

Kompleksne mreže

2. predavanje

Svojstva mreža

- Sličnost među susjedima
- Najkraći put koji povezuje čvorove
- Trokuti koji povezuju zajedničke susjede

Socijalne mreže

- Svojstva čvorova:
 - Godine
 - Spol
 - Nacionalnost
 - Lokacija
 - Seksualne preferencije
 - Teme interesa



Cambridge Analytica

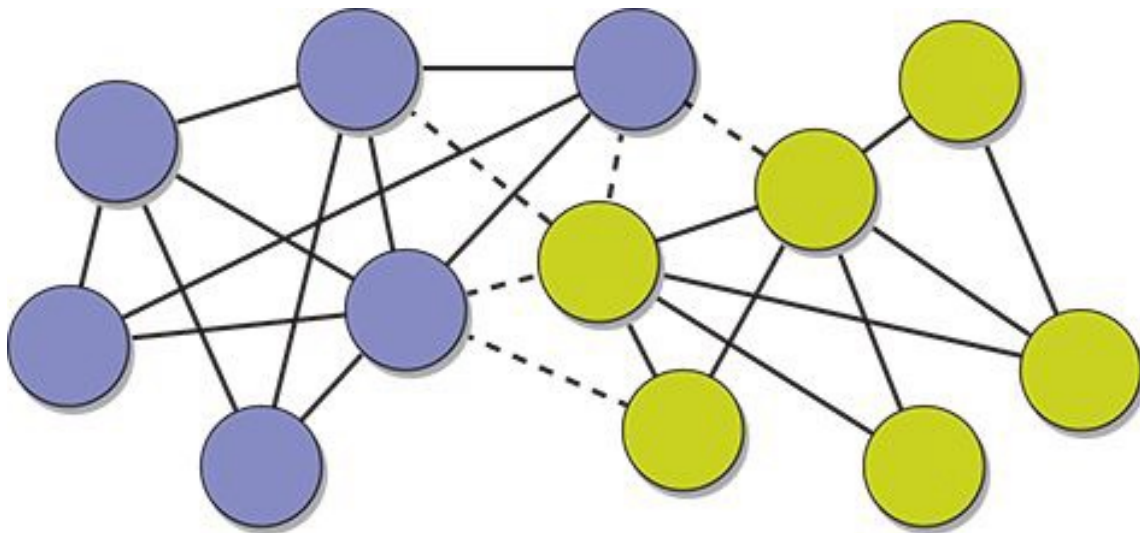
- Ocean model:
 - Openness to experience, conscientiousness, extraversion, agreeableness and neuroticism.
- Inicijalni kviz
- Informacije o susjedima
- 11 US država



Asortativnost

- Povezani čvorovi imaju slična svojstva - assortativnost
- Primjeri:
 - Rođaci mogu živjeti blizu jedni drugih
 - Prijatelji mogu dijeliti iste interese
- Predviđanje osobnih kvaliteta poznajući susjedstvo:
 - Facebook – seksualna orijentacija
 - Twitter/X– političke preferencije

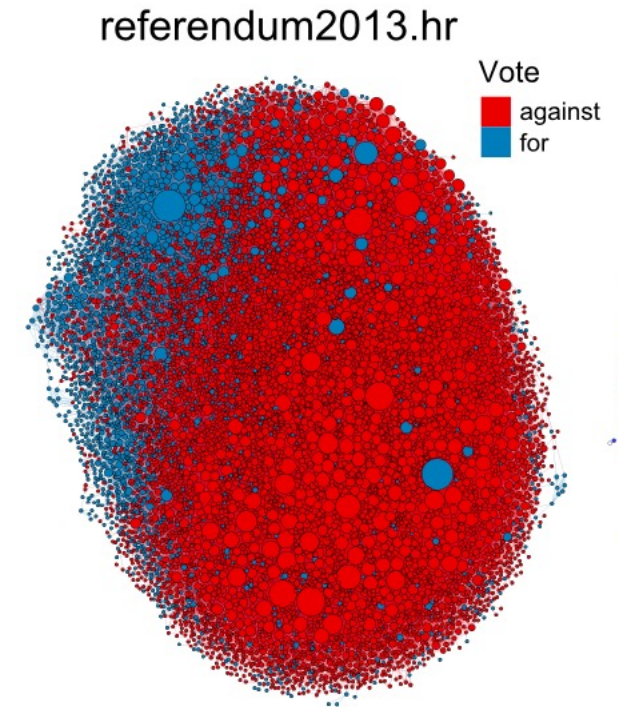
Asortativnost



Veća vjerojatnost povezivanje čvorova iste boje

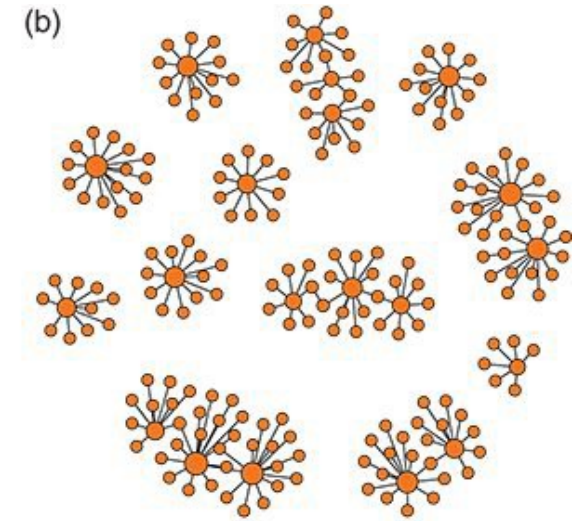
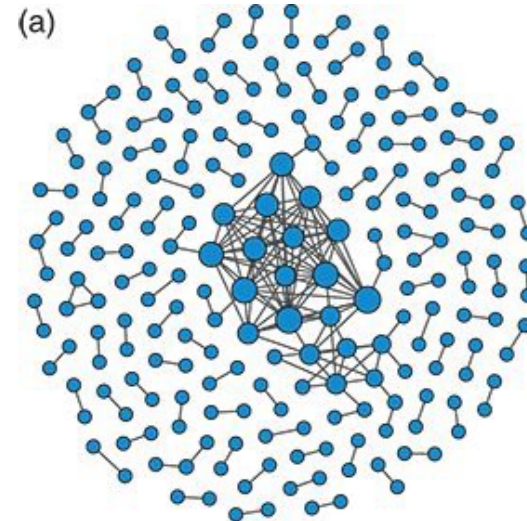
Razlozi za pojavu asortativnosti

