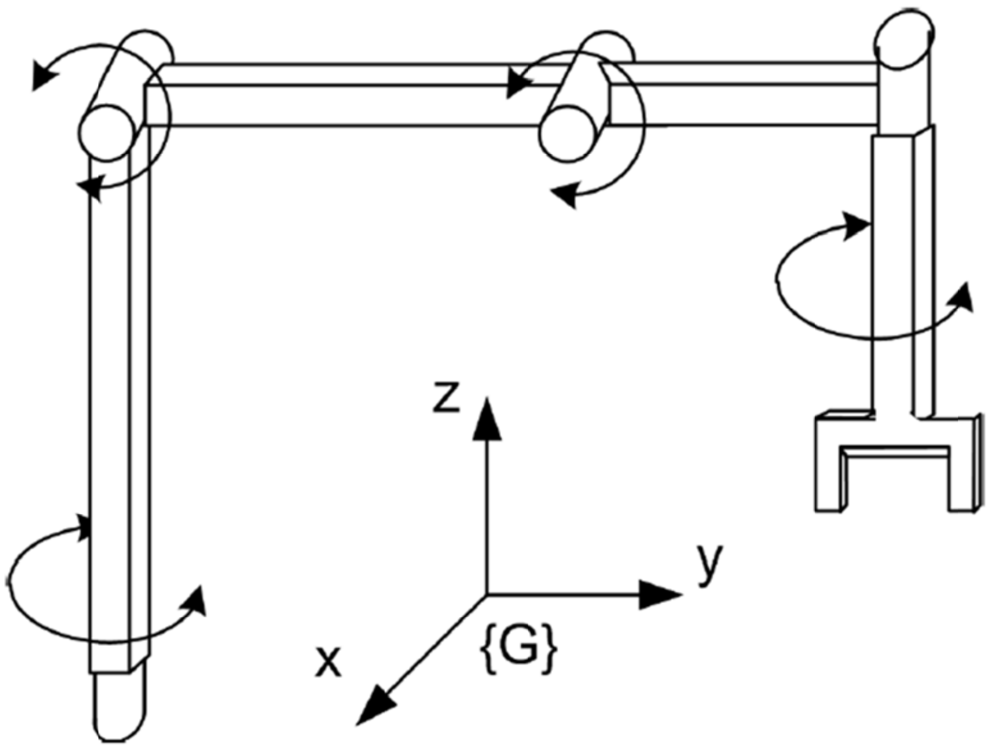
WOLFMAN Automatika, 1.D_AUT	Fakultet elektrotehnike i računarstva Zagreb Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo **OSNOVE ROBOTIKE** DIREKTNA KINEMATIKA MANIPULATORA 1. domaća zadaća, grupa D	20.10.2011.



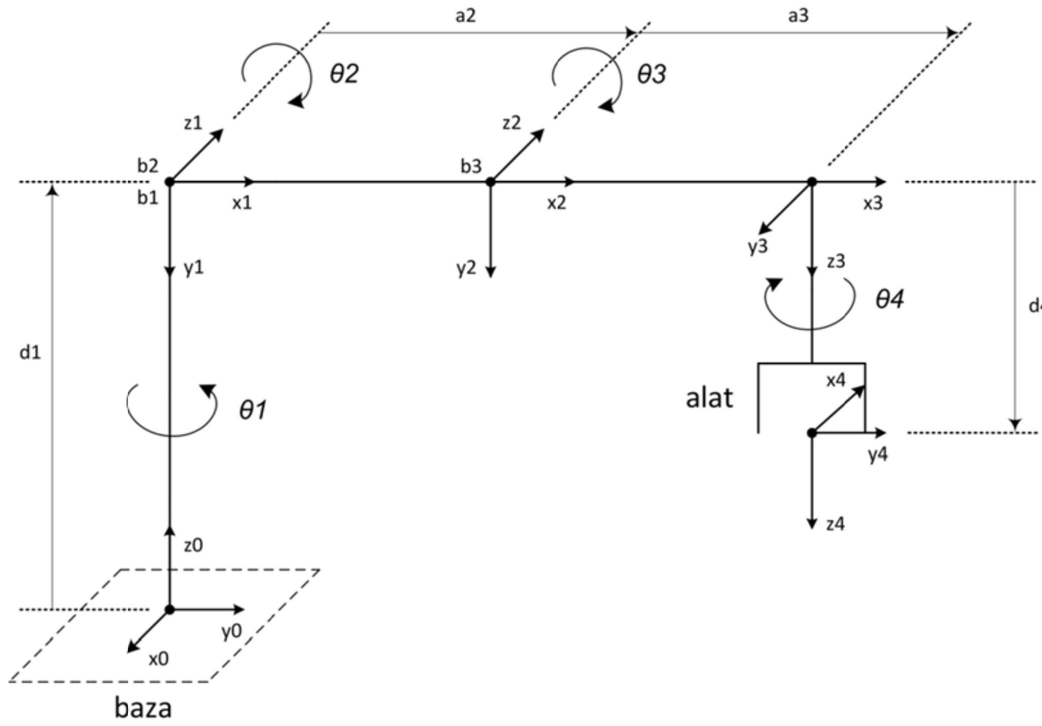
Slika 1.1. Rotacijska konfiguracija manipulatora.

