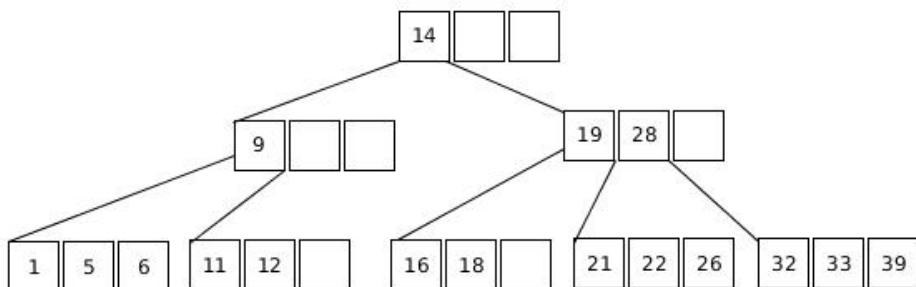
30. studenog 2016.

Ovaj ispit donosi ukupno **42 boda** (prag 10,5), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi,iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (2; -1) Ovisi li građa (konačni izgled) B-stabla o redoslijedu upisa podataka?

Naputak: očekuje se samo kratki odgovor DA ili NE.

2. (7) Iz B-stabla na slici izbrišite, redom, 11, 12, 9, 6, 14, 5 i 19.



3. (8) Skicirajte polazno prazno crveno-crno stablo uslijed sljedećih promjena (redom kojim su navedene):

- a) (5) upisivanja redom: 34, 36, 2, 25, 35, 3, 12, 9, 22, 1 i 0
- b) (3) uklanjanja 9 pa 0.

4. (5) Koje tvrdnje o genetskim algoritmima (GA) **NISU** istinite?

- a) GA uvijek nalazi globalni optimum.
- b) GA su deterministički algoritmi.
- c) Dobrota jedinke ne mora biti jednaka ciljnoj funkciji.
- d) Jedno od područja u kojem su genetski algoritmi vrlo uspješni i često bolji od drugih optimizacijskih metoda jesu kombinatorne optimizacije.
- e) Ako tijekom jednog izvođenja (jedne usporedbe)  $GA_1$  postigne bolji rezultat od  $GA_2$ , može se zaključiti da je on općenito bolji i očekivati da će uvijek pronaći bolje rješenje od  $GA_2$ .

Napomena: u ovom zadatku se može steći 5 bodova, ali i dobiti do 5 negativnih bodova. Vi navodite tvrdnje koje smatraste odgovorima na pitanje, a prilikom bodovanja će se pretpostaviti da tvrdnje koje niste naveli smatraste netočnim odgovorima. Iz Vaših odgovora konstruira se vektor s 5 elemenata ISTINA ili NEISTINA, a bodovanje će se provesti kao usporedba s točnim vektorom element po element. Svaka podudarnost elemenata u vektoru Vašeg odgovora i odgovarajućih elemenata u točnom vektoru donijet će 1 bod, a nepodudarnost -1 bod. Jedini način da se ovaj zadatak boduje s nula (0) bodova jest da uopće ništa ne napišete.

5. (10) Linearni neuron (Adaline) s tri ulaza treba uvježbati tako da što točnije obavlja preslikavanje zadano tablicom.

ulaz 1	ulaz 2	ulaz 3		izlaz
1/2	0	0		1
0	- 1/4	0		0
- 1/2	0	1		-1
0	0	0		0

- a) (1) Skicirajte taj neuron.
- b) (4) Izračunajte optimalne parametre izravno (dakle ne iteracijski).
- c) (5) Provedite prvih 5 iteracija izračuna optimalnih parametara algoritmom najmanjih kvadrata (LMS) uz korak osvježavanja 1 i početne težine sve 0.

*Naputak: za one koji se ne mogu prisjetiti ☺, LMS algoritam je zapravo „koračna gradijentna metoda“ (On-Line Learning). Preciznije, to je gradijentna metoda koja gradijent ne izračunava uzimajući u obzir cijeli skup za uvježbavanje, nego samo trenutačnu točku.*

6. (10) Riješite 0/1 (znači, tzv. *cjelobrojni*) problem naprtnjače na primjeru provale u ljekarnu. Volumen vreće je 1.5 L, a podatci o raspoloživim stvarima su u tablici.

	metadon	rukavice	igle	betametazon	CERA	natrij-tiopental
volumen [L]	0.8	0.5	0.5	0.6	0.9	0.2
rijednost	1000	400	500	300	1300	300

## Napredni algoritmi i strukture podataka – međuispit

30. studenog 2015.

Ovaj ispit donosi ukupno **42 boda** (prag 10,5), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi, iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

- 1) (7) Binarno stablo za pretraživanje ima 10 elemenata, a nastalo je upisivanjem redom: 3, 1, 4, 2, 5, 6, 8, 7, 9 i 10. Prikažite uravnotežavanje tog stabla DSW algoritmom.

2) (9) Skicirajte promjene u početno praznom B-stablu četvrtog reda uslijed upisivanja redom:  
6, 19, 17, 11, 3, 12, 8, 20, 22, 23, 13, 18, 14 i 16.

3) (5) Prikažite određivanje minimuma funkcije  $f(x) = (x - 2)^2$  gradijentnom metodom kada se kao početna točka uzme  $x = 0$ . Provedite barem 5 iteracija i na temelju rezultata procijenite vrijednost  $x$  za koju funkcija postiže minimum. Neka je  $\alpha = 0,2$ . Međurezultate zaokružujte na četiri znamenke iza decimalnog zareza (točke).

4) (11) Neuronska mreža  $2 \times 2 \times 1$  na ulaz prima signale nula ili jedan. Mreža je potpuno povezana i unaprijedna te svaki neuron kao aktivacijsku funkciju ima opći sigmoid.

  - (2) Skicirati ovu mrežu.
  - (9) Skicirati tablicu ulaza i izlaza koja je jednaka **NAND** tablici istine te provesti jedan korak uvježbavanja mreže prema toj tablici.

5) (10) Poslova koje treba obaviti je previše da ih obavite sve, a u ukupno 20 sati rada morate donijeti što veću korist svojoj tvrtki. Poslovi su navedeni u tablici (apstraktno, oznake A do H), zajedno s korisnošću i vremenom potrebnim da ih se obavi.

	A	B	C	D	E	F	G	H
korisnost (više je bolje)	8	45	6	19	3	2	10	8
Vrijeme [sati]	2	18	2	6	2	2	8	4

a) (7) Koje ćete poslove obaviti da biste ostvarili najveću korist?

b) (3) Koje biste poslove obavili da imate samo 17 sati vremena?

# Napredni algoritmi i strukture podataka – završni ispit

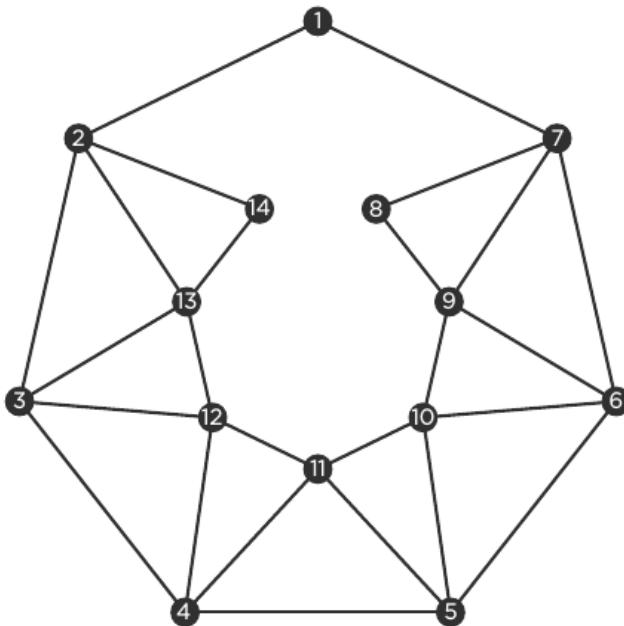
08. veljače 2016.

Ovaj ispit donosi ukupno **42 boda** (prag 10,5), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi,iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

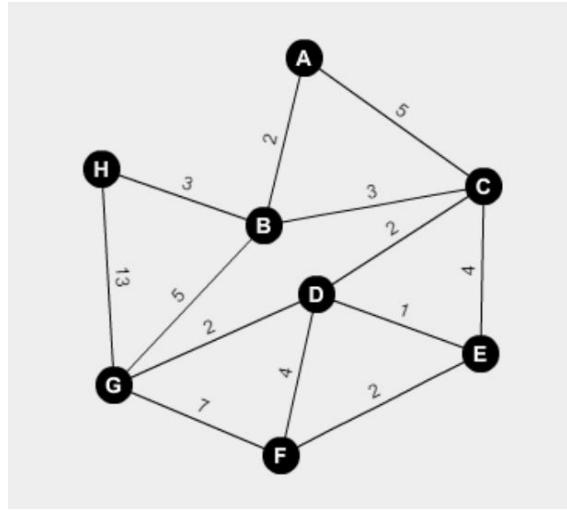
1. Riješite sljedeći linearni program:

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 7x_2 \\ \text{x}_1 \quad & \leq 2 \\ \text{x}_2 \quad & \leq 4 \\ \text{x}_1 + \text{x}_2 \quad & \leq 7 \\ \text{x}_1 \geq 0, \text{x}_2 \geq 0 \end{aligned}$$

2. Riješi problem kineskog poštara, gdje je čvor P pošta.
3. Za zadani graf provjeriti radi li se o Eulerovom grafu te u slučaju da je graf Eulerov, pronaći Eulerov ciklus.



4. Dijkstrinim algoritmom odrediti najmanju udaljenost i najkraći put između čvorova A i F.



5. Ivica raspolaže sa 12\$ i želi nešto pojesti za ručak tako da bude najsretniji. Iz svake grupe može uzeti po jedno jelo. Šta će Ivica kupiti, a da najbolje prode?

	burek	Sladoled	Pizza	čokolada
cijena	5	2	7	3
grupa	1	2	2	3
sreća	8	6	12	5

# Napredni algoritmi i strukture podataka – zimski ispitni rok

22. veljače 2016.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 35), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (7) U inicijalno prazno crveno-crno stablo
  - a) (5) Unesite redom sljedeće elemente:  
5, 16, 11, 19, 3, 10, 2, 6, 14, 12
  - b) (2) Obrišite redom sljedeće elemente:  
19, 12
2. (11) Zadana je potpuno povezana, unaprijedna (*feedforward*) troslojna neuronska mreža strukture 2x5x2. Aktivacijska funkcija svih neurona u mreži je opći sigmoid.
  - a) (1) Skicirati tu mrežu.
  - b) (8) Provedite prvi korak uvježbavanja te mreže (jednom osvježiti sve parametare) algoritmom koračnog uvježbavanja (*on-line learning*) ako se podatci za uvježbavanje uzimaju redom iz sljedeće tablice:

ulaz 1	ulaz 2	izlaz 1	izlaz 2
-5	8	1.5	6.5
7	1	4	-3
-1	-4	-2.5	-1.5
6	4	5	-1

Početne vrijednosti svih parametara mreže postavite na jedan, a zatrebaju li Vam još neke veličine, pridijelite im vrijednosti po vlastitom nahođenju, samo jasno navedite svoj izbor i kratko naznačite što ta veličina predstavlja.

- c) (2) Objasniti nastavak postupka, tj. kako bi započeo sljedeći korak uvježbavanja mreže.  
*Uputa: dovoljna je i samo jedna dobro sročena rečenica. Naravno, svako podrobnije objašnjenje je dobrodošlo i smanjit će mogućnost zabune prilikom ocjenjivanja.*

3. (12) Usmjereni graf je zadan matricom udaljenosti (slova u tablici su oznake vrhova).

		Odredište					
		A	B	C	D	E	F
Izvor	A		13	12			
	B				9		9
	C					12	
	D	3	9				18
	E			6			5
	F						

- a) (4) Pronađite maksimalni tok između A i F.
- b) (8) Modelirajte zadani problem maksimalnog toka kao linearni program.

4. (12) Na raspolaganju imate 2000 EUR-a i trebate odlučiti kako ih alocirati na opcije dane u tablici ispod da biste osigurali najveću korisnost. Opcije su raspoređene u grupe i unutar svake grupe se smije odabrat maksimalno jedna opcija za alociranje sredstava. Također, nealocirani novac ima dodijeljenu korisnost, pa očito ne mora a priori nužno biti slučaj da je u optimalnom rješenju potrošen sav novac.

Alokacija [EUR]	Korisnost alokacija na "Opcija,#grupa" (ili novac)						
	A,#1	B,#2	C,#2	D,#3	E,#3	F,#4	novac
0	0	0	0	0	0	0	0
200	2	0	0	1	0	0	2
400	4	0	0	2	0	0	4
600	4	7	0	3	0	0	6
800	4	7	0	4	9	10	7
1000	4	7	0	5	9	10	8
1200	4	12	0	6	9	10	8
1400	4	12	14	7	9	10	8
1600	4	12	14	8	9	10	8
1800	4	12	14	13	9	10	8
2000	4	12	14	16	9	10	8

5. (8) Pronadite minimalno razapinjuće stablo Kruskalovim algoritmom na neusmjerenom grafu zadanom sljedećom matricom udaljenosti (slova u tablici su oznake vrhova, dane samo vrijednosti u gornjoj trokutastoj matrici, kako je matrica simetrična).

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		6	10			3	6	
B						2		
C				7			1	
D					3		5	4
E								4
F							1	
G								9
H								

# Napredni algoritmi i strukture podataka – ljetni ispitni rok

06. srpnja 2016.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 35), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (7) Poznati su Vam elementi crveno-crnog stabla (navedeni slučajnim redoslijedom):

5, 16, 11, 19, 3, 10, 2, 6, 14, 12

Nacrtajte crveno-crno stablo ako je poznato da ima maksimalni mogući broj crnih čvorova.

2. (10) Zadana je potpuno povezana, unaprijedna (*feedforward*) troslojna neuronska mreža strukture 3x5x2. Aktivacijska funkcija svih neurona u mreži je opća sigmoid.

a) (1) Skicirati tu mrežu.

b) (8) Provedite prvi korak uvježbavanja te mreže (jednom osvježiti sve parametare) algoritmom koračnog uvježbavanja (*on-line learning*) ako se podatci za uvježbavanje uzimaju redom iz sljedeće tablice:

ulaz 1	ulaz 2	ulaz 3	izlaz 1	izlaz 2
-1.5	3.4	0.2	1.2	4.5
2.7	1	0.9	4	-3
-1.1	-6.7	-2	-2.5	-1.5
3.6	-0.4	3	5	-1

Početne vrijednosti svih parametara mreže postavite na jedan, a zatrebaju li Vam još neke veličine, pridijelite im vrijednosti po vlastitom nahođenju, samo jasno navedite svoj izbor i kratko naznačite što ta veličina predstavlja.

c) (1) Objasniti nastavak postupka, tj. kako bi započeo sljedeći korak uvježbavanja mreže.

*Uputa: dovoljna je i samo jedna dobro sročena rečenica. Naravno, svako podrobnije objašnjenje je dobrodošlo i smanjit će mogućnost zabune prilikom ocjenjivanja.*

3. (12) Linearni program:

$$\max z = 3x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 4x_4$$

$$\text{uz} \quad 8x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 \geq 4$$

$$2x_1 + 6x_2 - x_3 - x_4 \leq 9$$

$$x_4 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

a) (7) riješite simpleks metodom

b) (5) riješite grafički za slučaj da vrijedi  $x_3=0, x_4=0$ .

4. (13) Na raspolaganju imate 2000 EUR-a i trebate odlučiti kako ih alocirati na opcije dane u tablici ispod da biste osigurali najveću korisnost. Opcije su raspoređene u grupe i unutar svake grupe se smije odabrat maksimalno jedna opcija za alociranje sredstava. Također, nealocirani novac ima dodijeljenu korisnost, pa očito ne mora a priori nužno biti slučaj da je u optimalnom rješenju potrošen sav novac. Moguće je posuditi dodatni novac koji se odmah može koristiti za alokacije, no dizanje kredita ima intrinzičan negativan efekt na korisnost.

Alokacija [EUR]	Korisnost alokacija na "Opcija,#grupa" (ili novac)							
	A,#1	B,#2	C,#2	D,#3	E,#3	F,#4	Kredit	novac
0	0	0	0	0	0	0	0	0
200	1	0	0	2	0	0	-5	1
400	2	0	0	4	0	0	-9	3
600	3	7	0	4	0	13	-12	6
800	4	7	0	4	9	13	nemoguće	7
1000	5	7	0	4	9	13	nemoguće	9
1200	6	12	0	4	9	13	nemoguće	9
1400	7	12	14	4	9	13	nemoguće	9
1600	8	12	14	4	9	13	nemoguće	9
1800	13	12	14	4	9	13	nemoguće	9
2000	16	12	14	4	9	13	nemoguće	9

5. (8) Pronađite minimalno razapinjuće stablo Primovim algoritmom na neusmjerrenom grafu zadanim sljedećom matricom udaljenosti (slova u tablici su oznake vrhova, dane samo vrijednosti u gornjoj trokutastoj matrici, kako je matrica simetrična).

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		7			8	5	1	
B			8					9
C				7		3	5	4
D						1		
E						4		3
F								
G								
H								

# Napredni algoritmi i strukture podataka – rujanski ispitni rok

7. rujna 2016.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 boda** (prag 35), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi,iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (5) Skicirajte strukturu Trie koja sadrži riječi:  
MUD, MUDDY, MULLET, MULDER i MUDDLE
  
2. (10) Skicirajte crveno-crno stablo koje zadovoljava sljedeće kriterije:
  - a) sadrži kao elemente brojeve od 0 do 11, tj.  
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11
  - b) ima maksimalnu razliku između razina "najplićeg" i "najdubljeg" lista
  
3. (3) Koje su poveznice Eulerovog ciklusa i problema kineskog poštara?
  
4. (5) Postavite crveno crna stabla u relaciju s B stablima i objasnite vezu detaljno.
  