- Povezivanje sa sličnima – homofilija
- S vremenom postajemo sličniji (socijalni utjecaj)
- Ljudi su skloni imitiranju drugih
- Echo komore – zatvaranje u krugove sličnih
- Sklonost potvrđivanju (engl. *confirmation bias*)



Asortativnost stupnja

- Asortativna mreža
 - Čvorovi s velikim stupnjem su povezani sa sličnima.
 - Čvorovi s niskim stupnjem su povezani sa sličnim
- Čvorovi s velikim stupnjem (hubovi)
- Jezgra – periferija strategija
- Disortativne mreže (Internet, biološke mreže)



Mjere asortativnosti

- Koeficijent asortativnosti – Pearsonova korelacija između stupnjeva para povezanih čvorova

- Srednji stupanj susjeda čvora i

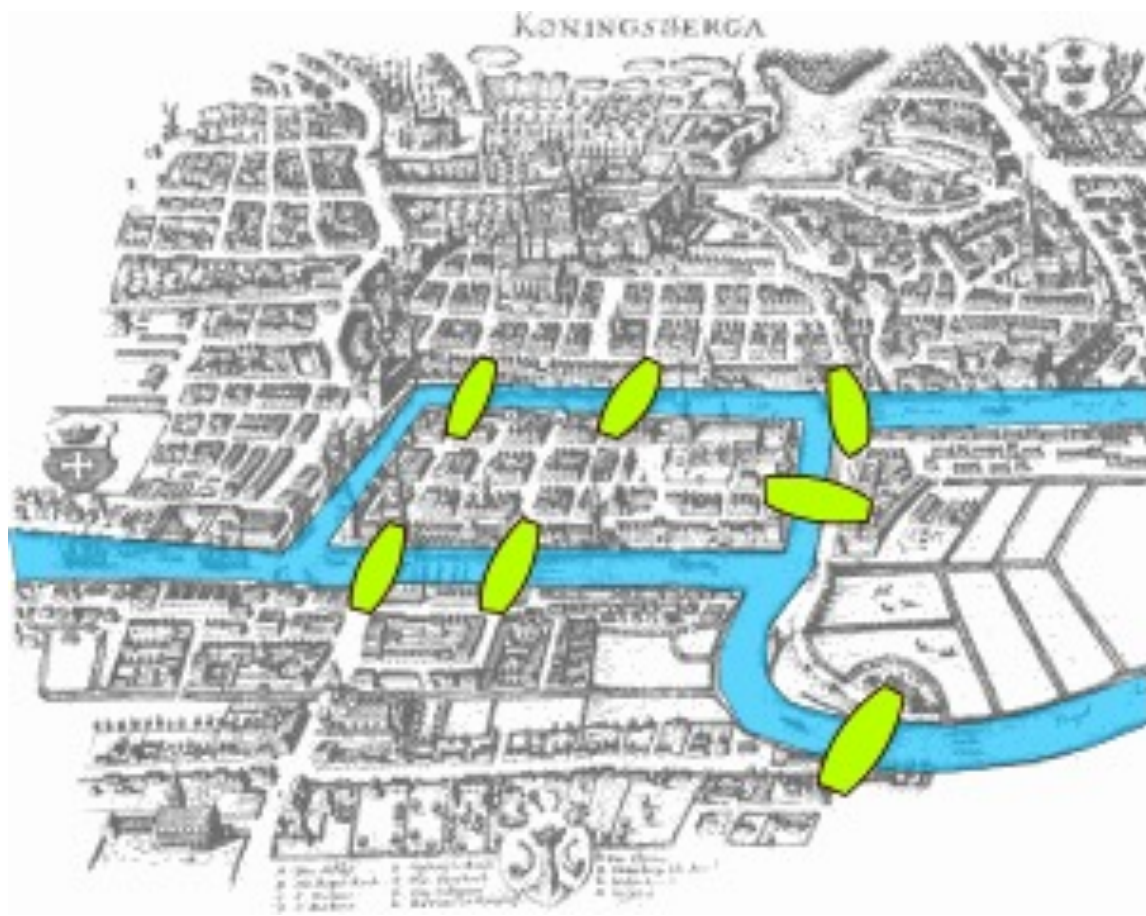
$$k_{nn}(i) = \frac{1}{k_i} \sum_j a_{ij} k_j$$

- $a_{ij} = 1$, ako su i i j susjedi, inače 0
- $\langle k_{nn}(k) \rangle$ k – najbližih susjeda za stupanj k
- Ako $\langle k_{nn}(k) \rangle$ raste s k – asortativna mreža

Šetnja, staza, put, ciklus

- **Šetnja** - konačan ili beskonačan slijed veza koja povezuje slijed čvorova
- **Staza** – šetnja u kojoj svakom vezom prolazimo jedanput
- **Put** – staza u kojoj svakim čvorom prolazimo jedanput
- **Ciklus** – put koji počinje i završava istim čvorom