Za otvoreni kinematički lanac prikazan slikom 1.1. potrebno je:

1. *odrediti DH parametre,*
2. *odrediti matrice transformacija između susjednih koordinatnih sustava,*
3. *odrediti matricu transformacije između koordinatnog sustava pridruženog alatu i koordinatnog sustava pridruženog bazi (matričnu jednadžbu manipulatora),*
4. *navesti početne vrijednosti varijabli zglobova q koje odgovaraju položaju manipulatora na slici 1.1.*

Rješenje:

Praćenjem koraka Denavit-Hartenbergove metode (u daljnjem tekstu DH metoda) [1] dolazimo do slike 1.2. na kojoj su označeni svi koordinatni sustavi i parametri manipulatora.



Slika 1.2. Koordinatni sustavi manipulatora zadanog na slici 1.1.

Sa slike 1.2. lako očitavamo kinematičke parametre:

1. os: $\theta_1 = q_1,\ d_1 = d_1,\ a_1 = 0,\ \alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$. (1-1)
2. os: $\theta_2 = q_2,\ d_2 = 0,\ a_2 = a_2,\ \alpha_2 = 0$. (1-2)
3. os: $\theta_3 = q_3,\ d_3 = 0,\ a_3 = a_3,\ \alpha_3 = -\frac{\pi}{2}$. (1-3)
4. os: $\theta_4 = q_4,\ d_4 = d_4,\ a_4 = 0,\ \alpha_4 = 0$. (1-4)

Prema slici 1.2. možemo odrediti i početne vrijednosti varijabli zglobova $\boldsymbol{q}$ koje odgovaraju položaju robota sa slike 1.1.:

$$\boldsymbol{q}_0 = [q_{1,0} \quad q_{2,0} \quad q_{3,0} \quad q_{4,0}]^T = [\pi/2 \quad 0 \quad 0 \quad -\pi/2]^T. \tag{1-5}$$

Za dobivanje matrične jednadžbe potrebne su matrice homogene transformacije, dobivene uz poznate kinematičke parametre. Općenita matrica homogene transformacije koja povezuje koordinatni sustav *k* s prethodnim koordinatnim sustavom *k-1* u lancu, ima sljedeći oblik [1] (uz skraćeni zapis: $C \coloneqq cos, S \coloneqq sin$):

$$T_{k-1}^{k} = \begin{bmatrix} C\theta_k & -C\alpha_k S\theta_k & S\alpha_k S\theta_k & a_k C\theta_k \\ S\theta_k & C\alpha_k C\theta_k & -S\alpha_k C\theta_k & a_k S\theta_k \\ 0 & S\alpha_k & C\alpha_k & d_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1-6}$$

Sada jednostavnim uvrštavanjem parametara (1-1) do (1-4) u opću matricu (1-6) dobivamo sljedeće matrice (uz skraćeni zapis: $C_k \coloneqq \cos q_k, S_k \coloneqq \sin q_k$):

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_1^2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^3 = \begin{bmatrix} C_3 & 0 & -S_3 & a_3C_3 \\ S_3 & 0 & C_3 & a_3S_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_3^4 = \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & 0 \\ S_4 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1-7}$$