5. (9) Zadana je potpuno povezana, unaprijedna (*feedforward*) troslojna neuronska mreža strukture 3x4x2. Aktivacijska funkcija svih neurona u mreži je opća sigmoid.
  - a) (1) Skicirati tu mrežu.
  - b) (8) Provedite prvi korak uvježbavanja te mreže (jednom osvježiti sve parametare) algoritmom koračnog uvježbavanja (*on-line learning*) ako se podatci za uvježbavanje uzimaju redom iz sljedeće tablice:

<b>ulaz 1</b>	<b>ulaz 2</b>	<b>ulaz3</b>	<b>izlaz 1</b>	<b>izlaz 2</b>
-1.8	-6.7	-2	-1	-1.5
-0.5	3.2	0.2	1.1	0.5
1.7	1	0.9	1	-3
3.6	-0.4	3	8	-1

Početne vrijednosti svih parametara mreže postavite na jedan, a zatrebaju li Vam još neke veličine, pridijelite im vrijednosti po vlastitom nahođenju, samo jasno navedite svoj izbor i kratko naznačite što ta veličina predstavlja.

6. (10) Linearni program:

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 4x_4 \\ \text{uz} \quad &8x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 \leq 10 \\ &-2x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 \leq -6 \\ &x_4 \leq 3 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

- a) (7) riješite simpleks metodom
- b) (5) riješite grafički za slučaj da vrijedi  $x_3=0, x_4=3$ .

7. (10) Pronađite najkraći put od vrha A do vrha D u usmjerenom grafu zadanim sljedećom matricom udaljenosti (slova u tablici su oznake vrhova).

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		7			8	5	1	
B			8					9
C				7		3	-8	4
D						1		
E						4		3
F				7				
G			5					
H				-5				

Napomena: Rješenje treba biti pronađeno koristeći efikasni sistematski pristup za rješavanje ovakvog tipa problema.

# Napredni algoritmi i strukture podataka – dekanski ispitni rok

21. rujna 2016.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 boda** (prag 35), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi,iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (9) U inicijalno prazno B stablo 3. reda unesite, redom, sljedeće elemente:

87, 96, 5, 82, 99, 41, 19, 44, 50, 23, 57, 100, 80, 88, 53

2. (4) Koje su poveznice, a koje najznačajnije razlike Eulerovog i Hamiltonovog ciklusa?

3. (8) Argumentirano odgovorite na sljedeća pitanja:

- a) (5) Postoji li za simpleks algoritam pravilo za optimalni odabir novog bazičnog rješenja i ako da, koje je to pravilo?  
b) (3) Kako je odabir stožera (pivot-a) povezan s odabirom novog bazičnog rješenja?

4. (10) Zadana je potpuno povezana, unaprijedna (*feedforward*) troslojna neuronska mreža strukture 3x2x3. Aktivacijska funkcija svih neurona u mreži je opći sigmoid.

- a) (1) Skicirati tu mrežu.  
b) (9) Provedite prvi korak uvježbavanja te mreže (jednom osvježiti sve parametare) algoritmom koračnog uvježbavanja (*on-line learning*) ako se podatci za uvježbavanje uzimaju redom iz sljedeće tablice:

ulaz 1	ulaz 2	ulaz3	izlaz 1	izlaz 2	izlaz3
-2	2	0	0.3	-0.1	3
1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1
3	4	5	0.9	1.6	-2.5

Početne vrijednosti svih parametara mreže postavite na jedan, a zatrebaju li Vam još neke veličine, pridijelite im vrijednosti po vlastitom nahođenju, samo jasno navedite svoj izbor i kratko naznačite što ta veličina predstavlja.

5. (10) Linearni program:

$$\begin{aligned}
 \max z &= 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{uz} \quad -12x_1 + x_2 &\leq 4 \\
 -5x_1 + x_2 &\leq 6 \\
 -3x_1 + x_2 &\leq 5 \\
 -10x_1 + 7x_2 &\leq 50 \\
 -2x_1 + 3x_2 &\leq 32 \\
 x_1 &\leq 4 \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

- a) (5) Koje je rješenje zadatog problema?
- b) (5; -2) Koliko koraka (iteracija) treba „standardnom“ simpleks algoritmu za pronađak rješenja ako se kreće iz bazičnog rješenja u kojemu su varijable  $x_1$  i  $x_2$  jednake nuli? Polazno rješenje se ne broji.
- Napomena: svako točno i obrazloženo rješenje je prihvatljivo, dakle možete koristiti bilo koji način rješavanja. Naravno, obrazloženje (postupak rješavanja) mora jasno ukazivati na Vaše potpuno razumijevanje simpleks algoritma i njegove teorijske podloge.*

6. (9) Pronadite najkraće razapinjuće stablo Primovim algoritmom u neusmjerenom grafu zadatom sljedećom matricom udaljenosti (slova u tablici su oznake vrhova, simetrična matrica zadana samo gornjom trokutastom).

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		7			8	5	1	
B			8					9
C				7		3	-8	4
D					1			-5
E						4		3
F							5	
G								
H								

## Napredni algoritmi i strukture podataka – međuispit

20. studenog 2014.

Ovaj ispit donosi ukupno **42 boda** (prag 10,5), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi, iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (5) Skicirajte strukturu Trie koja sadrži riječi:  
MERCKX, MERCER, MERGE, MERGER i MERCY
  
2. (10) Skicirajte polazno prazno crveno-crno stablo uslijed sljedećih promjena (redom kojim su navedene):
  - a) (5) upisivanja redom: 23, 11, 15, 23, 22, 17, 25, 16, 1, 6 i 14
  - b) (5) uklanjanja 1 pa 6.
  
3. (3; -1) Koji od sljedećih postupaka jamči savršenu uravnoteženost stabla:
  - a) DSW
  - b) AVL
  - c) crveno-crno stablo
  - d) nijedan; nema algoritma koji može izgraditi savršeno stablo
  
4. (5; -1) Koje tvrdnje o genetskim algoritmima **nisu** istinite?
  - a) Uvijek nalaze globalni optimum.
  - b) Da bi bili djelotvorni (korisni), moraju ostvariti (primijeniti) sve evolucijske mehanizme.
  - c) Dobrota jedinke uvijek je jednaka vrijednosti ciljne funkcije.
  - d) Rad im ovisi o brojnim ugodivim (podesivim) parametrima koji se ne smiju mijenjati tijekom izvođenja algoritma.
  - e) Jedno od područja u kojem su genetski algoritmi vrlo uspješni i često bolji od drugih optimizacijskih metoda jesu kombinatorne optimizacije.

*Napomena: u ovom zadatku se može steći najviše 5 bodova, ali i dobiti do 5 negativnih bodova.*

*Vi navodite tvrdnje koje smatraste istinitima, a prilikom bodovanja će se prepostaviti da tvrdnje koje niste naveli smatraste neistinitima. Time će Vaši odgovori postati vektor s 5 elemenata ISTINA ili NEISTINA, a bodovanje će se provesti kao binarna usporedba s točnim vektorom. Svaka podudarnost elemenata u vektoru Vaših odgovora i odgovarajućih elemenata u točnom vektoru donijet će 1 bod, a nepodudarnost -1 bod. Jedini način da se ovaj zadatak budi s nula (0) bodova jest da uopće ništa ne napišete.*

5. (9) Linearni neuron (Adaline) s četiri ulaza treba uvježbati tako da što točnije obavlja preslikavanje zadano tablicom.

ulaz 1	ulaz 2	ulaz 3	ulaz 4	izlaz
1/2	1/2	-1/2	-1/2	1
1/2	-1/2	1/2	-1/2	-1

- a) (1) Skicirajte taj neuron.
- b) (2) Izračunajte optimalne parametre izravno (dakle ne iteracijski).
- c) (3) Izračunajte optimalne parametre skupnom gradijentnom metodom (*Batch Learning*).
- d) (3) Izračunajte optimalne parametre algoritmom najmanjih kvadrata (LMS).

*Naputak: za one koji se ne mogu prisjetiti ☺, LMS algoritam je zapravo „koračna gradijentna metoda“ (On-Line Learning). Preciznije, to je gradijentna metoda koja gradijent ne izračunava uzimajući u obzir cijeli skup za uvježbavanje, nego samo trenutačnu točku.*

6. (10) Nalazite se u dućanu i raspolažete s 1200 HRK te birate među stvarima čija će Vas kupnja razveseliti. Koje ćete stvari odabrati s ciljem maksimizacije Vašeg zadovoljstva?

	knjiga	rukavice	naočale	cipele	šator	lopta
Cijena [HRK]	400	200	600	400	800	400
Zadovoljstvo (što veći broj, to bolje)	10	6	19	7	10	8

# Napredni algoritmi i strukture podataka – završni ispit

29. siječnja 2015.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 15), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi, iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (10) Skicirajte polazno prazno **AVL** stablo uslijed dodavanja sljedećih elemenata:

8, 13, 5, 10, 14, 12, 9, 11, 2, 6 i 4.

2. (12) Riješite linearni problem:

$$\begin{array}{ll} \min & -7x_1 - 6x_2 - 8x_3 \\ \text{uvjeti} & x_1 \leq 12 \\ & 3x_2 - x_3 \leq 3 \\ & x_1 + x_3 \leq 8 \\ & x_3 \leq 7 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} .$$

3. (6; -2) Za sljedeće algoritme napišite apriornu složenost u O-notaciji:

- a) Dijkstrin algoritam
- b) Bellman-Ford
- c) WFI .

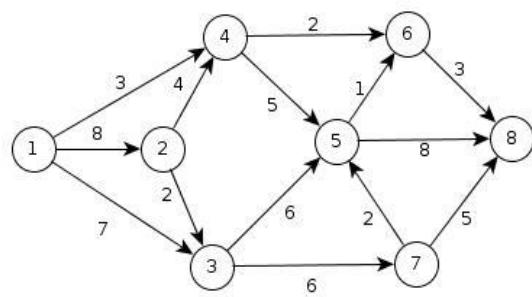
*Napomena: naznačeni negativni bodovi se dodjeljuju za svaki netočan odgovor.*

4. (12) Imamo šest nezavisnih skupova s po jednim elementom. Elementi su prirodni brojevi od 1 do 6 i svi skupovi sadrže različite brojeve.

Prikažite (skicirajte) rad Disjoint-Set strukture nad tim skupovima uslijed obavljanja sljedećih operacija: Union(1,2), Union(4,3), Union(2,3) i Union(1,6).

*Napomena: potrebno je uredno skicirati sve pomoćne strukture i njihove sadržaje nakon svake promjene.*

5. (10) Odredite najveći mogući protok između čvorova 1 i 8 u mreži na slici.



# Napredni algoritmi i strukture podataka – zimski ispitni rok

12. veljače 2015.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 35), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi,iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (4; -2) Za preskočne liste vrijedi:
  - a) složenost pretraživanja preskočne liste uvejk je  $O(\log_2 n)$
  - b) složenost pretraživanja preskočne liste je u rasponu  $O(\log_2 n) \dots O(n)$
  - c) složenost pretraživanja preskočne liste je u rasponu  $O(n) \dots O(n^2)$
  - d) složenost pretraživanja preskočne liste je u rasponu  $O(1) \dots O(n)$
  - e) nijedno od prethodno navedenoga
2. (12) Zadana je potpuno povezana, unaprijedna (*feedforward*) troslojna neuronska mreža strukture 2x4x2. Aktivacijska funkcija svih neurona u mreži je opća sigmoid.
  - a) (2) Skicirati tu mrežu.
  - b) (8) Provedite prvi korak uvježbavanja te mreže (jednom osvježiti sve parametare) algoritmom koračnog uvježbavanja (*on-line learning*) ako se podaci za uvježbavanje uzimaju redom iz sljedeće tablice:

ulaz 1	ulaz 2	izlaz 1	izlaz 2
2	0	-1	1
7	1	3	-3
-1	-4	5	-5
6	4	6	-2

Početne vrijednosti svih parametara mreže postavite na nula, a zatrebaju li Vam još neke veličine, pridijelite im vrijednosti po vlastitom nahođenju, samo jasno navedite svoj izbor i kratko naznačite što ta veličina predstavlja.

- c) (2) Objasniti nastavak postupka, tj. kako bi započeo sljedeći korak uvježbavanja mreže.

*Uputa: dovoljna je i samo jedna dobro sročena rečenica. Naravno, svako podrobnije objašnjenje je dobrodošlo i smanjiće mogućnost zabune prilikom ocjenjivanja.*

3. (12) Lopov planira pljačku izložaka u muzeju i ima informacije o vrijednim predmetima. Zbog načina na koji namjerava izvesti pljačku mora imati posebnu vreću u kojoj će nositi ukradene stvari. Ima vreću kapaciteta 10, a za 500 HRK joj može povećati kapacitet za 3, dakle na 13. Više od toga ne može nositi pa daljnje povećanje kapaciteta ne dolazi u obzir. Postavlja se pitanje što mu je isplativije, obaviti pljačku samo s vrećom kakvu ima ili s vrećom povećanog kapaciteta?

	svitak	rukavice	nož	Cipele	štít	mač
Vrijednost [HRK]	100	200	1000	400	800	400
volumen	1	2	7	4	5	8

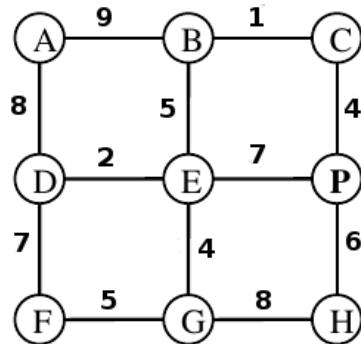
4. (12) Graf je zadan matricom udaljenosti (slova u tablici su oznake vrhova).

Savjet: zbog podzadataka c) i d) razmislite o polaznom stanju (inicijalizaciji) pomoćnih struktura!

	A	B	C	D	E
A		3	9		-3
B				7	1
C					
D	2		-3		
E				8	

- a) (5) Warshall-Floyd-Ingermanovim algoritmom odredite najkraće puteve među svim parovima vrhova (svi-svi). Važno je pregledno prikazati tijek algoritma.
- b) (3) Objasnite (kratko!) određivanje (rekonstrukciju) najkraćeg puta između vrhova A i D.
- c) (2; -1) Je li graf *strogo povezan* (tj. jesu li svi vrhovi dvosmjerno povezani)? Objasnite (kratko!) kako ste došli do zaključka.
- d) (2; -1) Postoje li ciklusi u grafu? Objasnite (kratko!) kako ste došli do zaključka.

5. (10) Bridovi u grafu na slici predstavljaju ulice, brojevi duljine ulica, a vrhovi sjecišta ulica u nekom naselju. Da bi svim stanovnicima donio pošiljke, poštar mora proći svim ulicama, a simbol poštanskog ureda iz kojeg kreće i u koji se na kraju mora vratiti je vrh P. Vaš je zadatak predložiti najkraći mogući obilazak tog naselja.



- a) (2) Opišite slijed postupaka kojim namjeravate doći do rješenja.

Uputa: nešto slično pseudokodu, ali na puno višoj razini. Očekujemo najviše 2...4 koraka, slično kao što smo ih naveli na predavanjima.

- b) (7) Provedite svoju zamisao u djelo i ispišite obilazak koji predlažete.

Uputa: zatrebaju li Vam neki poznati algoritmi za pronalaženje najkraćih puteva, provedite ih kako je Vama najzgodnije; ne morate ilustrirati njihov rad. Dakle, ako možete, provedite ih i napamet.

- c) (1) Koliko je dugačak najkraći mogući obilazak? Ima li više jednakog dugačkih obilazaka ili je jedan kraći od svih drugih?

## Napredni algoritmi i strukture podataka – rujanski ispitni rok

10. rujna 2015.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 35), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi,iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (9) Skicirajte B-stablo 4. reda, u početku prazno, tijekom upisivanja redom:  
25, 4, 13, 3, 19, 18, 10, 14, 24 i 27.

2. (4; -1) Navedite barem dva područja primjene neuronskih mreža. Ako ne znate naziv područja, jednostavno opišite, kratko i jasno, primjenu na koju mislite.

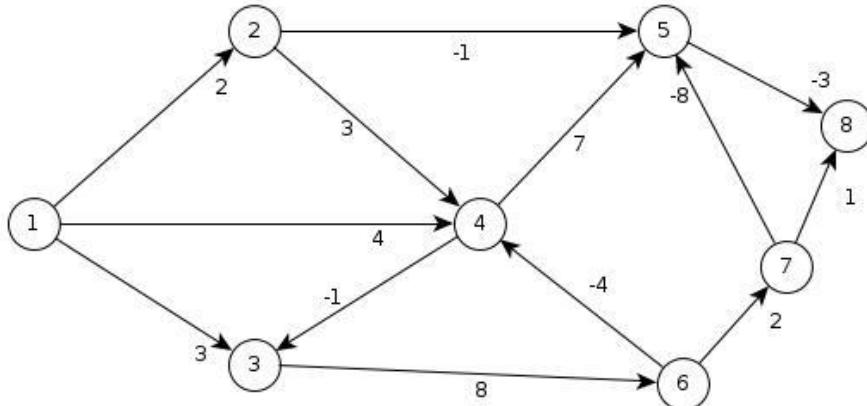
*Napomena: negativni bodovi dobivaju se za svaku navedenu primjenu koja nije moguća, ali ne može se dobiti više od 2 negativna boda. Za točne navode će se dobivati pozitivni bodovi (najviše 4), a ukupni rezultat bit će zbroj pozitivnih i negativnih bodova.*

3. (8; -2) Zamislite skup svih mogućih zbrojeva prilikom bacanja dviju kocki. Taj skup možemo prikazati kao kvadrat sa  $6 \times 6$  polja u kojemu je svako polje jedan mogući zbroj.

- a) (4; -2) Možemo li uvježbati jedan linearni neuron (*Adaline*) da nam služi za razvrstavanje parnih i neparnih zbrojeva, primjerice tako da za neparni zbroj izlaz bude logička jedinica, a za parni logička nula? Odgovorite samo s DA ili NE.
- b) (4) Obrazložite odgovor na podpitanje a).

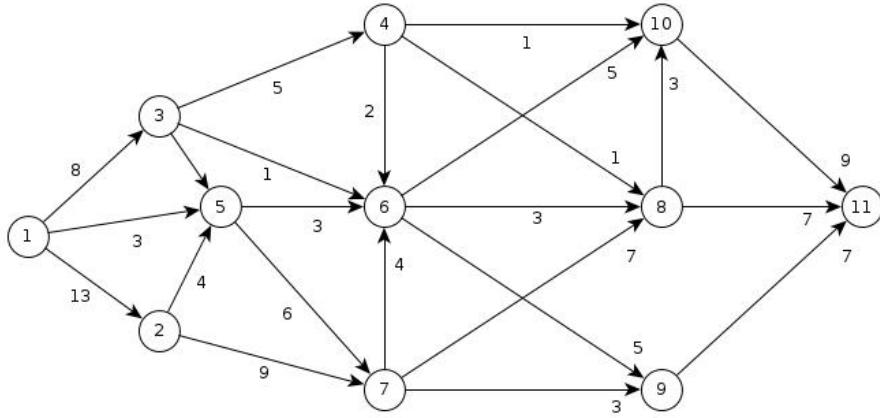
*Naputak: dovoljna je jedna dobro sročena rečenica.*

4. (8) Bellman-Fordovim algoritmom pronađite najkraći put između vrhova 1 i 8 u grafu na slici.



