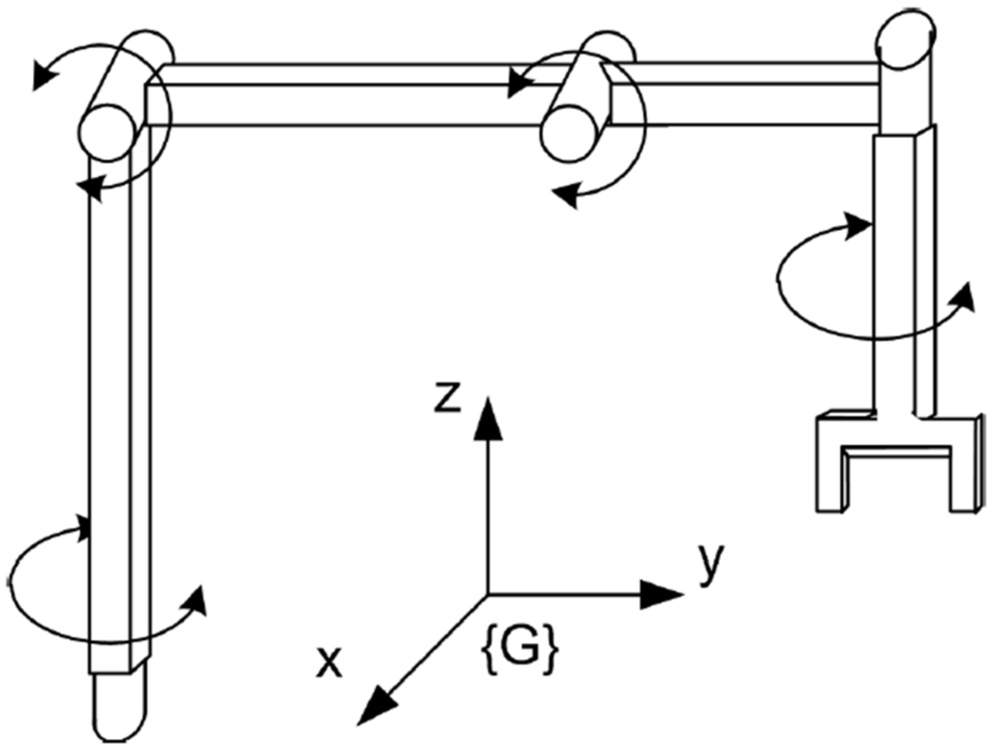
Wolfman Automatika, 1.D_AUT	Fakultet elektrotehnike i računarstva Zagreb Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo **OSNOVE ROBOTIKE** INVERZNA KINEMATIKA MANIPULATORA 2. domaća zadaća, grupa D	23.10.2011.