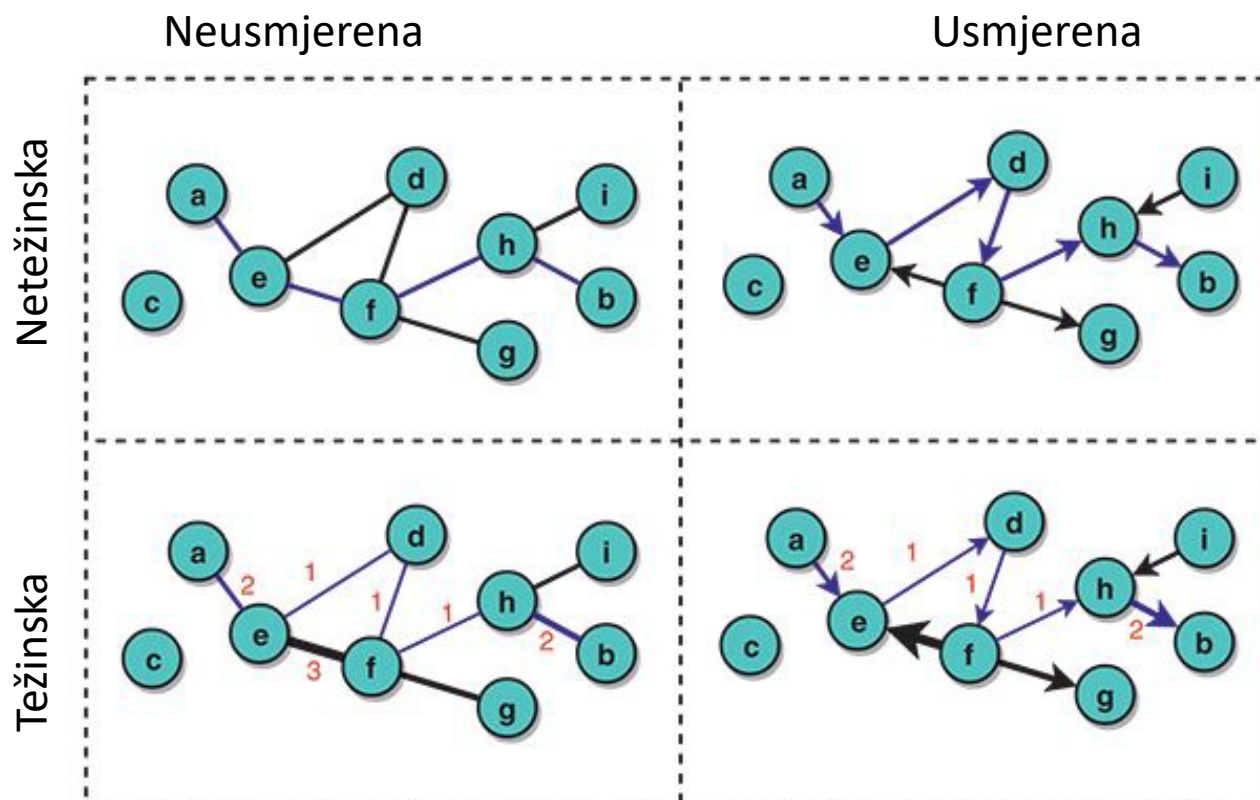
Eulerv put/staza



- Zadatak - Proći svih sedam mostova u Königsbergu točno jedanput
- Eulerova staza postoji ako:
 - Svi čvorovi osim početnog i krajnjeg imaju paran stupanj

Udaljenost između čvorova u mreži

- Najkraći put
 - Minimalan broj veza koje treba proći u putu između dva čvora



Prosječan najkraći put

- Neusmjerena, netežinska mreža

- $\langle l \rangle = \frac{\sum_{i,j} l_{ij}}{\binom{N}{2}} = \frac{2 \sum_{i,j} l_{ij}}{N(N-1)}$, gdje je l_{ij} najkraći put između čvorova i i j , a N broj čvorova

- Usmjerena, netežinska mreža

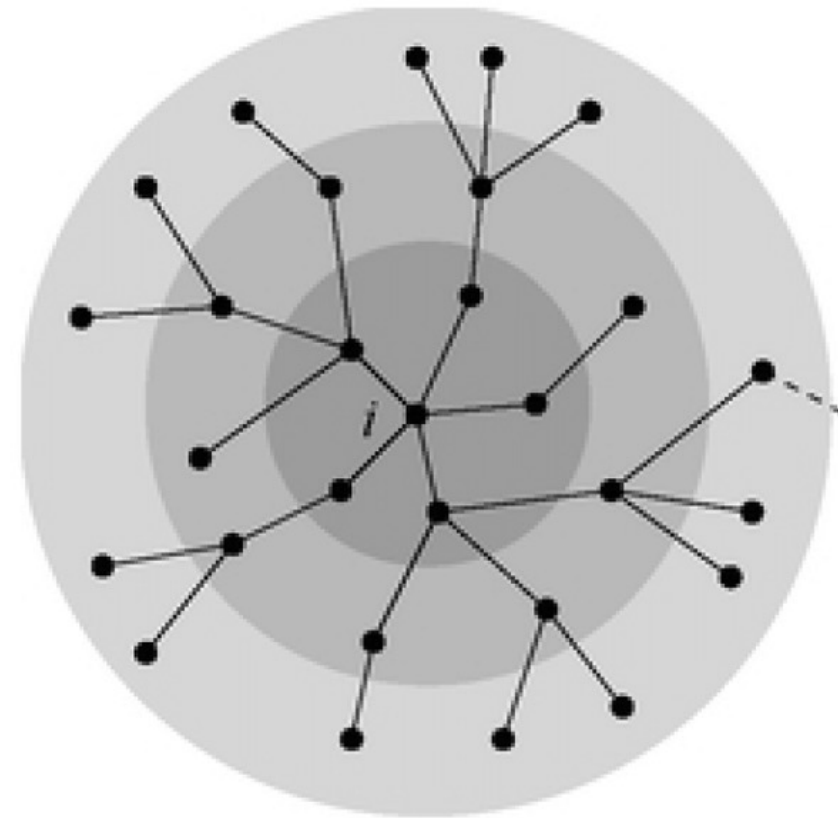
- $\langle l \rangle = \frac{\sum_{i,j} l_{ij}}{N(N-1)}$

- Neusmjerena mreža u kojoj ne postoje neki putovi

- $\langle l \rangle = \left(\frac{\sum_{i,j} \frac{1}{l_{ij}}}{\binom{N}{2}} \right)^{-1}$

Dijametar mreže

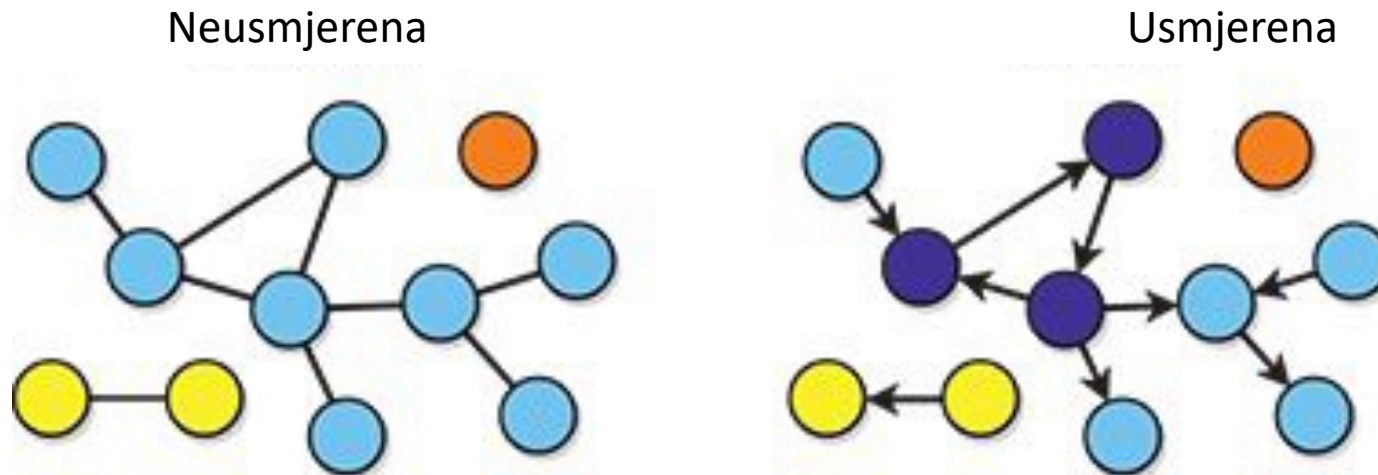
- Maksimalan najkraći put među svim parovima čvorova
- $l_{max} = \max_{i,j} l_{ij}$
- Više komponenti mreže
 - Maksimalna vrijednost dijametara pojedinih komponenti