*Savjet: bridove obrađujte po redoslijedu njihovih vrhova; tada će postupak biti vrlo kratak.*

5. (10) Odredite najveći mogući tok iz čvora 1 u čvor 11 u mreži na slici:



6. (11) Tetraedar koji je u cijelosti u prvom oktantu (dakle sve njegove točke imaju sve koordinate nenegativne) zadan je sljedećim nejednadžbama:

$$\begin{aligned} z &\geq 3 \\ 2x + y + 2z &\leq 18 \\ -2x + y + 2z &\leq 6 \\ -4y + 3z &\leq 3 \end{aligned} .$$

- a) (9) Odredite koordinate središta i polumjer najveće kugle koja se može upisati u taj tetraedar.  
 b) (2; -1) Koje plohe zadano tetraedra najveća kugla dotiče? Kratko obrazložite.

*Podsjetnik: jednadžba ravnine u trodimenzionalnom prostoru je  $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = v$  ili vektorski  $\mathbf{u}^T \mathbf{x} = v$ , pri čemu su  $u_i$  koeficijenti u jednadžbi, a  $x_i$  koordinate točaka. Vektor  $\mathbf{u}$  je vektor iz ishodišta okomit na ravninu (normala ravnine). Podijelimo li jednadžbu normom normale  $\|\mathbf{u}\|$  dobivamo  $\mathbf{u}_0^T \mathbf{x} = v / \|\mathbf{u}\|$ . Ljeva strana je umnožak jediničnog vektora normale i radijus-vektora točke, tj. duljina projekcije radijus-vektora točke na smjer normale. Dakle, točke za koje je  $\mathbf{u}^T \mathbf{x} < v$  jesu poluprostor koji se prostire od ravnine prema ishodištu (ravnina dijeli cijeli prostor na dva dijela). Uvrstimo li u jednadžbu ravnine točku kojoj je radijus-vektor  $\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ p_3]^T$  i koja nije u ravnini nego je za  $d$  udaljena od nje, bit će  $\mathbf{u}_0^T \mathbf{p} = v / \|\mathbf{u}\| + d$ , odnosno  $\|\mathbf{u}\| \cdot d = \mathbf{u}^T \mathbf{p} - v$ .*

*Naputak: središte kugle upisane u tetraedar bit će točka koja je za polumjer te kugle udaljena od najbliže plohe tetraedra, dakle polumjer kugle mora biti manji ili jednak udaljenosti središta od bilo koje plohe tetraedra. Drugim riječima, za udaljenost  $d$  središta kugle od ploha tetraedra i polumjer kugle  $r$  mora vrijediti  $|d| \geq r$ , s time da je polumjer kugle  $r$  sigurno nenegativan. Krenite od toga, imajući na umu zadane nejednakosti. ☺*

# Napredni algoritmi i strukture podataka – dekanski ispitni rok

16. rujna 2015.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 35), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi,iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (14) Linearni neuron (*Adaline*) s tri ulaza treba uvježbati tako da što točnije obavlja preslikavanje zadano tablicom.

ulaz 1	ulaz 2	ulaz 3	izlaz
1	1	1	-1
1	1	0	8

- a) (1) Skicirajte taj neuron.
- b) (4) Izračunajte optimalne parametre Kaczmarzovim algoritmom.

Savjet: korak uvježbavanja postavite na jedan (1).

- c) (1 ; -0,5) Koja je osobitost rješenja koje daje Kaczmarzov algoritam koja ga najčešće čini najpoželjnijim?
- d) (4) Izračunajte optimalne parametre algoritmom najmanjih kvadrata (LMS). Pri tome korak uvježbavanja obavezno mora biti jedak jedan (1).

Naputak: za one koji se ne mogu prisjetiti  $\odot$ , LMS algoritam je zapravo „koračna gradijentna metoda“. Preciznije, to je gradijentna metoda koja gradijent ne izračunava uzimajući u obzir cijeli skup za uvježbavanje, nego samo trenutačnu točku.

2. (7) Tvrta ima 5 zaposlenika i 4 poslovne zadaće koje bi trebalo obaviti što prije, a svaka zahtijeva odgovarajuća znanja i u punu predanost jedne osobe (dakle osoba koja radi na jednom poslu više ne može pomoći na drugom, iako bi možda znala). Kratkoća dogovorenih rokova ne dozvoljava obavljanje poslova jedan po jedan, nego se moraju raditi istodobno pa će svaki zaposlenik moći obaviti najviše jedan posao. Tablica pokazuje koji bi zaposlenici ( $O_i$  znači osoba  $i$ ) mogli obaviti pojedine poslove ( $P_j$  znači posao  $j$ ), a Vaš je zadatak rasporediti poslove po zaposlenicima tako da se obavi najveći mogući broj poslova.

	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>
O <sub>1</sub>		+	+	
O <sub>2</sub>		+		
O <sub>3</sub>	+	+		+
O <sub>4</sub>				+
O <sub>5</sub>		+		

3. (4;-0.5) Koji od navedenih algoritama zajamčeno pronalaze najbolje moguće rješenje kada rade nad problemima za koje su i namijenjeni:

- a) genetski algoritmi
- b) simpleks
- c) Ford-Fulkerson
- d) Bellman-Ford
- e) 2-MST
- f) Dijkstra MST
- g) Kruskal MST

*Napomena: vrednovanje se provodi prema podudarnosti Vaših i očekivanih odgovora, tj. na temelju razlike vektora rješenja. Svako podudaranje donosi 0.5, a nepodudaranje -0.5 bodova.*

4. (2) Poredajte probleme po složenosti od manje prema većoj:

- a) pronalazak Hamiltonovog ciklusa
- b) sve udaljenosti u grafu
- c) problem trgovачkog putnika
- d) pronalazak Eulerovog ciklusa

*Napomena: 0.5 bodova za svaki točno pozicioniran problem.*

5. (9) Popis elemenata u nekom crveno-crnom (RB) stablu, redom od korijena prema nižim razinama s lijeva na desno do posljednjeg lista, je sljedeći:

8, 5, 13, 5, 7, 11, 15, 3, 6, 10, 12, 14 i 9.

- a) (5) Skicirajte to stablo.
- b) (4) Uklonite redom elemente 15, 11 i 14.

6. (15) Udjeli sastojaka u raznim vrstama hrane za ljame, kao i dnevne potrebe za pojedinim sastojcima, sadrži sljedeća tablica.

Sastojak	Kukuruz	Napoj	Djetelina	Dnevne potrebe
Ugljikohidrati	9	2	4	20
Masti	3	8	6	18
Proteini	1	2	6	15
Cijena	7	6	5	

Odredite najjeftiniju smjesu koja zadovoljava potrebe.

## Napredni algoritmi i strukture podataka – međuispit

19. studenog 2013.

Ovaj ispit donosi ukupno **42 boda** (prag 10,5), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi, iza ;)! Boduju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (4) Potrebno je pohraniti broj prometnih prekršaja za svaku pojedinu osobu u svakoj godini tijekom 30 godina. Pretpostavlja se sljedeće:

- ukupni broj osoba u evidenciji neće premašiti 3 miliona
- nitko neće počinuti više od 255 prekršaja u jednoj godini pa brojač zauzima 1 B memorije
- očekivani (prosječni) broj prekršaja po osobi u promatranom razdoblju je 2.

Druge okolnosti dozvoljavaju pohranu podataka samo u “običnu” tablicu ili rijetko popunjenu tablicu (*Sparse Table*), pri čemu svaki zapis u *Sparse Table* zauzima 200 B memorije.

- a) (2; -1) Ako je jedini kriterij vrednovanja te dvije mogućnosti potrebna memorija, je li pod navedenim pretpostavkama podatke uputnije pohraniti u strukturu Sparse Table ili “običnu” tablicu?
- b) (1) Kolika bi bila popunjenoš (postotna) memorije zauzete tablicom, a kolika one zauzete strukturom Sparse Table?
- c) (1) Skicirati strukturu Sparse Table koja bi odgovarala zadanom problemu.

2. (10) Skicirajte polazno prazno crveno-crno stablo uslijed sljedećih promjena (redom kojim su navedene):

- a) (6) upisivanja redom: 7, 9, 5, 16, 13, 19, 18, 8, 1 i 14
- b) (4) uklanjanja 16 pa 19.

3. (2; -1) Crveno-crna stabla imaju logičko-strukturnu vezu s B-stablima, ali ne s bilo kakvim B-stablima, nego stablima određenog reda. Kojeg?

4. (2; -0,5) Koje su dvije najvažnije osobitosti B-stabala?

*Naputak: misli se na osobitosti koje se odnose na iskorištenje zauzete memorije i brzinu pristupa podatcima.*

*Pozor! Najveća pozitivna vrijednost ovog zadatka je jednak navedenoj, ali naznačeni negativni bodovi se dodjeljuju za svaki Vaš netočan navod, dakle u ovom zadatku u najgorem slučaju možete dobiti 1 negativni bod.*

5. (3; -1) Što od navedenog **nije** značajka genetskih algoritama?

- a) uvijek nalaze globalni optimum
- b) koriste nasumične (slučajne) brojeve
- c) više iteracija sigurno (dakle uvijek) dovodi do boljeg (ili jednako dobrog) rješenja od onog dobivenog s manje iteracija
- d) rad im ovisi o brojnim ugodivim (podesivim) parametrima
- e) načelo rada im je pokušaj oponašanja evolucije u prirodi

*Pozor! Točnih odgovora, tj. netočnih tvrdnji, može biti i više. Najveća pozitivna vrijednost ovog zadatka je jednak navedenoj, ali naznačeni negativni bodovi se dodjeljuju za svaki Vaš netočan navod i zbrajaju pa u konačnici možete dobiti i više od jednog negativnog boda.*

6. (9) Linearni neuron (*Adaline*) s tri ulaza treba uvježbati tako da što točnije obavlja preslikavanje zadano tablicom.

ulaz 1	ulaz 2	ulaz 3	izlaz
1	1	1	3
1	1	0	2

a) (1) Skicirajte taj neuron.

b) (3) Izračunajte optimalne parametre Kaczmarzovim algoritmom.

*Savjet: korak uvježbavanja postavite na jedan (1).*

c) (1 ; -0,5) Koja je osobitost rješenja koje daje Kaczmarzov algoritam koja ga najčešće čini najpoželjnijim?

d) (3) Izračunajte optimalne parametre algoritmom najmanjih kvadrata (LMS). Pri tome korak uvježbavanja obavezno mora biti jednak jedan (1).

*Naputak: za one koji se ne mogu prisjetiti ☺, LMS algoritam je zapravo „koračna gradijentna metoda“. Preciznije, to je gradijentna metoda koja gradijent ne izračunava uzimajući u obzir cijeli skup za uvježbavanje, nego samo trenutačnu točku.*

e) (1 ; -0,5) Ako ste točno računali, LMS algoritam se zaustavio na pogrešnom rješenju. Drugim riječima, ovako kako je bio zadan, algoritam nije bio konvergentan. Objasnite zašto, tj. što bi trebalo promijeniti, a da se postigne konvergencija ka točnom rješenju.

7. (12) Nalazite se u omiljenom dućanu i raspolažete s 1000 HRK. Kupnja različitih stvari različito Vas uveseljava, a želite se što je moguće više oraspoložiti nakon napornog radnog dana. Koje ćete stvari odabrati?

	slika	olovka	majica	cipele	torbica	prsten
Cijena [HRK]	700	300	100	300	600	600
Utjecaj na raspoloženje (što veći broj, to bolje)	16	8	6	7	13	10

# Napredni algoritmi i strukture podataka – završni ispit

28. siječnja 2014.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 15), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi, iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (5; -1) Koje od sljedećih tvrdnji o strukturi Trie **nisu** istinite (možda i više njih)?
  - a) Broj razina u strukturi jednak je broju znakova u najdužoj pohranjenoj riječi (razine se broje od jedan).
  - b) Broj razina u strukturi manji je od broja znakova u najdužoj pohranjenoj riječi ako je sljedeća riječ po broju znakova puno kraća od najdulje.
  - c) U strukturi Trie postoje 2 vrste čvorova.
  - d) Unutarnji čvorovi u strukturi Trie ne sadrže podatke, nego samo ključeve.
  - e) Građa strukture Trie ne ovisi o redoslijedu upisa podataka.

*Napomena: u ovom zadatku se može steći najviše 5 bodova, ali i dobiti do 5 negativnih bodova. Vi navodite tvrdnje koje smatrate neistinitima, a prilikom bodovanja će se prepostaviti da ste nenavedene smatrali istinitima. Bodovanje će se provesti kao binarna usporedba dvaju „vektora“ s po 5 elemenata. Svaka podudarnost će donijeti 1 bod, a nepodudarnost -1 bod. Jedini način da se ovaj zadatak bude s nula (0) bodova jest da uopće ništa ne napišete.*

2. (4; -0.5) Navedite četiri (4) od pet definicijskih pravila crveno-crnih stabala.

*Napomena: naznačeni negativni bodovi se dodjeljuju za svaki netočan odgovor.*

3. (8) Napišite pseudo kod Kruskalovog algoritma za pronađazak najkraćeg razapinjućeg stabla.

*Naputak: očekuje se pseudo kod na visokoj razini; svega nekoliko točno navedenih koraka.*

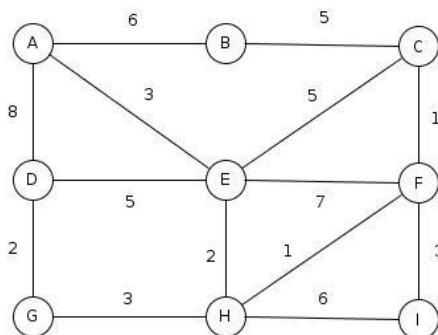
4. (10) Riješiti sljedeći problem:

$$\begin{array}{lll} \max & 7x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 \\ \text{uz uvjete} & x_1 + x_2 & \leq 1 \\ & x_3 + x_4 & \leq 1 \\ & -x_1 - x_3 & \leq -1 \\ & -x_2 - x_4 & \leq -1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0 \end{array}$$

5. (12) Warshall-Floyd-Ingermanovim algoritmom odredite najkraće puteve među svim parovima vrhova u grafu zadanim matricom udaljenosti (u redcima su polazišta, a stupcima odredišta).
- (7) Ovoliko bodova (7) donosi točna provedba algoritma (točne matrice) i zato je važno pregledno ispisati matrice  $D^{(i)}$  i  $\Pi^{(i)}$  u svakom koraku algoritma.
  - (5) Objasnite (kratko!) određivanje (rekonstrukciju) najkraćeg puta između vrhova A i D.

	A	B	C	D	E
A		3	9		-3
B				7	1
C					
D	2		-3		
E				8	

6. (11) Bridovi u grafu na slici predstavljaju ulice, težine bridova predstavljaju duljine ulica, a vrhovi sjecišta ulica u nekom naselju. Da bi svim stanovnicima donio pošiljke, poštarski mora proći svim ulicama, a simbol poštanskog ureda iz kojeg kreće i u koji se na kraju mora vratiti je vrh D. Vaš zadatak je predložiti poštaru najkraći mogući obilazak tog naselja kojim će valjano obaviti svoj posao i odgovoriti mu na navedene nedoumice.
- (4) Opisite slijed postupaka kojim namjeravate doći do rješenja.  
*Naputak: nešto slično pseudo kodu, ali na puno višoj razini. Očekujemo najviše 2..4 koraka, slično kao što smo ih naveli na predavanjima.*
  - (4) Provedite svoju zamisao u djelo i ispišite obilazak koji predlažete.  
*Naputak: zatrebaju li Vam neki dodatni algoritmi, npr. za pronalaženje najkraćih puteva, provedite ih kako je Vama najzgodnije; ne morate ilustrirati njihov rad. Dakle, ako možete, provedite ih i napamet.*
  - (1; -0,5) Koliko je dugačak najkraći mogući obilazak?
  - (2; -1) Sve ulice u najkraćem obilasku čine skup ulica, a kako jedna te ista ulica u njemu može biti i više puta, skup ulica može imati više istih elemenata. Obilaske razlikujemo po različitim skupovima ulica (dakle, nije važan redoslijed obilaska ulica, nego samo koje se ulice obilaze i koliko puta). Koliko ima različitih, jednakog dugačkih najkraćih mogućih obilazaka?



# Napredni algoritmi i strukture podataka – zimski ispitni rok

11. veljače 2014.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 35), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi, iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (4; -2) Binarno stablo visine (dubine) 5 (pri čemu je korijen razina 1) sadrži 12 čvorova. Može li to biti **AVL** stablo?

$$n=12 \ h=5$$

2. (8) U polazno prazno crveno-crno stablo:

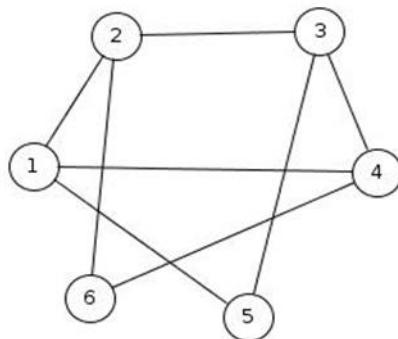
- a) (4) upišite redom: 4, 11, 7, 3, 19, 12, 10, 9, 16, 18 i 17  
b) (4) uklonite (izbrišite) redom: 19, 16, 4 i 3.

3. (10) Bondy-Chvatalov teorem.

- a) (2; -1) Izrecite Bondy-Chvatalov teorem.

*Pozor! Ovdje se traži izricanje teorema, dakle važna je jezgrovitost i preciznost izražavanja.*

- b) (8) Primjenom Bondy-Chvatalovog teorema pronađite Hamiltonov ciklus u grafu na slici.



4. (10) Riješite sljedeći problem:

$$\begin{aligned} & \max && 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ & \text{uz uvjete} && x_1 + x_2 + x_3 \leq 40 \\ & && 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 10 \\ & && x_2 - x_3 \leq -10 \\ & && x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

5. (10) Potpuno povezana, unaprijedna (*feedforward*) troslojna neuronska mreža ima strukturu  $2 \times 2 \times 1$  i aktivacijska funkcija svih neurona je opća sigmoid.