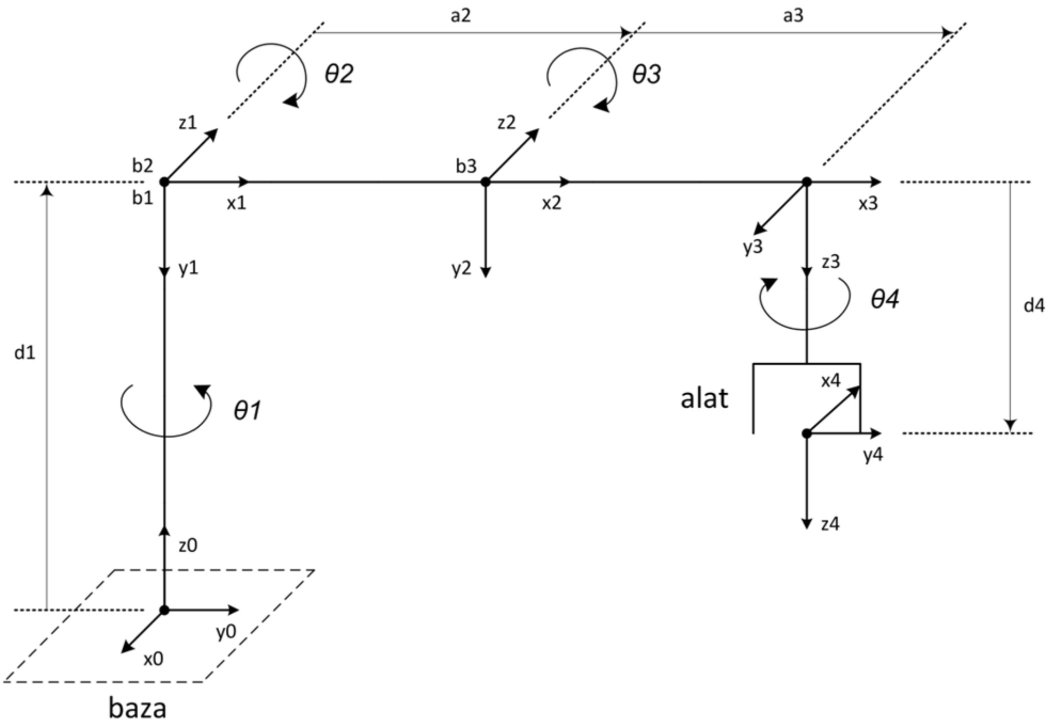


Slika 2.1. Rotacijska konfiguracija manipulatora.

Na temelju matrične jednadžbe manipulatora određene u 1. domaćoj zadaći, riješite inverzni kinematički problem za otvoreni kinematički lanac prikazan slikom 2.1. Pri rješavanju obratite pažnju na potencijalne višeznačnosti i singularitete u rješenjima.

Rješenje:

Na slici 2.2. shematski je prikazan manipulator sa slike 2.1. i označeni su svi koordinatni sustavi te parametri po Denavit-Hartenbergovoj metodi.



Slika 2.2. Koordinatni sustavi manipulatora zadanog na slici 2.1.

U sklopu prve domaće zadaće određena je matrična jednažba zadanog manipulatora koja glasi (uz skraćeni zapis: $S_{ij} \coloneqq \sin(q_i + q_j)$ i $C_{ij} \coloneqq \cos(q_i + q_j)$, tj. $S_i \coloneqq \sin(q_i)$ i $C_i \coloneqq \sin(q_i)$):

$$\boldsymbol{T}_{baza}^{alat} = \begin{bmatrix} C_1C_{23}C_4 + S_1S_4 & C_4S_1 - C_1C_{23}S_4 & -C_1S_{23} & C_1(a_2C_2 + a_3C_{23} - d_4S_{23}) \\ C_{23}C_4S_1 - C_1S_4 & -C_1C_4 - C_{23}S_1S_4 & -S_1S_{23} & S_1(a_2C_2 + a_3C_{23} - d_4S_{23}) \\ -C_4S_{23} & S_{23}S_4 & -C_{23} & d_1 - d_4C_{23} - a_2S_2 - a_3S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2\text{-}1)$$

Matrica (2-1) je oblika:

$$\boldsymbol{T}_{baza}^{alat}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{q}) & \boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{v}_0^T & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_0^T = [0 \quad 0 \quad 0], \quad (2\text{-}2)$$

gdje je matrica $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q})$ dimenzija 3×3 i određuje orijentaciju alata, a vektor $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q})$, čije su dimenzije 3×1, definira položaj vrha alata, tj. koordinate vrha alata u odnose na koordinatni sustav baze [1].