Povezanost mreže i komponente

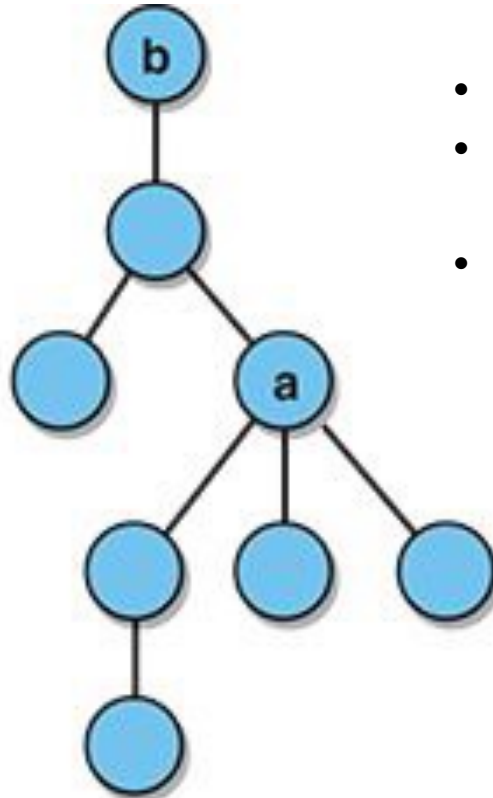
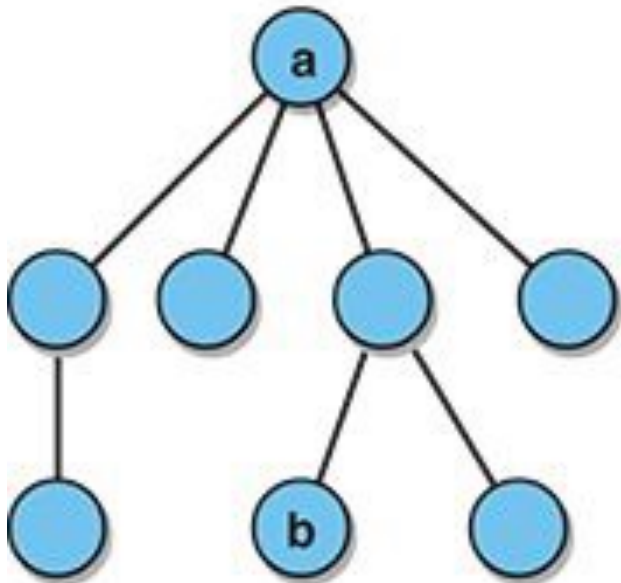
- Povezana mreža
 - Mogućnost dosizanja svakog čvora iz bilo kojeg čvora
- Nepovezana mreža
 - Više od jedne komponente
 - Komponenta – podmreža od jednog ili više čvorova gdje postoji put između bilo kojeg para čvorova
 - Gigantska komponenta – najveća povezana komponenta u mreži

Komponente



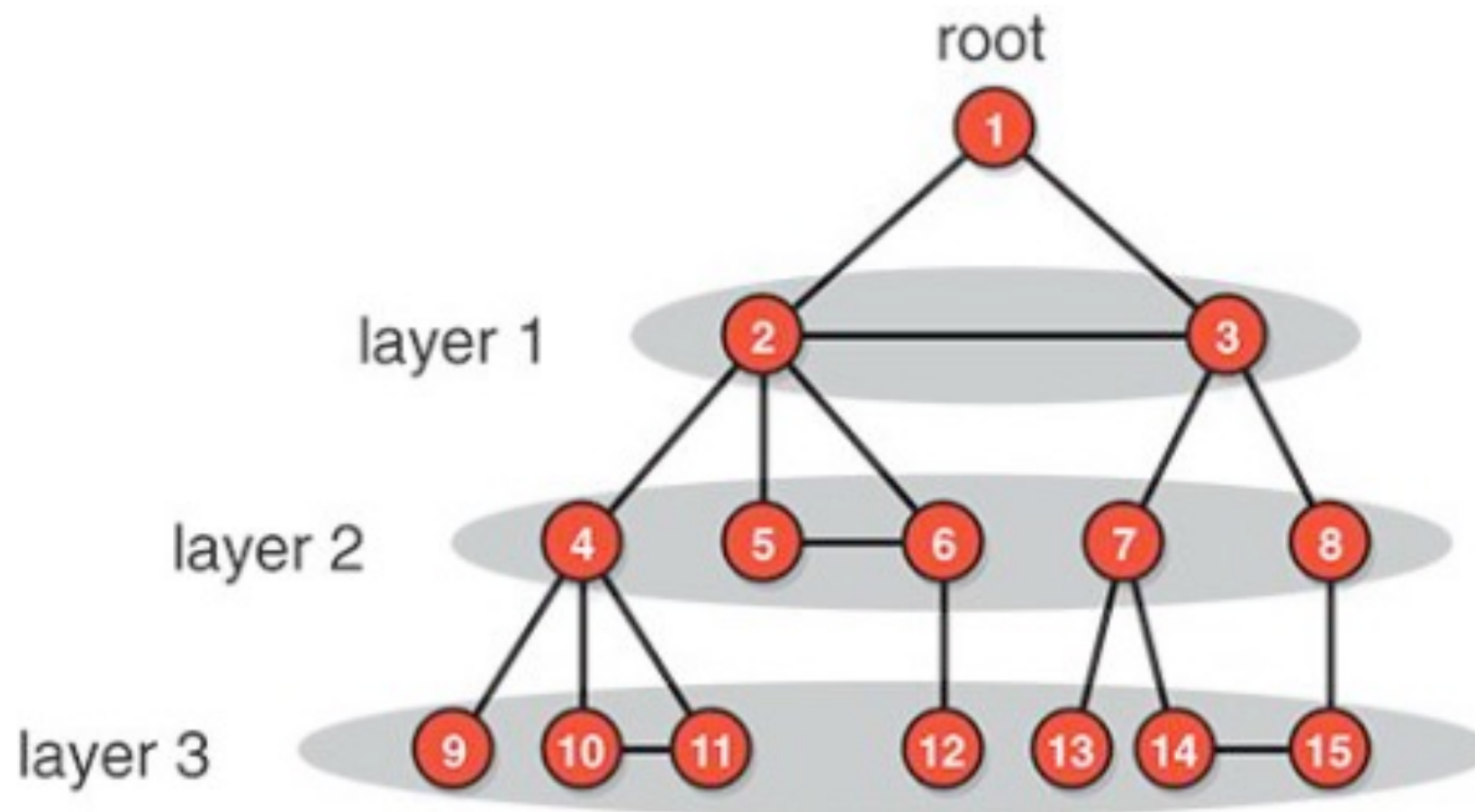
- Bojama označene komponente
- Usmjerena mreža:
 - Slabo povezana komponenta – kada ignoriramo usmjerenost (gigantska – različite nijanse plave)
 - Strogo povezana komponenta (najveća – tamna plava)

