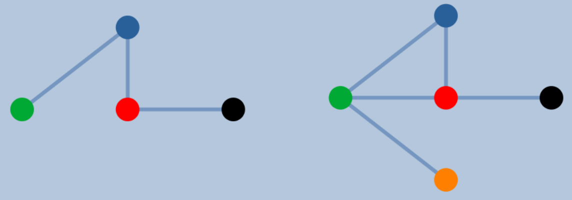
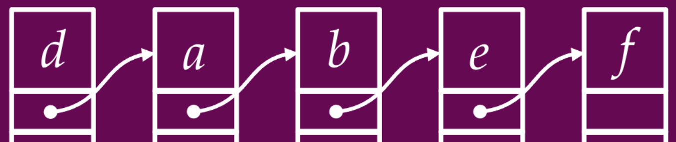
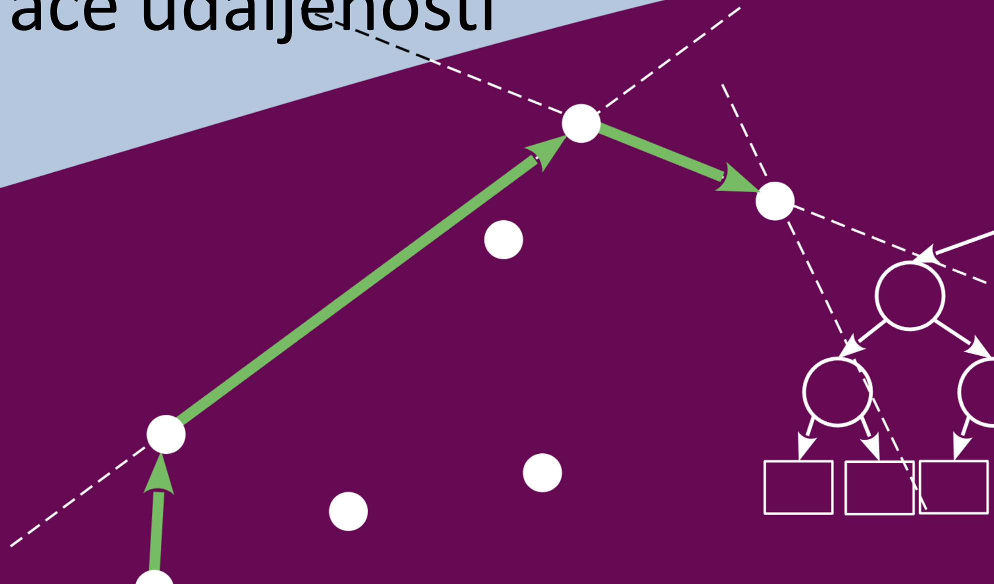
Napredni algoritmi i strukture podataka

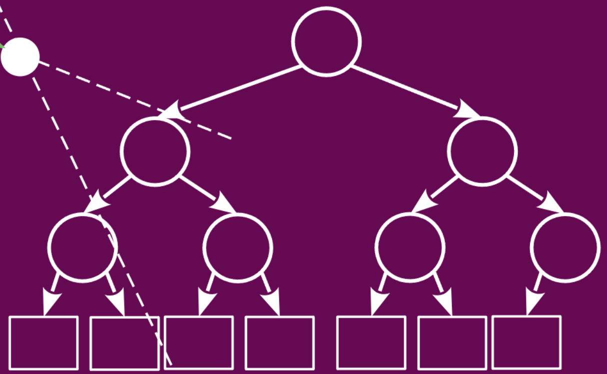
Tjedan 9: Algoritmi nad grafovima

Teorija grafova, Najkraće udaljenosti









Osnove teorije grafova

- **Graf** (graph) je uređeni par <u>nepraznog</u> konačnog skupa vrhova V (vertex) i skupa (moguće praznog) bridova E (edge)

$$G = (V, E)$$

- **Brid** (edge) je element produkta skupa V

$$E \subseteq V \times V, e_k = (v_i, v_j) \in E$$

  - Svaki brid je uređeni par vrhova $e_k = (v_i, v_j)$
  - Brid se kraće može označiti samo $v_i v_j$ ili jednostavno samo e_k, pri čemu je $e_k = v_i v_j$

Alternativna literatura:

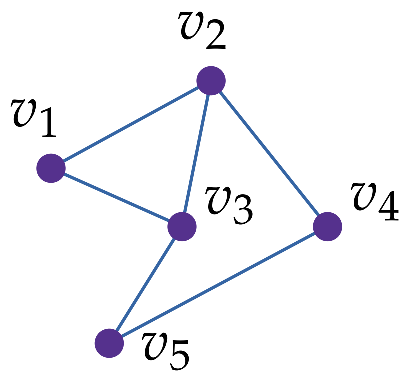
- Thomas H, C., Charles E, L., Ronald L, R., & Clifford, S. (2016). Introduction to Algorithms., Chapter VI

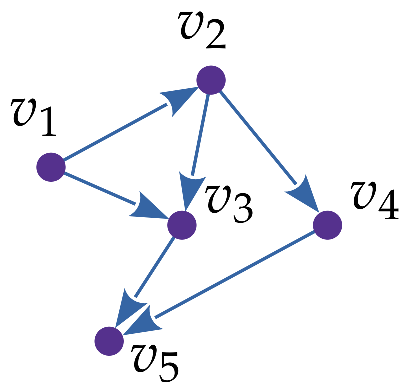
Osnove teorije grafova

- **Red** (order) **grafa** je broj vrhova u njemu ili $|V|$; često pojednostavljeno samo V
- **Veličina** (size) **grafa** je broj bridova koje graf sadrži $|E|$; pojednostavljeno samo E
- **Petlja** (loop) je brid koji počinje i završava u istom vrhu $e_k = v_i v_i$
- **Stupanj** (degree) **vrha** je broj bridova koji su priležeći (incident) tom vrhu (spojeni s njim)
  - Stupanj vrha v označavat ćemo s $\deg(v)$
  - Povratne petlje se u $\deg(v)$ ubrajaju dva puta

$$\forall v \in V \exists E' \subseteq E \forall (v_i, v_j) \in E' : v_i = v \vee v_j = v \Rightarrow \deg(v) = |E'|$$

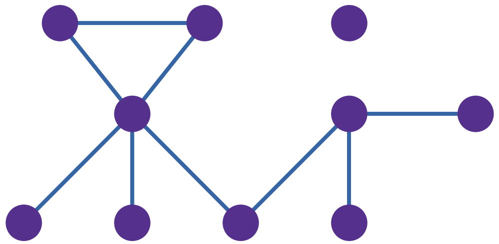
Teorija grafova – vrste grafova



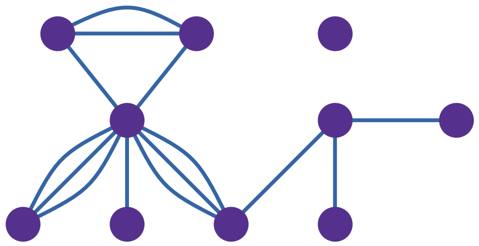


- **Neusmjereni** (undirected) **graf**
  - Za svaki brid $v_i v_j$ vrijedi $v_i v_j = v_j v_i$
  - Vrhovi se smatraju susjednima (adjacent) ako je $v_i v_j \in E$
  - Takav je brid priležeći (incident) vrhovima v_i i v_j
- **Usmjereni** (directed) **graf**
  - Za brid $v_i v_j$ ne mora vrijediti $v_i v_j \; = v_j v_i$
  - Vrh v_j se smatra susjedom vrhu v_i samo ako postoji $v_i v_j \in E$
  - Brid $v_i v_j$ se naziva izlaznim bridom (outedge) vrha v_i i ulaznim bridom (inedge) vrha v_j

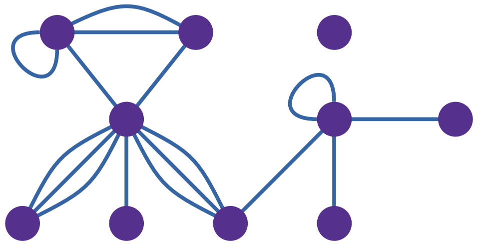
Teorija grafova – vrste grafova



- **Jednostavni graf** (simple graph) je graf (obično neusmjereni) koji između svaka dva vrha ima najviše jedan brid i u kojem nema petlji

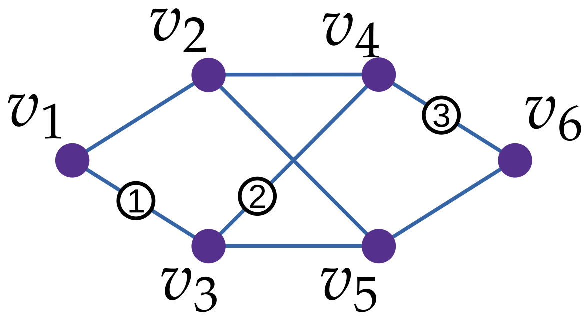


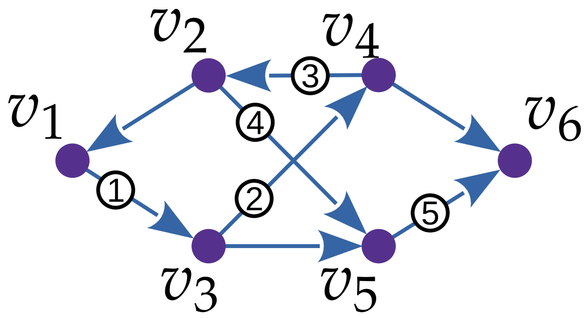
- **Multigraf** (multigraph) je graf koji može imati više od jednog brida između dva vrha



- **Pseudograf** (pseudograph) je multigraf u kojem mogu postojati povratne petlje

Teorija grafova – obilazak, putanja, …

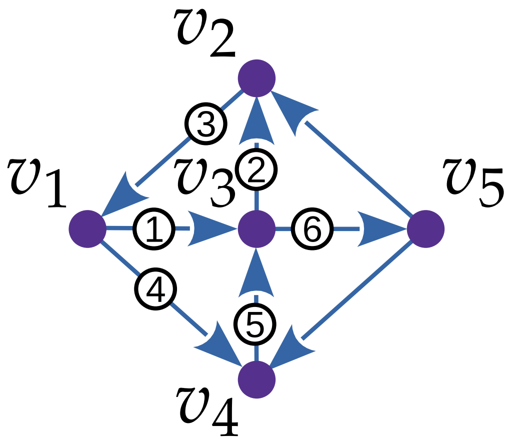




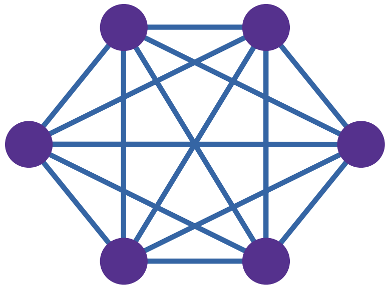
- **Obilazak ili šetnja** (walk) od vrha v_1 do vrha v_n je naizmjenični niz vrhova i bridova

$$v_1, e_2, v_2, e_3, \ldots, e_n, v_n$$

  - Kraće se označava $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ili samo $v_1 v_2 \ldots v_n$
- **Putanja** (trail) je obilazak u kojem su svi bridovi različiti (znači svakim bridom se prolazi samo jednom, ali vrhovi se mogu ponavljati)
- **Put ili staza** (path) je putanja (trail) u kojoj su svi vrhovi različiti (dakle ne mogu se ponavljati)
- **Krug** (circuit) je putanja (trail) u kojoj je $v_1 = v_n$
- **Ciklus** (cycle) je staza (path) na kojoj je $v_1 = v_n$