Rješavanje inverznog kinematičkog problema kreće od određivanja vektora **w**, koji je definiran na ovaj način [1]:

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} \\ e^{q_4/\pi}\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{3}} \end{bmatrix}, \quad (2\text{-}3)$$

gdje je $\boldsymbol{r^3}$ treći stupac vektora $\boldsymbol{R}$. Uvažavanjem izraza (2-2) možemo uvrštavanjem iz (2-1) u (2-3) dobiti konkretan vektor $\boldsymbol{w}$:

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} C_1(a_2C_2 + a_3C_{23} - d_4S_{23}) \\ S_1(a_2C_2 + a_3C_{23} - d_4S_{23}) \\ d_1 - d_4C_{23} - a_2S_2 - a_3S_{23} \\ -e^{q_4/\pi}C_1S_{23} \\ -e^{q_4/\pi}S_1S_{23} \\ -e^{q_4/\pi}C_{23} \end{bmatrix}. \tag{2-4}$$

Sada možemo krenuti s rješavanjem. Odmah uočavamo da su w_1 i w_2 praktički razlikuju samo za C_1, tj. S_1 koji množe identičan veliki izraz u zagradi. Dijeljenjem w_2 i w_1 dobivamo $\tan q_1$, a korištenjem funkcije $atan2(y, x)$ dobivamo izraz za q_1:

$$q_1 = atan2(w_2, w_1). \tag{2-5}$$

Varijable q_2 i q_3 je malo teže odrediti. Izračunajmo zato prvo $q_{23} = q_2 + q_3$. Množenjem w_4 sa C_1 te w_5 sa S_1 dobivamo:

$$C_1w_4 = -e^{\frac{q_4}{\pi}} \cdot C_1^2S_{23},$$
$$S_1w_5 = -e^{\frac{q_4}{\pi}} \cdot S_1^2S_{23}.$$

Zbrajanjem dobivenih izraza te dijeljenjem sa w_6 slijedi:

$$\frac{-(C_1w_4 + S_1w_5)}{-w_6} = \frac{S_{23}}{C_{23}} = \tan q_{23},$$

pa opet pomoću $atan2$ funkcije dobivamo izraz za q_{23}:

$$q_{23} = atan2(-(C_1w_4 + S_1w_5), -w_6). \tag{2-6}$$

Sada definirajmo dvije pomoćne varijable:

$$p_1 = C_1w_1 + S_1w_2 + d_4S_{23} = a_2C_2 + a_3C_{23},$$
$$p_2 = d_1 - d_4C_{23} - w_3 = a_2S_2 + a_3S_{23}.$$

Primijetimo da su nam te dvije varijable poznate, jer iz izraza (2-5) i (2-6) znamo $S_1\ i\ C_1$, odnosno $S_{23}\ i\ C_{23}$. Prebacivanje poznatoga na jednu stranu i nepoznatoga na drugu te dijeljenjem gornje dvije jednadžbe dobivamo:

$$\frac{p_2 - a_3S_{23}}{p_1 - a_3C_{23}} = \frac{S_2}{C_2} = \tan q_2$$

Iz čega slijedi varijabla q_2:

$$q_2 = atan2\big((p_2 - a_3S_{23}),\ (p_1 - a_3C_{23})\big). \tag{2-7}$$

Sada kada su poznati i q_{23} i q_2 lako dobivamo q_3:

$$q_3 = q_{23} - q_2. \tag{2-8}$$

Kvadriranjem i zbrajanjem w_4, w_5, i w_6 dobivamo:

$$w_4^2 + w_5^2 + w_6^2 = e^{2q_4/\pi},$$

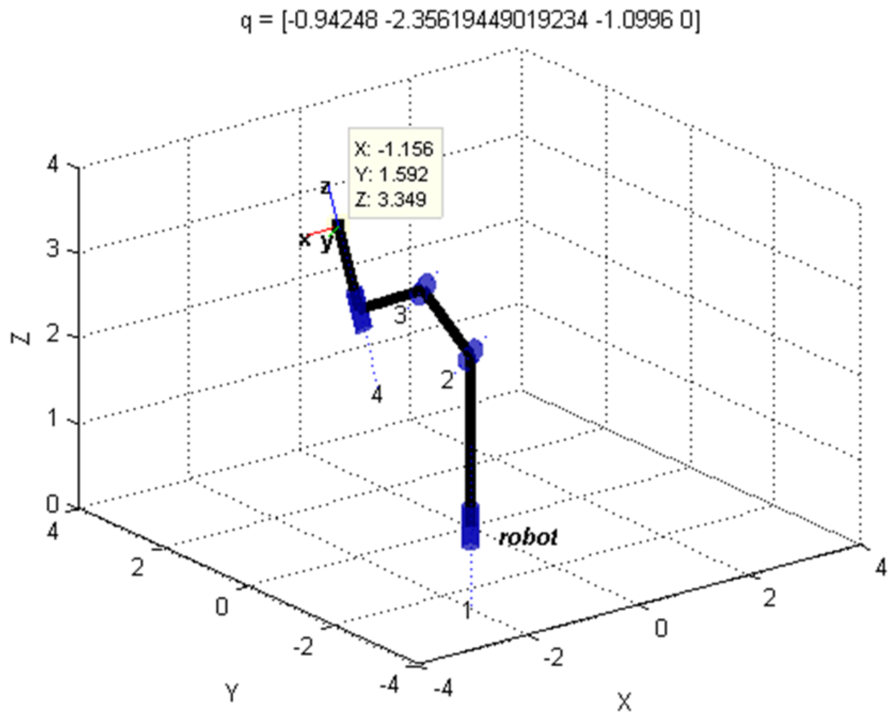
iz čega slijedi izraz za poslijednju varijablu zglobova manipulatora:

$$q_4 = \frac{\pi}{2}\ln(w_4^2 + w_5^2 + w_6^2). \tag{2-9}$$

Prema izrazima (2-5) – (2-9) ukupno rješenje inverznog kinematičkog problema zadanog manipulatora glasi:

$$\begin{gathered}
q_1 = atan2(w_2, w_1),\\
q_{23} = atan2(-(C_1 w_4 + S_1 w_5), -w_6),\\
p_1 = C_1 w_1 + S_1 w_2 + d_4 S_{23},\\
p_2 = d_1 - d_4 C_{23} - w_3,\\
q_2 = atan2\big((p_2 - a_3 S_{23}), (p_1 - a_3 C_{23})\big),\\
q_3 = q_{23} - q_2,\\
q_4 = \frac{\pi}{2}\ln(w_4^2 + w_5^2 + w_6^2).
\end{gathered}$$

Iz gornjih jednadžbi vidimo da je rješenje inverznog problema kinematike zadanog robotskog manipulatora određeno jednoznačno. Jedini problem koji se može javiti je kod takvih položaja robota u kojima je alat „zabačen“ iza „leđa“ robota (slika 2.3.).



Slika 2.3. Položaj robota za koji gornje jednadžbe nverzne kinematike neće dati ispravne vrijednosti varijabli zglobova.

Problem je u tome što se varijabla q_1 računa preko funkcije $atan2$ od x i y koordinati vrhova alata. Za gornji slučaju bi po izrazu (2-5) za varijablu q_1 dobili:

$$q_1 = \text{atan2}(1.592, -1.156) = 2.1988,$$

što ne odgovara pravoj vrijednosti -0.94248. Pogrešno određen q_1 rezultira pogrešnim određivanjem i ostalih varijabli. No, ako u programskoj implementaciji možemo detektirati da je dobiveni vektor q pogrešan, onda u idućoj iteraciji možemo izračunati q_1 smanjiti za π čime ćemo dobiti ispravan zakret baze, a iz ispravnog q_1 ćemo onda dobiti i ispravne ostale varijable zglobova. Programska implementacija solvera inverzne kinematike za ovaj robotski manipulator opisana je u sklopu izvještaja za 1. laboratorijsku vježbu.

Literatura

[1] Kovačić, Z.; Bogdan, S.; Krajči, V.: *Osnove robotike*. Graphis, Zagreb, 2002.