**Sveučilište u Zagrebu**
**Fakultet elektrotehnike i računarstva**
**Ak.g. 2022./23.**
**Komunikacijski protokoli**

**Ignac Lovrek**
**Modeli telekomunikacijskih procesa - teorija i primjena Petrijevih mreža**
**Školska knjiga, Zagreb, 1997.**

## 3. PETRIJEVA MREŽA

Pojam Petrijeve mreže odnosi se na mrežu mjesta i prijelaza u kojoj mjesta imaju značenje uvjeta, a prijelazi događaja u smislu definicije sustava uvjeta i događaja. Za razliku od modela automata izravno se upotrebljava pojam uvjeta, a pojam stanja definira se kao skup istodobno ispunjenih uvjeta što omogućuje detaljniji opis pojedinog procesa i dopušta njihovo međusobno povezivanje.

### 3.1. STRUKTURA I IZVEDBA PETRIJEVE MREŽE

U literaturi se Petrijeva mreža definira na više načina. Opis Petrijeve mreže koji se oslanja na opću teoriju mreža polazi od šestorke:

$$PN = (S, T; F, K, W, M_0),$$

koja se naziva Petrijevom mrežom (mrežom mjesta i prijelaza) ako i samo ako ima sljedeća svojstva:

- $N = (S, T; F)$ je usmjerena mreža pri čemu $S$ označava skup mjesta, $T$ skup prijelaza, a $F$ relaciju toka.
- $K : S \rightarrow N \cup \{\omega\}$ pridružuje svakome mjestu kapacitet, možda beskonačan, izražen u broju oznaka ($\omega$ – skup nenegativnih cijelih brojeva).
- $W : F \rightarrow N$ pridružuje svakoj grani multiplicitet.
- $M_0 : S \rightarrow N \cup \{\omega\}$ određuje početno označavanje, odnosno distribuciju oznaka u mjestima mreže koja uzima u obzir kapacitet svakog mjesta.

Pravilo izvedbe prijelaza je sljedeće:

Neka je $t \in T$ prijelaz s $m$ ulaznih mjesta, $\bullet t = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ i $n$ izlaznih mjesta $t\bullet = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Izvedba prijelaza $t$ smanjuje broj oznaka svakog ulaznog mjesta $a_i$ za $\mathrm{W}(a_i, t)$ i povećava broj oznaka svakog izlaznog mjesta $b_j$ za $\mathrm{W}(t, b_j)$. Prijelaz se može izvesti uz označavanje $M$ ako i samo ako sva ulazna mjesta sadrže dovoljno oznaka:

$$M(a_i) \geq W(a_i, \mathrm{t}),$$

a sva izlazna mjesta imaju dovoljan kapacitet:

$$M(b_j) \geq K(b_j) - \mathrm{W}(t, b_j).$$

Uvjeti koji moraju biti ostvareni za izvedbu prijelaza nazivaju se koncesijom. Ulazna mjesta opisuju preduvjete, a izlazna mjesta postuvjete.

Alternativni opis osniva se na uspostavljanju međusobnog odnosa mjesta i prijelaza funkcijama ulaza i izlaza. U tom primjeru strukturu Petrijeve mreže opisuju skup mjesta $P$, skup prijelaza $T$, funkcija ulaza $I$ i funkcija izlaza $O$. Dinamiku mreže određuje njezina izvedba aktiviranjem prijelaza. Definicija utemeljena na općoj teoriji mreža može se nazvati strogim pravilom izvedbe prijelaza. Ako se ne ograničava kapacitet mjesta, prijelaz se može izvesti ako ulazna mjesta sadrže dovoljno oznaka, a to eliminira funkciju $K$ iz razmatranja. U teorijskom smislu to odgovara oslabljenom pravilu prijelaza. Petrijeva mreža s oslabljenim pravilom prijelaza češće se primjenjuje. Praktične posljedice prihvaćanja takvog pristupa su u tome što se kapacitet mjesta utvrđuje analizom svojstava mreže u procesu njezine izvedbe, a nije pretpostavka za analiziranje.

Uz spomenute razlike može se istaknuti još jedna koja ima formalni karakter. Riječ je o odvajanju strukture od izvedbe Petrijeve mreže. Struktura i pridruženi joj grafički prikaz osnova su za statički model sustava koji opisuje međuovisnost uvjeta i događaja. Izvedba inicirana početnom ispunjenosti uvjeta (označavanjem mjesta) opisuje njegovu dinamiku, odnosno ponašanje.

*Struktura Petrijeve mreže*

Struktura Petrijeve mreže opisana je četvorkom:

$$C = (P, T, I, O)$$

sa značenjem:

| | |
|---|---|
| $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ | konačni skup mjesta, $n > 0$, $p_i \in P$ |
| $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ | konačni skup prijelaza, $m > 0$, $t_j \in T$ |
| $P \cap T = 0$, | |
| $P \cup T \neq 0$, | |
| $I : T \to P^\infty$ | funkcija ulaza |
| $O : T \to P^\infty$ | funkcija izlaza. |

Funkcija ulaza i funkcija izlaza opisuju preslikavanje iz prijelaza u skupinu ulaza, odnosno izlaza (skupina je generalizirani pojam skupa koji može sadržavati više istovrsnih elemenata). Mjesto $p_i$ je ulazno mjesto za prijelaz $t_j$ ako je $p_i \in I(t_j)$, a izlazno mjesto ako je $p_i \in O(t_j)$. Svako mjesto može biti višestruko ulazno, odnosno izlazno mjesto za neki prijelaz. Broj pojavljivanja mjesta $p_i$ kao ulaznog, odnosno izlaznog označava se s $\#(p_i, I(t_j))$ i $\#(p_i, O(t_j))$.

Funkcija ulaza i funkcija izlaza mogu se definirati i kao preslikavanje mjesta u prijelaze:

$I : P \to T^\infty$

$O : P \rightarrow T^{\infty}$,

pri čemu vrijedi:

$\#(t_{\mathrm{j}}, I(p_i)) = \#(p_i, O(t_j))$
$\#(t_{\mathrm{j}}, O(p_i)) = \#(p_i, I(t_j))$

Struktura Petrijeve mreže predočuje se bipartitnim usmjerenim multigrafom. Bipartitnost odgovara disjunktnim skupovima mjesta (oznaka ○) i prijelaza (oznaka |). Grana u grafu usmjerena je od elementa jednog skupa prema elementu drugog skupa. Dopušteno je povezivanje dvaju elemenata s više grana.

*Primjer 3.1.*

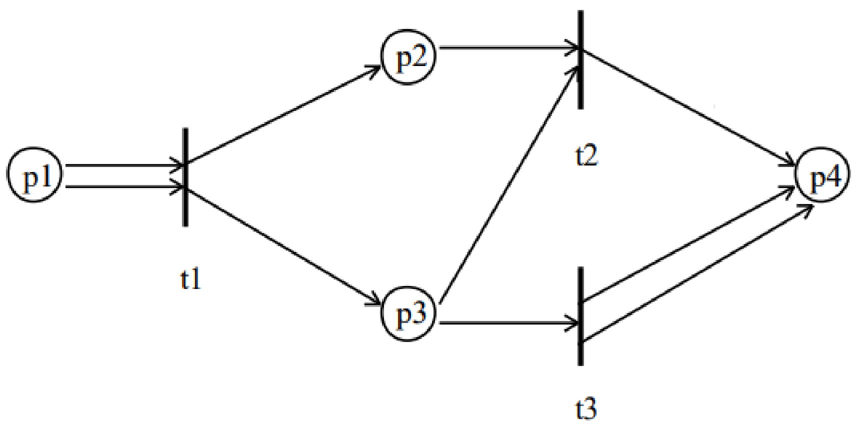
Predočite grafički strukturu Petrijeve mreže ako je zadano:

$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$
$T = \{t_1, t_2, t_3\}$

$I(t_1) = (p_1)$ $\#(p_1, I(t_1)) = 2$
$I(t_2) = (p_2, p_3)$ $\#(p_2, I(t_2)) = 1$ $\#(p_3, I(t_2)) = 1$
$I(t_3) = (p_3)$ $\#(p_3, I(t_3)) = 1$

$O(t_1) = (p_2, p_3)$ $\#(p_2, O(t_1)) = 1$ $\#(p_3, O(t_1)) = 1$
$O(t_2) = (p_4)$ $\#(p_4, O(t_2)) = 1$
$O(t_3) = (p_4)$ $\#(p_4, O(t_3)) = 2.$

Rješenje je predočeno slikom 3.1.