Teorija grafova

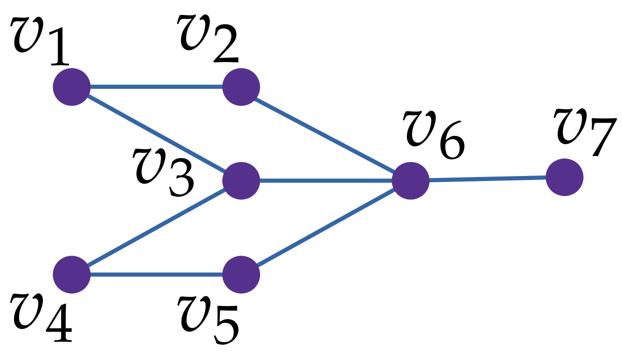


- **Potpuni** (complete) **graf** je graf u kojem je između svaka dva vrha točno jedan brid
  - Odnosi se samo na neusmjerene grafove
  - Potpuni graf *n*-tog reda (*n* vrhova) označava se s K_n
  - Broj bridova u potpunom grafu = broj dvočlanih podskupova skupa vrhova V

$$E(K_n) = \binom{V}{2} = \frac{V!}{(V-2)! \cdot 2!} = \frac{V(V-1)}{2} = O(V^2)$$

- Neka je $V' \subset V$ i $E' \subset E$, tada je $G' = (V', E')$ **podgraf** (subgraph) grafa $G = (V, E)$
  - Ako imamo $V' \subset V$, tada je $G[V']$ inducirani podgraf (induced subgraph) grafa G, koji sadrži sve bridove iz skupa E, a koji spajaju vrhove iz skupa V'

Povezanost grafa – neusmjereni grafovi



- Definiramo binarnu relaciju W^G takvu da obilaskom kroz graf G povezuje vrhove u i v. Ako su vrhovi u i v povezani vrijedi

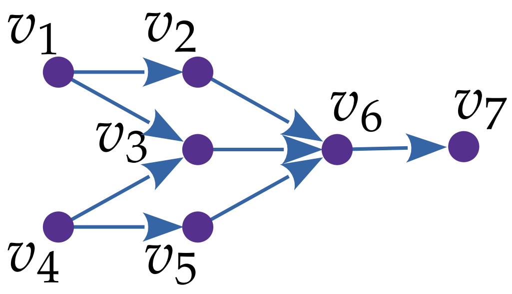
$$uW^Gv$$

- **Povezani neusmjereni graf** $G = (V, E)$ - neusmjereni graf je povezan (connected) samo ako za sve parove vrhova vrijedi

$$\forall u, v \in V: uW^Gv \land vW^Gu$$

  - što znači da je vrh v **dohvatljiv** (reachable) od vrha u
  - ali i obratno, što je u sukladnosti sa definicijom neusmjerenog grafa

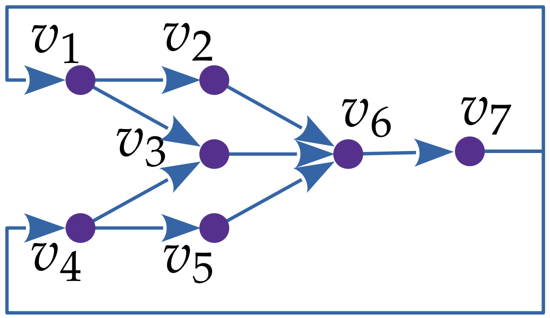
Povezanost grafa – usmjereni grafovi



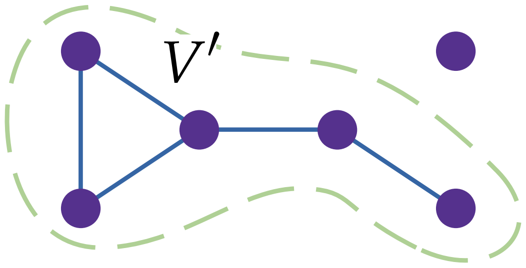
- **Slabo povezani usmjereni graf G (weakly connected)** – je usmjereni graf čiji je neusmjereni ekvivalent povezan prema definiciji na prethodnoj prikaznici
- **Snažno povezani usmjereni graf G (strongly connected) –** je usmjereni graf kod kojeg su svi parovi vrhova međusobno dohvatljivi

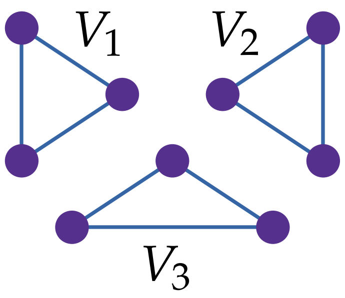
$$\forall u, v \in V: uW^G v \land vW^G u$$

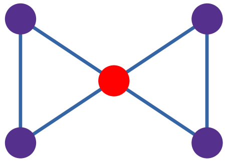
  - Primijetimo da je definicija za snažno povezani usmjereni graf identična definiciji za povezani neusmjereni graf
  - Razlika je i više nego očita s obzirom da se kod usmjerenog grafa stvaraju krugovi i ciklusi da bi on bio snažno povezan

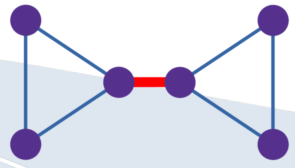


Povezanost grafa



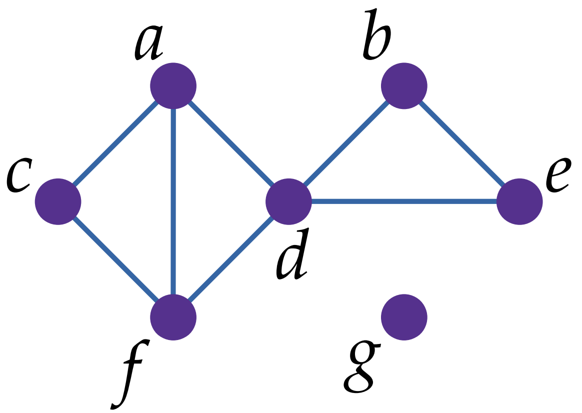






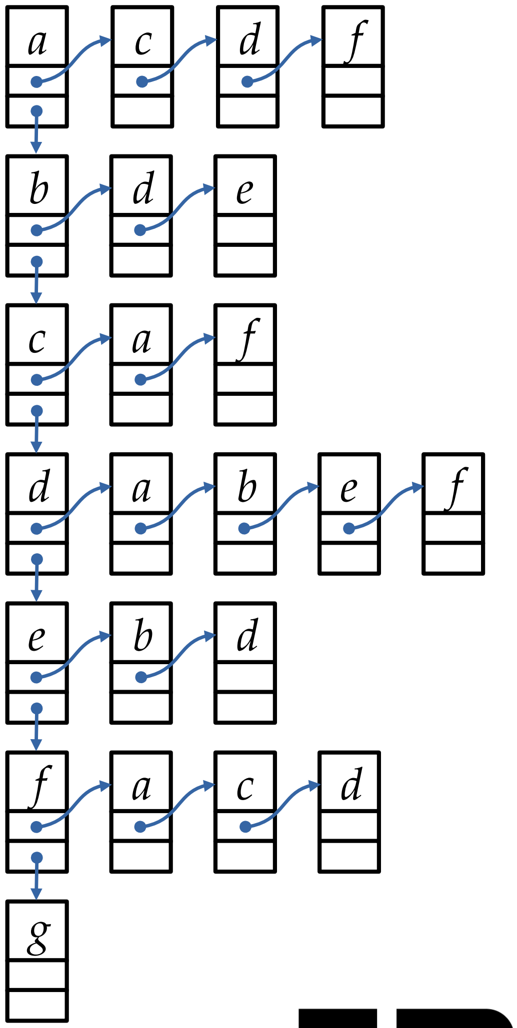
- **Nepovezani graf G (disconnected graph)**
  - Definiramo podskup vrhova $V' \subset V$ takav da je inducirani podgraf $\mathrm{G}[V']$ povezan i ne postoji obilazak između vrhova iz skupa V' i ostatka vrhova $V\ /\ V'$
  $$\nexists u \in V' \nexists v \in V/V' : uW^G v \vee vW^G u$$
  - Takav se graf smatra nepovezanim
- **Prijelomna točka (articulation point)** – je vrh čijim uklanjanjem graf postaje nepovezan
- **Most (bridge)** – je brid čijim uklanjanjem graf postaje nepovezan.

Pohrana grafa

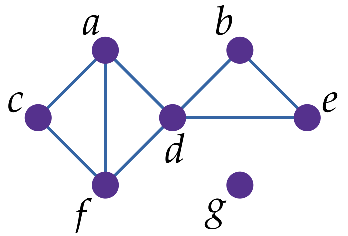


a	c	d	f	
b	d	e		
c	a	f		
d	a	b	e	f
e	b	d		
f	a	c	d	
g				

- Moguća je pohrana pomoću listi i pomoću matrica
- Prednost listi je u pristupu svim susjedima nekog vrha jer je potrebno $\deg(v)$ koraka u odnosu na $|V|$ za matrice
- Prednost matrica je u pojedinačnim intervencijama (dodavanje ili uklanjanje brida) zbog bržeg pristupa i složenosti $O(1)$ prilikom održavanja
- Primjer u obliku tablice (star representation)(lijevo) i u obliku dvodimenzionalne povezane liste (desno)



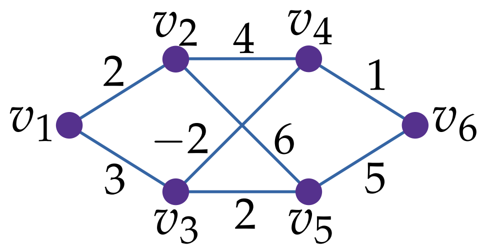
Pohrana grafa



$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} ac & ad & af & bd & be & cf & de & df \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Primjer u obliku matrice susjedstva (adjacency matrix)(lijevo-sredina)
  - Simetrična za neusmjerene grafove
- U obliku matrice incidencije (incidency matrix)(lijevo-dolje)
- U obliku težinske matrice susjedstva (weighted adjacency matrix)(desno)