Stabla



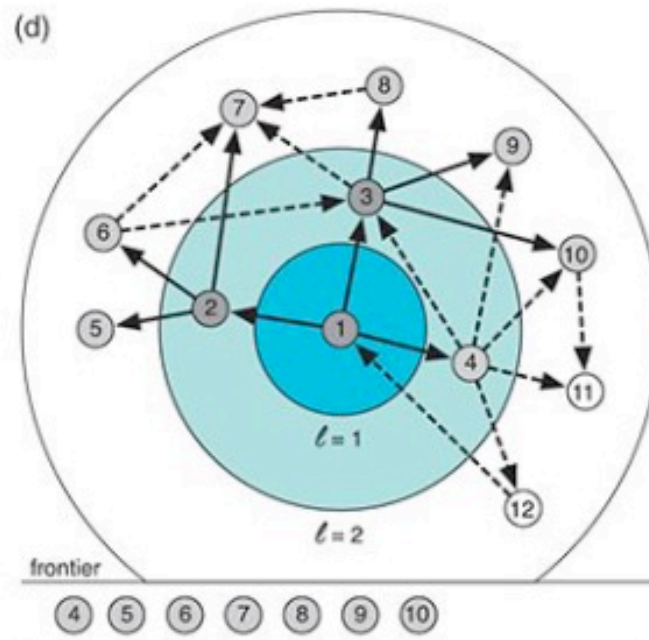
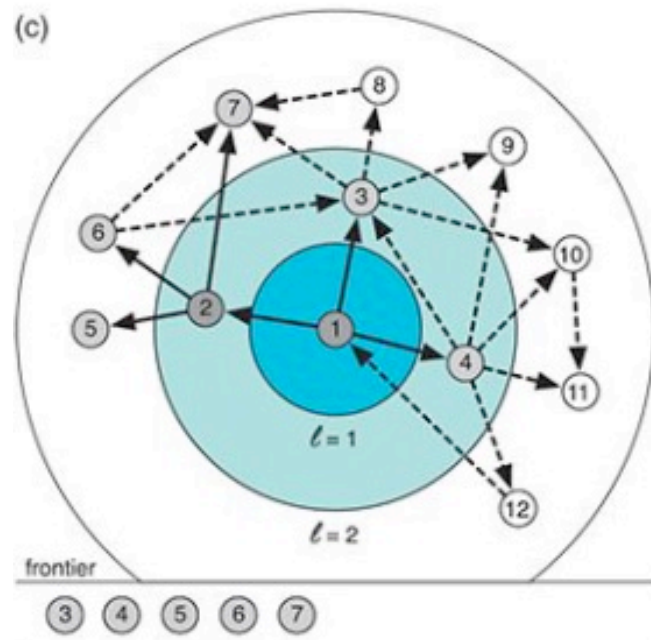
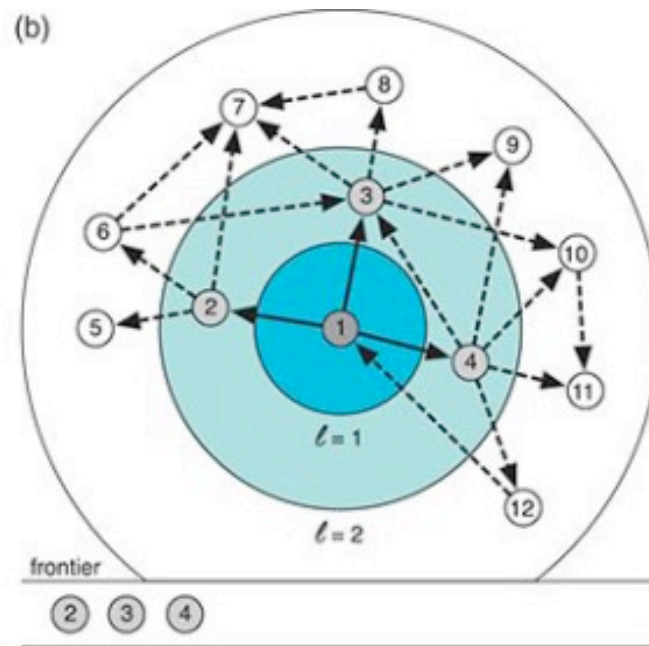
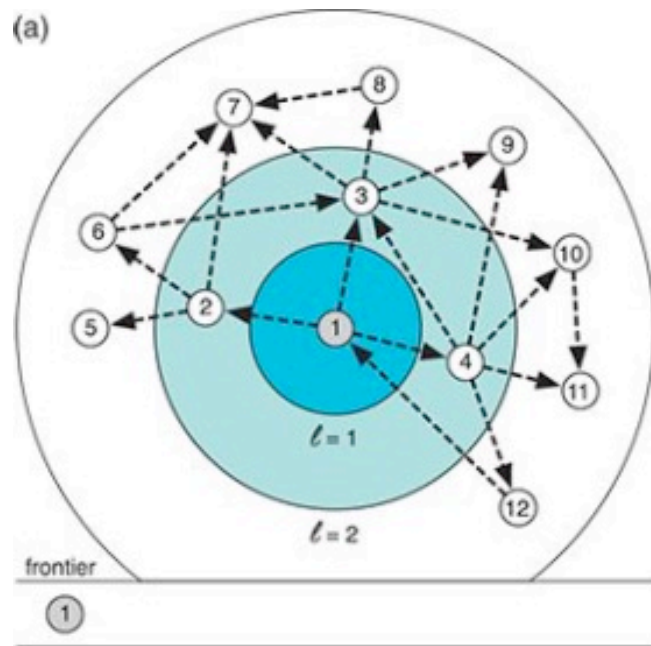
- Povezane mreže koje bi brisanje bilo koje veze bi razdvojilo mrežu na dvije komponente
- $L = N - 1$, nema ciklusa
- Na slici dva prikaza stabla sa čvorovima a i b kao korijenima stabala
- Stabla imaju hijerarhiju