*Slika 3.1. Struktura Petrijeve mreže*

Graf Petrijeve mreže $G = (V, A)$ ekvivalentan je strukturi $C = (P, T, I, O)$ ako je zadovoljeno:

$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ skup čvorova
$\mathrm{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ skup grana

$V = P \cup T,\ \ P \cap T \neq 0$
$a_{\mathrm{i}} = (v_j, v_k),\ \ v_j \in P\ \text{ i }\ v_k \in T\ \text{ ili }\ v_j \in T\ \text{ i }\ v_k \in P.$

*Dualna* mreža Petrijeve mreže $C = (P, T, I, O)$ je mreža $\overline{C} = (T, P, I, O)$, a izvodi se zamjenom mjesta i prijelaza.

*Inverzna* Petrijeva mreža je mreža $-C = (P, T, O, I)$, a izvodi se zamjenom ulaza i izlaza.

*Označavanje Petrijeve mreže*

Označenu Petrijevu mrežu $M = (P, T, I, O, \mu)$ čini struktura Petrijeve mreže $C$ s vektorom oznaka $\mu$.

Označavanje Petrijeve mreže provodi se pridruživanjem oznaka (•) mjestima mreže, sa značenjem ispunjenosti uvjeta. Broj i raspored oznaka u mjestima može se izmijeniti tijekom izvedbe Petrijeve mreže.

Označavanje $\mu$ Petrijeve mreže $C = (P, T, I, O)$ je funkcija $\mu : P \rightarrow N$ ($N$ - skup nenegativnih cijelih brojeva) koja se u vektorskom obliku predočuje ovako:

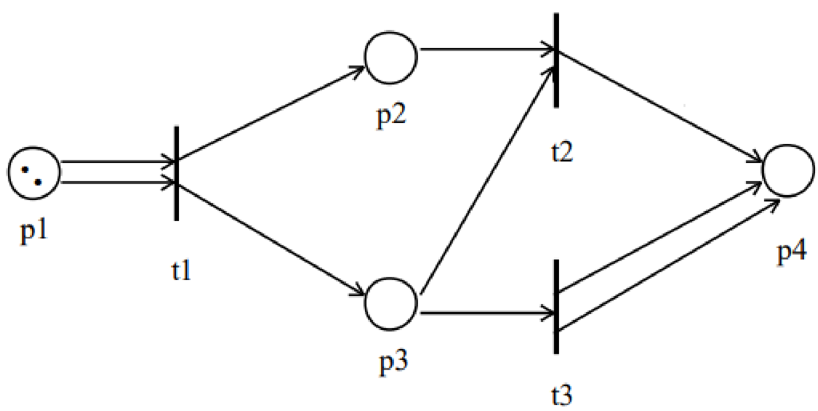
$$\mu = (\mu_1, \mu_2, . . , \mu_i., , \mu_n),$$

a $\mu_i$ odgovara broju oznaka u mjestu $p_i$, odnosno $\mu(p_i) = \mu_i$.

Broj oznaka koji se može pridružiti mjestu nije ograničen. Skup svih oznaka za Petrijevu mrežu s $n$ mjesta jest skup svih $n$-vektora, odnosno $N^n$. Praktična interpretacija vektora oznaka odgovara pojmu stanja koje se definira kao skup istodobno ispunjenih uvjeta. Za primjer 3.1 mreža označena sa:

$\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (2, 0, 0, 0)$

predočena je slikom 3.2.




Slika 3.2. Označena Petrijeva mreža

*Izvedba Petrijeve mreže*

Izvedba Petrijeve mreže određena je brojem i distribucijom oznaka. Mreža se izvodi realizacijom prijelaza, pri čemu ulazna mjesta gube oznake, a izlazna ih dobivaju.

Prijelaz $t_j \in T$ u mreži $M = (P, T, I, O, \mu)$ može se izvesti ako je za svaki $p_i \in P$:

$$\mu(p_i) \geq \#(p_i, I(t_j)),$$

odnosno ako svako ulazno mjesto ima najmanje toliko oznaka s koliko je grana povezano s prijelazom. Provedba prijelaza generira novo stanje $\mu'$ tako da za svaki $p_i \in$ P vrijedi:

$$\mu'(p_i) = \mu(p_i) - \#(p_i, I(t_j)) + \#(p_i, O(t_j)).$$

U primjeru 3.1 uz $\mu$ kao početno stanje može se izvesti samo prijelaz $t_1$, jer je ispunjeno:

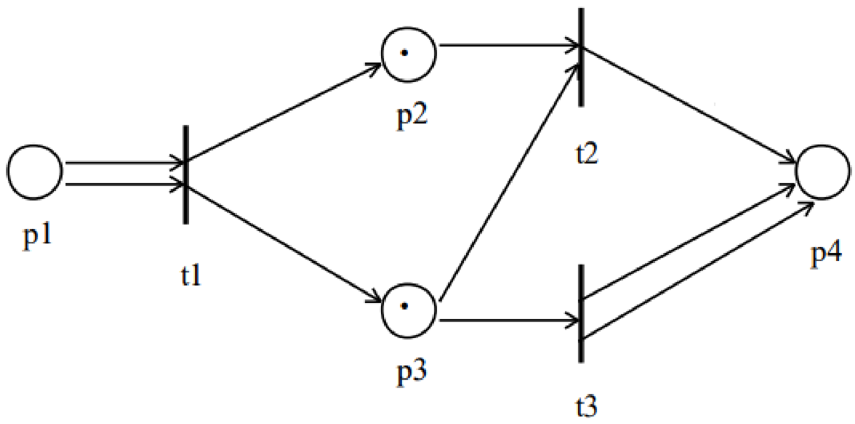
$\mu(p_1) = 2 \geq \#(p_1, I(t_1)) = 2$
$\mu(p_2) = 0 \geq \#(p_2, I(t_1)) = 0$
$\mu(p_3) = 0 \geq \#(p_3, I(t_1)) = 0$
$\mu(p_4) = 0 \geq \#(p_4, I(t_1)) = 0.$

Izvedbom prijelaza dolazi se u novo stanje:

$\mu' = (0, 1, 1, 0)$

$\mu'(p_1) = \mu(p_1) - \#(p_1, I(t_1)) + \#(p_1, O(t_1)) = 2 - 2 + 0 = 0$
$\mu'(p_2) = \mu(p_2) - \#(p_2, I(t_1)) + \#(p_2, O(t_1)) = 0 - 0 + 1 = 1$
$\mu'(p_3) = \mu(p_3) - \#(p_3, I(t_1)) + \#(p_3, O(t_1)) = 0 - 0 + 1 = 1$
$\mu'(p_4) = \mu(p_4) - \#(p_4, I(t_1)) + \#(p_4, O(t_1)) = 0 - 0 + 0 = 0.$

Sva ulazna mjesta prijelaza koji se izvodi gube oznake, a sva ih izlazna dobivaju. Stanje mreže nakon izvedbe prijelaza $t_1$ predočeno je slikom3.3.




*Slika 3.3. Stanje Petrijeve mreže nakon izvedbe prijelaza* $t_1$

Odnos mjesta i prijelaza u procesu izvedbe može biti ovakav:

$\mu'(p_i) = \mu(p_i)$ mjesto $p_i$ i prijelaz $t_j$ nisu povezani,
$\mu'(p_i) = \mu(p_i) - \#(p_i, I(t_j))$ mjesto $p_i$ je ulazno mjesto za prijelaz $t_j$ ,
$\mu'(p_i) = \mu(p_i) + \#(p_i, O(t_j))$ mjesto $p_i$ je izlazno mjesto za prijelaz $t_j$ ,
$\mu'(p_i) = \mu(p_i) - \#(p_i, I(t_j)) + \#(p_i, O(t_j))$ mjesto $p_i$ je ulazno i izlazno za prijelaz $t_j$ .