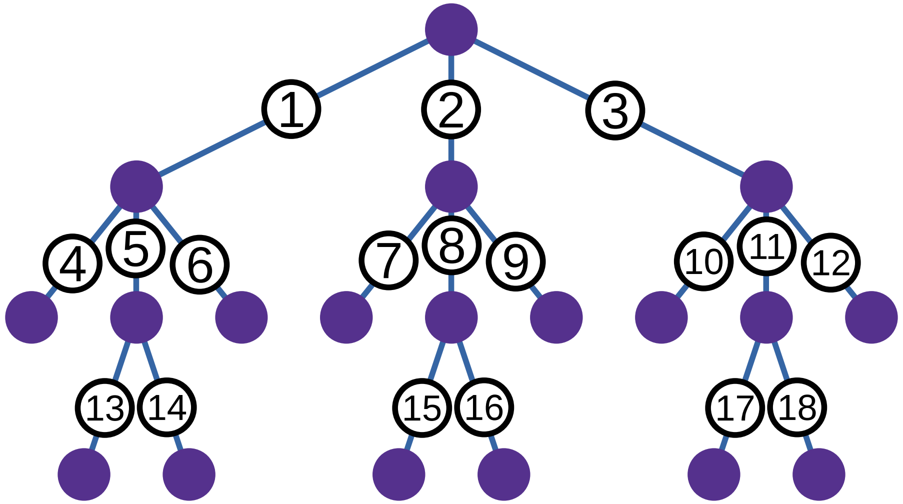


$$\mathbf{W} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Obilazak grafa (graph traversal)

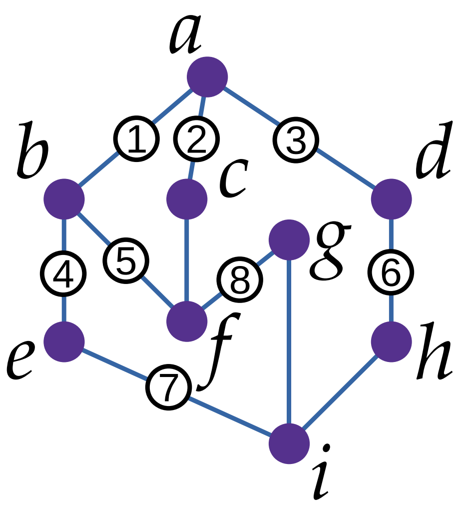
- Algoritmi za obilazak **stabla** nisu zadovoljavajući za općenite grafove jer:
  - Graf može imati cikluse pa bi se algoritam za stablo mogao naći u beskonačnoj petlji
  - Graf može imati odvojene i nepovezane vrhove, pa riskiramo da ne pronađemo sve povezane particije vrhova $P(V)$
- Dva najpoznatija algoritma za obilazak grafa su:
  - Obilazak (prvo) u širinu (*Breadth First Search;* BFS)
  - Obilazak (prvo) u dubinu (*Depth First Search*; DFS)
- Osim u jednostavnim primjenama (npr. obilazak grafa, detekcija ciklusa, provjera povezanosti pojedinih vrhova), DFS i BFS nisu međusobno zamjenjivi zbog bitne logičke različitosti
- Oba su temelj za brojne složenije algoritme i teorijski su podjednako brzi, ali u stvarnosti je DFS nešto sporiji jer je rekurzivan

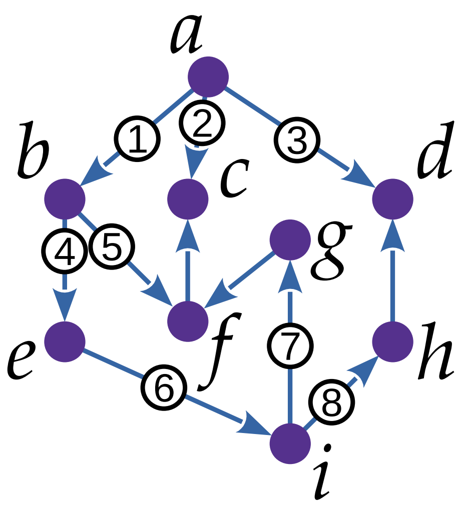
Obilazak grafa (prvo) u širinu - BFS



- Koncept BFS algoritma
  - Inicijalno u listi imamo samo korijenski vrh – lista je prirodna podatkovna struktura za BFS algoritam
  - Uzimamo prvi vrh iz liste kao trenutni vrh n
  - Prvo obilazimo SVE susjedne vrhove trenutnog vrha n
  - Kako obilazimo susjedne vrhove, stavljamo ih u listu
  - Nakon što smo obišli sve susjedne vrhove, uzimamo sljedeći vrh iz liste kao trenutni...
  - Taj postupak ponavljamo do dok nismo obišli sve vrhove u grafu
- Ukoliko imamo nepovezane podgrafove, postupak se ponavlja dok ima neobiđenih vrhova

Obilazak grafa (prvo) u širinu - BFS

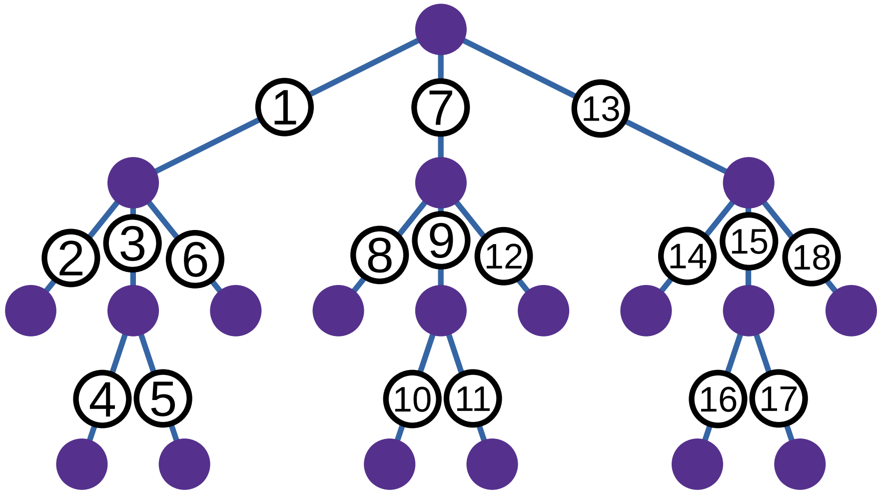




Step	u	queue Q
0		a
1	a	bcd
2	b	$cdef$
3	c	def
4	d	efh
5	e	fhi
6	f	hig
7	h	ig
8	i	g
9	g	

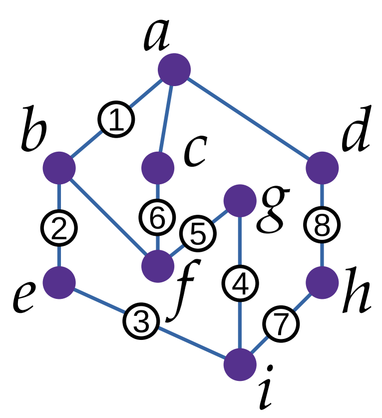
```
procedure BFS(G)
    initialize all vertices in G as not visited
    Q ← empty queue
    while there is an unvisited vertex u0 in G do
        mark u0 as visited
        Q.enqueue(u0)
        while Q is not empty do
            u ← Q.dequeue
            process u
            for v in adjacent vertices of u do
                if v is not visited then
                    mark v as visited
                    Q.enqueue(v)
```

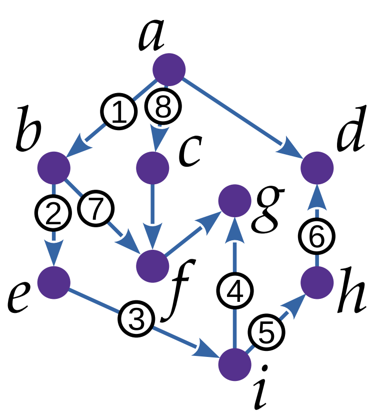
Obilazak grafa (prvo) u dubinu - DFS



- Koncept DFS algoritma - rekurzivno
  - Uzimamo prvi neobiđeni vrh
  - Rekurzivno se spuštamo na prvog susjeda
  - Rekurzija se ponavlja, sve do dok ne dođemo do lista, zatim se vraćamo natrag do prvog vrha na kojem imamo još neobiđenih susjeda, čim opet započinjemo rekurzivno spuštanje do listova
  - Stog je prirodna podatkovna struktura za DFS algoritam
- Ukoliko imamo nepovezane podgrafove, postupak se ponavlja dok ima neobiđenih vrhova

Obilazak grafa (prvo) u dubinu - DFS





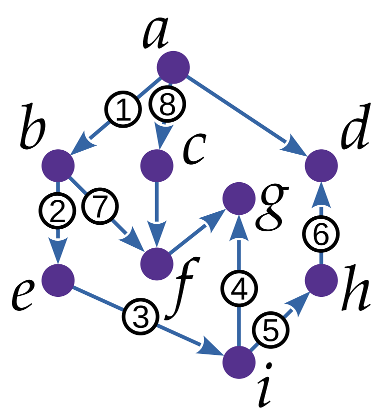
Step	u	visited	stack S
0			a
1	a	No	bcd
2	b	No	$efcd$
3	e	No	$ifcd$
4	i	No	$ghfcd$
5	g	No	$fhfdc$
6	f	No	$chfcd$
7	c	No	$hfcd$
8	h	No	$dfcd$
9	d	No	fcd
10	f	Yes	cd
11	c	Yes	d
12	d	Yes	

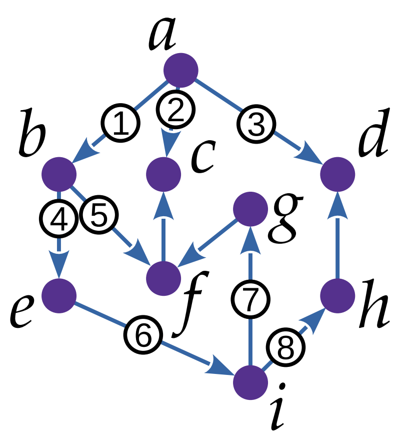
procedure DFS(G)
  initialize all vertices in G as **not visited**
  $S \leftarrow$ empty stack
  while there is an unvisited vertex u_0 in G **do**
    S.push(u_0)
    while S is not empty **do**
      $u \leftarrow$ S.pop
      if u is not visited **then**
        mark u as **visited**
        process u
        for v in **reversed list** of adjacent vertices of u **do**
          if v is not visited **then**
            S.push(v)