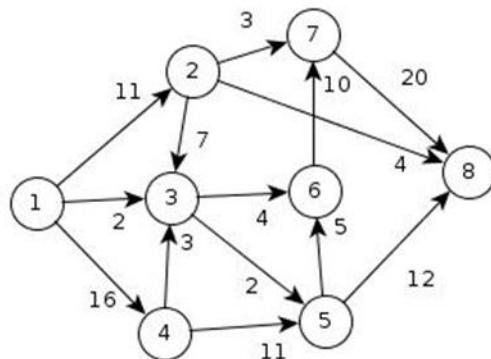
- a) (2; -1) Skicirajte tu mrežu.
- b) (5) Provedite prvi korak uvježbavanja te mreže (jednom osvježiti sve parametare) algoritmom koračnog uvježbavanja (*on-line learning*) ako se podatci za uvježbavanje uzimaju redom iz sljedeće tablice:

Ulaz 1	Ulaz 2	Izlaz 1
0	1	1
1	1	1
0	0	1
1	1	1

Početne vrijednosti svih parametara mreže postavite na nula, a zatrebaju li Vam još neke veličine, pridijelite im vrijednosti po vlastitom nahođenju, samo jasno navedite svoj izbor i kratko objasnite ulogu te veličine.

- c) (1) Objasnite nastavak postupka, tj. kako bi započeo sljedeći korak uvježbavanja mreže.  
*Naputak: dovoljna je i samo jedna dobro sročena rečenica. Naravno, svako podrobnije objašnjenje je dobrodošlo i smanjiće mogućnost nesporazuma.*
- d) (2) Koje bi bile početne vrijednosti parametara mreže kada bismo ih određivali po načelu preporučenom u okviru predmeta NASP?  
*Naputak: obrazložiti u par riječi. Dovoljne su i samo natuknice uz račun. Naravno, svako podrobnije objašnjenje je dobrodošlo i smanjiće mogućnost nesporazuma.*

6. (8) Odredite najveći mogući tok iz čvora 1 u čvor 8 mreže na slici kao i opterećenja pojedinih veza kada se postigne najveći tok.



# Napredni algoritmi i strukture podataka – ljetni ispitni rok

30. lipnja 2014.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 35), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi, iza ;)! Boduju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (10; -1) Ispis elemenata po razinama, počevši od korijena, u nekom crveno-crnom stablu je:

M, D, V, C, I, T, Ž, A, G, S, U, Z, O

Napišite (abecednim redom) čvorove koji su crveni.

Savjet: skicirajte stablo.

Napomena: negativan bod se dobiva za svaki pogrešno obojani čvor.

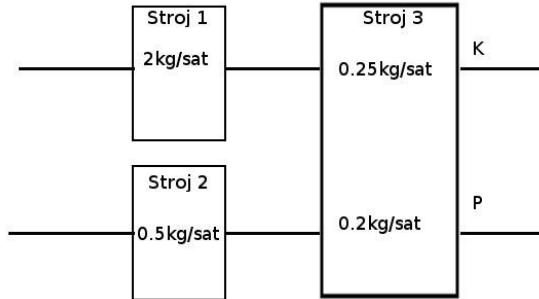
2. (10) Tvrtka ima 5 zaposlenika i 4 poslovne zadaće koje bi trebalo obaviti što prije, a svaka zahtijeva odgovarajuća znanja i u punu predanost jedne osobe (dakle osoba koja radi na jednom poslu više ne može pomoći na drugom, iako bi možda znala). Kratkoća dogovorenih rokova ne dozvoljava obavljanje poslova jedan po jedan, nego se moraju raditi istodobno pa će svaki zaposlenik moći obaviti najviše jedan posao. Tablica pokazuje koji bi zaposlenici ( $O_i$  znači osoba  $i$ ) mogli obaviti pojedine poslove ( $P_j$  znači posao  $j$ ), a Vaš je zadatak rasporediti poslove po zaposlenicima tako da se obavi najveći mogući broj poslova.

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
$O_1$	+	+		+
$O_2$		+		
$O_3$		+	+	
$O_4$				+
$O_5$		+		

3. (7)

- a) (2; -1) Koji se problem prilikom detekcije ciklusa u usmjerenim grafovima može pojaviti, a nema ga prilikom obilaska neusmjerenih grafova? Kratko obrazložiti (skicirati).
- b) (5) Napišite pseudokod funkcije za detekciju ciklusa u usmjerenom grafu.

4. (12) Šećerana proizvodi šećer u kristalu (označimo ga kao proizvod K) i šećer u prahu (označimo ga kao proizvod P). Proizvodnja se odvija u dvije faze na tri stroja u procesu na skici, dakle prva dva stroja (različito) usisnjavaju šećer, a potom se obje vrste šećera pakiraju na trećem stroju. Za svaki stroj je poznato koliku masu šećera može obraditi tijekom jednog sata (taj podatak je također na skici), poznata je cijena jednog sata rada i poznato je koliko najdulje svaki stroj može raditi tijekom jednog dana (podatci u tablici).



	stroj 1	stroj 2	stroj 3
cijena rada [kn/sat]	2	2.5	1
dnevno ograničenje rada [sat/dan]	10	20	8

Prodajna cijena šećera u kristalu (K) je 7 kn/kg, šećera u prahu (P) 12 kn/kg i tržište se može smatrati nezasitljivim, a Vaš je zadatak preporučiti dnevni plan proizvodnje (koliko kojeg šećera proizvesti) kojim će se ostvariti najveća dobit (dobit = prihod – rashod (tj. trošak proizvodnje)).

5. (11) Potpuno povezana, unaprijedna (*feedforward*) troslojna neuronska mreža ima strukturu  $2 \times 3 \times 2$ , pri čemu je aktivacijska funkcija neurona u skrivenom sloju opća sigmoid, dok su izlazni neuroni linearni (*Adaline*).

- a) (1) Skicirajte tu mrežu.
- b) (6) Provedite prvi korak uvježbavanja te mreže (jednom osvježiti sve parametare) algoritmom koračnog uvježbavanja (*on-line learning*) ako se podatci za uvježbavanje uzimaju redom iz sljedeće tablice:

ulaz 1	ulaz 2	izlaz 1	izlaz 2
0	3	7	-2
-3	-6	2	-6
-9	4	-4	1
5	-3	4	-9

Početne vrijednosti svih parametara mreže postavite na nula, a zatrebaju li Vam još neke veličine, pridijelite im vrijednosti po vlastitom nahođenju, samo jasno navedite svoj izbor i kratko objasnite ulogu te veličine.

- c) (2) Objasnite nastavak postupka, tj. kako bi započeo sljedeći korak uvježbavanja mreže.  
*Naputak: dovoljna je i samo jedna dobro sročena rečenica. Naravno, svako podrobnije objašnjenje je dobrodošlo i smanjit će mogućnost zabune prilikom ocjenjivanja.*
- d) (2) Pod pretpostavkom da su ulazi u mrežu nezavisni i da su u tablici sve moguće ulazne kombinacije, kako biste postavili (odredili) početne vrijednosti parametara mreže?  
*Naputak: obrazložiti u par riječi. Dovoljne su i samo natuknice uz račun. Naravno, svako podrobnije objašnjenje je dobrodošlo i smanjit će mogućnost zabune prilikom ocjenjivanja.*

# Napredni algoritmi i strukture podataka – jesenski ispitni rok

1. rujna 2014.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 35), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi,iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (4) Razmotrimo ANN sastavljenu isključivo od linearnih neurona (Adaline).
  - a) (1; -0,5) Je li takva mreža bolja (prilagodljivija; više se približava zadanom preslikavanju) od mreža sastavljenih od nelinearnih neurona? Odgovorite samo s DA ili NE (ili uopće nemojte odgovoriti).
  - b) (3; -1) Obrazložite prethodni odgovor.
2. (10) Potpuno povezana, unaprijedna (*feedforward*) troslojna neuronska mreža (ANN; *Artificial Neural Network*) ima strukturu  $2 \times 3 \times 2$ , pri čemu je aktivacijska funkcija neurona u skrivenom sloju opća sigmoid, dok su izlazni neuroni linearni (*Adaline*). Provedite prvi korak uvježbavanja te mreže (jednom osvježiti sve parametare) algoritmom koračnog uvježbavanja (*on-line learning*) ako se podatci za uvježbavanje uzimaju redom iz sljedeće tablice.

ulaz 1	ulaz 2	izlaz 1	izlaz 2
-1	3	4	-2
-1	6	2	-6
-9	4	-4	8
5	-3	4	-9

Početne vrijednosti svih parametara mreže postavite na nula, a zatrebaju li Vam još neke veličine, pridijelite im vrijednosti po vlastitom nahođenju, samo jasno navedite svoj izbor i kratko objasnite ulogu te veličine.

3. (5; -5) Koje su tvrdnje istinite?
  - a) Dinamičko programiranje je posebna vrsta (grana) linearog programiranja.
  - b) Kada je primjenjiva lakoma (*greedy*) strategija, primjenjivo je i dinamičko programiranje.
  - c) Kada je primjenjivo dinamičko programiranje, primjenjiva je i lakoma (*greedy*) strategija.
  - d) Nužan uvjet za primjenu dinamičkog programiranja je preklopulenost podproblema (*overlapping subproblems*), a dovoljan optimalna podstruktura (*optimal substructure*) problema.
  - e) Nužan uvjet za primjenu dinamičkog programiranja je optimalna podstruktura (*optimal substructure*) problema, a dovoljan preklopulenost podproblema (*overlapping subproblems*).

Napomena: u ovom zadatku se može steći najviše 5 bodova, ali i dobiti do 5 negativnih bodova. Vi navodite tvrdnje koje smatrati istinitima, a prilikom bodovanja će se prepostaviti da tvrdnje koje niste naveli smatrati neistinitima. Time će Vaši odgovori postati vektor s 5 elemenata ISTINA ili NEISTINA, a bodovanje će se provesti kao binarna usporedba s točnim vektorom. Svaka podudarnost elemenata u vektoru Vaših odgovora i odgovarajućih elemenata u točnom vektoru donijet će 1 bod, a nepodudarnost -1 bod. Jedini način da se ovaj zadatak boduje s nula (0) bodova jest da uopće ništa ne napišete.

4. (10) U prazno B-stablo 3. reda upišite redom sljedeće elemente:  
 26, 4, 22, 16, 30, 17, 31, 20, 6, 1, 21 i 27.

5. (9) Bondy-Chvatalovim algoritmom (tj. koristeći Bondy-Chvatalov teorem) pronađite Hamiltonov ciklus u grafu zadanim sljedećom matricom susjedstva (udaljenosti).

	1	2	3	4	5	6
1		3	4		2	
2	3		1	4		
3	4	1		3		1
4		4	3			
5	2					8
6			1		8	

6. (12) Tetraedar koji je u cijelosti u prvom oktantu (dakle sve njegove točke imaju sve koordinate nenegativne) zadan je sljedećim nejednadžbama:

$$\begin{aligned} z &\geq 3 \\ 2x + y + 2z &\leq 18 \\ -2x + y + 2z &\leq 6 \\ -y + z &\leq 3 \end{aligned}$$

- a) (10) Odredite koordinate središta i polumjer najveće kugle koja se može upisati u taj tetraedar.  
 b) (2; -1) Koje plohe zadanih tetraedra najveća kugla dotiče? Kratko obrazložite.

*Podsjetnik: jednadžba ravnine u trodimenzionalnom prostoru je  $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = v$  ili vektorski  $\mathbf{u}^T \mathbf{x} = v$ , pri čemu su  $u_i$  koeficijenti, a  $x_i$  koordinate točaka. Vektor  $\mathbf{u}$  je vektor iz ishodišta okomit na ravninu (normala ravnine), odnosno svaki njemu paralelan vektor. Podijelimo li jednadžbu normom normale  $\|\mathbf{u}\|$  dobivamo  $\mathbf{u}_0^T \mathbf{x} = v / \|\mathbf{u}\|$ . Ljeva strana je umnožak jediničnog vektora normale i radijus-vektora točke, tj. duljina projekcije radijus-vektora točke na smjer normale. Dakle, točke za koje je  $\mathbf{u}^T \mathbf{x} < v$  jesu poluprostor koji se prostire od ravnine prema ishodištu (ravnina dijeli cijeli prostor na dva dijela). Uvrstimo li u jednadžbu ravnine točku  $P$  kojoj je radijus-vektor  $\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ p_3]^T$  i koja nije u ravnini nego je za  $d$  udaljena od nje, bit će  $\mathbf{u}_0^T \mathbf{p} = v / \|\mathbf{u}\| + d$ , odnosno  $\|\mathbf{u}\| \cdot d = \mathbf{u}^T \mathbf{p} - v$ .*

*Naputak: središte kugle upisane u tetraedar bit će točka koja je za polumjer te kugle udaljena od najbliže plohe tetraedra, dakle polumjer kugle mora biti manji ili jednak udaljenosti središta od bilo koje plohe tetraedra. Drugim riječima, za udaljenost  $d$  središta kugle od ploha tetraedra i polumjer kugle  $r$  mora vrijediti  $|d| \geq r$ , s time da je polumjer kugle  $r$  sigurno nenegativan. Krenite od toga, imajući na umu zadane nejednakosti. ☺*

# Napredni algoritmi i strukture podataka – dekanski ispitni rok

17. rujna 2014.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 35), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi, iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

Napomena: radi jasnoće zapisa nizova brojeva, kao decimalni odvajatelj se koristi točka.

1. (12) Funkcija  $f(x)$ :  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se optimira u intervalu  $[-5, 10]$  genetskim algoritmom. Algoritam je trenutačno u fazi križanja odabranih jedinki i upravo se obrađuje par  $x_1 = 9.34$  i  $x_2 = -1.25$ .
  - a) (4) Prikažite kromosome koji odgovaraju tim jedinkama pod pretpostavkom da kromosomi imaju 10 gena.
  - b) (4) Prikažite uniformno križanje tih dviju jedinki.  
*Podsjetnik: uniformno križanje je križanje s n prekidnih točaka.*
  - c) (4) Dekodirajte nove jedinke.

Zatrebate li nasumične brojeve, na raspolaganju je niz iz jednolike razdiobe  $U[0,1]$  (u tablici) koje treba koristiti u slijedu u kojem su i dobiveni (dakle po redovima, s lijeva na desno!):

0.41	0.64	0.06	0.84	0.34	0.37	0.23	0.16	0.64	0.42	0.05	0.9	0.25	0.59	0.6
0.41	0.21	0.52	0.08	0.67	0.64	0.68	0.34	0.65	0.46	0.16	0.22	0.04	0.35	0.1

*Pozor! Obavezno objasnite svaku svoju odluku o načinu provođenja pojedinih koraka, tj. značenje parametara koje sami uredete. Neobjašnjeni postupci će značiti gubitak bodova.*

2. (12) Imamo  $n$  stvari čija je vrijednost jednak na njihovom rednom broju (dakle  $i$ -toj stvari vrijednost je  $i$ , pri čemu je  $i = 1, 2, \dots, n$ ). Pitanje je na koliko načina možemo te stvari rasporediti u dva skupa čija će ukupna vrijednost biti jednak. Drugim riječima, koliko je jednak vrednosti kombinacija stvari takvih da je vrijednost kombinacije jednak polovici ukupne vrijednosti svih stvari. Naravno, rješavanje ove zagonetke prepustit ćemo računalu. Napišite pseudokod programa koji bi izračunao broj jednakih vrijednih kombinacija pri čemu složenost algoritma ne bi bila veća od pseudopolinomne s obzirom na broj raspoloživih stvari  $n$ .

*Napomena: tipovi složenih struktura podataka su važni; ne morate ih detaljno definirati, ali treba ih naznačiti i objasniti.*

3. (10) U prazno crveno-crno stablo
- upišite redom sljedeće elemente: 18, 7, 8, 6, 24, 28, 13, 22, 17, 30 i 25
  - izbrišite 24.
4. (9) U grafu zadanim matricom susjedstva (udaljenosti) pronadite Hamiltonov ciklus koji neće biti dulji od dvostrukе duljine najkraćeg razapinjućeg stabla.

	1	2	3	4	5	6
1		7	8	10	12	10
2	7		5	6	8	5
3	8	5		6	7	4
4	10	6	6		10	8
5	12	8	7	10		3
6	10	5	4	8	3	

5. (7) Što je moguće jezgrovitije (dakle kratko, ali sadržajno) odgovorite:
- (2; -1) Koja je najznačajnija odlika simpleks algoritma u usporedbi s većinom drugih optimizacijskih algoritama iz koje, između ostalog, slijedi i njegova iznimna važnost i korisnost, tj. što je to on može, a druge metode (osim pokoje iznimke) ne?
  - (2; -1) Navedite dva (dvije vrste) problema koji se mogu pojaviti prilikom provedbe osnovnog simpleks algoritma kakav smo izučavali u okviru predmeta NASP (samo navesti i ništa drugo; bez pojašnjavanja!).
  - (2; -1) Koje su prirode problemi koje ste naveli u točki b), teorijske ili numeričke?
  - (1; -1) Ako postoji rješenje za neki od problema iz točke b), navedite ga (bez pojašnjavanja!).

# Napredni algoritmi i strukture podataka – međuispit

21. studenog 2012.

Ovaj ispit donosi ukupno **42 boda** (prag 10,5), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi,iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

Napomena: u zadatcima u kojima se koriste nasumični brojevi podrazumijeva se da je njihova izvorna razdioba jednolika i ograničena na interval  $[0, 1]$ , što označavamo  $U[0,1]$ . Ako ih treba preslikati u prikladne intervale, preslikavanje nije potrebno ispisivati, ali mora biti jasno definirano.

Napomena: radi jasnoće zapisa nizova decimalnih brojeva u kojima je decimalni odvajatelj zarez, brojevi se odvajaju točkazarezom (;).

1. (6) Skicirajte preskočnu listu (*skip list*) kapaciteta  $n = 8$  nakon što u polazno praznu listu upišemo redom brojeve 17, 20, 4, 13, 5, 3, 15 i 10. Pri tome pretpostavite da se primjenjuje učinkovitiji način određivanja stupnja novog čvora, pri čemu je vjerojatnost prijelaska novog čvora u višu razinu  $p = 1/2$  te da je slijed nasumičnih brojeva izračunanih tijekom postupka: 0,73; 0,33; 0,24; 0,97; 0,58; 0,32; 0,8; 0,67; 0,47; 0,52; 0,68 i 0,13. Postupak određivanja stupnja novog čvora mora biti jasno ilustriran.