Prostor stanja označava skup svih stanja, a promjenu stanja opisuje funkcija sljedećeg stanja i to:

$$\delta : N^n \text{ x } T \rightarrow N^n,$$

koja je za mrežu $M = (P, T, I, O, \mu)$ i prijelaz $t_j \in T$ definirana ako i samo ako se prijelaz $t_j$ može izvesti u stanju $\mu$. Ako je $\delta(\mu, t_j)$ definirano tada je $\delta(\mu, t_j) = \mu'$.

*Graf stanja i stablo dostupnosti*

Graf stanja dobiva se izvedbom Petrijeve mreže uz zadano početno stanje. U prvom koraku određuju se prijelazi koji se mogu izvesti u početnom stanju. Svakome takvom prijelazu odgovara grana prema čvoru koji opisuje novo stanje u koje mreža prelazi provedbom prijelaza. Svaki sljedeći korak izvodi se na isti način, slično metodi promjene stanja. Mreža može prijeći u sljedeće stanje koje već postoji. Tada se granom povezuju dva postojeća čvora u grafu stanja.

Graf stanja ekvivalentan je njezinom stablu dostupnosti. Početno stanje označava korijen stabla dostupnosti. Stablasta struktura postiže se tako da se za svaki prijelaz uvode nova grana i novi čvor, bez povezivanja postojećih stanja.

Dvije vrsta stanja isključuju dalje korake. To su završno stanje (u kojemu se nijedan prijelaz ne može izvesti) i umnoženo stanje (koje se već otprije pojavilo kao sljedeće stanje). Umnoženo stanje pomaže konačnom prikazu stabla dostupnosti.

Ostaje problem ograničavanja pojavljivanja jednog prijelaza unutar slijeda prijelaza koji se izvode. To se odražava pojavom stanja u kojima su označena ista mjesta, ali su neka od njih označena različitim brojem oznaka.

Neka je takvo prvo stanje μ, a nekom sekvencijom prijelaza došlo se u drugo stanje μ' u kojemu se ponovno izvodi ista sekvencija stanja i prelazi u μ''. Tada vrijedi:

$$\mu' = \mu + (\mu' - \mu)$$
$$\mu'' = \mu' + (\mu' - \mu) = \mu + 2(\mu' - \mu),$$

odnosno općenito:

$$\mu^n = \mu + n(\mu' - \mu),$$

što pokazuje da će se po volji velik broj oznaka u nekome mjestu dobiti odgovarajućim ponavljanjem slijeda prijelaza. Takav se broj oznaka može smatrati i beskonačnim, pa se može označiti simbolom ω za koji, uz zadanu konstantu *a*, vrijedi:

$$\omega + a = \omega$$
$$\omega - a = \omega$$
$$a < \omega$$
$$\omega \leq \omega.$$

Tako se postiže konačnost grafa stanja.

Graf stanja je temelj za određivanje dinamičkih svojstava modeliranog sustava.

## 3.2. OBILJEŽJA PETRIJEVE MREŽE

*Dostupnost*

Odnos među stanjima opisan je dostupnošću. Za mrežu s početnim stanjem $\mu^0$ izvedbom se generira slijed stanja ($\mu^0, \mu^1, \mu^2, ..$) i slijed izvedenih prijelaza ($t_j^0$, $t_j^1, t_j^2, ..$) pri čemu vrijedi odnos:

$$\delta(\mu, t_j^{\,k}) = \mu^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Za mrežu $M = (P, T, I, O, \mu)$ stanje $\mu'$ je neposredno dostupno iz $\mu$ ako postoji prijelaz $t_j \in T$ takav da je $\delta(\mu, t_j) = \mu'$. Ako je $\mu'$ stanje neposredno dostupno iz $\mu$, a $\mu''$ iz $\mu'$, tada je $\mu''$ dostupno iz $\mu$.

Skup dostupnih stanja $R(M) = R(C, \mu)$ je najmanji takav skup definiran ovako:

$\mu \in R(M)$,

ako je $\mu' \in R(M)$ i $\mu'' = \delta(\mu', t_j)$ za neki $t_j \in T$, tada je $\mu'' \in R(M)$.

Proširena funkcija sljedećeg stanja definirana je za stanje $\mu$ i slijed prijelaza $\sigma$ ovako:

$\delta(\mu, t_j\sigma) = \delta(\delta(\mu, t_j), \sigma)$
$\delta(\mu, \lambda) = \mu$,

pri čemu $\lambda$ označuje prazan prijelaz.

Kao problem dostupnosti formulira se pitanje da li za Petrijevu mrežu $C$ s početnim stanjem $\mu$ i neko stanje $\mu'$ vrijedi $\mu' \in R(C, \mu)$.

Dostupnost se može definirati i za podskup mjesta, i za odabrani skup stanja.

Dostupnost je važna za izučavanje dinamičkih svojstava mreže i za njezinu analizu, a to je jedan od najsloženijih problema. Složenost analize povećava i moguća interpretacija dostupnosti u procesu optimiziranja mreža.

Mreža koja ima jednostavniju strukturu od početno zadane može se zasnivati na kriteriju ekvivalencije mreža u smislu dostupnosti.

*Primjer 3.2.*

Za Petrijevu mrežu zadanu u primjeru 3.1. i početno stanje $\mu^0 = (2, 0, 0, 0)$ odredite skup dostupnih stanja, generirane sljedove stanja i prijelaza, te dostupna stanja.

$R(M)$ sadrži:

$\mu^0 = (2, 0, 0, 0)$
$\mu^1 = (0, 1, 1, 0)$
$\mu^2 = (0, 0, 0, 1)$
$\mu^3 = (0, 1, 0, 2)$.

Generirani su sljedovi stanja i prijelaza:

$(\mu^0, \mu^1, \mu^2)$ $(t_1, t_2)$
$(\mu^0, \mu^1, \mu^3)$ $(t_1, t_3)$.

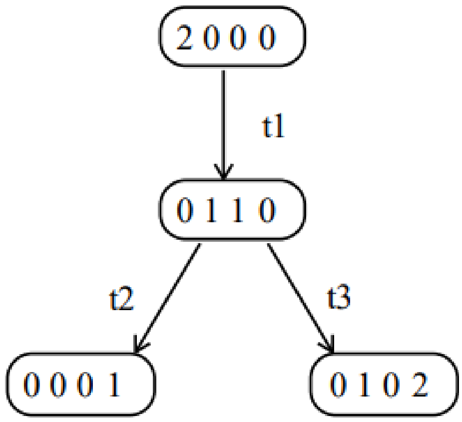
Neposredno su dostupna stanja:

$\mu^0$ i $\mu^1$
$\mu^1$ i $\mu^2$
$\mu^1$ i $\mu^3$,

a dostupna su stanja:

$\mu^0$ i $\mu^2$
$\mu^0$ i $\mu^3$.

Provedbom prijelaza generira se skup stanja predočen grafom na slici 3.4.




*Slika 3.4. Graf stanja Petrijeve mreže*

*Ograničenost*

Ograničenost se odnosi na pojam maksimalnog broja oznaka u mjestu mreže.

Mjesto $p_i \in P$ mreže $M = (P, T, I, O, \mu)$ je $k$-ograničeno ako za svaki $\mu' \in R(M)$ vrijedi $\mu'(p_i) \leq k$. Petrijeva mreža je $k$-ograničena ako su sva mjesta u mreži najmanje $k$-ograničena. Ograničenost se može razmatrati kao funkcija mjesta kojima se može pridijeliti različit stupanj ograničenosti.

U primjeru 3.2. mreža je 2-ograničena.

*Sigurnost*

Svojstvo sigurnosti Petrijeve mreže određuje da broj oznaka u svakome mjestu ne smije biti veći od jedan, odnosno da svaki uvjet može biti samo ispunjen ili neispunjen.

Mjesto $p_i \in P$ mreže $M = (P, T, I, O, \mu)$ je sigurno ako za svaki $\mu' \in R(M)$ vrijedi $\mu'(p_i) \leq 1$. Petrijeva mreža je sigurna ako su sva mjesta u njoj sigurna.

Mreža iz primjera 3.2. nije sigurna, jer su već početnim stanjem postavljene dvije oznake u mjesto $p_1$, a izvedba prijelaza $t_3$ također upisuje dvije oznake u $p_4$. Mjesto $p_4$ ne može biti sigurno ni uz drukčije početno stanje, jer je dvostruko izlazno mjesto za prijelaz $t_3$.