Pronalazak najkraćeg puta - BFS



Breadth first search

- Nerekurzivni algoritam za BFS grafa G krenuvši od vrha v :
 - procedura $\text{BFS}(G, i)$ označi i kao obiđen
ispiši i
 - stavi i u red Q
 - dok ima elemenata u redu Q
 - uzmi i iz reda Q
 - za sve neobiđene vrhove j susjedne vrhu i
 - ako j nije obiđen
 - označi j kao obiđen
 - ispiši j
 - stavi j u red Q
- Složenost $\Theta(|E| + |V|)$



BFS – najkraća udaljenost

Krenemo s početnim čvorom s i stavimo ga u red Q .

Njegova udaljenost je $l(s,s)=0$, a za sve ostale čvorove postavimo -1 .

Inicijaliziramo stablo najkraćeg puta sa čvorovima bez veza.

U svakoj iteraciji posjetimo slijedeći čvor u redu.

Za svakog neobiđenog susjeda j od i ponavljamo ova tri koraka

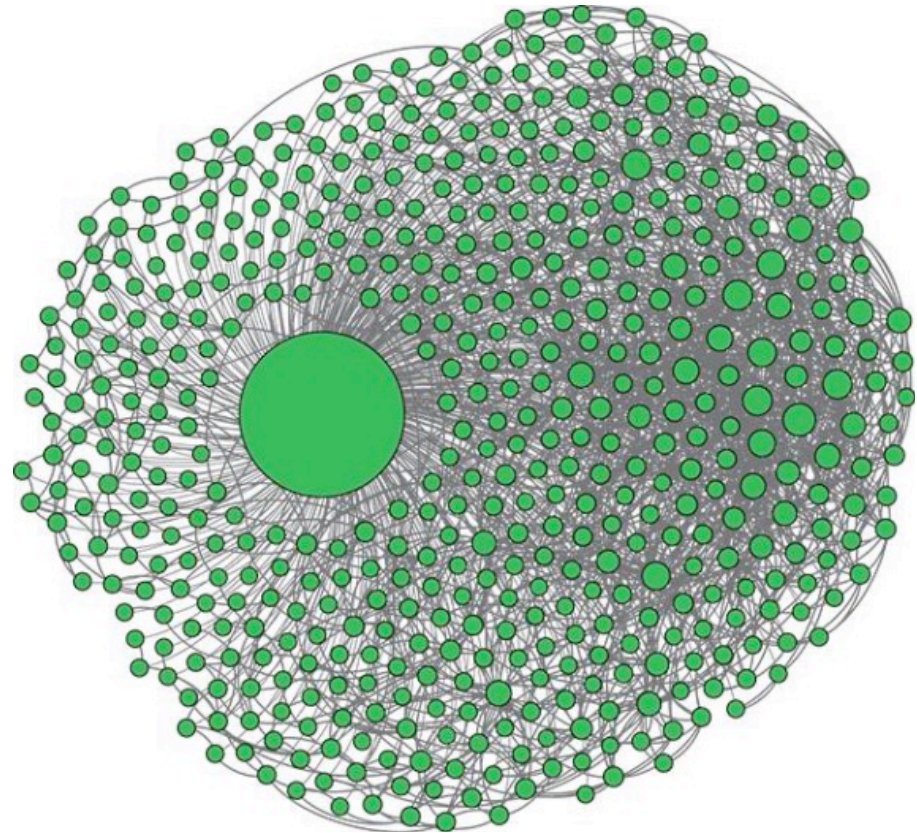
1. Stavimo j u red Q .
2. Postavimo udaljenost j od s na $l(s,j) = l(s,i) + 1$.
3. Dodamo direktnu vezu $(i \rightarrow j)$ u stablo najkraćeg puta

Put pretražimo unatrag od odredišnog do izvorišnog čvora (stablo)