2. (9) Napišite pseudokod genetskog algoritma koji:

- koristi razmjerni odabir jedinki (*roulette wheel parent selection*)
- primjenjuje križanje s jednom prekidnom točkom (*one-point crossover*)
- križanja obavlja s vjerojatnošću  $p_c$  i mutacije s vjerojatnošću  $p_m$
- kada dođe do mutacije, mijenja gen s vjerojatnošću  $p_s$
- cijelu populaciju zamjenjuje novom (*generational replacement*).

Možete pretpostaviti da su sve pomoćne funkcije na raspolaganju, samo pregledno ispišite njihove nazive i svrhu. Na primjer, pretpostavite da postoji funkcija `rand()` koja kao rezultat vraća jedan nasumični broj iz populacije  $U[0,1]$ .

3. (6) Skicirajte izgradnju **AVL stabla** uslijed sljedećih promjena (redom kojim su navedene):

- (3) upisivanja redom: 5,7,11,12 i 15
- (2) uklanjanja 5
- (1) upisivanja 10 i 9.

4. (7) Skicirajte izgradnju crveno-crnog (RB) stabla uslijed sljedećih promjena (redom kojim su navedene):

- (3) upisivanja redom: 5,7,11,12 i 15
- (2) uklanjanja 5
- (2) upisivanja 10 i 9.

Napomena: crni čvorovi neka budu okrugli, a crveni kvadratični.

5. (6) Računalni sustav neke porezne uprave predviđen je za 4 miliona poreznih obveznika i 30 različitih poreznih olakšica, a statistički podatci pokazuju da obveznici prosječno ostvaruju pravo na 8 olakšica. Ako sustav mora pohraniti podatke za razdoblje od 20 godina i

- podatak o korisniku zauzima 4 B memorije
- podatak o godini zauzima 2 B memorije
- podatak o vrsti olakšice zauzima 1 B memorije
- iznos jedne porezne olakšice zauzima 4 B memorije
- pokazivači zauzimanju po 8 B memorije

- a) (3) biste li podatke pohranili u trodimenzionalnu „klasičnu“ ili rijetko popunjenu tablicu? Obrazložite odgovor.
- b) (3) bi li Vaša odluka bila ista kad bi podatke trebalo pohraniti i za neko duže vremensko razdoblje? Obrazložite odgovor.

6. (8) Potpuno povezana, unaprijedna (*feedforward*) troslojna neuronska mreža strukture  $2 \times 3 \times 2$  je dio sustava iz kojeg na ulaze mreže dolaze isključivo signali nula ili jedan, približno jednak učestalo. Aktivacijska funkcija svih neurona u mreži je opća sigmoid.

- a) (1) Skicirajte tu mrežu.
- b) (5) Provedite prvi korak uvježbavanja te mreže (jednom osvježiti sve parametare) algoritmom koračnog uvježbavanja (*on-line learning*) ako se podatci za uvježbavanje uzimaju redom iz sljedeće tablice:

ulaz 1	ulaz 2	izlaz 1	izlaz 2
1	0	0	1
0	0	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Početne vrijednosti svih parametara mreže postavite na nula, a zatrebaju li Vam još neke veličine, pridijelite im vrijednosti po vlastitom nahođenju, samo jasno navedite svoj izbor i kratko objasnите ulogu te veličine.

- c) (1) Objasnite nastavak postupka, tj. kako bi započeo sljedeći korak uvježbavanja mreže.  
*Naputak: dovoljna je i samo jedna dobro sročena rečenica. Naravno, svako podrobnije objašnjenje je dobrodošlo i smanjit će mogućnost zabune prilikom ocjenjivanja.*
- d) (1) Koje bi bile početne vrijednosti parametara mreže kada bismo ih određivali po načelu preporučenom u okviru predmeta NASP?  
*Naputak: obrazložiti u par riječi. Dovoljne su i samo natuknice uz račun. Naravno, svako podrobnije objašnjenje je dobrodošlo i smanjit će mogućnost zabune prilikom ocjenjivanja.*

## Napredni algoritmi i strukture podataka – završni ispit

30. siječnja 2013.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 15), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi, iza ;)! Boduju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (11) Vi ste jedan od putnika na luksuznoj jahti koja tone zbog oštećenja! Srećom, tone polako, vrlo je blizu obale i more je mirno pa ju svi mogu organizirano napustiti. Nezgodno je jedino što nema čamaca za spašavanje pa se mora plivati do obale. Putnici uzimaju najvrijedniju imovinu, ali ne smiju ponijeti previše jer stvari ih opterećuju dok plivaju i prijeti opasnost da se ne uspiju domoći obale. S obzirom na plivačke sposobnosti, Vi ne biste smjeli nositi više od 11 kg tereta. Tablica prikazuje vrijednosti Vaših stvari i njihovu masu. Odlučite koje ćete stvari ponijeti sa sobom kako biste sačuvali najveću moguću vrijednost ne ugrožavajući život.

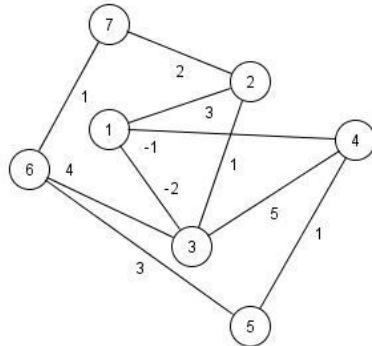
predmet	masa [kg]	vrijednost
zlatna poluga	4	5
medaljon	3	4
sat	1	1
narukvica	2	7
mač slavnog pretka	9	16
vodonepropusni laptop	3	1

*Napomena: ovaj se problem može riješiti i napamet, ali takvo rješenje neće donositi bodove.  
Priznavat će se isključivo rješenje dobiveno nekom formalnom metodom.*

2. (13) Investicijsko društvo raspolaže sa 6 miliona kuna, a ulaže u državne obveznice, dionice i zlato. Očekivani godišnji povrat je 6% za obveznice, 15% za dionice i 13 % za zlato. Pravila poslovanja društva nalažu da se barem 40% raspoloživih sredstava mora uložiti u obveznice i dionice zajedno, s time da se ni u jednu od tih kategorija vrijednosnica pojedinačno ne smije uložiti više od 3 miliona kuna. Također, pravila ograničavaju ulog u zlato na najviše 2 miliona kuna. Društvo u sljedećoj godini želi ostvariti najveći mogući prihod i postavlja se pitanje razdiobe sredstava po ulozima. Vi ste odgovorna osoba i od Vas se očekuje prijedlog ulaganja. Predložite koliko novaca i u što uložiti.

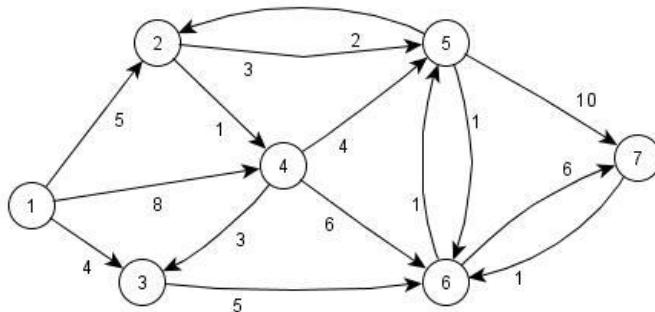
*Napomena: ovaj se problem može riješiti i napamet, ali takvo rješenje neće donositi bodove.  
Priznavat će se isključivo rješenje dobiveno nekom formalnom metodom.*

3. (8) Krećući iz vrha 7, Primovim algoritmom nađite najkraće razapinjuće stablo u grafu na slici.



Napomena: slijed postupaka mora biti ilustriran tako da se jasno vidi Vaše puno razumijevanje algoritma.

4. (9) Odredite najveći mogući tok iz čvora 1 u čvor 7 mreže na slici, kao i opterećenja pojedinih veza kada se postigne najveći tok.



Napomena: slijed postupaka mora biti ilustriran tako da se jasno vidi Vaše puno razumijevanje algoritma. Primijenite li algoritam koji nije obuhvaćen gradivom predmeta NASP, obavezno navedite izvor iz kojeg ste ga naučili, pri čemu taj izvor mora sadržavati dokaz ispravnosti algoritma ili ukazivati na izvor (referencu) u kojem je taj dokaz izložen.

5. (9) U potpunom neusmjerenom grafu zadanom matricom susjedstva (adjacency matrix) u tablici, algoritmom po vlastitom izboru odredite Hamiltonov ciklus koji započinje u vrhu A, a duljina mu ne premašuje dvostruku duljinu najkraćeg razapinjajućeg stabla.

	A	B	C	D	E	F
A	-					
B	3	-				
C	6	5	-			
D	4	6	5	-		
E	5	8	4	7	-	
F	2	4	7	4	6	-

Napomena: slijed postupaka mora biti ilustriran tako da se jasno vidi Vaše puno razumijevanje algoritma. Primijenite li algoritam koji nije obuhvaćen gradivom predmeta NASP, obavezno navedite izvor iz kojeg ste ga naučili, pri čemu taj izvor mora sadržavati dokaz ispravnosti algoritma ili ukazivati na izvor (referencu) u kojem je taj dokaz izložen.

## Napredni algoritmi i strukture podataka – zimski ispitni rok

13. veljače 2013.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 35), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi, iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (10) Popis elemenata u nekom crveno-crnom (RB) stablu, redom od korijena prema nižim razinama s lijeva na desno do posljednjeg lista, je sljedeći: 11, 4, 12, 2, 7, 14, 1, 6 i 9. Još znamo i da je to stablo takvo da ima najmanji mogući broj crvenih čvorova s obzirom na sadržaj.
  - a) (2) Skicirajte to stablo.
  - b) (4) Upišite (dodajte) u njega redom elemente 13 i 8.
  - c) (4) Uklonite (obrišite) iz njega redom elemente 6 i 4.

2. (12) Riješite sljedeći linearni problem:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 6x_5 \\ \text{uvjeti} & x_1 + x_3 = 8 \\ & x_2 - x_5 + x_3 = 5 \\ & x_3 - x_2 + x_4 = 1 \\ & x_4 + x_1 \geq 15 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array} .$$

3. (5; -2) Čemu služi prva faza dvofaznog simpleks algoritma?

Obrazložite zašto je uopće potrebna.

*Naputak: dovoljna je i samo jedna dobro sročena rečenica. Naravno, svako podrobnije objašnjenje je dobrodošlo i smanjit će mogućnost zabune prilikom ocjenjivanja.*

4. (13) Potpuno povezana, unaprijedna (*feedforward*) troslojna neuronska mreža ima strukturu  $3 \times 2 \times 2$ , pri čemu je aktivacijska funkcija neurona u skrivenom sloju opća sigmoid, dok su izlazni neuroni linearni (*Adaline*). Mreža će biti uvježbana za zbrajanje binarnih brojeva i može se pretpostaviti da će na njezine ulaze binarne znamenke pristizati podjednakom učestalošću.

a) (2) Skicirajte tu mrežu.

b) (6) Provedite prvi korak uvježbavanja te mreže (jednom osvježiti sve parametare) algoritmom koračnog uvježbavanja (*on-line learning*) ako se podatci za uvježbavanje uzimaju redom iz sljedeće tablice:

Ulaz 1	Ulaz 2	Ulaz 3	Izlaz 1	Izlaz 2
0	1	1	0	1
1	1	0	0	1
0	0	1	1	0
1	1	1	1	1

Početne vrijednosti svih parametara mreže postavite na nula, a zatrebaju li Vam još neke veličine, pridijelite im vrijednosti po vlastitom nahođenju, samo jasno navedite svoj izbor i kratko objasnите ulogu te veličine.

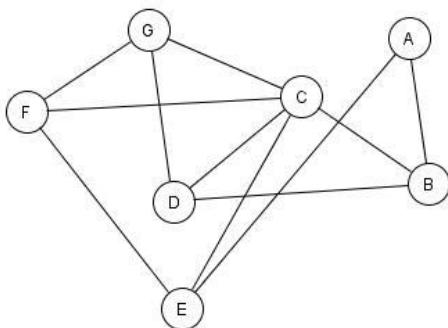
c) (2) Objasnite nastavak postupka, tj. kako bi započeo sljedeći korak uvježbavanja mreže.

*Naputak: dovoljna je i samo jedna dobro sročena rečenica. Naravno, svako podrobnije objašnjenje je dobrodošlo i smanjit će mogućnost zabune prilikom ocjenjivanja.*

d) (3) Koje bi bile početne vrijednosti parametara mreže kada bismo ih određivali po načelu preporučenom u okviru predmeta NASP?

*Naputak: obrazložiti u par riječi. Dovoljne su i samo natuknice uz račun. Naravno, svako podrobnije objašnjenje je dobrodošlo i smanjit će mogućnost zabune prilikom ocjenjivanja.*

5. (10) Primjenom Bondy-Chvatalovog teorema pronađite Hamiltonov ciklus u grafu na slici.



## Napredni algoritmi i strukture podataka – ljetni ispitni rok

5. srpnja 2013.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 35), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi, iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (8) Binarno stablo za pretraživanje izgrađeno je upisivanjem sljedećeg niza brojeva:

12, 37, 13, 29, 9, 24, 27, 24, 11, 12, 13, 38, 19 i 25.

Skicirajte uravnotežavanje tog stabla DSW algoritmom.

2. (12) Zadan je linearни problem:

$$\begin{aligned} \max \quad & x + 2y \\ \text{subject to} \quad & -12x + y \leq 4 \\ & -5x + y \leq 5 \\ & -3x + y \leq 6 \\ & -10x + 7y \leq 53 \\ & -2x + 3y \leq 30 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Odgovorite na sljedeća pitanja:

- a) (8) Koje je optimalno rješenje zadanog problema?
- b) (4) U kojem koraku (iteraciji) će standardni simpleks algoritam u ovom konkretnom slučaju postići uvjete za prekid ako se kreće iz očitog (kanonskog) početnog bazičnog rješenja?

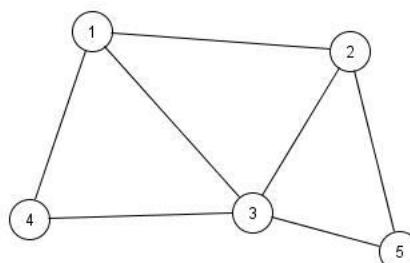
Napomena: pri rješavanju ovog zadatka nema ograničenja na metodu rješavanja; važno je jedino da su odgovori točni i jasno obrazloženi. Iteracije brojite od jedan, dakle početno bazično rješenje je prva iteracija.

Savjet: prije nego išta počnete pisati, dobro proučite zadani problem.

3. (6) Izrazite graf na slici u obliku:

- a) (2) matrice susjedstva (adjacency matrix)  
b) (2) matrice povezanosti (incidence matrix)  
c) (2) liste susjedstva (adjacency list) u obliku tablice

Napomena: u svim prikazima poredajte vrhove uzlazno po rednim brojevima.

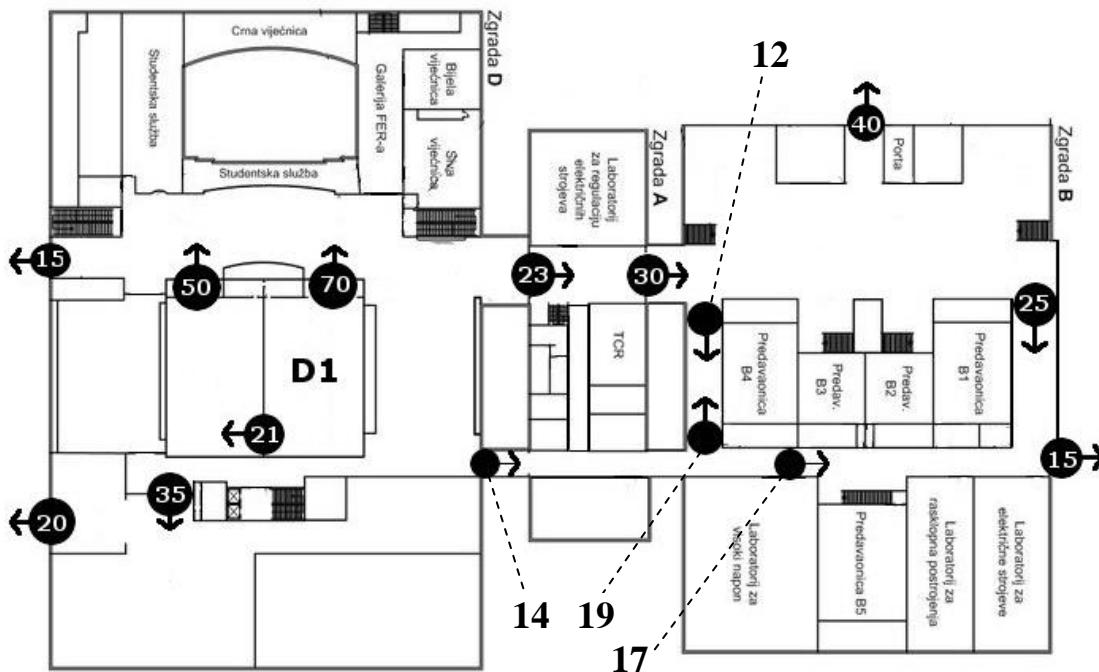


4. (12) Raspolažete kapitalom od 10 miliona HRK koji možete uložiti (u svotama zaokruženim na 1 milion HRK) u 3 tvrtke (A, B i C), a na temelju prethodnih analiza znate koliku dobit možete očekivati u pojedinim tvrtkama s obzirom na uložena sredstva. Očekivana dobit u ovisnosti o ulogu navedena je u tablici (sve vrijednosti su u milionima HRK).

ulog	dobit u tvrtki A	dobit u tvrtki B	dobit u tvrtki C
1	0.28	0.25	0.15
2	0.45	0.41	0.25
3	0.65	0.55	0.4
4	0.78	0.65	0.5
5	0.9	0.75	0.62
6	1.02	0.8	0.73
7	1.13	0.85	0.82
8	1.23	0.88	0.9
9	1.32	0.9	0.96
10	1.38	0.9	1

Odredite razdiobu ulaganja kojom ćete ostvariti najveću moguću dobit.