Mjesta koja nemaju višestruke grane prema istom prijelazu mogu se pretvoriti u sigurna modifikacijom mreže, i to:

ako $p_i \in I(t_j)$ i $p_i \notin O(t_j)$, dodati $p_i'$ u $O(t_j)$
ako $p_i \in O(t_j))$ i $p_i \notin I(t_j)$, dodati $p_i'$ u $I(t_j)$,

pri čemu su $p_i$ i $p_i'$ komplementarna mjesta. Svaki prijelaz koji eliminira oznaku iz $p_i$ ubacuje oznaku u $p_i'$ i obratno. Početno stanje također mora osigurati komplementarnost oznaka u $p_i$ i $p_i'$.

Sigurnost i ograničenost određuju kapacitet modeliranih elemenata sustava. U sigurnoj ili ograničenoj mreži nema prekoračenja kapaciteta.

*Primjer 3.3.*

Modificirajte mrežu iz primjera 3.1. tako da postane sigurna.

Uvodi se novi prijelaz $t_4$ između mjesta $p_4$ i $p_1$.

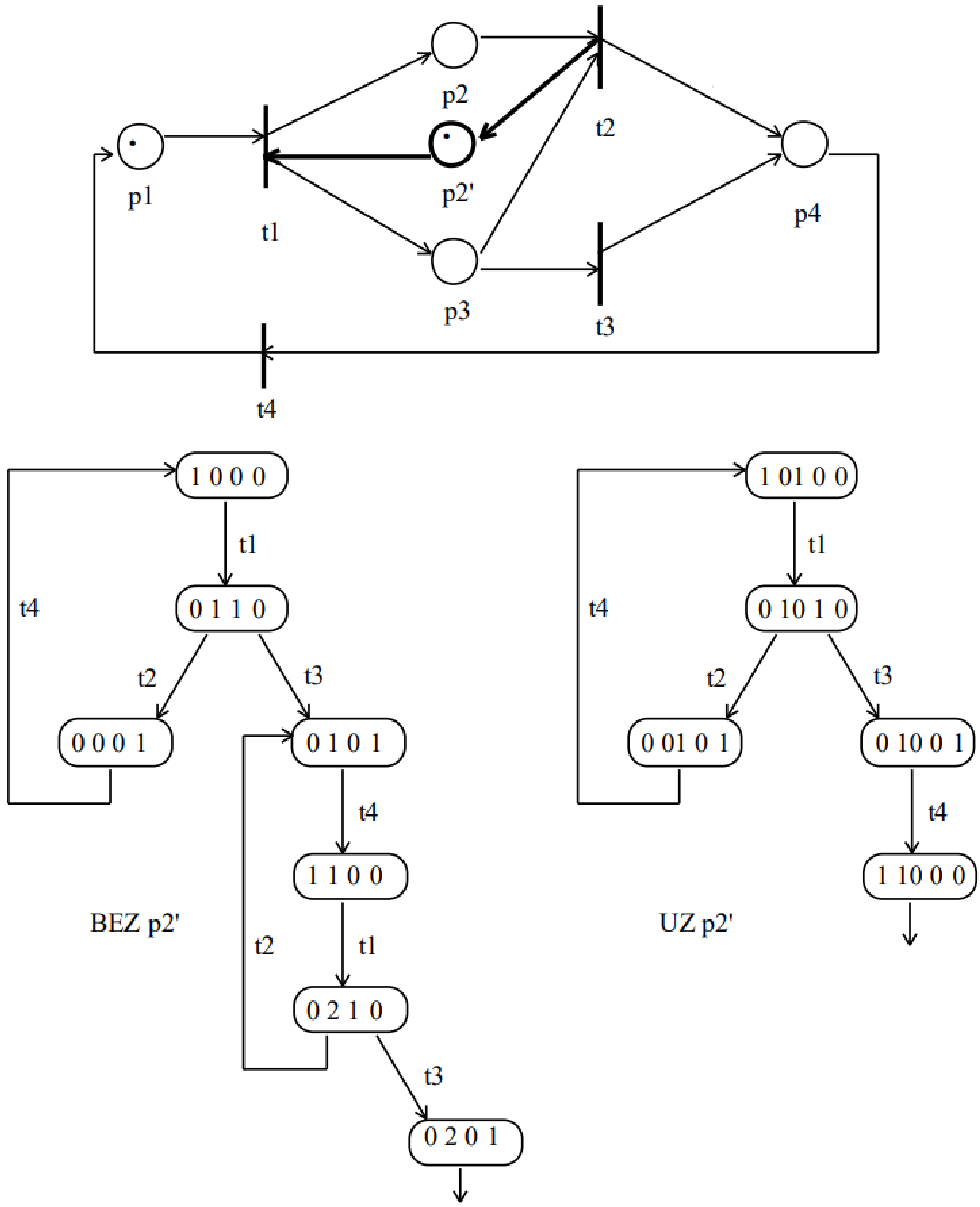
Ukida se višestruka povezanost mjesta i prijelaza što je prvi preduvjet za sigurnost mreže (sl.3.5).

Nadalje, početno stanje mora biti sigurno, što je drugi preduvjet za sigurnost mreže:

$\mu^0 = (1, 0, 0, 0)$.

To nije dovoljno da bi mreža bila sigurna, jer se zbog ovisnosti mjesta i prijelaza "gomilaju" oznake u mjestu $p_2$. Štoviše, mreža postaje neograničena, jer se svakim prolazom kroz $t_1$ generira stanje sa sve većim brojem oznaka. Mjesto $p_2$ zapravo broji izvedbe prijelaza $t_1$ i sa svakim aktiviranjem prijelaza broj oznaka raste za 1.

Mjesto $p_2$ nije sigurno pa se sigurnost mreže pokušava ostvariti uvođenjem komplementarnog mjesta $p_2'$. Graf stanja pokazuje da mreža koja bez $p_2'$ nije bila sigurna, uz $p_2'$ to postaje.




*Slika 3.5. Sigurnost Petrijeve mreže*

*Aktivnost*

Svojstvo aktivnosti (životnosti) odnosi se na mogućnost izvedbe prijelaza. Aktivna mreža isključuje mogućnost blokiranja ili potpunog zastoja u modeliranom sustavu koji se manifestira postojanjem prijelaza koji se nikad ne izvodi ili stanja u kojemu se ne može izvesti nijedan prijelaz.

Za razliku od drugih svojstava koja su precizno i jednoznačno definirana, pojam aktivnosti ima više interpretacija:

- prijelaz $t_j$ Petrijeve mreže $C$ je potencijalno aktivan u stanju $\mu$ ako postoji stanje $\mu' \in R(C, \mu)$ i ako se $t_j$ može izvesti u $\mu'$
- prijelaz $t_j$ je aktivan u stanju $\mu$ ako je potencijalno aktivan u svim stanjima iz $R(C, \mu)$
- prijelaz $t_j$ je aktivan ako se iz jednog stanja, izvedbom drugih prijelaza, može prijeći u stanje u kojemu se izvodi $t_j$ .

Detaljnija kategorizacija obuhvaća pet razina aktivnosti prijelaza, i to:

0 - $t_j$ neaktivan (ne može se izvesti ni u jednom slijedu prijelaza),
1 - $t_j$ potencijalno aktivan (može se izvesti barem u jednom stanju),
2 - $t_j$ se u slijedu prijelaza izvodi najmanje $n$ puta,
3 - $t_j$ se u beskonačnom slijedu prijelaza izvodi bezbroj puta i
4 - $t_j$ aktivan (za svako stanje postoji slijed prijelaza u kojem će se prijelaz izvesti)

Petrijeva je mreža $i$-aktivna ako su svi prijelazi aktivni na razini $i$. Mreža (prijelaz) je neaktivna ako je razine 0, a aktivna ako je razine 4.

U primjeru 3.3. bez mjesta $p_2'$ prijelazi su aktivni na razini:

4 $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$ (za svako stanje postoji slijed prijelaza u kojem se prijelaz može izvesti).

Mreža je aktivna (4-aktivna), ali nije ograničena. Uz mjesto $p_2'$:

1 $t_3$ (postoji stanje u kojem se prijelaz može izvesti),
3 $t_1$, $t_2$, $t_4$ (postoji slijed prijelaza u kojem se prijelaz može izvesti bezbroj puta).