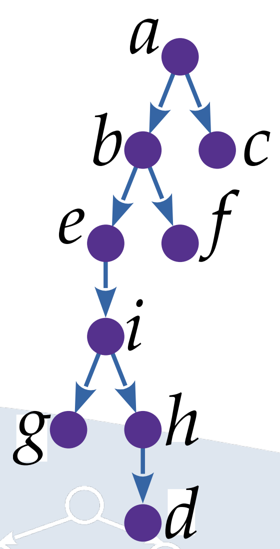
procedure DFS(G)
  initialize all vertices in G as **not visited**
  while there is an unvisited vertex u_0 in G **do**
    DFS_recursive(G, u_0)

procedure DFS_RECURSIVE(G, u)
  mark u as **visited**
  process u
  for v in adjacent vertices of u **do**
    if v is not visited **then**
      DFS_recursive(G, v)

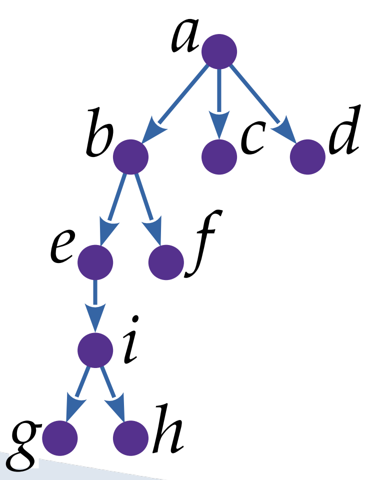
Razapinjujuće stablo (spanning tree)







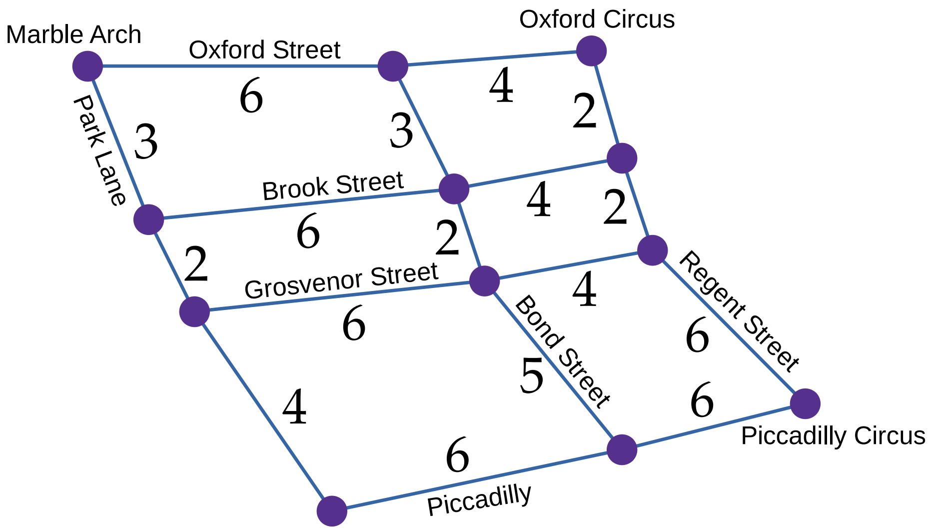
DFS



BFS

- Rezultanta putanja oba algoritma za obilazak grafa (BFS i DFS) čini stablo u kojem su svi vrhovi grafa. Takvo se stablo naziva **razapinjujuće stablo** (spanning tree).
  - Bilježimo samo bridove koji predstavljaju **napredovanje** BFS i DFS algoritama prema neobiđenim vrhovima – **unaprjedni bridovi** (forward edges)
  - Ne bilježimo bridove kojima se algoritmi vraćaju u vrhove koji su već obiđeni – **povratni bridovi** (back edges)

Najkraći putevi u grafu (shortest paths)

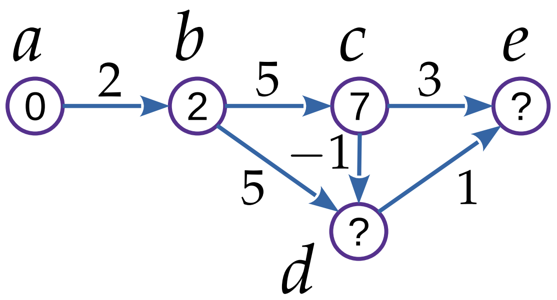


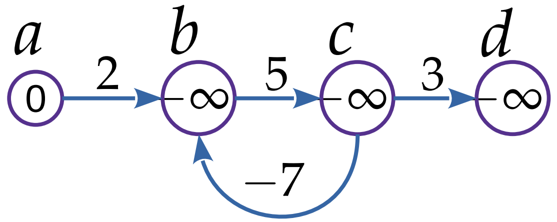
- Temeljni algoritmi za brojne primjene: transport, komunikacije, distribucijske energetske mreže, projektiranje integriranih elektroničkih sklopova i drugo...
- Bridovi, kao apstrakcija (model) poveznica između dvaju čimbenika nekog sustava, dobivaju "težine"; oznaka $w(u, v)$
- Važan je i pojam međuvrh; to je vrh na putu između neka dva vrha u grafu, dakle ni polazni ni završni
- Labela (label) = udaljenost vrha od nekog referentnog vrha (točke)
  - Najčešće se pohranjuje kao članska varijabla strukture 'vrh'
- Dvije osnovne grupe algoritama:
  - Algoritmi koji pronalaze najkraći put između dva određena vrha
  - Algoritmi koji pronalaze najkraće puteve između svih vrhova u grafu (all-to-all)

Najkraći putevi u grafu

- Odabir algoritma za traženje najkraćeg puta ovisi o težinama bridova u grafu; dvije su osnovne skupine tih algoritama:
  - **Label-setting** algoritmi – jednom upisana labela se više ne mijenja
    - Tako upisana labela se više ne provjerava
    - Funkcioniraju za grafove s isključivo pozitivnim težinama bridova – Dijkstrin algoritam
  - **Label-correcting** algoritmi – sve labele se mogu mijenjati sve do završetka postupka (konvergencije)
    - Funkcioniraju za grafove s bilo kakvim težinama bridova – Bellman-Ford algoritam

Najkraći putevi u grafu – negativne težine





Iteration	$d(b)$	$d(c)$
1	2	7
2	0	5
3	-2	3
4	-4	1
5	-6	-1
...	...	...
∞	$-\infty$	$-\infty$

- Negativna težina predstavlja problem za **label-setting** algoritme – uzmimo primjer na slici
  - Ako smo do vrha d došli obilaskom abd, tada je njegova labela $d(d) = 7$
  - Ako smo do vrha d došli obilaskom $abcd$, tada je njegova labela $d(d) = 6$
- Drugi problem predstavlja negativni ciklus, koji predstavlja problem i za **label-correcting** algoritme
  - Algoritam se uplete u beskonačnu petlju ažuriranja labela
  - U trenutku kada bi algoritam trebao konvergirati, on ne konvergira nego nastavlja ažurirati labele
  - Takav problem je nerješiv

Dijkstrin algoritam

- Spada u algoritme koji računaju najkraću udaljenost između dva vrha v_1 i v_n
- Label-setting algoritam
  - Jednom ažurirana labela vrha se više ne mijenja, osim kroz drugu putanju
  - Nije u mogućnosti raditi s negativnim težinama bridova
- Za neku putanju

$$p = v_1 v_2 \dots v_n$$

  - može se primijeniti koncept aditivnosti udaljenosti

$$d(v_1, v_n) = d(v_1, v_i) + d(v_i, v_n)$$

- Ako je putanja p ujedno i najkraća, tada vrijedi

$$d_{min}(v_1, v_n) = d_{min}(v_1, v_i) + d_{min}(v_i, v_n)$$

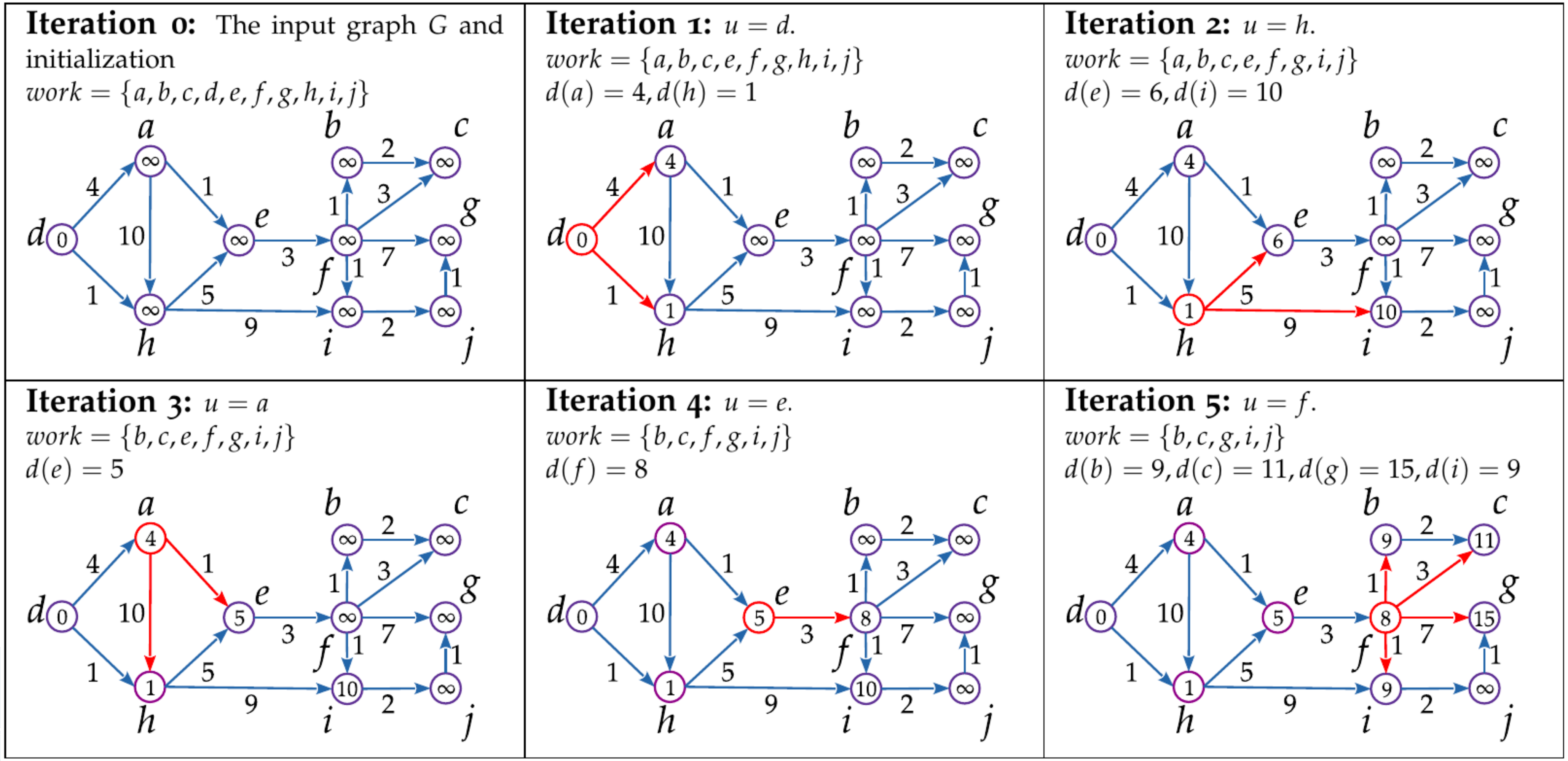
- Gledajući unatrag, ako svaki vrh na najkraćem putu "zna" (barem) svojeg neposrednog prethodnika, može se rekonstruirati cijeli put do polaznog vrha.
  - Ideja je računati $d(v_1, v_n) = d(v_1, v_{j-1}) + d(v_{j-1}, v_j)$, od od $j = n$ do $j = 2$