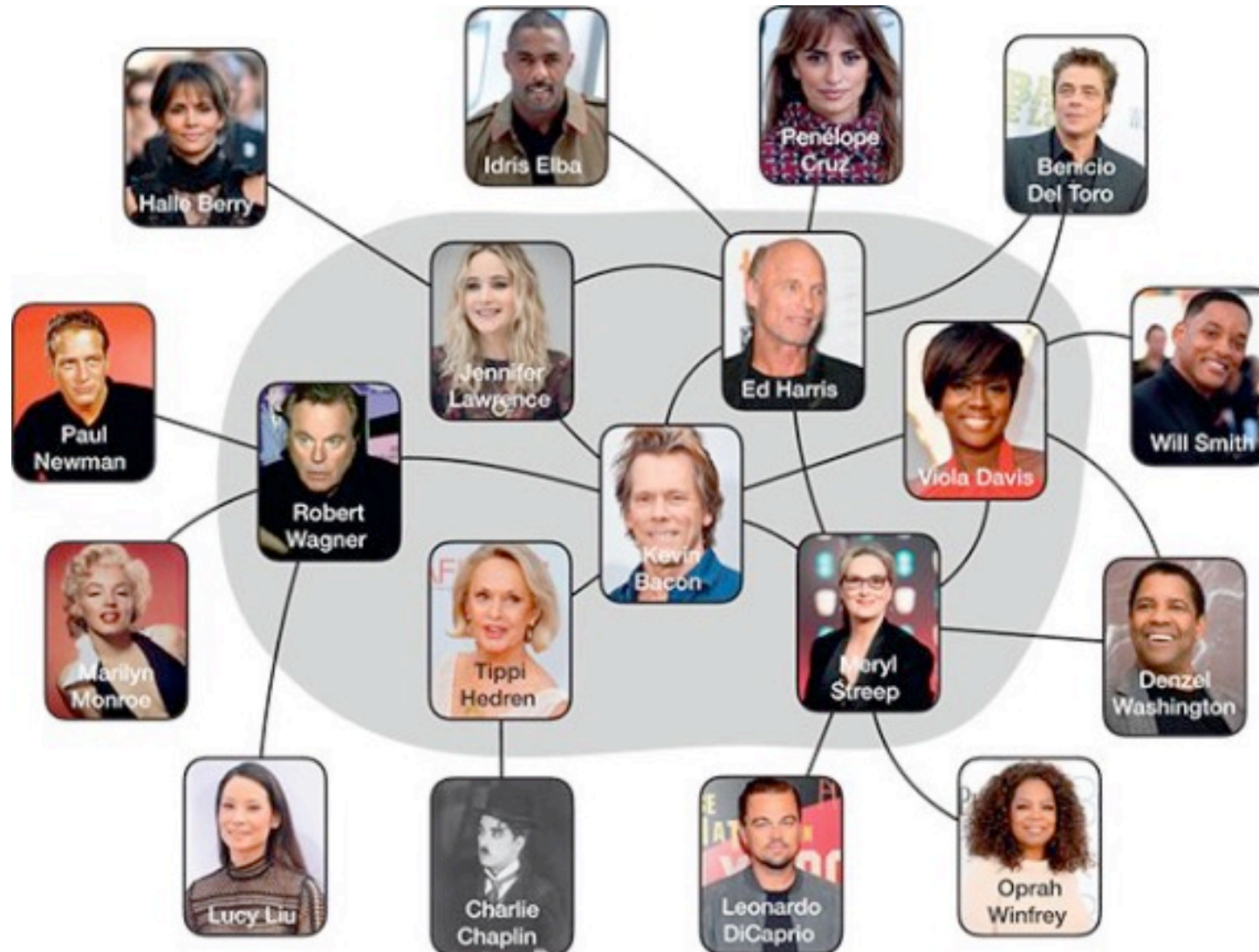
Network	Nodes (N)	Links (L)	Average path length ($\langle \ell \rangle$)	Clustering coefficient (C)
Facebook Northwestern Univ.	10,567	488,337	2.7	0.24
IMDB movies and stars	563,443	921,160	12.1	0
IMDB co-stars	252,999	1,015,187	6.8	0.67
Twitter US politics	18,470	48,365	5.6	0.03
Enron email	87,273	321,918	3.6	0.12
Wikipedia math	15,220	194,103	3.9	0.31
Internet routers	190,914	607,610	7.0	0.16
US air transportation	546	2,781	3.2	0.49
World air transportation	3,179	18,617	4.0	0.49
Yeast protein interactions	1,870	2,277	6.8	0.07
<i>C. elegans</i> brain	297	2,345	4.0	0.29
Everglades ecological food web	69	916	2.2	0.55

Socijalna udaljenost

- Očekivanje koliko su dva čvora u mreži udaljena
- U mreži cesta i energetskog napajanja mogu biti jako daleko
- Mreža koautorstva – Erdosov broj



Six degrees of Kevin Bacon



Mali svijet

- Otkrivanje zajedničkih prijatelja
- „Svijet je mali!!”
- Socijalne mreže imaju mali diameter i još manji prosječni najkraći put
- 6 stupnjeva razdvojenosti

Stanley Milgram

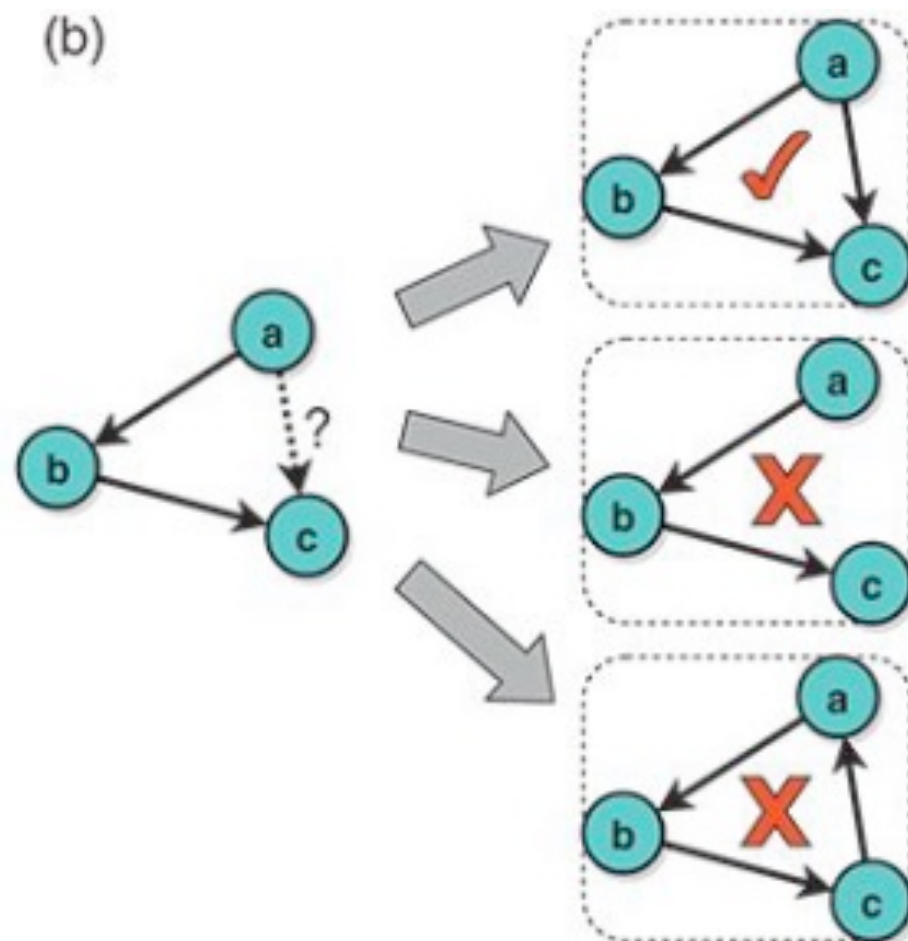
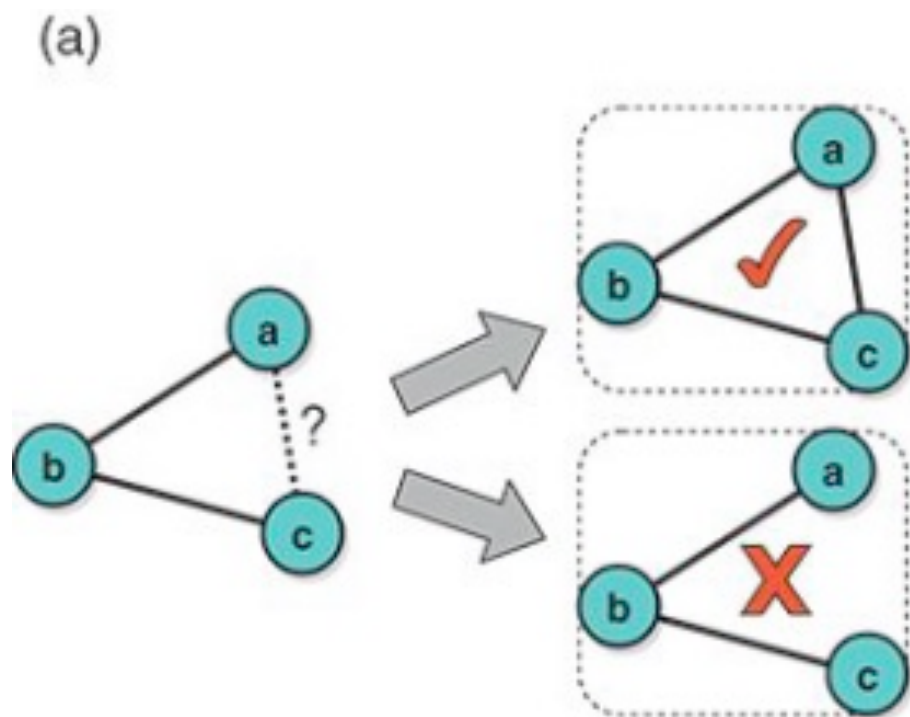
- 160 učesnika iz Nebraska i Kanzasa su slali pismo do ciljane osobe u Massachusettsu
- Pismo je slano nekom koga znamo i tko bi mogao znati ciljanu osobu
- 42 pisma (26 %) došla su do cilja
- Prosječni najkraći put je bio 6
- Facebook 2011 – 4.74
- Kratak put $\langle l \rangle = \log N$
- N – veličina mreže