Mreža je 1- aktivna i sigurna, pri čemu se u stanju (1, 1, 0, 0, 0) ne može izvesti nijedan prijelaz (stanje blokiranja - zastoja).

Aktivnost je najvažnije svojstvo za modeliranje telekomunikacijskih procesa, a teorijski i praktično osobitu važnost imaju aktivne sigurne mreže.

*Reverzibilnost*

Petrijeva mreža je reverzibilna ako se iz svakog stanja $\mu' \in R(M)$ može vratiti u početno stanje $\mu$, odnosno ako je početno stanje dostupno iz svakog stanja.

Mreža iz primjera 3.1. nije reverzibilna, ni mreža iz primjera 3.3. uz mjesto $p_2'$, a mreža bez $p_2'$ je reverzibilna.

Oslabljena definicija reverzibilnosti dopušta povrat u neko stanje $\mu^* \neq \mu$.

U telekomunikacijskim procesima često se nakon završetka nekih operacija zahtijeva povrat u početno stanje. Za to su najprikladnije reverzibilne aktivne sigurne mreže.

*Prekrivanje*

Prekrivanje se odnosi na stanja za koja vrijedi $\mu'' \geq \mu'$, a iskazuje se pitanjem da li za mrežu $C$ s početnim stanjem $\mu$ i stanje $\mu'$ postoji stanje $\mu'' \in R(C, \mu)$ takvo da je $\mu'' \geq \mu'$.

Prekrivanje zahtijeva najmanje 1-aktivnu mrežu, odnosno potencijalno izvedive prijelaze.

Prekrivanje se može definirati i za podskup mjesta, a i za odabrani skup stanja. Po složenosti prekrivanje je problem sličan dostupnosti.

*Konzervacija oznaka*

Svojstvo konzervacije odnosi se na zadržavanje jednakoga, početnog, broja oznaka u svim stanjima mreže.

Petrijeva mreža $C = (P, T, I, O)$ s početnim stanjem $\mu$ je strogo konzervacijska ako za svaki $\mu' \in R(M)$ vrijedi:

$$\Sigma\, \mu'(p_i) = \Sigma\, \mu(p_i)$$

Takva postavka izrazito utječe na strukturu mreže, jer je očito da broj ulaza i izlaza za svaki prijelaz mora biti jednak. Mreža koja nije strogo konzervacijska može se pretvoriti u takvu mrežu izjednačavanjem broja ulaznih i izlaznih grana za svaki prijelaz (dodavanje paralelnih grana).

Konzervacijsko svojstvo može se definirati i u oslabljenom obliku pridjeljivanjem težinskih vrijednosti mjestima. Petrijeva mreža je konzervacijska s obzirom na težinski faktor $w$:

$$w = (w_1, w_2, . . , w_i, . . ,w_n),\ w_i \geq 0,$$

ako za svaki $\mu' \in R(C, \mu)$ vrijedi:

$$\Sigma\, w_i\, \mu'(p_i) = \Sigma\, w_i\, \mu(p_i).$$

*Konfliktnost i simultanost prijelaza*

Dva osnovna odnosa prijelaza u nekom stanju mreže opisana su konfliktnom i simultanom izvedbom.

Prijelazi $t_i$ i $t_j$ su konfliktni ako i samo ako postoji stanje μ u kojemu se oba prijelaza mogu izvesti:

$$\mu(p_k) \geq \#(p_k, I(t_i)), \text{ za svaki } p_k \in P$$

$$\mu(p_k) \geq \#(p_k, I(tj)), \text{ za svaki } p_k \in P,$$

ali izvedba jednoga isključuje izvedbu drugoga:

$$\mu(p_k) < \#(p_k, I(t_i)) + \#(p_k, I(t_j)), \text{ za neki } p_k \in P.$$

Prijelaza $t_i$ i $t_j$ su simultani ako postoji stanje μ u kojemu se oni mogu izvesti, a izvedba jednoga ne utječe na izvedbu drugoga:

$$\mu(p_k) \geq \#(p_k, I(t_i)) + \#(p_k, I(t_j)), \text{ za svaki } p_k \in P.$$

U primjerima 3.1. i 3.3. prijelazi $t_2$ i $t_3$ su konfliktni.

*Perzistentnost*

Pojam konflikta prijelaza na razini mreže izražava se svojstvom perzistentnosti. Petrijeva mreža se naziva perzistentnom ako prijelaz koji se može izvesti gubi uvjete samo vlastitom izvedbom. Perzistentnost ima značenje odsutnosti konflikta u procesu izvedbe mreže. Primjeri 3.1. i 3.3. ne opisuju perzistentne mreže.

*Sinkronična distanca*

Sinkronična distanca označava stupanj usklađenosti dvaju prijelaza $t_i$ i $t_j$ u $M$:

$$d_{ij} = \max_{\sigma} ( \#\sigma(t_i) - \#\sigma(t_j))$$

i odgovara razlici broja izvedbi prijelaza u slijedu σ.

## 3.3. IZVEDENI MODELI

Osnovni model Petrijeve mreže doživio je niz proširenja i ograničenja kojima se utječe na snagu modeliranja ili snagu odlučivanja o strukturnim i dinamičkim aspektima modeliranog sustava. Proširenja kao i ograničenja izvornog Petrijevog modela upućuju na izvedene modele. Dvije su osnovne skupine izvedenih modela - modeli s mogućnošću ispitivanja neispunjenog uvjeta i modeli s klasificiranim mjestima.

*Modeli s mogućnošću ispitivanja neispunjenog uvjeta*

Opću mrežu, sustav uvjeta i događaja i Petrijevu mrežu kao mrežu mjesta i prijelaza karakterizira koncesija utemeljena na ispunjenosti uvjeta, odnosno označenosti mjesta. Za takav pristup bitno je ispitivanje ispunjenosti uvjeta. Proširenje Petrijeve mreže u smislu ispitivanja neispunjenog uvjeta, odnosno neoznačenog mjesta redefinira pojam koncesije. Može se pokazati da proširenje mreže koje uključuje ispitivanje neispunjenog uvjeta uspostavlja ekvivalenciju mreže i Turingova automata. To pruža veće mogućnosti modeliranja, ali se ujedno pojavljuju veći problemi pri utvrđivanju analitičkih svojstava čime slabi snaga odlučivanja. Uvođenje ispitivanja neispunjenih uvjeta rješava se na nekoliko načina, a najzanimljiviji su ovi:

- Petrijeva mreža s inhibicijskim granama
- Petrijeva mreža s isključivi ILI prijelazima
- Petrijeva mreža s usmjerenim prijelazima
- Petrijeva mreža s prioritetima i
- vremenska Petrijeva mreža.

Zajednička ideja proširenja sadržana je u konceptu inhibicijske grane, a ostali pristupi upućuju na mrežne modele kojima se može pridružiti ekvivalentna mreža s inhibicijskim granama.

*Modeli s klasificiranim mjestima*

Praktična primjena Petrijeve mreže zahtijeva neka rješenja koja modificiraju izvorni pojam uvjeta i pridruženog mu mjesta, kao i pojam oznake. Tako se ostvaruju mreže s mjestima svrstanim u podskupove zajedničkih obilježja, odnosno mreže s klasificiranim mjestima. Karakteristični primjeri tako izvedenih modela su mreže s mjestima Booleova tipa i obojene mreže.

### 3.3.1. Petrijeva mreža s inhibicijskom granom

Inhibicijska grana između mjesta $p_i$ i prijelaza $t_j$ ima značenje negacije tako da se prijelaz $t_j$ izvodi ako su sva "normalna" mjesta označena, a inhibicijsko mjesto nije označeno. Svaki prijelaz $t_j$ može imati proizvoljan broj inhibicijskih mjesta. Inhibicijska grana označava se kružićem (o) umjesto strelicom na simbolu prijelaza (sl.3.6).


*Slika 3.6. Inhibicijska grana*

U Petrijevoj mreži s inhibicijskim granama modificirana su samo pravila za izvedbu prijelaza. Isto vrijedi i za ostale izvedene modele koji omogućuju ispitivanje neispunjenog uvjeta.