Dijkstrin algoritam

```
procedure DIJKSTRA(G, source, destination)
    for each vertex v in V(G) do
        d(v) ← ∞
        predecessor(v) ← null
    d(source) ← 0
    work ← V(G)
    while work in not empty do
        u ← take a vertex from work having minimal d(u)
        if u = destination then
            return
        for vertices v adjacent to u and in work do
            temp ← d(u) + w(uv)
            if temp < d(v) then
                d(v) ← temp
                predecessor(v) ← u
```

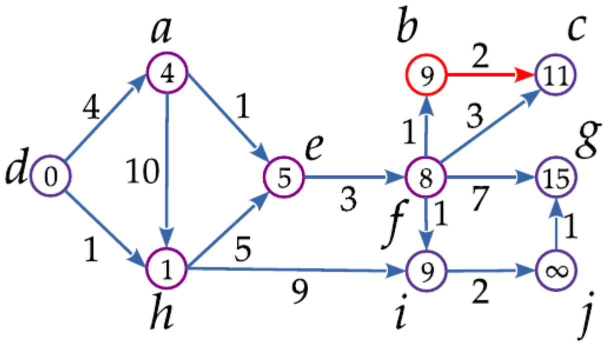
- Inicijaliziramo labele svih vrhova osim početnoga na ∞, te prethodnike na *null.* Početni vrh inicijaliziramo na 0.
- Krenemo od početnog vrha, te računamo i ažuriramo udaljenosti prema svim susjedima
- Prilikom obilaska
    - Ako je udaljenost susjeda manja od trenutne, tada ažuriramo labelu i tom susjedu stavljamo novog prethodnika
- Obilazak se temelji na BFS algoritmu koji je prioritiziran udaljenošću – manje udaljeni čvorovi idu prvi
- Završavamo u završnom vrhu

Dijkstrin algoritam - primjer

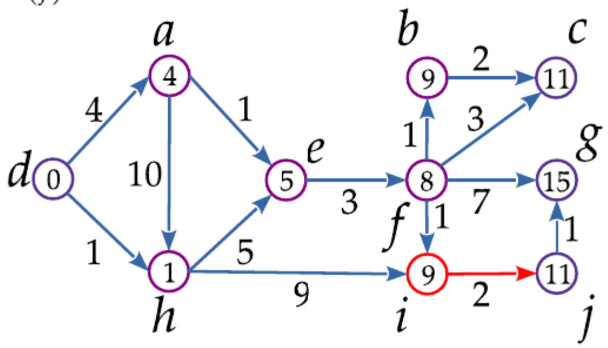


Dijkstrin algoritam - primjer

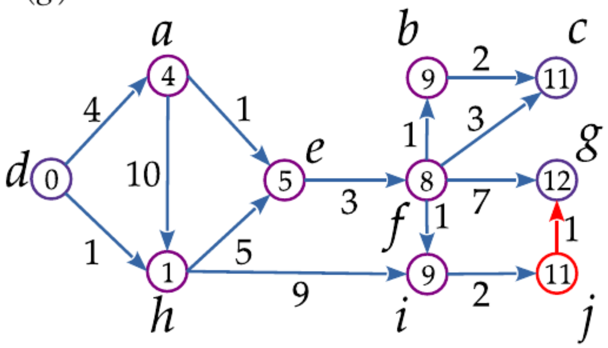
Iteration 6: $u = b$
$work = \{c, g, i, j\}$



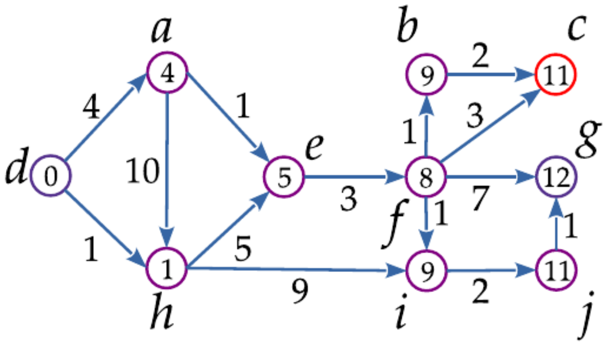
Iteration 7: $u = i$.
$work = \{c, g, j\}$
$d(j) = 11$



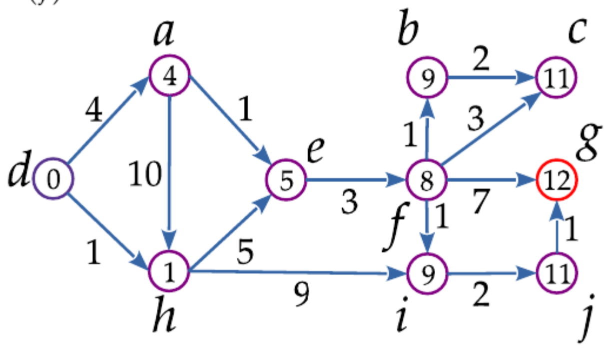
Iteration 8: $u = j$.
$work = \{c, g\}$
$d(g) = 12$



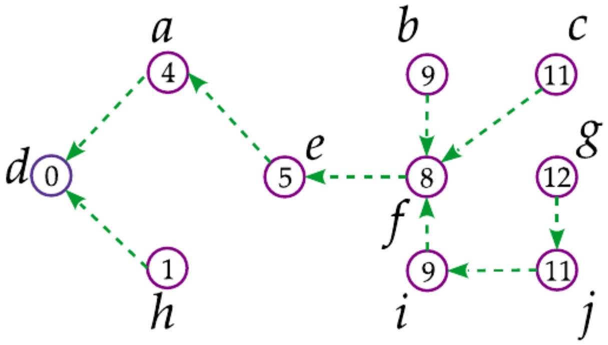
Iteration 9: $u = c$
$work = \{g\}$



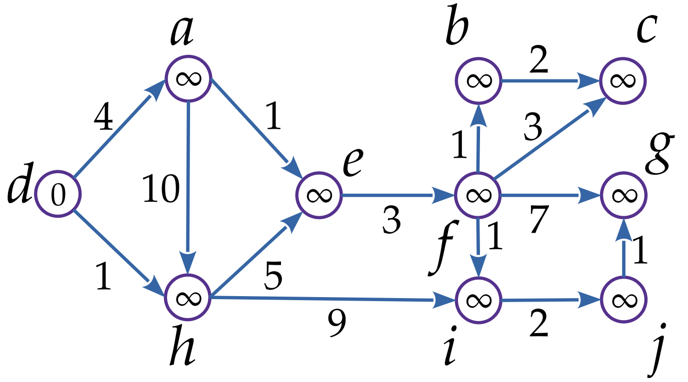
Iteration 10: $u = g$.
$work = \{\}$
$d(j) = 11$



Final predecessors in the graph G.



Dijkstrin algoritam - primjer



$g \rightarrow j \rightarrow \mathrm{i} \rightarrow \mathrm{f} \rightarrow e \rightarrow a \rightarrow d$

iteration current vertex	0	1 d	2 h	3 a	4 e	5 f	6 b	7 i	8 j	9 c	10 g
a	∞	$4/d$									
b	∞	∞	∞	∞	∞	$9/f$					
c	∞	∞	∞	∞	∞	$11/f$					
d	0										
e	∞	∞	$6/h$	$5/a$							
f	∞	∞	∞	∞	$8/e$						
g	∞	∞	∞	∞	∞	$15/f$	$15/f$	$15/f$	$12/j$		
h	∞	$1/d$									
i	∞	∞	$10/h$	$10/h$	$10/h$	$9/f$					
j	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$11/i$			

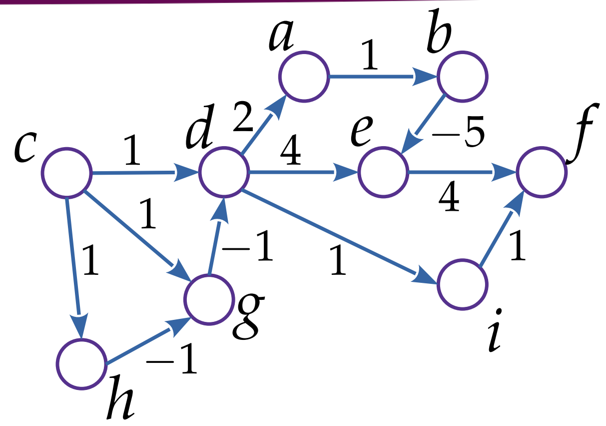
Dijkstrin algoritam - zaključak

- Kompleksnost algoritma ako se najbliži vrh iz *work* liste određuje sekvencijalno – $O(V^2)$
- Ukoliko se *work* lista implementira kao Fibonacci-eva gomila (Fibonacci heap), tada kompleksnost pada na $O(E + V \log_2 V)$

Bellman-Ford algoritam

- Spada u algoritme koji računaju najkraću udaljenost između početnog vrha i svih ostalih vrhova
- Label-correcting algoritam
  - Sve labele se ažuriraju do trenutka konvergencije – do dok više nema daljnjeg ažuriranja labela
  - Može raditi s negativnim težinama u grafu
  - Nije u mogućnosti raditi s negativnim ciklusima
- Sporiji od Dijkstrinovog algoritma
- Radi s bridovima
  - Provjerava sve bridove u grafu i po njima ažurira udaljenosti vrhova
  - Konvergencija je postavljena na:
    - Dok više nema ažuriranja labela na vrhovima
    - Programski limit je $|V| - 1$ iteracija kroz sve bridove grafa

Bellman-Ford algoritam



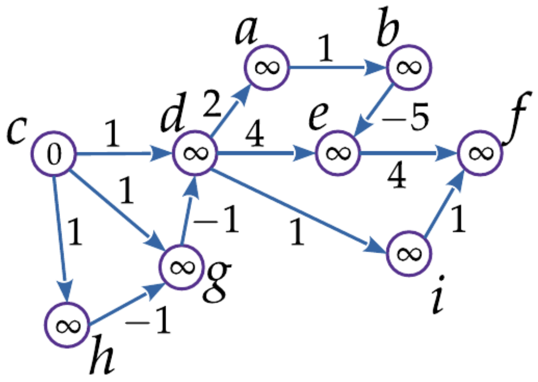

```
procedure BELLMAN-FORD(G, source)
    for each vertex v in V(G) do
        d(v) ← ∞
        predecessor(v) ← null
    d(source) ← 0
    loop |V(G)| − 1 times
        for each edge uv ∈ E(G) do
            if d(u) + w(uv) < d(v) then
                d(v) ← d(u) + w(uv)
                predecessor(v) ← u
    for each edge uv ∈ E(G) do
        if d(u) + w(uv) < d(v) then
            raise exception 'negative cycle has been detected'
```