5. (12) Izrađuje se plan evakuacije iz FER-ove dvorane D1 s ciljem određivanja maksimalnog dozvoljenog broja ljudi u toj dvorani (ne uzevši u obzir ostale prostorije). Na slici je tlocrt dijela FER-a s označenim prolazima na mogućim evakuacijskim putevima unutar zgrade i izlazima iz nje. Za svaki prolaz i izlaz naznačen je mogući smjer kretanja i propusnost (broj ljudi u minuti). Dogovoreno je da najveći dozvoljeni broj ljudi u dvorani bude jednak najvećem broju ljudi koji mogu napustiti zgradu u jednoj minuti, odnosno ukupnoj propusnosti svih evakuacijskih puteva zajedno. Vrijeme kretanja po hodnicima se zanemaruje. Odredite maksimalni kapacitet dvorane D1 (najveći dozvoljeni broj ljudi u njoj).



## Napredni algoritmi i strukture podataka – rujanski ispitni rok

6. rujna 2013.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 35), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi, iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir, osim kada je u samom zadatku izričito navedeno drugačije.

1. (11) U polazno prazno B stablo 4. reda
  - a) (6) upišite redom: 9, 6, 11, 2, 5, 10, 13, 4, 3, 1, 12, 8 i 7
  - b) (5) uklonite (izbrišite) 5 pa 12.
2. (12) Potpuno povezana, unaprijedna (*feedforward*) troslojna neuronska mreža ima strukturu  $3 \times 2 \times 2$ , pri čemu je aktivacijska funkcija neurona u skrivenom sloju opća sigmoid, dok su izlazni neuroni linearni (*Adaline*). Mreža će raditi s binarnim brojevima i može se pretpostaviti da će na njezine ulaze binarne znamenke pristizati podjednakom učestalošću.
  - a) (2) Skicirajte tu mrežu.
  - b) (6) Provedite prvi korak uvježbavanja te mreže (jednom osvježiti sve parametare) algoritmom koračnog uvježbavanja (*on-line learning*) ako se podatci za uvježbavanje uzimaju redom iz sljedeće tablice:

Ulaz 1	Ulaz 2	Ulaz 3	Izlaz 1	Izlaz 2
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
0	0	1	1	0
1	1	1	1	1

Početne vrijednosti svih parametara mreže postavite na nula, a zatrebaju li Vam još neke veličine, pridijelite im vrijednosti po vlastitom nahodjenju, samo jasno navedite svoj izbor i kratko objasnите ulogu te veličine.

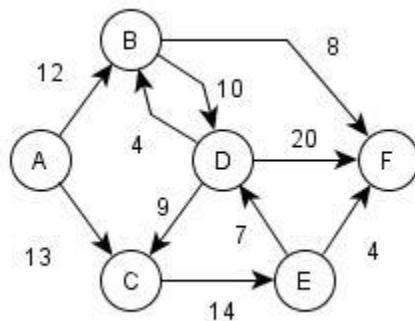
- c) (2) Objasnite nastavak postupka, tj. kako bi započeo sljedeći korak uvježbavanja mreže.  
*Naputak: dovoljna je i samo jedna dobro sročena rečenica. Naravno, svako podrobnije objašnjenje je dobrodošlo i smanjit će mogućnost nesporazuma.*
- d) (2) Koje bi bile početne vrijednosti parametara mreže kada bismo ih određivali po načelu preporučenom u okviru predmeta NASP?  
*Naputak: obrazložiti u par riječi. Dovoljne su i samo natuknice uz račun. Naravno, svako podrobnije objašnjenje je dobrodošlo i smanjit će mogućnost nesporazuma.*

3. (16) Ispunjavate (jedan) listić u sportskoj kladionici. Želja Vam je, naravno, ostvariti što veći dobitak, a okladu sklapate označavanjem rezultata koje predviđate. Dugo pratite sportska zbivanja i na temelju iskustva procijenili ste vjerojatnosti pojedinih rezultata. U tablici su navedeni mogući rezultati (prvi stupac), njihove vjerojatnosti po Vašoj procjeni (drugi stupac) i koeficijent povrata uloga. Koeficijent povrata uloga (još se naziva i koeficijent kladionice) je broj kojim se množi Vaš ulog ako pogodite rezultat, a taj umnožak je Vaš dobitak. Igrate li na više rezultata, njihovi se koeficijenti množe pa je dobitak jednak umnošku uloga i umnoška koeficijenta svih rezultata na koje ste se kladili. Na listiću se označava jedan ili više rezultata, a dobitak se ostvaruje samo ako pogodite sve rezultate na koje ste se kladili. Ako se makar i jedno Vaše predviđanje ne ostvari, gubite cijeli ulog. Očito, što više rezultata predvidite, potencijalni dobitak je veći, ali vjerojatnost pogotka svih rezultata opada. Odlučili ste da najmanja prihvatljiva procijenjena vjerojatnost dobitka (dakle, pogotka svih predviđenih rezultata) bude 3.125 % i sada trebate odrediti na koje ćete se rezultate kladiti, a da ukupni koeficijent povrata uloga bude najveći.

rezultat	procijenjena vjerojatnost [%]	koeficijent povrata
A	12.5	25
B	25	7
C	50	3
D	25	5.2
E	6.25	60
F	50	2

Naputak: rješavanje je osjetno lakše kada se iskoristi činjenica da su sve vjerojatnosti cjelobrojne negativne potencije broja 2. Na primjer, 3.125 % je vjerojatnost 0.03125 što je  $2^{-5}$ . Također, treba imati na umu da je vjerojatnost zajedničke pojave nekoliko rezultata jednaka umnošku pojedinačnih vjerojatnosti. ☺

4. (11) Za mrežu na slici, problem maksimizacije toka iz čvora A u čvor F postavite (modelirajte) kao linearni problem. Završni zapis mora biti u kanonskom obliku.

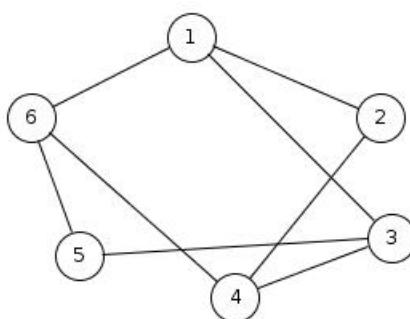


## Napredni algoritmi i strukture podataka – dekanski ispitni rok

18. rujna 2013.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova** (prag 35), a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi,iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir, osim kada je u samom zadatku izričito navedeno drugačije.

1. (4; -2) Karakteristika strukture Trie **nije**:
  - a) ima dvije vrste čvorova
  - b) visina stabla je jednaka duljini najdulje riječi
  - c) konačni oblik ovisi o redoslijedu upisa podataka
  - d) brisanje je vrlo jednostavno
  - e) podatci su samo u listovima (unutarnji čvorovi ne sadrže podatke).
2. (10) Skicirajte, početno prazno, crveno-crno stablo tijekom upisivanja redom:  
20, 1, 2, 5, 17, 8, 1, 4, 9, 11, 15 i 19.
3. (10) U zadanom grafu pronadžite Hamiltonov ciklus algoritmom koji se temelji na Bondy-Chvatalovom teoremu.



4. (12) Skicirajte rad Warshall-Floyd-Ingermanovog algoritma (svi-svi) za graf zadan matricom udaljenosti (indeks retka je izvor, indeks stupca je odredište), tako da pregledno ispišete matrice  $D^{(i)}$  i  $\Pi^{(i)}$  za svaki vrh  $i = 1, 2, \dots, |V|$ .

	3	9		-3	
			7	1	8
					3
2		-6			
			6		
-3					

5. (14) Svetarski brod ima tri odjeljka u koje treba ugraditi uređaje za proizvodnju kisika. Njihov besprijekorni rad je od presudne važnosti pa se nose i pričuvni (prekobrojni) uređaji, a posada može preživjeti ako ispravno radi barem jedan. U svaki odjeljak se može ugraditi samo jedna vrsta uređaja, a vjerojatnost njihovog otkazivanja tijekom jednog leta nije jednaka. Također, uređaji imaju različite volumene, mase i cijene, a postoje tehnička i finansijska ograničenja za cijeli brod. U tablici su navedene karakteristike uređaja po odjeljcima (= vrstama uređaja), a u zadnjem retku su ograničenja za cijeli brod.

Odjeljak	Volumen	Masa	Cijena	Vjerojatnost otkazivanja
1	30	10	150	0.5
2	40	15	170	0.2
3	20	8	130	0.4
Ograničenja	400	150	2000	

Problem određivanja broja uređaja pojedine vrste koje treba ugraditi tako da vjerojatnost otkazivanja svih uređaja tijekom jednog leta bude minimalna postavite kao linearni problem.

*Napomena: ne treba rješavati postavljeni model, nego ga samo matematički formulirati!*

# Napredni algoritmi i strukture podataka - 1. međuispit

14. studenog 2011.

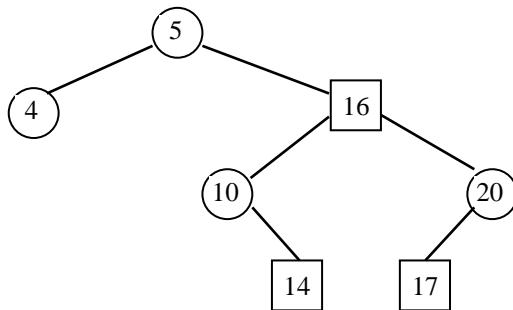
Ovaj ispit donosi ukupno **40 bodova**, a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi, iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

Napomena: u zadatcima u kojima se koriste nasumični brojevi podrazumijeva se da je njihova izvorna razdioba jednolika  $U[0,1]$ , stoga ih, po potrebi, treba preslikati u prikladne intervale. Preslikavanje nije potrebno ispisivati, ali mora biti jasno definirano.

Napomena: radi jasnoće zapisa nizova brojeva, kao decimalni odvajatelj se koristi točka.

1. (7) Skicirajte izgled (strukturu) skip liste čiji su parametri  $n=8$  i  $p=0.5$  nakon što u polazno praznu listu upišemo redom brojeve: 16, 8, 3, 13, 1, 15, 2 i 4, uz pretpostavku da se primjenjuje učinkovitiji način određivanja stupnja novog čvora te da je slijed nasumičnih brojeva izračunanih tijekom postupka: 0.81, 0.99, 0.69, 0.91, 0.68, 0.42, 0.09, 0.18 i 0.13.

2. (5) Dodajte 18 pa 21 u crveno-crno stablo na slici. Crveni čvorovi su kvadratični, a crni okrugli. Takvo označavanje primijenite i u Vašim rješenjima.



3. (8) Napišite pseudokod funkcije za pretraživanje B-stabla. Sami odlučite što će biti argumenti, pod pretpostavkom da su čvorovi uobičajene strukture (slične onoj navedenoj na predavanjima i u mjerodavnoj literaturi). Radi jasnoće, poželjno je navesti strukturu čvora, s naznakama značenja članskih varijabli. Pri tome je dovoljan i samo popis bez ikakvih sintaktičkih elemenata.

4. (4) Skicirajte strukturu Trie koja sadrži riječi:

MARS, MARA, MARE, MAJ i MAJA.

5. (8) U tablici je polazna populacija s kojom započinje rad genetskog algoritma.

jedinka	10110	01111	10101	10111	00001
dobrota	66	39	27	15	3

Prikažite proces stvaranja jednog novog para jedinki (dvije nove jedinke) ako se primjenjuje:

- jednostavni razmjerni odabir (*roulette wheel parent selection*)
- križanje s jednom prekidnom točkom (uvijek između dva gena)
- mutacija koja, kad se dogodi, uvijek mijenja gen na koji se odnosi

uz vjerojatnost križanja  $p_k=0.8$  i vjerojatnost mutacije  $p_m=0.1$ .

Postupak provedite koristeći redom i jednokratno nasumične brojeve: 0.2, 0.84, 0.05, 0.41, 0.22, 0.62, 0.21, 0.19, 0.44, 0.06, 0.54, 0.76, 0.48 i 0.01.

6. (8) Linearni neuron (Adaline) s četiri ulaza treba uvježbati sljedećim parovima podataka:

točka	ulaz 1	ulaz 2	ulaz 3	ulaz 4	izlaz
1	1	0	0	0	1
2	0	0	0	1	1
3	0	0	1	0	0
4	0	1	0	0	0

a) (1) Skicirajte taj neuron.

b) (2; -1) Uvježbavanje neurona je optimizacijski problem. Koliko rješenja ima ovaj postavljeni? Drugim riječima, postoji li više skupova različitih optimalnih parametara ili je optimalan (bolji od svih drugih) samo jedan? Ako ih ima više, procijenite koliko.

c) (2) Izračunajte optimalne parametre izravno, dakle ne primjenom nekog iterativnog postupka, nego u jednom koraku.

d) (3) Provedite prvu iteraciju (epochu) uvježbavanja tog neurona LMS algoritmom (koračno uvježbavanje; *on-line learning*). Polazni parametri neka budu  $\mathbf{w}^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$ , a točke za uvježbavanje uzimajte redom kojim su navedene u tablici. Ukaže li se potreba za još nekim parametrom, odaberite ga proizvoljno.

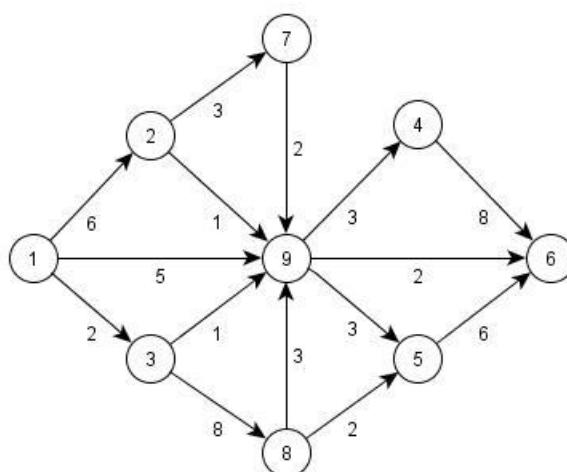
(Savjet: odaberite vrijednost najjednostavniju za daljnje računanje.)

# Napredni algoritmi i strukture podataka - završni ispit

23. siječnja 2012.

Ovaj ispit donosi ukupno **50 bodova**, a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi,iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

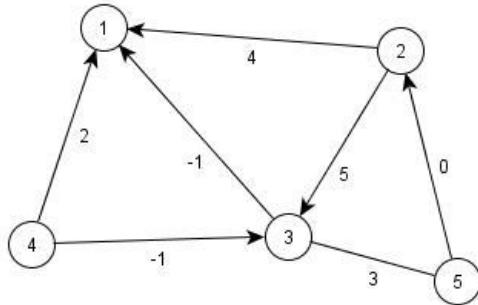
1. (2; -1) Kolika je složenost („veliki O“) **DSW** algoritma?
2. (5) Upisati niz 16, 9, 12, 14, 13 u prazno AVL stablo i potom obrisati 12.  
13 korijen ako brisem prema succesoru, 9 lijevo dijete, 14 desno, 16 desno od 14
3. (10) Poljoprivrednik uzgaja pšenicu i soju na zemljištu površine 10 ha. Zbog uvjeta najma (koncesije) mora zasijati barem 7 ha, pri čemu mu pšenica donosi prihod 1800 kn/ha, a soja 2500 kn/ha. S druge strane, za sijanje pšenice mora uložiti 500 kn/ha i ono traje 1 h/ha, dok sijanje soje košta 1000 kn/ha i traje 2 h/ha. Poljoprivrednik raspolaže s ukupno 6000 kn i zbog vremenskih uvjeta sjetuva mora dovršiti u roku od 12 sati. Koliku površinu treba zasijati pšenicom, a koliku sojom da bi ostvario najveću moguću dobit (dubit je razlika prihoda i rashoda)?  
*Napomena: Ovaj se problem može rješiti i grafički ili napamet, ali takva rješenja neće donositi bodove. Priznavat će se isključivo rješenje primjenom neke formalne metode, pri čemu će se postavljanje problema i njegovo rješavanje vrednovati zasebno.*
4. (10) Odredite najveći mogući protok između čvorova 1 i 6 mreže na slici.



*Napomena: Odgovor bez jasnog obrazloženja (skice) postupka kojim se do njega dolazi neće donositi bodove.*

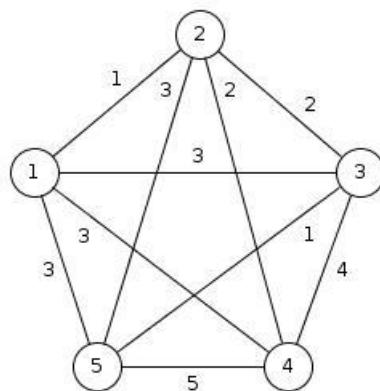
5. (10) Primjenom WFI algoritma

- (5) odredite duljine najkraćih puteva među vrhovima grafa na slici
- (2) odredite koji vrhovi pripadaju nekom (bilo kojem) ciklusu
- (3) odredite duljine najkraćih ciklusa u kojima se nalaze pojedini vrhovi (oni iz podzadataka b).

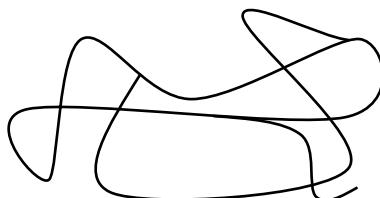


6. (10) Riješite metrički problem trgovackog putnika koji prikazuje (modelira) graf na slici primjenom 2\*MST algoritma. Cijeli postupak mora biti pregledno skiciran, a za konstrukciju MST upotrijebite Dijkstrin algoritam.

*Uputa: prilikom konstrukcije MST obavezno je samo naznačiti redoslijed obrade bridova i skicirati konačni izgled stabla nakon obrade svakog pojedinog brida koji se uzme u razmatranje. Naravno, svaka detaljnija skica je dobrodošla i smanjiće mogućnost zabune prilikom ocjenjivanja.*



7. (3) Odgovoriti i obrazložiti (ukratko dokazati pozivajući se na odgovarajuće teorijske rezultate) je li crtež na slici moguće nacrtati ne dižući olovku s papira i ne crtajući ponovno već nacrtane linije (ili njihove dijelove) ili nije moguće.



# Napredni algoritmi i strukture podataka - zimski ispitni rok

6. veljače 2012.