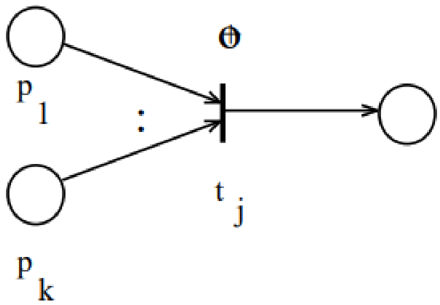
Praktična primjena inhibicijske grane u modelima telekomunikacijskih procesa može uvelike pojednostavniti strukturu modela, jer se često pojavljuju situacije u kojima se uz ispunjen uvjet provodi jedan, a uz neispunjen uvjet drugi skup akcija (npr. slobodan korisnik - zauzet korisnik).

### 3.3.2. Petrijeva mreža s isključivim ILI prijelazom

Pod isključivi ILI prijelazom razumijeva se prijelaz koji se izvodi ako je samo jedno od ulaznih mjesta označeno ili neparan broj ulaznih mjesta (sl.3.7).

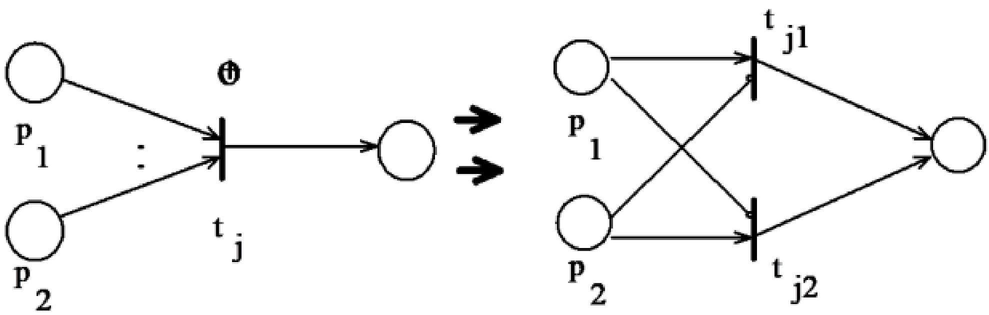
Isključivi ILI prijelaz s *k* ulaznih mjesta kojim se modelira slučaj "1 od *k*" može se opisati s *k* prijelaza od kojih je svaki povezan s mjestima ovako:

- svako ulazno mjesto povezano je s jednim od prijelaza "normalnom" granom, a s ostalima inhibicijskom granom
- izlazno mjesto za sve prijelaze je zajedničko i odgovara izvornom izlaznome mjestu isključivog ILI prijelaza.




*Slika 3.7. Isključivi ILI prijelaz*

Primjer za pretvorbu ILI prijelaza sa dva ulazna mjesta predočen je slikom 3.8. Taj primjer pokazuje da uporaba složenijih prijelaza pojednostavnjuje strukturu mreže.



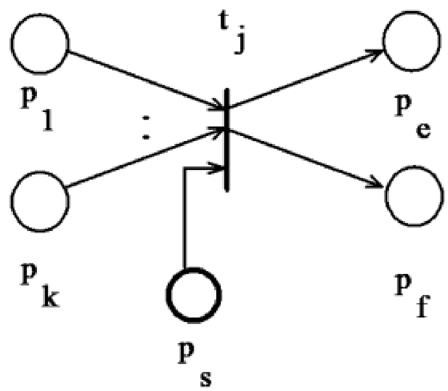

*Slika 3.8. Pretvorba ILI prijelaza*

Tipična je primjena takvog prijelaza u situacijama u kojima se modelira radnja za izvedbu koje je dovoljna ispunjenost samo jednog od preduvjeta.

### 3.3.3. Petrijeva mreža s usmjeravajućim prijelazom

Pod usmjeravajućim prijelazom razumijeva se prijelaz s najmanje dva ulazna mjesta i samo sa dva izlazna mjesta, $p_e$ i $p_f$. Jedno od ulaznih mjesta $p_s$ opisuje funkciju usmjeravanja i nije uvjet za realizaciju prijelaza (sl.3.9). Ako su sva "normalna" mjesta označena, prijelaz se izvodi ovako:

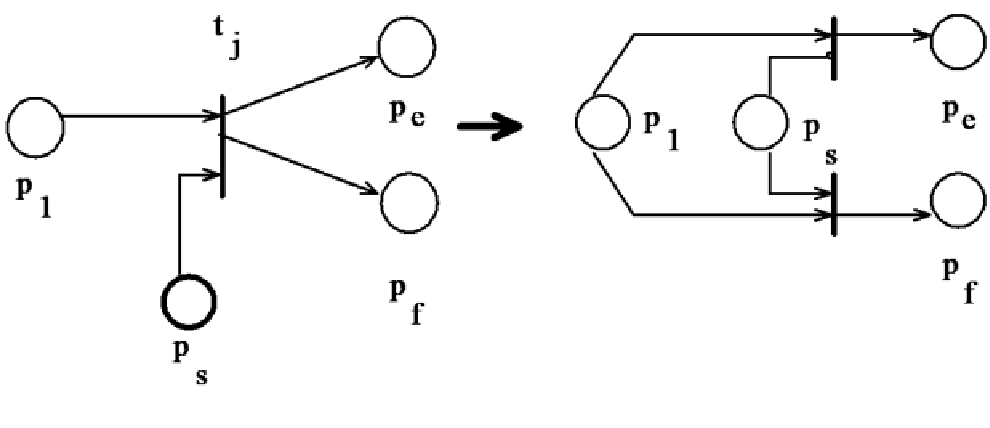
- oznaku dobiva $p_e$ ako je $p_s$ prazan, a
- oznaku dobiva $p_f$ ako je $p_s$ označen.




*Slika 3.9. Usmjeravajući prijelaz*

Usmjeravajući prijelaz može se opisati dvama prijelazima (sl.3.10) ovako:

- prijelazi su povezani s "normalnim" ulaznim mjestima na isti način kao usmjeravajući prijelaz
- usmjeravajuće mjesto povezano je "normalnom" granom s prijelazom čije je izlazno mjesto $p_f$
- usmjeravajuće mjesto povezano je inhibicijskom granom s prijelazom čije je izlazno mjesto $p_e$.




*Slika 3.10. Pretvorba usmjeravajućeg prijelaza*

### 3.3.4. Petrijeva mreža s prioritetima

Petrijeva mreža s prioritetima sadrži prijelaze $t_i$ i $t_j$ koji se mogu izvesti u nekom stanju, a prioritetom je određeno koji će se prijelaz izvesti prvi. Dokaz da mreža s prioritetom također ispituje neispunjenost uvjeta je sljedeći:

- neka mreža sadrži dva prijelaza $t_1$ i $t_2$, dva ulazna mjesta $p_t$ i $p_i$ i dva izlazna mjesta $p_e$ i $p_f$
- mjesto $p_t$ je zajedničko ulazno mjesto za $t_1$ i $t_2$
- mjesto $p_i$ je ulazno i izlazno mjesto za $t_1$
- mjesto $p_e$ je izlazno mjesto za $t_2$
- mjesto $p_f$ je izlazno mjesto za $t_1$
- ako prijelaz $t_1$ ima prioritet u odnosu prema prijelazu $t_2$ izvedba će mreže, uz ispunjen početni uvjet $p_i$, generirati novo stanje koje ovisi o ispunjenosti uvjeta $p_t$ ($p_t$ ispunjen - $p_f$ ispunjen, $p_t$ neispunjen - $p_e$ ispunjen).

Time je postignut je isti učinak kao s usmjeravajućim prijelazom za koji je prethodno pokazana ekvivalencija primjenom inhibicijskih grana.

### 3.3.5. Vremenska Petrijeva mreža

Vremenska Petrijeva mreža izvodi se iz izvorne Petrijeve mreže tako da se svakom prijelazu pridruže dva vremenska intervala, i to:

$\tau_d$ - minimalno vrijeme koje mora isteći nakon što su ispunjeni uvjeti za realizaciju prijelaza da bi se prijelaz mogao izvesti,
$\tau_g$ - maksimalno vrijeme u kojemu su uvjeti za realizaciju prijelaza ispunjeni, a nakon kojega se prijelaz mora izvesti.