- Sortiramo listu bridova grafa na neki način, na primjer
  $E(G) = \{ab, be, cd, cg, ch, da, de, di, ef, gd, hg, if\}$
- Prolazimo kroz bridove u $E(G)$. Za brid uv ažuriramo udaljenost vrha v ako imamo
  $$d(u) + w(uv) < d(v)$$
- To ponavljamo maksimalno $|V| - 1$ puta
- Na kraju prođemo još jednom kroz sve bridove, pa ako još uvijek imamo vrh čiju labelu možemo ažurirati – negativni ciklus

Bellman-Ford algoritam - primjer

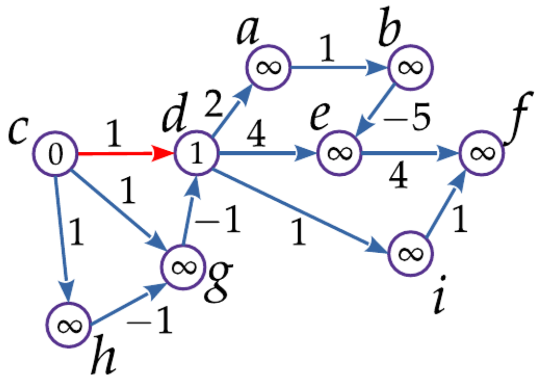
Outer loop iteration 1

Iteration 0: The input graph G and initialization

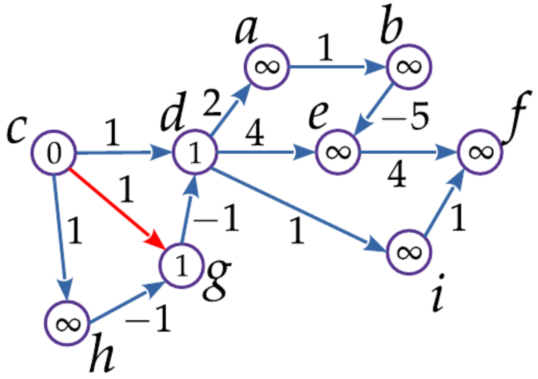


Iterations 1 and 2 are ineffective, since edges ab and be do not update any vertex distances.

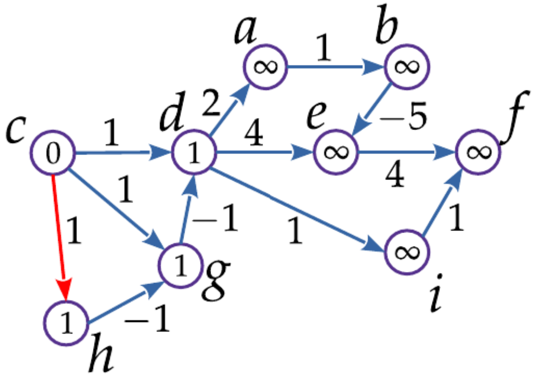
Iteration 3: The edge cd.



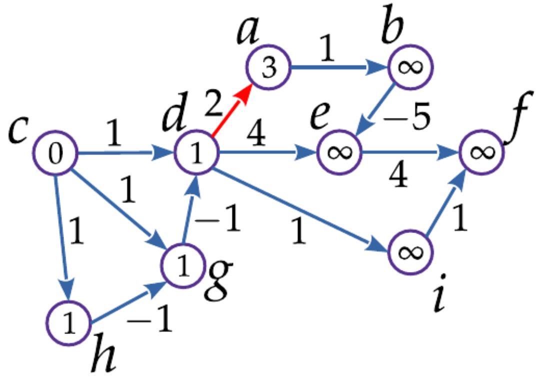
Iteration 4: The edge cg



Iteration 5: The edge ch

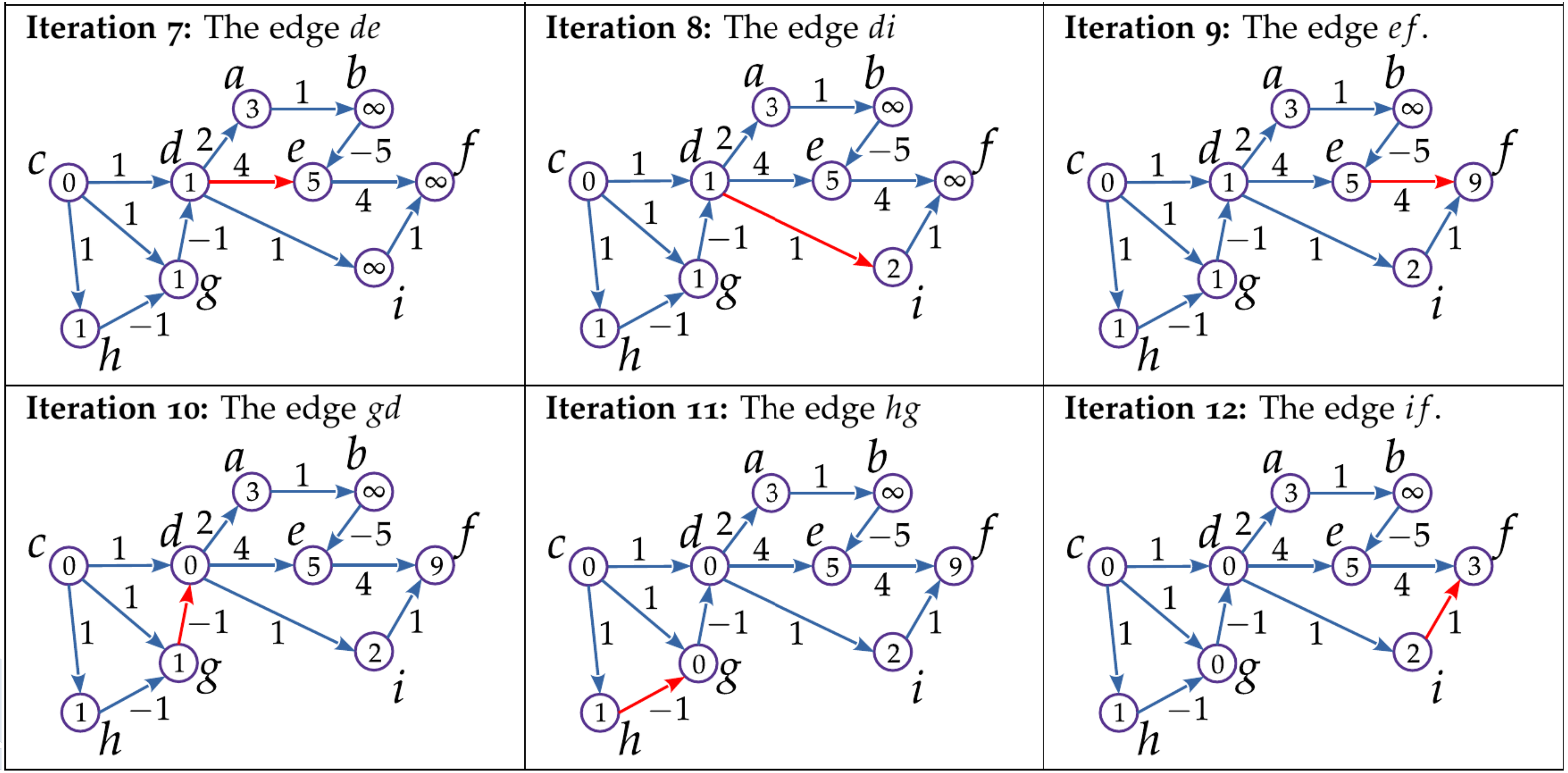


Iteration 6: The edge da.



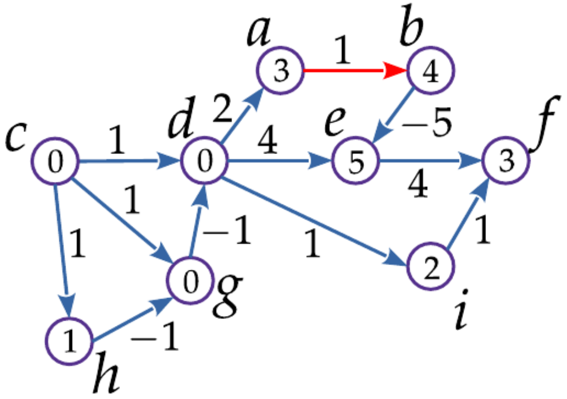
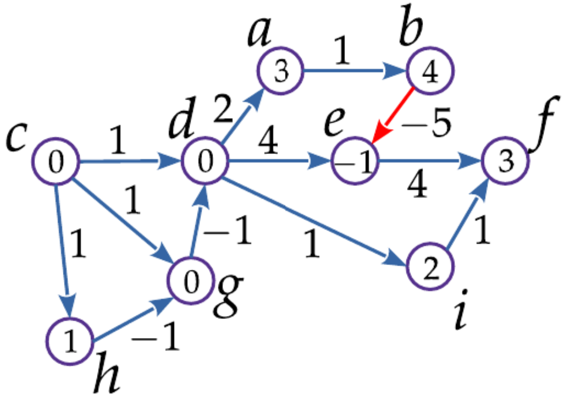
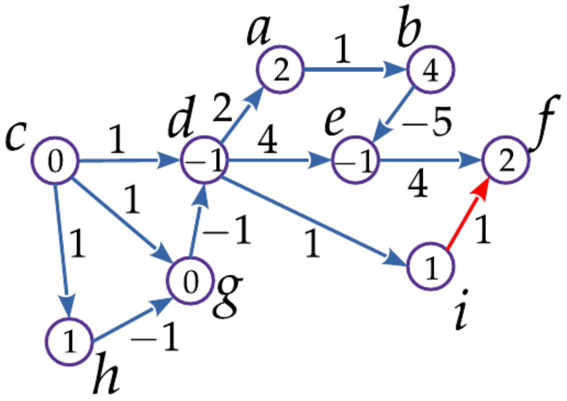
$$E(G) = \{ab, be, cd, cg, ch, da, de, di, ef, gd, hg, if\}$$