Prijatelj prijatelja

- Primjer - ako su Andrej i Zoran prijatelji s Gordanom, vjerojatno su i sami prijatelji
- „Prijatelj mog prijatelja je moj prijatelj”
- Tri prijatelja tvore trokut
- Triada - skup od tri čvora – kada su svi povezani -> trokut

Trokuti i triade



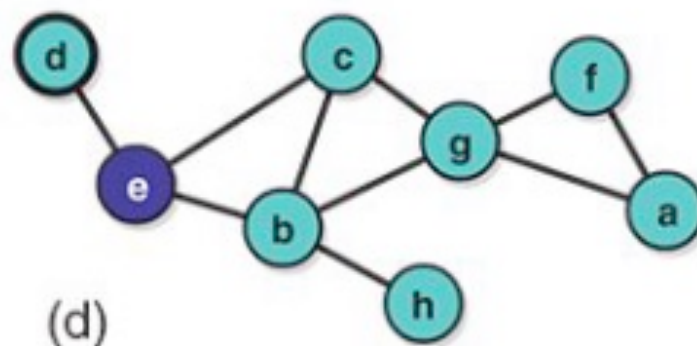
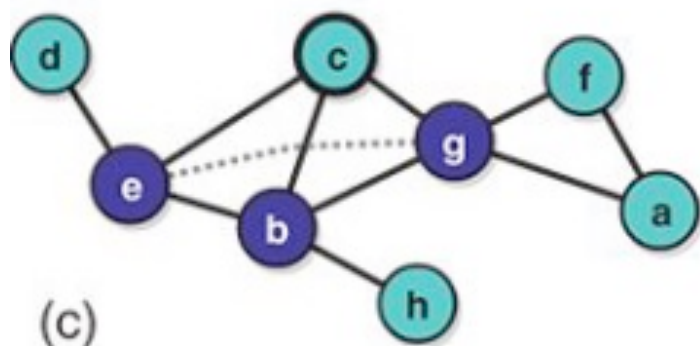
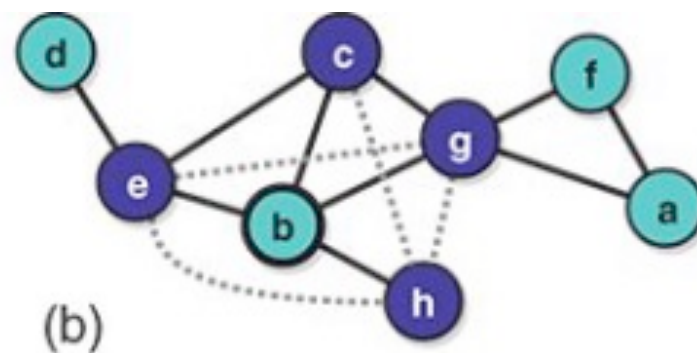
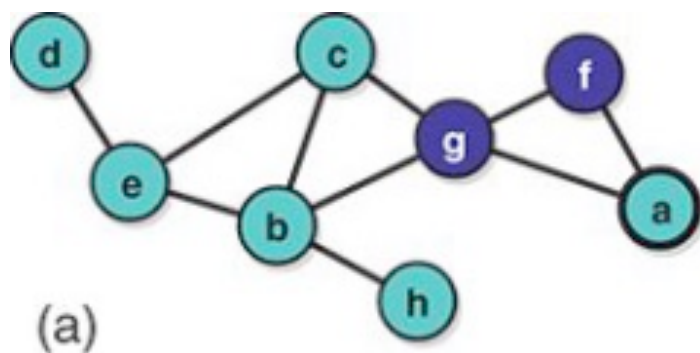
Koeficijent klasteriranja čvora

- Postotak parova susjeda promatranog čvora koji su međusobno povezani
- Omjer broja trokuta koji uključuju čvor i i maksimalan broj trokuta u kojima može sudjelovati
- $$C(i) = \frac{\tau(i)}{\tau_{max}(i)} = \frac{\tau(i)}{\binom{k_i}{2}} = \frac{2\tau(i)}{k_i(k_i - 1)},$$
- $\tau(i)$ – broj trokuta koji uključuje i
- $\tau_{max}(i)$ – maksimalan broj trokuta koji uključuje i i njegove susjede k_i
- $k_i > 1$

Koeficijent klasteriranja mreže

- $C = \frac{\sum_{i:k_i > 1} C(i)}{N_{k > 1}}$
- Čvorovi za koje je $k < 2$ ne ulaze u računanje prosječno koeficijenta klasteriranja

Primjer koeficijenta klasteriranja



Koeficijent klasteriranja

- Definicija se odnosi samo na neusmjerene mreže
- Za usmjerene potrebno je definirati tipove trokuta
- Socijalne mreže obično imaju velik koeficijent klasteriranja (preporuke)

Watts-Strogatz (1998) – Mali svijet