Ako je $\tau_d = 0$ i $\tau_g \to \infty$, pojam vremena se gubi i dobiva se izvorna Petrijeva mreža. Različita vremena izvedbe dvaju prijelaza koji se mogu izvesti u nekom stanju istovjetna su različitim prioritetima tako da se neće posebno dokazivati mogućnost ispitivanja neispunjenog uvjeta. Moguća su i drugačija zadavanja vremenskih uvjeta, u kojima se razmatra samo minimalno, maksimalno ili zadano vrijeme koje mora isteći do ostvarenja prijelaza:

$\tau_g \to \infty$, $\tau_d = \tau$
$\tau_d = 0$, $\tau_g = \tau$
$\tau_d = \tau_g = \tau$.

### 3.3.6. Petrijeva mreža miješanog tipa

Petrijeva mreža miješanog tipa opisana je šestorkom $M = (P_B, P_I, T, I, O, \mu)$, pri čemu je:

$P_B$ - skup mjesta Booleova tipa
$P_I$ - skup mjesta cjelobrojnog tipa,

a $T$, $I$, $O$ i $\mu$ imaju izvorno značenje. Za funkcije ulaza i izlaza vrijede ograničenja:

$\#(p_i, I(t_j)) \leq 1$
$\#(p_i, O(tj)) \leq 1.$

Mjesto $p_i \in P_B$ znači uvjet koji je ispunjen u nekom stanju ako je $\mu(p_i) = 1$.

Ako je $P_B = 0$ mreža se naziva cjelobrojnom, a ako je $P_I = 0$ mreža je Booleova. Pri izvedbi prijelaza za mjesta Booleova tipa primjenjuje se operacija zbrajanja prema modulu 2 za promjenu broja oznaka u izlaznome mjestu.

*Proširena Petrijeva mreža* izvodi se iz Petrijeve mreže miješanog tipa ako se svakom Booleovu mjestu pridruži logička razina, a svakom prijelazu impuls koji se generira izvedbom prijelaza.

### 3.3.7. Obojena Petrijeva mreža

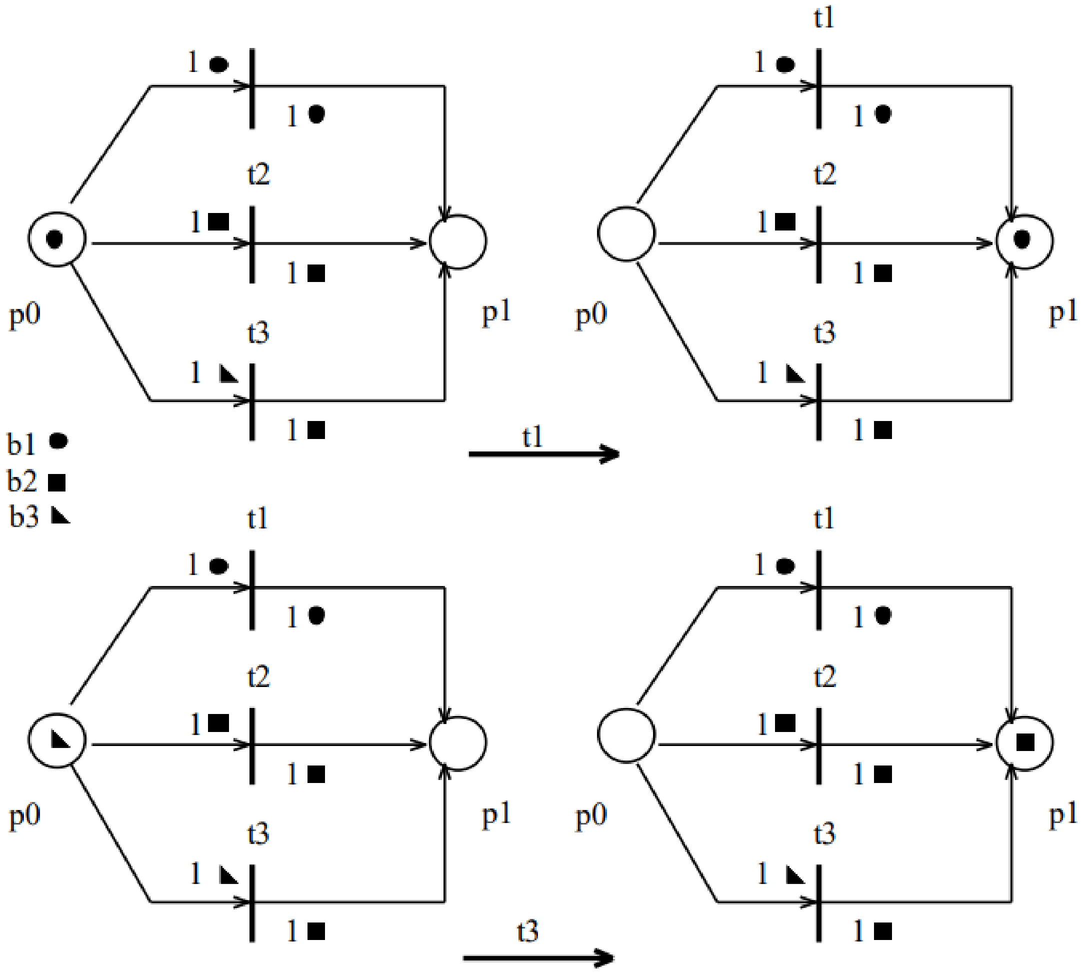
Proširenjem izvornog modela kojim se klasificiraju oznake dobije se obojena Petrijeva mreža. Ako mjesta Petrijeve mreže opisuju atribute različitih svojstava kojima se pridjeljuju oznake, te se oznake moraju razlikovati. Razlikovanju oznaka odgovara pojam bojenja.

Za Petrijevu mrežu $C = (P, T, I, O)$, kojoj je pridružen skup boja $B$, označavanje $\mu_i$ opisuje za svako mjesto $p_i$ skupinu oznaka s bojom $b_j \in B$.

Pravilo izvedbe prijelaza $t_j$ proširuje se funkcijom $f_j$ koja $q_j$ ulaznih oznaka preslikava u $r_j$ izlaznih oznaka. Funkcija $f_j$ opisuje prijelaz tako da određuje broj i boju oznaka u ulaznim mjestima kao preduvjet za izvedbu prijelaza. Izvedba prijelaza eliminira te oznake iz ulaznih mjesta, a dodaje obojene oznake u izlazna mjesta.

*Primjer 3.4.*

Obojenom Petrijevom mrežom opisan je postupak odlučivanja o tijeku uspostavljanja komunikacije. Odabrani korisnik može biti slobodan, zauzet ili blokiran. Ako je slobodan, ispunjeni su uvjeti za pozivanje, a u druga dva primjera se poziv odbacuje.




*Slika 3.11. Obojena Petrijeva mreža*

Svakom stanju korisnika pridružit će se boja, npr. $b_1$ - slobodan, $b_2$ - zauzet, $b_3$ - blokiran. Prijelazima se modeliraju akcije tako da se, ako je ispunjen uvjet o poznavanju stanja korisnika ($p_0$), izvodi prijelaz $t_i$ ako je riječ o boji $b_i$. Uvjet koji opisuje stanje poziva neka dobiva dvije oznake, $b_1$, ako se poziv nastavlja, a $b_2$ ako se prekida.

Slikom 3.11 predočena je izvedba prijelaza za dva početna stanja. Uz ulazne i izlazne grane prijelaza naznačeno je koliko oznaka i koje boje apsorbira, odnosno generira prijelaz (prošireno pravilo izvedbe prijelaza).

### 3.3.8. Stohastička Petrijeva mreža

Stohastička Petrijeva mreža proširenje je njezina osnovnog modela stohastičkim parametrima. Svakom prijelazu $t_j$ dodjeljuje se parametar pripadne raspodjele $\lambda_j$ sa značenjem intenziteta prijelaza (iz jednoga u drugo stanje Petrijeve mreže). Fizikalno značenje odgovara pojmu brzine izvedbe prijelaza, što se smatra dodatnim uvjetom za izvedbu prijelaza: prijelaz se izvodi nakon slučajnog vremenskog intervala koji ima eksponencijalnu raspodjelu. Ako se u istom stanju mreže može izvesti više prijelaza, izvodi se onaj s najmanjim kašnjenjem.