Bellman-Ford algoritam - primjer



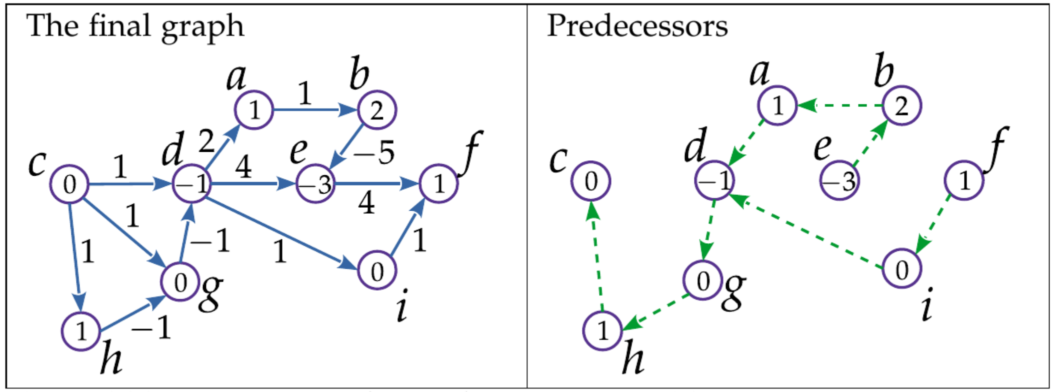
$$E(G) = \{ab, be, cd, cg, ch, da, de, di, ef, gd, hg, if\}$$

Bellman-Ford algoritam - primjer

Outer loop iteration 2		
Iteration 1: The edge *ab* 	**Iteration 2:** The edge *be* 	We skip a number of the inner edge iterations here.
Iteration 12: The edge *if* 		

$E(G) = \{ab, be, cd, cg, ch, da, de, di, ef, gd, hg, if\}$

Bellman-Ford algoritam - primjer



	Iteration					
	0	1		2	3	4
a	∞	3		2	1	
b	∞			4	3	2
c	0					
d	∞	1	0	-1	-1	
e	∞	5		-1	-2	-3
f	∞	9	3	2	1	
g	∞	1	0			
h	∞	1				
i	∞	2		1	0	

$$E(G) = \{ab, be, cd, cg, ch, da, de, di, ef, gd, hg, if\}$$

- Nakon $|V| - 1$ iteracija dobivamo konačni rezultat
  - Desni graf predstavlja prethodnike, a time i najkraće putanje od c do svih ostalih vrhova
- Primjer rješavanja kroz tablicu
  - Pratimo $E(G)$ i ažuriramo udaljenosti u koloni
- Kompleksnost Bellman-Ford algoritma je $O(E * V)$. Vanjska petlja iterira kroz vrhove, dok unutarnja iterira kroz bridove

Bellman-Ford algoritam – brža inačica

```
procedure BELLMAN-FORD(G, source)
    for each vertex v in V(G) do
        d(v) ← ∞
        predecessor(v) ← null
    d(source) ← 0
    Q ← empty queue
    Q.enqueue(source)
    while Q is not empty do
        u ← Q.dequeue
        for v in adjacent vertices of u do
            if d(u) + w(uv) < d(v) then
                d(v) ← d(u) + w(uv)
                predecessor(v) ← u
                if v not in Q then
                    Q.enqueue(v)
```

- Osnovna razlika je u tome što ne obrađujemo sve bridove
- U listu se stavlja početni vrh, a zatim samo vrhovi (susjedi) čija se labela promijenila
- Što znači da se obrađuju samo podgrafovi gdje će potencijalno doći do neke promjene labele – može se desiti ako imamo krugove i cikluse u grafu
- Kompleksnost je i dalje $O(E * V)$

Warshall-Floyd-Ingerman algoritam

- Spada u algoritme koji računaju najkraću udaljenost između svih vrhova grafa (all-to-all)
- Label-correcting algoritam
  - Sve labele se ažuriraju do kraja rada algoritma
  - Može raditi s negativnim težinama u grafu
  - Nije u mogućnosti raditi s negativnim ciklusima
- Radi s matricama udaljenosti (distance matrix)
- Zamislimo neki skup vrhova $V = \{a, b, c, d, e\}$
- Mapiramo vrhove iz V tako da ih označimo rednim brojevima

$$\forall x \in V: v_i = x, 1 \leq i \leq |V|$$

$$v_1 = a, v_2 = b, v_3 = c, v_4 = d, v_5 = e$$

Warshall-Floyd-Ingerman algoritam

- Matrica udaljenosti za prethodni skup vrhova V izgleda kao

$$\mathbf{D} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} v_1 = a & v_2 = b & v_3 = c & v_4 = d & v_5 = e \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 = a \\ v_2 = b \\ v_3 = c \\ v_4 = d \\ v_5 = e \end{array} & \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} \end{bmatrix} \end{array}$$

  - udaljenost između vrhova v_i i v_j označava se kao d_{ij}
  - za očekivati je da će se naći barem jedna putanja kroz graf između vrhova v_i i v_j - ovo nije nužno ako graf nije povezan, ali pretpostavimo da jest
  - treba odabrati onu putanju koja je najkraća ili $d_{min}(v_i, v_j)$

Warshall-Floyd-Ingerman algoritam

- Ako imamo novu putanju koja prolazi međuvrhom v_k

$$p = \ v_1 \ldots v_k \ldots v_n$$

  - smatra se da je putanja p kraća ako vrijedi $d(v_1, v_k) + d(v_k, v_n) < d(v_1, v_n)$
- WFI algoritam iterira po vrhovima grafa postavljajući ih kao međuvrh v_k
  - na taj se način testira da li je taj međuvrh v_k na minimalnoj putanji između v_i i v_j
  - s obzirom da WFI algoritam izračunava udaljenosti između svih vrhova, imamo tri petlje s kojima iteriramo po vrhovima grafa, odabirući u svakoj od njih v_i, v_j i v_k

Warshall-Floyd-Ingerman algoritam

- Udaljenosti se računaju kao

$$d_{ij}^{k} = \begin{cases} w_{ij} & ,k = 0 \\ min\left(d_{ij}^{k-1}, d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}\right) & ,k \geq 1 \end{cases}$$

  - kada gledamo međuvrh v_k, udaljenost je minimum između udaljenosti d_{ij} izračunate za međuvrh v_{k-1} i udaljenosti putanje koja prolazi kroz međuvrh v_k

- Putanje (prethodnici) spremaju se u matricu putanja kao

$$\pi_{ij}^{k} = \begin{cases} \pi_{ij}^{k-1} & ,d_{ij}^{k-1} \leq d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1} \\ \pi_{kj}^{k-1} & ,d_{ij}^{k-1} > d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1} \end{cases}$$

  - što znači da ako smo ažurirali udaljenost d_{ij} tada moramo staviti i da je prethodnik vrha v_j međuvrh v_k

Warshall-Floyd-Ingerman algoritam

- Na početku imamo inicijalnu matricu udaljenosti, koja je $D^0 = W$, te sadrži udaljenosti samo direktno povezanih vrhova, izračun ostalih udaljenosti je stvar WFI algoritma
- Inicijalna matrica putanja definira se iz težinske matrice susjedstva W na način

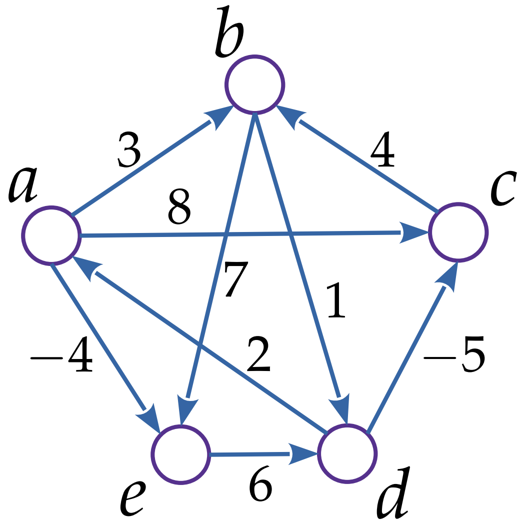
$$\pi_{ij}^0 = \begin{cases} null & , i = j \; or \; w_{ij} = 0 \\ i & , i \neq j \; and \; w_{ij} \neq 0 \end{cases}$$

Warshall-Floyd-Ingerman algoritam

procedure WFI(W)
  Create initial distance matrix $D = D^0$ from W
  Create initial path matrix $\Pi = \Pi^0$ from W
  for k from 1 to $|V|$ **do**
    for i from 1 to $|V|$ **do**
      for j from 1 to $|V|$ **do**
        if $D[i,k] + D[k,j] < D[i,j]$ **then**
          $D[i,j] = D[i,k] + D[k,j]$
          $\Pi[i,j] = \Pi[k,j]$

- Algoritam je jednostavan, ima tri petlje kojima iteriramo po vrhovima v_i, v_j i v_k
- Time je i kompleksnost algoritma nešto visoka $O(V^3)$

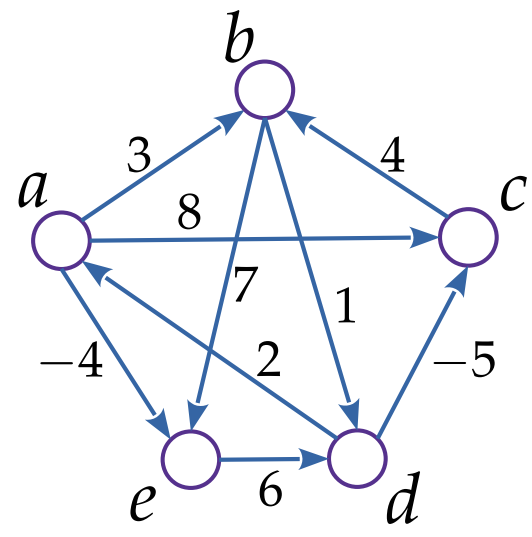
WFI algoritam - primjer



$$\mathbf{D}^0 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \mathbf{\Pi}^0 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} null & 1 & 1 & null & 1 \\ null & null & null & 2 & 2 \\ null & 3 & null & null & null \\ 4 & null & 4 & null & null \\ null & null & null & 5 & null \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{D}^1 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & 5(\infty) & -5 & 0 & -2(\infty) \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \mathbf{\Pi}^1 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} null & 1 & 1 & null & 1 \\ null & null & null & 2 & 2 \\ null & 3 & null & null & null \\ 4 & 1(null) & 4 & null & 1(null) \\ null & null & null & 5 & null \end{bmatrix} \end{array}$$