Matrična jednadžba manipulatora se dobiva množenjem matrica homogene transformacije (1-7) na sljedeći način:

$$\boldsymbol{T}_{baza}^{alat} = \boldsymbol{T}_0^4(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{T}_0^1(q_1) \cdot \boldsymbol{T}_1^2(q_2) \cdot \boldsymbol{T}_2^3(q_3) \cdot \boldsymbol{T}_3^4(q_4). \tag{1-8}$$

Uvrštavanjem matrica (1-7) u izraz (1-8) (napravljeno u Matlabu – pogledati prilog A) dobivamo sljedeću matričnu jednadžbu manipulatora (uz skraćeni zapis: $S_{ij} \coloneqq \sin(q_i + q_j)$ i $C_{ij} \coloneqq \cos(q_i + q_j)$):

$$\boldsymbol{T}_0^4 = \begin{bmatrix} C_1C_{23}C_4 + S_1S_4 & C_4S_1 - C_1C_{23}S_4 & -C_1S_{23} & C_1(a_2C_2 + a_3C_{23} - d_4S_{23}) \\ C_{23}C_4S_1 - C_1S_4 & -C_1C_4 - C_{23}S_1S_4 & -S_1S_{23} & S_1(a_2C_2 + a_3C_{23} - d_4S_{23}) \\ -C_4S_{23} & S_{23}S_4 & -C_{23} & d_1 - d_4C_{23} - a_2S_2 - a_3S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1-9}$$

Matrica (1-9) je oblika:

$$\boldsymbol{T}_{baza}^{alat}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{q}) & \boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{v}_0^T & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_0^T = [0 \quad 0 \quad 0], \tag{1-10}$$

gdje je matrica $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q})$ dimenzija 3×3 i određuje orijentaciju alata, a vektor $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q})$, čije su dimenzije 3×1, definira položaj vrha alata, tj. koordinate vrha alata u odnose na koordinatni sustav baze [1]. Prema izrazu (1-10), iz (1-9) slijedi za $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q})$:

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}) = [C_1\rho \quad S_1\rho \quad d_1 - d_4C_{23} - a_2S_2 - a_3S_{23}]^T, \tag{1-11}$$

gdje je $\rho = a_2C_2 + a_3C_{23} - d_4S_{23}$.

Ako uvrstimo u (1-11) početne vrijednosti varijabli zglobova iz izraza (1-5) dobivamo:

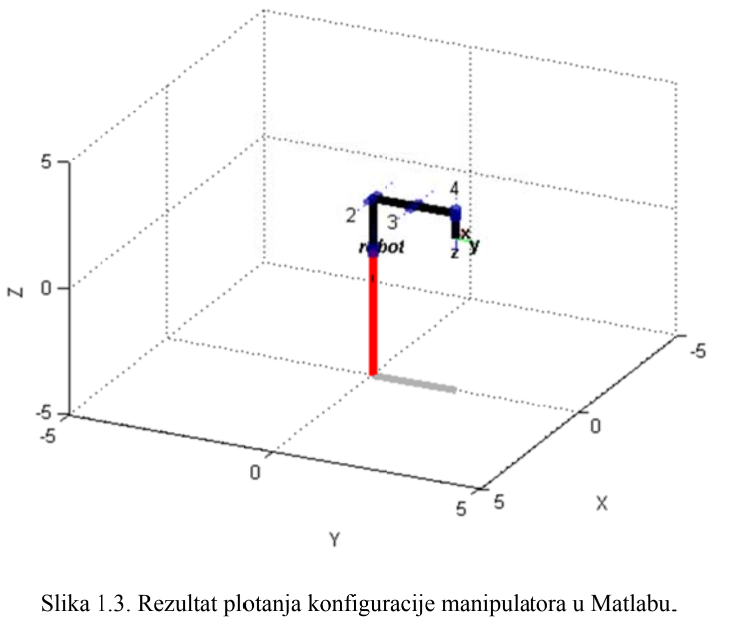
$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}_0) = [x_{alat} \quad y_{alat} \quad z_{alat}]^T = [0 \quad a_2 + a_3 \quad d_1 - d_4]^T, \tag{1-12}$$