U Petrijevoj mreži s eksponencijalnom raspodjelom vremena izvedbe prijelaza, koja ima konačno stablo dostupnosti i 4-aktivna je, stablo dostupnosti izomorfno je Markovljevu lancu. Stohastički model je stacionaran i ergodičan. Neka je kašnjenje $d_j$ za prijelaz $t_j$ nenegativna slučajna veličina. Za eksponencijalnu funkciju raspodjele

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x},$$

odnosno funkciju gustoće vjerojatnosti

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

prosječno kašnjenje iznosi:

$$d_j = 1/\lambda_j.$$

Pri analizi se, uz zadane intenzitete prijelaza, mogu odrediti vjerojatnosti pojedinog stanja mreže, očekivani broj oznaka u nekome mjestu, srednji broj izvedaba prijelaza u jedinici vremena, prosječno vrijeme koje protekne između ponovnog dolaska u neko stanje i slični parametri prikladni za procjenu ponašanja modeliranog sustava.

### 3.3.9. Neizrazita Petrijeva mreža

Pojam neizrazite Petrijeve mreže odnosi se na model kojim se mogu predočiti neprecizne vrijednosti i odnosi, za razliku od logičkih formalizama koji se temelje na "čvrstim" vrijednostima istinitosti - neistinit/istinit (0/1) i odnosima koji iz njih proizlaze. Neizrazit (*fuzzy*) pristup dopušta prikaz vrijednosti istinitosti u granicama 0 - 1, a ne samo graničnih vrijednosti.

Neizrazitost se u Petrijevu mrežu uvodi:

- dodjeljivanjem vrijednosti istinitosti oznake u mjestu $p_i$ u granicama 0 - 1
- dodjeljivanjem faktora neodređenosti izvedbe prijelaza $t_j$ u granicama 0 - 1 i
- određivanjem vrijednosti praga (najniža vrijednost istinitosti) uz koju se prijelaz može izvesti.

Ako se neizraziti model primjenjuje za prikaz znanja potrebno je također odrediti skup propozicija koji sadrže neizrazite varijable, te pridružiti propozicije mjestima.

Neizrazita Petrijeva mreža izvedena iz izvorne Petrijeve mreže je ovakva:

$$C = (P, T, D, I, O, f, \alpha, \beta),$$

pri čemu je:

$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ konačni skup mjesta, $n > 0$, $p_i \in P$
$T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ konačni skup prijelaza, $m > 0$, $t_j \in T$

$D = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ konačni skup propozicija, $n > 0$, $d_j \in D$
$P \cap T \cap D = 0$
$P \cup T \neq 0$
$I : T \rightarrow P^\infty$ funkcija ulaza
$O : T \rightarrow P^\infty$ funkcija izlaza
$f : T \rightarrow (0, 1)$ funkcija pridruživanja faktora neodređenosti prijelazu
$\alpha: T \rightarrow (0, 1)$ funkcija pridruživanja vrijednosti istinitosti mjestu
$\beta: P \rightarrow D$ funkcija pridruživanja mjesta i propozicija.

Označavanje se provodi tako da u mjestu $p_i$ smije biti samo jedna oznaka (sigurna mreža) koja ima vrijednost istinitosti:

$\alpha\ (p_i)$,

a propozicija $d_i$ pridružena mjestu $p_i$:

$\beta\ (p_i) = d_i$

tada ima vrijednost istinitosti $\alpha\ (p_i)$.

Osnovno logičko pravilo, odnosno implikacija, predočeno je mrežom s jednim prijelazom koji ima po jedno ulazno i izlazno mjesto:

IF $d_1$ THEN $d_2$ $(f_1)$ ili $d_1 \rightarrow d_2\ (f_1)$

$P = \{p_1, p_2\}$
$T = \{t_1\}$
$D = \{d_1, d_2\}$
$P \cap T \cap D = 0$
$P \cup T \neq 0$
$I\ (t_1) = \{p_1\}$ $O\ (t_1) = \{p_2\}$
$\mathrm{f}\ (t_1) = f_1$
$\alpha\ (p_1) = y_1$
$\alpha\ (p_2) = 0$
$\beta\ (p_1) = d_1$
$\beta\ (p_2) = d_2$.

Prijelaz se može izvesti ako za svako ulazno mjesto vrijedi:
$p_j \in I\ (t_i)$, $\alpha\ (p_j) \geq \lambda$,

pri čemu je $\lambda$ prag za izvedbu prijelaza u mreži.

Izvedbom prijelaza $t_i$ gube se oznake iz ulaznih mjesta, $p_j \in I\ (t_i)$, a upisuju oznake u izlazna mjesta, $p_k \in O(t_i)$, tako da je vrijednost istinitosti za izlazna mjesta:

$$\alpha\ (p_k) = \mathrm{MIN}_j\ [\alpha\ (p_j) \cdot f(t_i)].$$

*Primjer 3.5.*

Odredite $\alpha\ (p_3)$ i oblik pravila za mrežu:

$C = (P, T, D, I, O, f, \alpha, \beta)$

$P = \{p_1, p_2, p_3\}$
$T = \{t_1\}$
$D = \{d_1, d_2, d_3\}$
$I\ (t_1) = \{p_1, p_2\}\ O\ (t_1) = \{p_3\}$
$\mathrm{f}\ (t_1) = 0.9$
$\lambda = 0{,}5$
$\alpha\ (p_1) = 0.8$
$\alpha\ (p_2) = 0.9$
$\beta\ (p_1) = d_1$
$\beta\ (p_2) = d_2$
$\beta\ (p_3) = d_3$.

Prijelaz $t_1$ ima dva ulazna mjesta i jedno izlazno mjesto. Kako su vrijednosti istinitosti ulaznih mjesta veće od vrijednosti praga, prijelaz se može izvesti ovako:

$$\alpha\ (p_3) = \mathrm{MIN}\ [\alpha\ (p_1);\ \alpha\ (p_2)] \cdot f(t_1) = \mathrm{MIN}\ [0{,}8;\ 0{,}9] \cdot 0{,}9 = 0{,}72$$

Predočeno je pravilo:

IF $d_1$ OR $d_2$ THEN $d_3$ (0,9).

## 3.4. STRUKTURNA OGRANIČENJA

Strukturnim se ograničenjima Petrijeve mreže uspostavljaju jednostavniji odnosi mjesta i prijelaza, a i samih prijelaza, što je osobito važno u konfliktnim situacijama.

*Ordinarna Petrijeva mreža*

Mreža $C = (P, T, I, O)$ naziva se ordinarnom ako vrijedi:

$$\#(p_i, I(t_j)) \leq 1 \text{ i}$$

$$\#(p_i, O(t_j)) \leq 1.$$

Ordinarna mreža i mreža miješanog tipa su strukturno ekvivalentne. U njima je isključeno višestruko povezivanje mjesta i prijelaza.

*Petrijeva mreža bez vlastitih petlji*

Mreža $C = (P, T, I, O)$ naziva se Petrijevom mrežom bez vlastitih petlji ako vrijedi:

$$I(t_j) \cap O(t_j) = 0,$$

ili drugačije:

$$\#(p_i, \mathrm{I}(t_j)) \cdot \#(p_i, O(tj)) = 0.$$

U takvoj mreži mjesto ne može biti i ulazno i izlazno za isti prijelaz.

Ako neka Petrijeva mreža zadovoljava ograničenja za ordinarnu mrežu i mrežu bez vlastitih petlji, naziva se *restriktivnom*.

*Automat stanja*

Automat stanja je Petrijeva mreža za koju svaki prijelaz $t_j$ ima samo jedno ulazno i izlazno mjesto:

$$|I(t_j)| = 1 \text{ i}$$

$$|O(t_j)| = 1.$$

*Označeni graf*

Označeni graf je Petrijeva mreža za koju svako mjesto $p_i$ ima samo jedan ulazni i izlazni prijelaz:

$$|I(p_i)| = 1 \text{ i}$$

$$|O(p_i)| = 1.$$

*Mreža slobodnog izbora*

Petrijeva mreža je mreža slobodnog izbora ako je svako mjesto $p_i$ za svaki prijelaz $t_j$ ili jedino ulazno mjesto ili je prijelaz $t_j$ jedini izlazni prijelaz za to mjesto:

$I(t_j) = p_i$ ili

$O(p_i) = t_j$.

*Jednostavna mreža*

Petrijeva mreža je jednostavna ako je svakom prijelazu najviše jedno ulazno mjesto zajedničko s nekim drugim prijelazom.