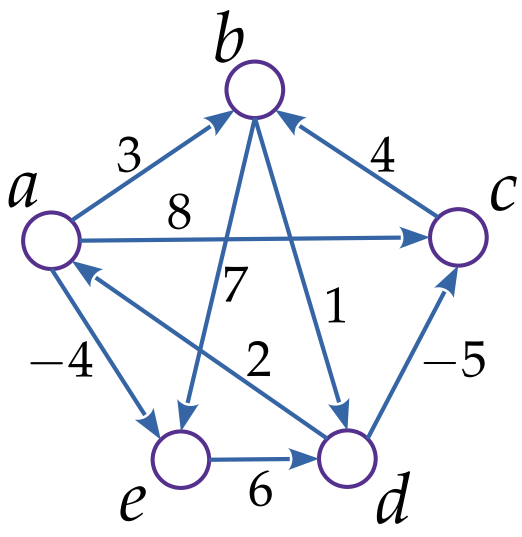
WFI algoritam - primjer



$$\mathbf{D}^2 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 3 & 8 & 4(\infty) & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5(\infty) & 11(\infty) \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \mathbf{\Pi}^2 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} null & 1 & 1 & 2(null) & 1 \\ null & null & null & 2 & 2 \\ null & 3 & null & 2(null) & 2(null) \\ 4 & 1 & 4 & null & 1 \\ null & null & null & 5 & null \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{D}^3 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1(5) & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \mathbf{\Pi}^3 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} null & 1 & 1 & 2 & 1 \\ null & null & null & 2 & 2 \\ null & 3 & null & 2 & 2 \\ 4 & 3(1) & 4 & null & 1 \\ null & null & null & 5 & null \end{bmatrix} \end{array}$$

WFI algoritam - primjer



$$\mathbf{D}^4 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1(8) & 4 & -4 \\ 3(\infty) & 0 & -4(\infty) & 1 & -1(7) \\ 7(\infty) & 4 & 0 & 5 & 3(11) \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8(\infty) & 5(\infty) & 1(\infty) & 6 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \mathbf{\Pi}^4 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} null & 1 & 4(1) & 2 & 1 \\ 4(null) & null & 4(null) & 2 & 1(2) \\ 4(null) & 3 & null & 2 & 1(2) \\ 4 & 3 & 4 & null & 1 \\ 4(null) & 3(null) & 4(null) & 5 & null \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{D}^5 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1(3) & -3(-1) & 2(4) & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \mathbf{\Pi}^5 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} null & 3(1) & 4(4) & 5(2) & 1 \\ 4 & null & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & null & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & null & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & null \end{bmatrix} \end{array}$$

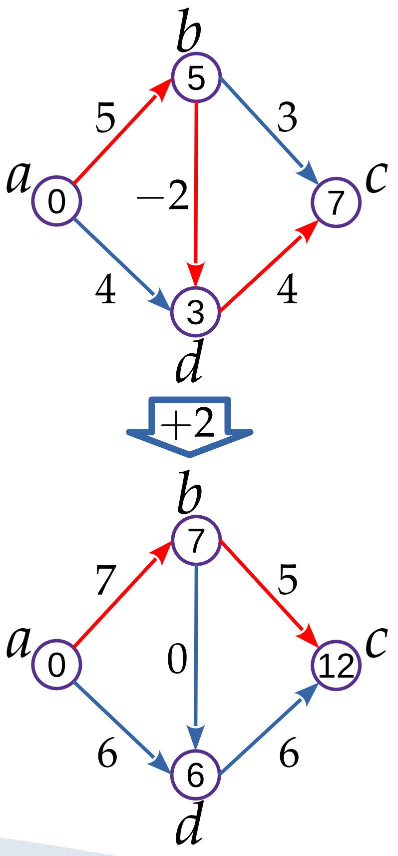
WFI algoritam - primjer

k	vertex
$\pi_{35}^5 = 1$	$v_5 = e$
$\pi_{31}^5 = 4$	$v_1 = a$
$\pi_{34}^5 = 2$	$v_4 = d$
$\pi_{32}^5 = 3$	$v_2 = b$
$\pi_{33}^5 = null$	$v_3 = c$

$$\Pi^5 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} null & 3(1) & 4(4) & 5(2) & 1 \\ 4 & null & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & null & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & null & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & null \end{bmatrix} \end{array}$$

- Gledamo udaljenost i najkraću putanju između $i = 3 = c$ i $j = 5 = e$
- Udaljenost očitamo direktno iz D^5, to jest $d_{35}^5 = 3$
- Čitanje matrice putanja se interpretira kao
  - Ako je v_i početni vrh, a v_j završni, tada imamo putanju $v_i v_{k-n} \dots v_{k-1} v_k v_j$
  - U matrici Π^5 imamo $\pi_{ij}^5 = k$, pa zatim $\pi_{ik}^5 = k - 1$, pa $\pi_{i(k-1)}^5 = k - 1$, sve do $\pi_{i(k-n)}^5 = i$
  - π_{ii}^5 će po definiciji biti $null$ i tu završavamo
- Za putanju idemo unatrag kroz matricu od π_{35}^5, gdje je $i = 3$, a $j = 5$, pa je tako
  - $j = 5$ i to je vrh e
  - $k = \pi_{ij}^5 = \pi_{35}^5 = 1$ i to je vrh a
  - $k - 1 = \pi_{ik}^5 = \pi_{31}^5 = 4$ i to je vrh d
  - $k - 2 = \pi_{i(k-1)}^5 = \pi_{34}^5 = 2$ i to je vrh b
  - $k - 3 = \pi_{i(k-2)}^5 = \pi_{32}^5 = 3 = i$ i to je vrh c
  - $\pi_{ii}^5 = \pi_{33}^5 = null$ i tu završavamo.

Transformacija težina



- Žarko želimo koristiti Dijkstrin algoritam, ali nam smetaju negativne težine na bridovima
- Da li je moguće nekako transformirati graf da transformacijom uklonimo negativne težine?
- Naivni pokušaj bio bi identičnom translacijom prema najnegativnijoj težini brida
- Najkraći put od a do c u originalnom grafu je $abdc$ s udaljenošću 7
- Dodavanjem težine 2 na sve bridove to se remeti i sada je najkraća putanja abc s udaljenošću 12

Transformacija težine

- Ono što znamo sa prethodnih prikaznica je
$$d(v) \leq d(u) + w(uv)$$
  - znači udaljenost vrha v nije veća od udaljenosti vrha u uvećana za težinu brida $w(uv)$
  - zapišemo li to drukčije dobivamo da je
$$0 \leq d(u) + w(uv) - d(v) = w'(uv)$$
- Ako prethodni izraz upotrijebimo na putanji $p = v_1 v_2 \dots v_k$ dobivamo udaljenost
$$L(v_1, v_k)' = \sum_{i=1}^{k-1} w'(v_i v_{i+1}) =$$
$$w(v_1 v_2) + d(v_1) - d(v_2) + \cdots + w(v_{k-1} v_k) + d(v_{k-1}) - d(v_k)$$

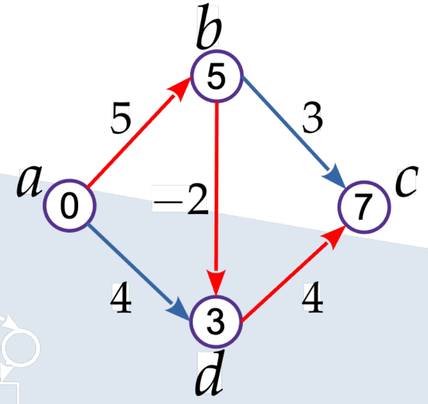
Transformacija težine

- Također vrijedi

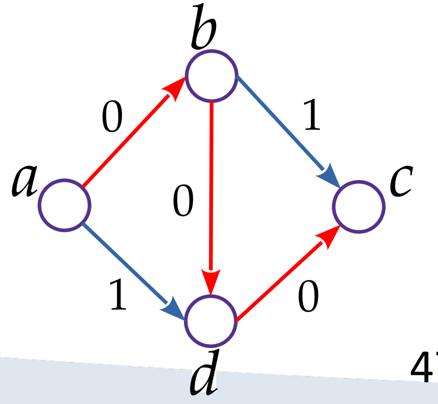
$$L'(v_1, v_k) = \left(\sum_{i=1}^{k-1} w(v_i v_{i+1})\right) + d(v_1) - d(v_k) =$$
$$L(v_1 v_k) + d(v_1) - d(v_k)$$

- Transformacija je bijektivna pa vrijedi i

$$L(v_1 v_k) = L'(v_1 v_k) + d(v_k) - d(v_1)$$



v_i	v_j	$w(v_i v_j)$	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$w'(v_i v_j)$
a	b	5	0	5	5+0-5=0
a	d	4	0	3	4+0-3=1
b	d	-2	5	3	-2+5-3=0
b	c	3	5	7	3+5-7=1
d	c	4	3	7	4+3-7=0

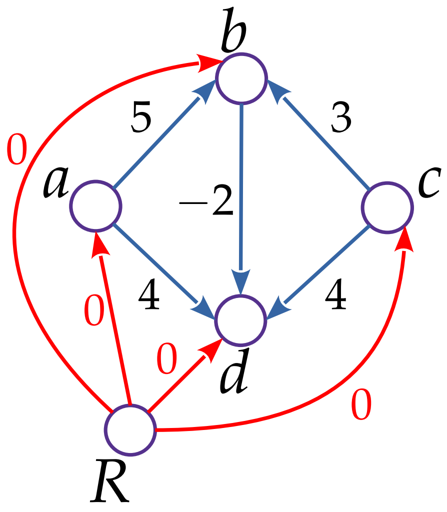


Transformacija težine

1. Using a *label-correcting* algorithm, determine the shortest distance to every vertex in the input graph G from an arbitrary reference vertex v_r. All vertices in the input graph G must be reachable from the reference vertex v_r.
2. Transform the input graph G into the non-negative weighted graph G' using the bijective transformation given in (3.51).
3. **for** $\forall v_i, v_k \in V(G')$ **do**
4.   Find the shortest path between source and destination vertices v_i and v_k in the transformed graph G' using a *label-setting* algorithm. The length of this path is $L'(v_i v_k)$.
5.   Use the inverse transformation in (3.51) to get the original length of the shortest path as $L(v_i v_k) = L'(v_i v_k) + d(v_k) - d(v_i)$.

- Da bismo odradili transformaciju težine, prvo trebamo Bellman-Ford algoritmom odrediti udaljenost svih vrhova od jednog određenog vrha
- Zatim odradimo transformaciju
- Nakon toga korištenjem Dijkstrinog algoritma odredimo udaljenost između svih parova vrhova u grafu, čime dobivamo *all-to-all* udaljenosti

Transformacija težine



- Ukoliko imamo nepovezani graf, tada je nemoguće izračunati udaljenost svih vrhova od jednog referentnog vrha
- Tada dodajemo umjetni vrh (recimo R) koji bridovima povezujemo sa svim ostalim vrhovima grafa
  - Težine tih umjetno dodanih bridova su 0
- Sad možemo odrediti udaljenost svih vrhova od umjetnog vrha R i na temelju toga napraviti transformaciju

v	$d(v)$
a	0
b	0
c	0
d	-2

v_i	v_j	$w(v_i v_j)$	$d(v_i)$	$d(v_j)$	$w'(v_i v_j)$
a	b	5	0	0	5+0-0=5
a	d	4	0	-2	4+0+2=6
b	d	-2	0	-2	-2+0+2=0
c	b	3	0	0	3+0-0=3
c	d	4	0	-2	4+0+2=6