što su uistinu početne vrijednosti koordinata vrha alata u odnosu na bazu manipulatora, u što se možemo uvjeriti na slici 1.2.
Slično možemo izračunati i $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q}_0)$ za početne vrijednosti kutova (pogledati prilog A):

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q}_0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{1-13}$$

U matrici $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q})$ prvi stupac predstavlja orjentaciju okomitog vektora alata (x_4), drugi stupac vektora klizanja alata (y_4), a treći stupac vektora približavanja (z_4), u odnosu na koordinatni sustav baze manipulatora. Iz matrice $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q}_0)$ očitavamo da je okomiti vektor alata suprotno orijentiran od vektora x_0 baze, vektor klizanja se poklapa sa vektorom y_0 baze, a vektor približvanja je suprotno orijentiran od vektora z_0 baze. To se poklapa sa oznakama na slici 1.2. pa je matrična jednadžba zadovoljena za slučaj početnih kutova.

Sljedećim nizom naredbi u Matlabu možemo iscrtati robota sa DH parametrima (1-1) – (1-4), u početnom položaju koji je određen izrazom (1-5) (napomena: potrebno je instalirati Robotics Toolbox):



Slika 1.3. Rezultat plotanja konfiguracije manipulatora u Matlabu.

Nakon plotanja se dobije slika 1.3. Vidimo da položaj manipulatora na slici 1.3. odgovara položaju manipulatora na slici 1.2., tj. na slici 1.1.

Literatura

[1] Kovačić, Z.; Bogdan, S.; Krajči, V.: *Osnove robotike*. Graphis, Zagreb, 2002.

Dodatak A – Matlab skripta za računanje matrične jednadžbe manipulatora

```
clear
clc

syms theta_k alfa_k a_k d_k

q    = sym('q',[1 4]);          % varijable zglobova
alfa = [-pi/2, 0, -pi/2, 0];    % parametri alfa
d    = sym('d', [1 4]);         % parametri d
a    = sym('a', [1 4]);         % parametri a

% Prvo definiramo općenitu matricu homogene transformacije koja povezuje
% koordinatne sustave k i k-1.
T_k = [ ...
        cos(theta_k),-cos(alfa_k)*sin(theta_k),sin(alfa_k)*sin(theta_k),...
        a_k*cos(theta_k) ;

        sin(theta_k),cos(alfa_k)*cos(theta_k),-sin(alfa_k)*cos(theta_k),...
        a_k*sin(theta_k) ;

                   0,                sin(alfa_k),             cos(alfa_k),...
                   d_k ;

                   0,                          0,                       0,...
                   1 ;
      ];

% Konkretne matrice koje povezuju susjedne koordinatne sustave dobivamo
% uvrštavanjem parametara u općenitu matricu T_k.
T_01 = subs(T_k, [theta_k, d_k, a_k, alfa_k], [q(1), d(1),    0, alfa(1)]);
T_12 = subs(T_k, [theta_k, d_k, a_k, alfa_k], [q(2),    0, a(2), alfa(2)]);
T_23 = subs(T_k, [theta_k, d_k, a_k, alfa_k], [q(3),    0, a(3), alfa(3)]);
T_34 = subs(T_k, [theta_k, d_k, a_k, alfa_k], [q(4), d(4),    0, alfa(4)]);

% Konačnu matričnu jednadžbu manipulatora dobivamo množenjem dobivenih matrica
% od T_01 do T_34.
T_04 = T_01 * T_12 * T_23 * T_34;

% Pojednostavljivanje dobivenih izraza.
T_04 = simple(T_04);

% Iz matrice T_04 vadimo vektor p
p = T_04(1:3,4);

% Računamo koordinate vrha alata u odnosu na koordinatni sustav baze
% manipulatora.
alat_polozaj = subs(p, q, [pi/2 0 0 -pi/2])

% Iz matrice T_04 vadimo matricu R
R = T_04(1:3,1:3);

% Računamo orijentaciju alata u odnosu na koordinatni sustav baze
% manipulatora.
alat_orijentacija = subs(R, q, [pi/2 0 0 -pi/2])
```