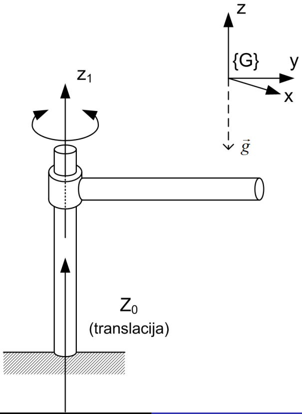
Dinamika manipulatora
Lagrange-Eulerova metoda

Miha the mighty

November 16, 2012

Uvod i opis problema

1. Potrebno:
   - Odrediti dinamički model kinematičkog lanca Lagrange-Eulerovom metodom
2. Zadano:
   - TR kofiguracija dana slikom



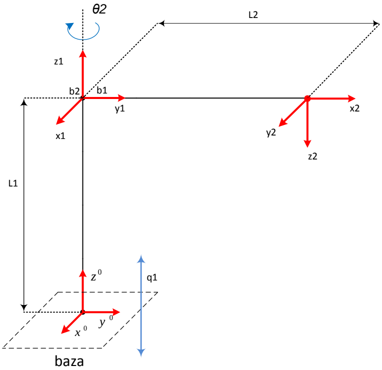
Opis Lagrange-Eulerovog dinamičkog modela (1)

1. Koristiti D-H metodu za pridruživanje koordinatnih sustava L_i svakom članku i, $0 \leq i \leq n$
2. $\mathbf{T}_0^0 = \mathbf{I}, i = 1, \mathbf{D}(\mathbf{q}) = 0.$
3. Pronaći homogene koordinate CM i-tog članka u odnosno prema koordinatnom sustavu L_i - $\mathbf{\Delta c^i}$
4. Neka je L_{ci} koordinatni sustav dobiven translacijom L_i u CM i-tog članka, izračunati tenzor inercije i-tog članka oko njegovog CM s obzirom na koordinatni sustav L_{ci} - $\mathbf{D}_\mathbf{1}'$

Opis Lagrange-Eulerovog dinamičkog modela (2)

5. Izračunati:
   - vektor: $\mathbf{z}^{i-1}(\mathbf{q}) = \mathbf{R}_0^{i-1}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{i}^3$,
   - matricu složene homogene transformacije: $\mathbf{T}_0^i(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_0^{i-1}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{T}_{i-1}^i(\mathbf{q})$,
   - koordinate CM i-tog članka u odnosnu prema koordinatnom sustavu baze: $\mathbf{c}^i(\mathbf{q}) = \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{T}_0^i(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{\Delta c^i}$
   - tenzor inercije i-tog članka u odnosu prema koordinatnom sustavu baze: $\mathbf{D}_i(\mathbf{q}) = \mathbf{R}_0^i(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{D}_i' \cdot \left[\mathbf{R}_0^i(\mathbf{q})\right]^T$
6. Izračunati Jacobijevu matricu i-tog članka $\mathbf{J}^i(\mathbf{q})$
7. Podijeliti Jacobijevu matricu te izračunati tenzor inercije $\mathbf{D}(\mathbf{q})$
8. Povećati vrijednost varijable i za 1 i ako je $i \neq n$ vratiti se na 3. korak i ponoviti postupak
9. Napisati Lagrange-Eulerove jednadžbe pomoću izračunatih $\mathbf{C}^i(\mathbf{q})$ i $\mathbf{h}_i(\mathbf{q})$

DH parametri manipulatora



	θ	d	a	α
1. zglob	0	q_1	0	0
2. zglob	q_2	0	L_2	π

Korišteni izrazi

Slijede izrazi za Jacobijevu matricu i tenzor inercije manipulatora koje ćemo kasnije koristiti:

- Jacobijeva matrica:

$$\mathbf{J}^k(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^k(\mathbf{q}) \\ \mathbf{B}^k(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{c}^k}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{c}^k}{\partial q_k} & 0 \\ \xi_1 \mathbf{z}^0 & \cdots & \xi_k \mathbf{z}^{k-1} & 0 \end{bmatrix}$$

- Tenzor inercije manipulatora:

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left[\mathbf{A}^k(\mathbf{q})\right]^T m_k \; \mathbf{A}^k(\mathbf{q}) + \left[\mathbf{B}^k(\mathbf{q})\right]^T \mathbf{D}_k(\mathbf{q}) \; \mathbf{B}^k(\mathbf{q}) \right\}$$

Parametri manipulatora (1)

- Matrice transformacija:

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{q1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_0^2 = \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 & L_2 C_2 \\ S_2 & -C_2 & 0 & L_2 S_2 \\ 0 & 0 & -1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Tenzori inercije:

$$D_{cm1} = \frac{m_1 \cdot L_1^2}{12} \cdot diag(1, 1, 0)$$

$$D_{cm2} = \frac{m_2 \cdot L_2^2}{12} \cdot diag(0, 1, 1)$$

- Položaji CM članaka u odnosnu na L_i:

$$\Delta c^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-L_1}{2} & 1 \end{bmatrix}^T \quad \Delta c^2 = \begin{bmatrix} \frac{-L_2}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Parametri manipulatora (2)

- Koordinate CM i-tog članka u odnosu prema koordinatnom sustavu baze:

$$\mathbf{c}^1(\mathbf{q}) = \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{T}_0^1(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{\Delta c^1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & q_1 - \frac{L_1}{2} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{c}^2(\mathbf{q}) = \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{T}_0^2(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{\Delta c^2} = \begin{bmatrix} \frac{L_2 \cos q_2}{2} & \frac{L_2 \sin q_2}{2} & q_1 \end{bmatrix}^T$$

- Tenzor inercije i-tog članka u odnosu prema koordinatnom sustavu baze:

$$\mathbf{D}_1(\mathbf{q}) = \frac{m_1 \cdot L_1^2}{12} \cdot diag(1, 1, 0)$$

$$\mathbf{D}_2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{L_2^2\, m_2\, S_2^2}{12} & -\frac{L_2^2\, m_2\, C_2 S_2}{12} & 0 \\ -\frac{L_2^2\, m_2\, C_2 S_2}{12} & \frac{L_2^2\, m_2\, C_2^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_2^2\, m_2}{12} \end{bmatrix}$$

Izračun vektora $z^{i-1}(\mathbf{q})$

Općenito vrijedi:

$$z^{i-1}(\mathbf{q}) = R_0^{i-1}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{i}^3.$$

U našem slučaju, vektori z^0 i z^1 jednaki su:

$$z^0(\mathbf{q}) = R_0^0(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{i}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

$$z^1(\mathbf{q}) = R_0^1(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{i}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

gdje je:

$$R_0^0 = I_{3x3}$$

Izračun Jacobijevih matrica

$$\mathbf{J}^1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^1(\mathbf{q}) \\ \mathbf{B}^1(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{c}^1}{\partial q_1} & 0 \\ \xi_1 \mathbf{z}^0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}^2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^2(\mathbf{q}) \\ \mathbf{B}^2(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{c}^2}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{c}^2}{\partial q_2} \\ \xi_1 \mathbf{z}^0 & \xi_2 \mathbf{z}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{L_2 \sin q_2}{2} \\ 0 & \frac{L_2 \cos q_2}{2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tenzor inercije manipulatora

Općenito, tenzor inercije manipulatora dan je izrazom:

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left[\mathbf{A}^k(\mathbf{q})\right]^T m_k \; \mathbf{A}^k(\mathbf{q}) + \left[\mathbf{B}^k(\mathbf{q})\right]^T \mathbf{D}_k(\mathbf{q}) \; \mathbf{B}^k(\mathbf{q}) \right\}$$

U našem slučaju tenzor inercije manipulatora je idući:

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & \frac{L_2^2 m_2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & 0 \\ 0 & \frac{L_2^2 m_2}{3} \end{bmatrix}$$

Matrica povezivanja brzina i-tog zgloba

Elementi matrice povezivanja brzina i-tog zgloba definirani su idućom relacijom:

$$C^i_{kj} = \frac{\partial D_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial D_{kj}(\mathbf{q})}{\partial q_i},\ 1 \leq i, j, k \leq n$$

Treba zamijetiti da je matrica $\mathbf{D}(\mathbf{q})$ konstantna i neovisna o $\mathbf{q}$. Slijedi da su svi elementi matrice povezivanja brzina jednaki nula. Odnosno vrijedi:

$$C^1_{11} = C^1_{12} = \cdots = C^1_{22} = C^2_{11} = \cdots = C^2_{22} = 0$$

Vektor gravitacijskog djelovanja i-tog zgloba

Gravitacija je zadana vektorom:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g_0 \end{bmatrix}^T$$

Vektor gravitacijskog djelovanja i-tog zgloba definiran je idućim izrazom:

$$\mathbf{h}_i = -\sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{n} \left[g^k m_j A_{ki}^j(\mathbf{q}) \right], 1 \leq i \leq n$$

Prvi zglob:
$h_1 = g_0 \cdot (m_1 + m_2)$

Drugi zglob:
$h_2 = 0$

Lagrange-Eulerova jednadžba (1)

Neka je $\mathbf{q}$ vektor varijabli zglobova, τ vektor momenata aktuatora n-osne robotske ruke. Ako se manipulator slobodno giba u svom radnom prostoru, dinamičke jednadžbe gibanja su iduće:

$$\sum_{j=1}^{n} \left[D_{ij}(\ddot{\mathbf{q}}_j)\right] + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[C_{kj}^{i}(\mathbf{q})\dot{q}_k \dot{q}_j\right] + h_i(\mathbf{q}) + b_i(\dot{\mathbf{q}}) = \tau_i$$

Gdje je $1 \leq i \leq n$.