Ovaj ispit donosi ukupno **70 bodova**, a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi, iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (2; -1) Koja od sljedećih tvrdnji **jest** istinita?
  - a) Struktura *Trie* je napredna vrsta uravnoteženih binarnih stabala.
  - b) „Visina“ (dubina) strukture *Trie* ne ovisi o redoslijedu upisa podataka.
  - c) „Visina“ (dubina) strukture *Trie* je jednaka  $\log_2(n)$ , gdje je  $n$  broj upisanih podataka.
  - d) Brisanje podataka iz *Trie* je kompliciranije nego brisanje iz binarnog stabla.
2. (16) Potpuno povezana, unaprijedna (*feedforward*) troslojna neuronska mreža strukture  $2 \times 3 \times 2$  je dio sustava iz kojeg na ulaze mreže dolaze isključivo signali nula ili jedan, približno jednak učestalo. Aktivacijska funkcija svih neurona u mreži je opća sigmoid.
  - a) (2) Skicirati tu mrežu.
  - b) (9) Provesti prvi korak uvježbavanja te mreže (jednom osvježiti sve parametare) ako se podatci za uvježbavanje uzimaju redom iz sljedeće tablice:

ulaz 1	ulaz 2	izlaz 1	izlaz 2
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Početne vrijednosti svih parametara mreže postavite na nula, a zatrebaju li Vam još neke veličine, pridijelite im vrijednosti po vlastitom nahođenju, samo jasno navedite svoj izbor i kratko objasnите ulogu te veličine.

- c) (2) Objasniti nastavak postupka, tj. kako bi započeo sljedeći korak uvježbavanja mreže.  
*Uputa: dovoljna je i samo jedna dobro sročena rečenica. Naravno, svako podrobnije objašnjenje je dobrodošlo i smanjit će mogućnost pogrešnog tumačenja odgovora.*
- d) (3) Koje bi bile početne vrijednosti parametara mreže kada bismo ih određivali po načelu preporučenom u okviru predmeta NASP?  
*Uputa: Obrazložiti u par riječi. Dovoljne su i natuknice uz pojedine oznake. Naravno, svako podrobnije objašnjenje je dobrodošlo i smanjit će mogućnost pogrešnog tumačenja odgovora.*

3. (16) Upisati niz 10, 5, 13, 7, 6, 2, 16, 8, 14, 1 u polazno prazno crveno-crno stablo, a potom izbrisati redom 1, 2 i 5.

*Uputa: Stablo treba skicirati nakon svake promjene, držeći se dogovora da su crni čvorovi kružni, a crveni kvadratični. Dovoljno je skicirati samo dijelove koji se mijenjaju, ali na kraju svakako treba nacrtati cijelo stablo.*

4. (20) Vlada priprema državni proračun za sljedeću godinu i mora ostvariti uštedu od barem 7 milijardi kuna u javnoj potrošnji. Analiza na koju se oslanja pokazuje da će negativni učinci ušteda u pojedinim djelatnostima biti kako je navedeno u tablici, gdje su u prvom stupcu uštede, a u ostalim stupcima negativni učinci do kojih određene uštede u pojedinim djelatnostima dovode. Prazna polja u tablici znače nemogućnost uštede naznačenog iznosa u pojedinoj djelatnosti, odnosno kazuju da ta djelatnost više ne bi bila funkcionalna kad bi joj se uskratilo toliko sredstava. Drugim riječima, može se smatrati da su neupisani negativni učinci jednaki  $\infty$ .

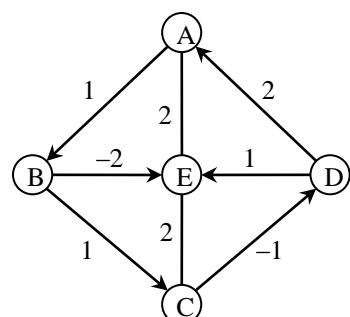
negativni učinci po djelatnostima				
ušteda [mlrd.kn.]	javna uprava	mirovinski sustav	zdravstvo	obrazovanje
1	1	1	3	1
2	2	4	5	1
3	3		9	2
4	5		12	6
5	7			9
6	8			

Predložite raspodjelu ušteda kojom će se ostvariti zacrtani cilj, izazivajući pritom najmanji ukupni negativni učinak.

*Napomena: Ovaj se problem može rješiti i napamet, ali takvo rješenje neće donositi bodove. Priznavat će se isključivo rješenje dobiveno nekom formalnom metodom.*

5. (16) Primjenom Dijkstrinog algoritma u grafu na slici naći najkraće puteve iz vrha **B** u sve ostale.

*Uputa: Dijkstrin algoritam je jedini čiji rad treba ilustrirati; pomoćne algoritme možete provesti i napamet. Za prikaz rada Dijkstrinog algoritma predlažemo tablicu kakva se koristila na predavanjima. To nije obavezno, ali svaki drugi prikaz mora biti barem jednako ilustrativan.*



# Napredni algoritmi i strukture podataka - ljetni ispitni rok

3. srpnja 2012.

Ovaj ispit donosi ukupno **70 bodova**, a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu ne vrijede. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi, iza ;)!

1. (14) Skicirajte pretvorbe u početno praznom crveno-crnom (RB) stablu uslijed:

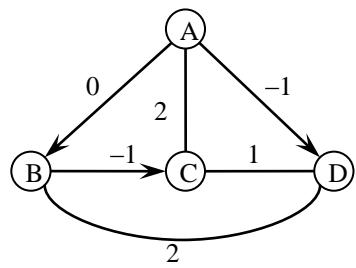
- a) (7) dodavanja redom: 8, 2, 6, 7, 11, 13 i 12
- b) (7) brisanja redom: 8, 2 i 7.

*Uputa: Crni čvorovi neka na skici budu okrugli, a crveni kvadratični.*

*Napomena: Ako pogrešno riješite zadatak a), ali potom točno riješite b) polazeći od pogrešnog stabla iz a), za b) ćete dobiti bodove prema procjeni ocjenjitelja. Dakle, ne odustajte!*

2. (15) WFI algoritmom odredite najkraće puteve između svih parova vrhova u grafu na slici.

- a) (2) Po jednom rečenicom objasnite značenje elemenata matrice udaljenosti  $D$  i matrice puteva  $\Pi$ .
- b) (10) Rad algoritma ilustrirajte (urednim) ispisom matrica  $D$  i  $\Pi$  u svakom koraku (znači, ispisujte sve  $D^{(k)}$  i  $\Pi^{(k)}$ ), a radi preglednosti i smanjenja mogućnosti zabune prilikom ocjenjivanja, elemente matrica koji se promijene iz koraka u korak uokvirite ili nekako drugačije istaknite.
- c) (3) Na primjeru puta od A do E, kratko objasnite kako se konstruira (iscitava) najkraći put između dva vrha na temelju matrice puteva  $\Pi$ .



3. (15) Tvrta proizvodi dva proizvoda (A i B). Proizvod A se prodaje po 12 kn/kg, a proizvod B po 9 kn/kg. Proizvodnja proizvoda A traje 2 h/kg, dok proizvodnja proizvoda B traje 1,2 h/kg, pri čemu stroj na kojem se odvija proizvodnja mjesечно može raditi najviše 100 sati. Stanje na tržištu je takvo da se može prodati najviše 80 kg obaju proizvoda (ukupno), od čega najmanje 20 kg proizvoda A. Vaša je zadaća napraviti proizvodni plan koji će osigurati najveću zaradu, dakle trebate odlučiti koliko kojeg proizvoda proizvoditi!

*Napomena: Grafičko rješenje se ne priznaje, kao ni bilo koja druga neformalna metoda ili rješavanje napamet.*

4. (14) Bridovi u grafu na slici predstavljaju ulice, težine bridova duljine ulica, a vrhovi sjecišta ulica (raskrižja) u nekom naselju. Da bi svim stanovnicima donio pošiljke, poštar mora proći svim ulicama barem jednom. Simbol poštanskog ureda iz kojeg kreće i u koji se na kraju mora vratiti je vrh **P**. Vaš je zadatak predložiti najkraći mogući obilazak tog naselja.

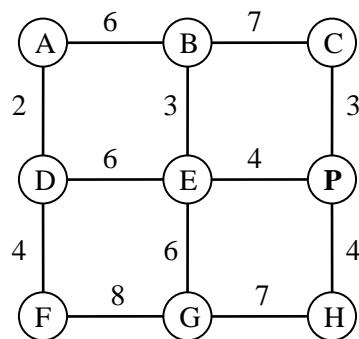
- a) (4) Opišite slijed postupaka (algoritam) kojima namjeravate doći do rješenja.

*Uputa: nešto slično pseudokodu, ali na puno višoj razini. Očekujemo najviše 2...4 koraka, slično kao što smo ih naveli na predavanjima.*

- b) (8) Provedite svoju zamisao u djelo i ispišite obilazak koji predlažete.

*Uputa: zatrebaju li Vam neki poznati algoritmi za pronaalaženje najkraćih puteva, provedite ih kako je Vama najzgodnije; ne morate ilustrirati njihov rad. Dakle, ako možete, provedite ih i napamet.*

- c) (2) Koliko je dugačak najkraći mogući obilazak? Ima li više jednakog dugačkih (kratkih) obilazaka ili je jedan kraći od svih drugih?



5. (12) Linearni neuron (*Adaline*) s četiri ulaza treba uvježbati sljedećim parovima podataka:

ulaz 1	ulaz 2	ulaz 3	ulaz 4	izlaz
1	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0

- a) (1) Skicirajte taj neuron.
- b) (2 ; -1) Je li rješenje jedinstveno ili ne? Drugim riječima, postoji li više skupova različitih optimalnih parametara ili je optimalan (bolji od svih drugih) samo jedan?
- c) (2 ; -1) Ako rješenja ima više, procijenite koliko.
- d) (7) Izračunajte optimalne parametre izravno, dakle ne primjenom iterativnog postupka.

# Napredni algoritmi i strukture podataka - jesenski ispitni rok

11. rujna 2012.

Ovaj ispit donosi ukupno **70 bodova**, a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu ne vrijede. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi,iza ;)!

1. (14) Skicirajte pretvorbe u početno praznom crveno-crnom (RB) stablu uslijed:

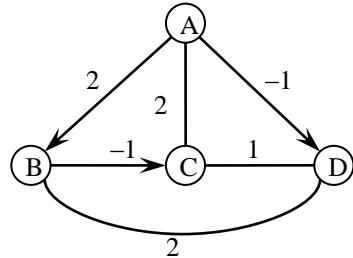
- a) (7) dodavanja redom: 2, 8, 6, 3, 4 i 5  
b) (7) brisanja redom: 3, 6 i 5.

Uputa: Crni čvorovi neka na skici budu okrugli, a crveni kvadratični.

Napomena: Ako pogrešno riješite zadatak a), ali potom točno riješite b) polazeći od pogrešnog stabla iz a), za b) ćete dobiti bodove prema procjeni ocjenitelja. Dakle, ne odustajte!

2. (15) WFI algoritmom odredite najkraće puteve između svih parova vrhova u grafu na slici.

- a) (2) Po jednom rečenicom objasnite značenje elemenata matrice udaljenosti  $D$  i matrice puteva  $\Pi$ .  
b) (10) Rad algoritma ilustrirajte (urednim) ispisom matrica  $D$  i  $\Pi$  u svakom koraku (znači, ispisujte sve  $D^{(k)}$  i  $\Pi^{(k)}$ ), a radi preglednosti i smanjenja mogućnosti zabune prilikom ocjenjivanja, elemente matrica koji se promijene iz koraka u korak uokvirite ili nekako drugačije istaknite.  
c) (3) Na primjeru puta od A do E, kratko objasnite kako se konstruira (isčitava) najkraći put između dva vrha na temelju matrice puteva  $\Pi$ .



3. (17) Bijelo grožđe se može prodati za 5 kn/kg plus još 0,1 kn po stupnju slatkoće, a crno grožđe za 4 kn/kg plus 0,2 kn po stupnju slatkoće. U nekom vinogradu dozrijelo je 1800 kg bijelog i 1200 kg crnog grožđa, a svaka 4 dana postane slade za jedan stupanj. Međutim, zbog drugih obaveza, vinogradar može brati grožđe samo u tri navrata: 21. rujna, 25. rujna i 29. rujna, s time da zbog pogoršanja vremenskih prilika 21. rujna može ubrati do 1400 kg, 25. rujna najviše 1200 kg, a 29. rujna najviše 800 kg.

- a) (15) Ako je 21. rujna slatkoća bijelog grožđa 17 stupnjeva, a crnog 18 stupnjeva, koji je najbolji plan berbe? Drugim riječima, kada, koliko i kojeg grožđa ubrati, a da prihod bude najveći.

- b) (2; -1) Što u ovom primjeru znači pojava umjetne varijable u konačnom rješenju?

Uputa: Dovoljna je jedna dobro sročena rečenica.

Napomena: Grafičko rješenje se ne priznaje, kao ni bilo koja druga neformalna metoda ili rješavanje napamet.

4. (14) Bridovi u grafu na slici predstavljaju ulice, težine bridova duljine ulica, a vrhovi sjecišta ulica (raskrižja) u nekom naselju. Da bi svim stanovnicima donio pošiljke, poštar mora proći svim ulicama barem jednom. Simbol poštanskog ureda iz kojeg kreće i u koji se na kraju mora vratiti je vrh **P**. Vaš je zadatak predložiti najkraći mogući obilazak tog naselja.

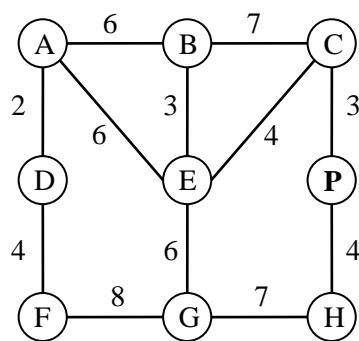
- a) (4) Opisite slijed postupaka (algoritam) kojima namjeravate doći do rješenja.

*Uputa: nešto slično pseudokodu, ali na puno višoj razini. Očekujemo najviše 2...4 koraka, slično kao što smo ih naveli na predavanjima.*

- b) (8) Provredite svoju zamisao u djelo i ispišite obilazak koji predlažete.

*Uputa: zatrebaju li Vam neki poznati algoritmi za pronaalaženje najkraćih puteva, provedite ih kako je Vama najzgodnije; ne morate ilustrirati njihov rad. Dakle, ako možete, provedite ih i napamet.*

- c) (2) Koliko je dugačak najkraći mogući obilazak? Ima li više jednakog dugačkih (kratkih) obilazaka ili je jedan kraći od svih drugih?



5. (10) Linearni neuron (*Adaline*) s četiri ulaza treba uvježbati sljedećim parovima podataka:

ulaz 1	ulaz 2	ulaz 3	ulaz 4	izlaz
1	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	0	1	0	0

- a) (1) Skicirajte taj neuron.
- b) (2 ; -1) Je li rješenje jedinstveno ili ne? Drugim riječima, postoji li više skupova različitih optimalnih parametara ili je optimalan (bolji od svih drugih) samo jedan?
- c) (1 ; -0,5) Ako rješenja ima više, procijenite koliko.
- d) (6) Izračunajte optimalne parametre izravno, dakle ne primjenom iterativnog postupka.

# Napredni algoritmi i strukture podataka – dekanski rok

19. rujna 2012.

Ovaj ispit donosi ukupno **70 bodova**, a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi,iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu se ne uzimaju u obzir.

1. (10) Popis elemenata u nekom crveno-crnom (RB) stablu, redom od korijena prema nižim razinama s lijeva na desno do posljednjeg lista, je sljedeći:

6, 3, 11, 2, 5, 9, 13, 1, 4, 8, 10, 12 i 7.

Još znamo i da je to stablo takvo da ima najmanji mogući broj crvenih čvorova s obzirom na sadržaj.

- a) (5) Skicirajte to stablo.  
b) (5) Uklonite (obrišite) iz njega redom elemente 13 i 12.

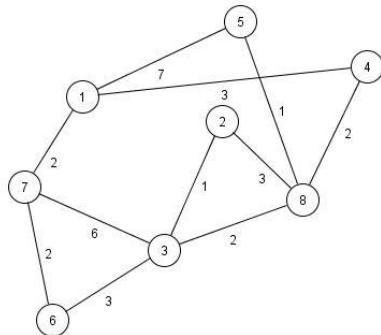
2. (4; -2) Koja je, izražena u O-notaciji, najmanja postignuta složenost Dijkstrinog algoritma?

- a)  $O(E \cdot \log V)$   
b)  $O(V^2)$   
c)  $O(E^2)$   
d)  $O(E + V \cdot \log V)$   
e)  $O(V + E \cdot \log E)$

3. (8) Za graf na slici, skicirajte izgradnju najkraćeg razapinjajućeg stabla Primovim algoritmom.

Krenite iz vrha 1.

Naputak: obavezno je skicirati samo konačni izgled stabla nakon obrade svakog pojedinog brida koji se uzme u razmatranje, ali svaka detaljnija skica je dobrodošla i smanjiće mogućnost za različita tumačenja odgovora. Također, obavezno navedite kojim ste redom obrađivali bridove.



4. (16) Potpuno povezana, unaprijedna (*feedforward*) troslojna neuronska mreža strukture  $2 \times 3 \times 2$  je dio sustava iz kojeg na ulaze mreže dolaze isključivo signali nula ili jedan, približno jednak učestalo. Aktivacijska funkcija svih neurona u mreži je opća sigmoid.

- a) (2) Skicirajte tu mrežu.  
b) (9) Provedite prvi korak uvježbavanja te mreže (jednom osvježiti sve parametare) ako se podatci za uvježbavanje uzimaju redom iz sljedeće tablice:

ulaz 1	ulaz 2	izlaz 1	izlaz 2
1	0	0	1
0	0	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Početne vrijednosti svih parametara mreže postavite na nula, a zatrebaju li Vam još neke veličine, pridijelite im vrijednosti po vlastitom nahođenju, samo jasno navedite svoj izbor i kratko objasnite ulogu te veličine.

- c) (2) Objasnite nastavak postupka, tj. kako bi započeo sljedeći korak uvježbavanja mreže.  
*Naputak: dovoljna je i samo jedna dobro sročena rečenica. Naravno, svako podrobnije objašnjenje je dobrodošlo i smanjiće mogućnost za različita tumačenja odgovora.*

- d) (3) Koje bi bile početne vrijednosti parametara mreže kada bismo ih određivali po načelu preporučenom u okviru predmeta NASP?

*Naputak: obrazložiti u par riječi. Dovoljne su i natuknice uz pojedine oznake. Naravno, svako podrobnije objašnjenje je dobrodošlo i smanjiće mogućnost za različita tumačenja dgovora.*

5. (15) Zadan je linearni problem:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 \\ \text{uz uvjete} & -12x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -5x_1 + x_2 \leq 5 \\ & -3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & -10x_1 + 7x_2 \leq 53 \\ & -2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ & x_1 \leq 4 \end{array} .$$

- a) (10) Koje je rješenje zadanih problema?

- b) (5; -2) Koliko koraka (iteracija) treba „standardnom“ simpleks algoritmu za pronađetak rješenja ako se kreće iz bazičnog rješenja u kojem su varijable  $x_1$  i  $x_2$  jednake nuli? Polazno rješenje se ne broji.

*Napomena: svako točno i obrazloženo rješenje je prihvatljivo, dakle možete koristiti bilo koji način rješavanja. Naravno, obrazloženje (postupak rješavanja) mora jasno ukazivati na Vaše potpuno razumijevanje simpleks algoritma i njegove teorijske podloge.*

6. (17) Tablicom su zadani troškovi putovanja između pojedinih lokacija (vrhova).

	A	B	C	D
A	0	5	3	3
B	5	0	7	1
C	3	7	0	4
D	3	1	4	0

Riješite problem trgovackog putnika koji bi htio krenuti s lokacije A, obići sve druge lokacije i vratiti se u polaznu uz najmanji mogući trošak (tj. pronaći Hamiltonov ciklus najmanje težine). Učinite to

- a) (8) metodom koja će u najgorem slučaju pronaći ciklus dva puta veće težine od „najlakšeg“ (2-MST heuristika)
- b) (9) Dijkstrinim algoritmom za najkraći put.

*Naputak: TSP se Dijkstrinim algoritmom rješava tako da se prvo konstruira nešto slično stablu odlučivanja u kojem se prikazuju različite putanje u grafu. Krenite u obilazak grafa DFS ili (naša preporuka) BFS algoritmom, ali na kraju se nemojte zaustaviti na zadnjem vrhu koji dosegnete, nego u stablu ugradite i povratne bridove do polaznog vrha. Zatvaranjem ciklusa pomoći povratnih bridova dobit ćete novi graf u kojem će najkraći put od polaznog do polaznog vrha biti upravo najkraći Hamiltonov ciklus u izvornom grafu.*

# Napredni algoritmi i strukture podataka - prvi međuispit

11. listopada 2010.

Ovaj ispit donosi ukupno **20 bodova**, a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi, iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu ne vrijede.

Uputa: kada se u zadatku traži skica promjena u nekoj strukturi (npr. stablo, graf itd.), nije potrebno u svakom koraku crtati cijelu strukturu, već je dovoljno jasno skicirati dijelove u kojima se događaju promjene. Naravno, svaka detaljnija skica je dobrodošla i smanjit će mogućnost pogrešnog ocjenjivanja. Na kraju svakako mora biti cjelovita skica.

Izvođenje algoritama treba pregledno ilustrirati (kao na predavanjima ili bolje) i ukratko obrazložiti (po potrebi skicirati) kako se izvode zaključci, tj. nalaze odgovori na postavljena pitanja. Odgovori, makar bili i točni, bez ilustracije rada algoritma i jasnog obrazloženja neće donositi bodove.

1. (5) Napisati detaljni pseudokod brisanja čvora u binarnom stablu postupkom brisanja kopiranjem. Deklaracija funkcije je:

Izbrisisi(Cvor X, Cvor P),

pri čemu je X neka vrsta reference na čvor koji treba izbrisati iz stabla, a P referenca na njegovog roditelja.

Napomena: ne traži se funkcionalni programske kod koji bi neizmijenjen radio u nekom programskom jeziku, nego je važno prepoznati i riješiti sve situacije koje zahtijevaju posebno postupanje. Također, podrazumijeva se da su u okruženju definirane sve potrebne klase i metode (npr. računajte da X i P imaju reference na djecu, recimo X.lijevo), a ukaže li se potreba, navedite što u Vašem kodu znači pojedina varijabla ili metoda.

2. (2) Računalni sustav je predviđen za 500 registriranih korisnika i 50 različitih programa koje oni pokreću. U prosjeku svaki korisnik ima dopuštenje za korištenje 10 programa. Biste li podatke o vremenu korištenja sustava za svakog pojedinog korisnika pohranili u dvodimenzionalnu ili rijetko popunjenu tablicu ako je:

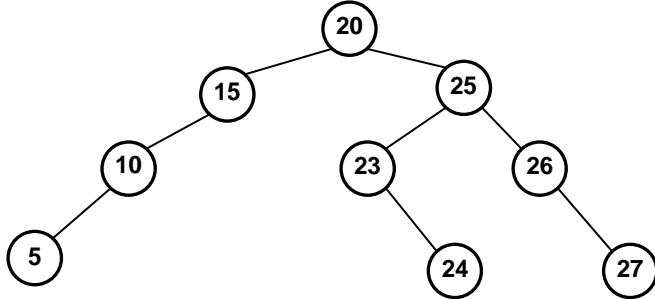
- podatak o vremenu veličine 4 riječi
- identifikator korisnika 4 riječi
- identifikator programa 4 riječi
- pokazivači također 4 riječi?

3. (2) Upisati niz 1, 3, 7, 11, 13, 17 u prazno **AVL** stablo.

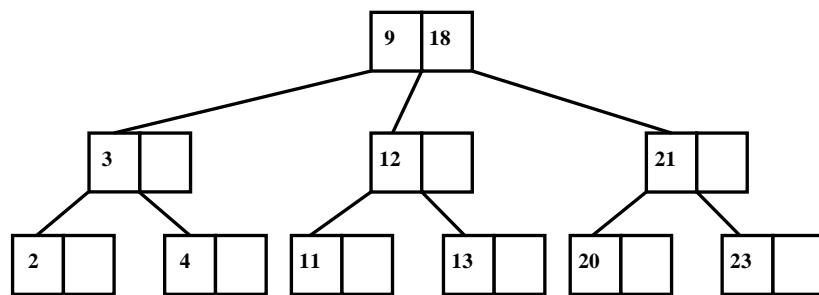
4. (1; -0,5) Koja od sljedećih tvrdnji **nije** istinita?

- a) Pravilno **AVL** stablo ne mora biti ujedno i savršeno uravnoteženo.
- b) Za uravnotežavanje AVL stabla nakon dodavanja novog čvora uvijek je dovoljna jedna intervencija.
- c) Faktor ravnoteže bilo kojeg čvora u pravilnom AVL stablu je uvijek jednak razlici faktora ravnoteže njegove djece.
- d) Za uravnotežavanje AVL stabla nakon brisanja nekog čvora nije uvijek dovoljna jedna intervencija.

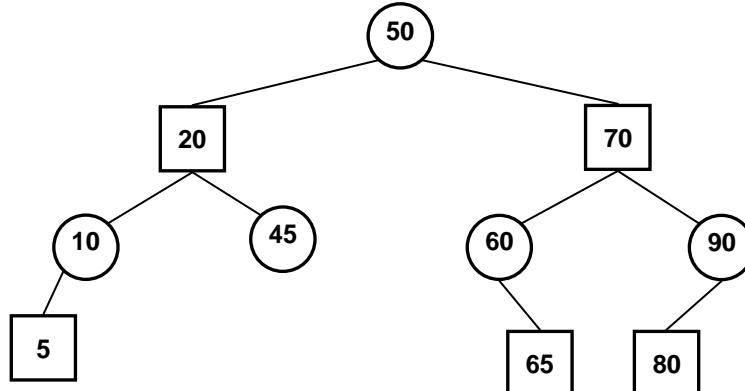
5. (3) Uravnotežiti stablo na slici DSW algoritmom.



6. (3) Izbrisati 12 iz B stabla na slici.



7. (2) Izbrisati 45 iz crveno-crnog stabla na slici. Crveni čvorovi su kvadratični, a crni okrugli. Takvo označavanje treba biti i u Vašim rješenjima.



8. (2) Skicirati strukturu *Trie* koja sadrži riječi: Iva, Ivo, Ivan, Ivka i Ivana.

## Napredni algoritmi i strukture podataka - drugi međuispit

22. studenog 2010.

Ovaj ispit donosi ukupno **30 bodova**, a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi,iza ;)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu ne vrijede.

1. (2; -1) Razmotrimo listu s preskakanjem (*Skip-List*) koja sadrži  $N$  podataka i u kojoj vrijedi da je vjerojatnost prijelaska čvora u višu razinu  $p=3/4$ .
  - a) (1; -0,5) Koja je složenost pretraživanja („veliki O“) takve liste u najpovoljnijem (najboljem) slučaju?
  - b) (1; -0,5) Koja je složenost pretraživanja („veliki O“) takve liste u najNEpovoljnijem (njegorem) slučaju?
2. (1; -0,5) Koja od sljedećih tvrdnji **jest** istinita?
  - a) Crveno-crno stablo je srođno B-stablu trećeg (3.) reda.
  - b) Svaki čvor B-stabla, osim korijena, ima najmanje dvoje djece.
  - c) Upisivanje novog podatka u B stablo može dovesti do sjedinjenja nekih njegovih postojećih čvorova.
  - d) Unutarnji čvorovi „običnog“ B-stabla (dakle ne misli se na  $B^+$  i druge inačice) ne sadrže korisničke podatke.
3. (3) Postupkom jednokratnog predloška (*one-time-pad*) šifrirajte riječ KARTE ako je ključ (predložak, šifra): E, N, S, K i M. Prepostavite englesku abecedu (26 znakova).
4. (3) Napišite **detaljni** pseudokod funkcije koja obavlja križanje dvaju kromosoma postupkom s jednom prekidnom točkom (*one point crossover*). Deklaracija funkcije je

Krizaj (Kromosom X, Kromosom Y, int TP, float p),

gdje je TP točka prekida (indeks u strukturi Kromosom), a p vjerojatnost križanja.

5. (11) Zadana je potpuno povezana, unaprijedna (*feedforward*) neuronska mreža strukture  $2 \times 2 \times 2$ . Aktivacijska funkcija svih neurona u mreži je opći sigmoid.
- (1) Skicirati tu mrežu.
  - (6) Provesti prvi korak uvježbavanja te mreže (znači, u jednoj točki za uvježbavanje) ako ju treba uvježbati za izvršavanje funkcije definirane tablicom

ulaz 1	ulaz 2	izlaz 1	izlaz 2
0	1	1	0
1	0	0	1

a podatci za uvježbavanje se uzimaju redom kako su navedeni u tablici. Početne vrijednosti svih parametara mreže postavite na nula, a zatrebuju li Vam još neke veličine, pridijelite im vrijednosti po vlastitom nahođenju, samo jasno navedite svoj izbor i kratko naznačite što ta veličina predstavlja.

- (1) Objasniti nastavak postupka, tj. kako bi započeo sljedeći korak uvježbavanja mreže.  
*Uputa: dovoljna je i samo jedna dobro sročena rečenica.*
- (3) Kako biste odredili bolje (s obzirom na konkretan problem) početne parametare mreže?  
*Uputa: dovoljno je jednom rečenicom objasniti ideju i upotpuniti ju kratkim računom.*

6. (10) Tvrtka ima dvije tvornice i obje proizvode dva proizvoda (A i B). Dnevna proizvodnja i dnevni trošak proizvodnje su u tablici.

	proizv. A	proizv. B	trošak
tvornica I	10	8	8
tvornica II	6	12	6

Stigla je narudžba za 20 proizvoda A i 16 proizvoda B. Koliko treba raditi pojedina tvornica da bi se proizvelo dovoljno oba proizvoda uz najmanje moguće troškove? Pritom je važno zadovoljiti narudžbu, makar i po cijenu stvaranja viška, tj. zaliha proizvoda.

*Napomena: zadatak će se bodovati po dijelovima, stoga ne odustajte unaprijed ako ne znate baš sve i pišite pregledno. Postavljeni problem može se riješiti i napamet, ali očekuje se formalni postupak i jedino će se takvo rješenje priznavati.*

*Savjet: budite uporni, staloženi i brojeve zapisujte kao razlomke, dakle s kalkulatorom oprezno!*

## Napredni algoritmi i strukture podataka - završni ispit

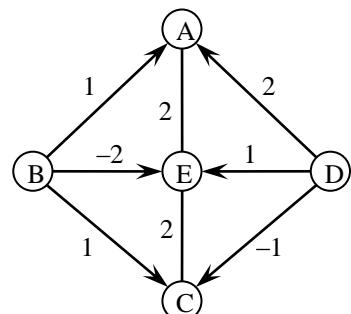
10. siječnja 2011.

Ovaj ispit donosi ukupno **40 bodova**, a vrijednosti pojedinih (pod)zadataka su u zagradi na početku teksta svakog (pod)zadatka. Pogrešni odgovori u nekim zadatcima donose negativne bodove (drugi broj u zagradi, iza :)! Bodaju se isključivo rješenja napisana na dodatnim papirima, dakle oznake i rješenja na ovom obrascu ne vrijede.

1. (1; -0,5) Koja od sljedećih tvrdnji **jest** istinita?
  - a) Visine (dubine) podstabala svakog čvora u uravnoteženom binarnom stablu razlikuju se najviše za jedan.
  - b) Svi listovi bilo kakvog uravnoteženog binarnog stabla uvijek se nalaze u dvije najniže razine.
  - c) Pravilno **AVL** stablo je ujedno i savršeno uravnoteženo.
  - d) B-stablo nije uvijek savršeno uravnoteženo.
2. (1; -0,5) Koja od sljedećih tvrdnji **jest** istinita?
  - a) Mala vjerojatnost trajnog ostanka genetskog algoritma u okolini lokalnog ekstrema ciljne (*objective*) funkcije postiže se ponajviše zahvaljujući mehanizmu križanja jedinki.
  - b) Prednost genetskog algoritma pred drugim optimizacijskim metodama je sigurna konvergencija ka najboljem mogućem rješenju (globalnom optimumu) kada je domena (interval u kojem se traži rješenje) ograničena i kontinuirana.
  - c) Funkcija dobrote (*fitness*) u svakom trenutku odražava udaljenost pojedine jedinke od najboljeg mogućeg rješenja (globalnog optimuma).
  - d) Križanja i mutacije su podjednako važni mehanizmi za ukupnu učinkovitost genetskog algoritma i nisu međusobno zamjenjivi.
3. (4) Napišite pseudokod brže inačice (varijante) Bellman-Fordovog algoritma. Funkcija koja ga obavlja treba imati deklaraciju `BellFord (source)`, gdje je `source` polazni vrh, a prepostavlja se da je funkciji dostupan cijeli graf u nekom od uobičajenih zapisa grafa u računalu.  
*Uputa: otprilike 7...10 koraka (najviše 15 redaka formatiranog teksta).*

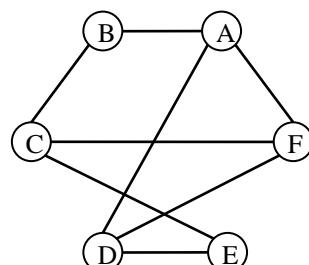
4. (6) Primjenom Dijkstrinog algoritma u grafu na slici naći najkraće puteve iz vrha **B** u sve ostale.

*Uputa: Dijkstrin algoritam je jedini čiji rad treba ilustrirati; pomoćne algoritme ne treba dokumentirati. Za prikaz rada Dijkstrinog algoritma predlažemo tablicu kakva se koristila na predavanjima. To nije obavezno, ali svaki drugi prikaz mora biti barem jednako ilustrativan.*



5. (8) Primjenom Bondy-Chvatalovog teorema pronađite Hamiltonov ciklus u grafu na slici.

*Napomena: kratki komentari kao pojašnjenja skica su više nego poželjni i u Vašem interesu.*



6. (4) Kozmetička tvrtka proizvodi kremu i šampon koji sadrže tri aktivna sastojka: ekstrakt biljke Aloe Vera, smjesu vitamina i smjesu minerala. U tablici su količine (u gramima) aktivnih sastojaka potrebne za proizvodnju 1 kg odgovarajućeg proizvoda, zatim zarada po kilogramu gotovog proizvoda i zalihe sastojaka na skladištu (opet u kg). Pitanje je koliko proizvesti kreme, a koliko šampona da bi se s raspoloživim zalihama ostvarila najveća moguća zarada. Postavite taj problem kao standardni (kanonski) oblik linearog problema. Nije potrebno rješavati dalje!

	Aloe Vera [g/kg]	vitamini [g/kg]	minerali [g/kg]	zarada / kg
krema	20	5	10	25
šampon	30	7	6	30
zaliha [kg]	19	20	25	

7. (9) Student ima još 12 dana za pripremu ispita i želi steći što više ECTS bodova. Može polagati pet predmeta koji mu donose različiti broj bodova, a i pripreme za pojedini ispit ne traju jednako. Zbirni pregled bodova po predmetu i vrijeme učenja (u danima) potrebno za pripremu pojedinog ispita je u tablici.

Predmet	A	B	C	D	E
ECTS	5	6	3	4	7
Vrijeme	4	6	2	5	7

Odgovorite na sljedeća studentova pitanja:

- a) (3) Koliko najviše bodova uopće može steći?
- b) (3) Koje predmete treba položiti da bi stekao najviše bodova?
- c) (3) Koliko dana će morati učiti za postizanje najboljeg mogućeg rezultata?

*Uputa: Pregledno ilustrirati izvođenje algoritma (kao na predavanjima ili bolje) i ukratko obrazložiti (po potrebi skicirati) kako se izvode zaključci, tj. nalaze odgovori na postavljena pitanja. Odgovori, makar bili i točni, bez ilustracije rada algoritma i jasnog obrazloženja neće donositi bodove.*

8. (7) Bridovi u grafu na slici predstavljaju ulice, brojevi duljine ulica, a vrhovi sjecišta ulica u nekom naselju. Da bi svim stanovnicima donio pošiljke, poštarski mera proći svim ulicama, a simbol poštanskog ureda iz kojeg kreće i u koji se na kraju mora vratiti je vrh **P**. Vaš je zadatak predložiti najkraći mogući obilazak tog naselja.

- a) (2) Opisite slijed postupaka kojim namjeravate doći do rješenja.

*Uputa: nešto slično pseudokodu, ali na puno višoj razini. Očekujemo najviše 2...4 koraka, slično kao što smo ih naveli na predavanjima.*

- b) (4) Provedite svoju zamisao u djelo i ispišite obilazak koji predlažete.

*Uputa: zatrebaju li Vam neki poznati algoritmi za pronaalaženje najkraćih puteva, provedite ih kako je Vama najzgodnije; ne morate ilustrirati njihov rad. Dakle, ako možete, provedite ih i napamet.*

- c) (1) Koliko je dugačak najkraći mogući obilazak? Ima li više jednakog dugačkih obilazaka ili je jedan kraći od svih drugih?