Prvi član predstavlja inercijalne sile i momente koji nastaju gibanjem članaka robotske ruke, drugi član označava Coriolisove i centrifugalne sile, treći opisuje utjecaj sile teže na manipulator i četvrti predstavlja trenje.

Lagrange-Eulerova jednadžba (2)

U našem slučaju, imamo dvije (n = 2) Lagrange-Eulerove jednadžbe:

$$\tau_1 = (m_1 + m_2) \cdot \ddot{q}_1 + (m_1 + m_2) \cdot g + b_1(\dot{q}_1),$$

$$\tau_2 = \frac{L_2^2 \cdot m_2}{3} \ddot{q}_2 + b_2(\dot{q}_2),$$

gdje je:

$$b_k(\dot{q}_k) = b_k^V \dot{q}_k + sgn(\dot{q}_k) \left[b_k^d + \left(b_k^s - b_k^d \right) e^{-\frac{|\dot{q}_k|}{\varepsilon}} \right].$$

Tustinov model trenja uključuje koeficijent viskoznog trenja b_k^V,dinamičkog trenja b_k^d i statičkog trenja b_k^s. Pri tome je ε mali pozitivni prametar - Stribeckova brzina.

Programski kod

```
% Inicijalizacija potrebnih varijabli
syms theta_k alpha_k a_k d_k L2 m1 m2 L1

syms q1 q2                              % varijable zglobova
alpha = [0 pi];                         % DH parametri alpha
syms d1 d2                              % DH parametri d
syms a1 a2                              % DH parametri a

% Definiranje opcenite matrice homogene transformacije
% koja koja povezuje koordinatne sustave k i k-1.

T_k = [
cos(theta_k),-cos(alpha_k)*sin(theta_k) ,...
sin(alpha_k)*sin(theta_k),a_k*cos(theta_k);
sin(theta_k),cos(alpha_k)*cos(theta_k) ,...
-sin(alpha_k)*cos(theta_k),a_k*sin(theta_k);
0,          sin(alpha_k),           cos(alpha_k),           d_k;
0,          0,                      0,                      1;
];
```

```
% Zamjena varijabli u opcenitoj matrici homogene
% trasnformacije s DH parametrima
T_00 = eye(4);
T_01 = subs(T_k, [theta_k, d_k, a_k, alpha_k], ...
                   [0, q1, 0, 0]);
T_12 = subs(T_k, [theta_k, d_k, a_k, alpha_k],...
                   [q2, 0, L2, pi]);

% Izracun matrice koja povezuje koordinatne sustave
% baze i alata
T_02 = simple(T_01*T_12);

% Iz matrice T_02 uzimamo vektor polozaja p
p = T_02(1:3,4);

% Iz matrice T_02 uzimamo matricu rotacije R
R_00= T_00(1:3,1:3);
R_01 = T_01(1:3,1:3);
R_12 = T_12(1:3,1:3);
R_02 = T_02(1:3,1:3);
```

```
% Definiranje deltaC vektora

deltaC1 = transpose([0 0 -L1/2 1]);

deltaC2 = transpose([-L2/2 0 0 1]);

% Definiranje vektora z0

z0 = R_00*transpose([0 0 1]);

% Definiranje matrice H1

H1 = [eye(3), zeros(3,1)];

% Izracun c1 i c2 vektora

c1 = H1*T_01*deltaC1;
c2 = H1*T_02*deltaC2;
```

```
% Tenzori inercije clanaka s obzirom na CM
D_1_cm = m1*L1^2/12*[1 0 0; 0 1 0; 0 0 0];
D_2_cm =  m2*L2^2/12*[0 0 0; 0 1 0; 0 0 1];

% Izracun D1
D1 = R_01*D_1_cm*transpose(R_01);

%% Djelovi J1
A1 = [diff(c1,q1), diff(c1,q2)];
B1 = [0 0 ; 0 0 ; 0 0];

D =  transpose(A1)*m1*A1+transpose(B1)*D1*B1;

% Definiranje vektora z1
z1 = R_01*transpose([0 0 1]);

%% Izracun D2

D2 = R_02*D_2_cm*transpose(R_02);
```

```
% Clanovi J2

A2 = [diff(c2,q1), diff(c2,q2) ];
B2 = [0 0 ; 0 0 ; 0 1];

% Izracun krajnjeg D

D =D + transpose(A2)*m2*A2+transpose(B2)*D2*B2;

disp('Tenzor inercije manipulatora D(q):')
pretty(simple(D))
```