



3. Komunikacijski kanali u kontinuiranom vremenu

- 3.1. Signali**
- 3.2. Komunikacijski kanali u kontinuiranom vremenu**
- 3.3. Uzorkovanje signala**
- 3.4. Kapacitet kanala u kontinuiranom vremenu**
- 3.5. Sažetak poglavlja**
- 3.6. Zadaci**

U ovom poglavlju bit će razmatrani komunikacijski kanali u kontinuiranom vremenu. Prvo će biti razmotreni signali koji se javljaju na ulazu i izlazu takvih kanala, a poseban će naglasak biti stavljen na signale u kontinuiranom vremenu. Od mnogobrojnih obilježja signala, poseban će naglasak biti stavljen na njihovu snagu, odnosno energiju jer su to bitni parametri za određivanje kapaciteta kanala. Nakon toga slijedi prikaz modeliranja kanala linearnim vremenski nepromjenjivim sustavom te određivanje širine prijenosnog pojasa kanala. Nadalje, provedeno je i razmatranje procesa uzorkovanja signala i kvantizacije uzoraka, kao podloga za digitalni prijenos informacija. Konačno, na kraju ovog poglavlja dan je i proračun kapaciteta kontinuiranih kanala. Pri tome je razmatrana primarno fizikalna razina prijenosnog kanala, gdje su poruke generirane na izvoru informacije predstavljene parametrima električnih signala (prije svega srednja snaga i širina frekvencijskog pojasa), pomoću kojih je izražen kapacitet kanala.

3.1. Signali

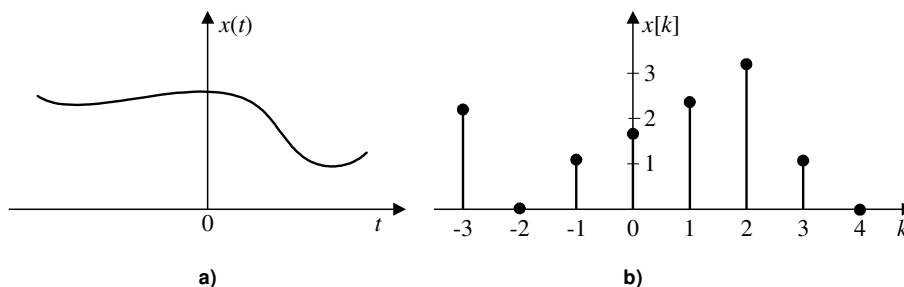
Signal je pojava koja prikazuje neku fizikalnu veličinu (na primjer, napon ili struju) i sadržava informaciju o ponašanju, odnosno o prirodi promatranog fenomena. Matematički, signal je modeliran funkcijom $x(t)$ neovisne varijable t , $t \in \mathbb{R}$, pri čemu varijabla t najčešće predstavlja vrijeme. Signal, kao matematička funkcija, preslikava neovisnu varijablu, tj. vrijeme, u vrijednost $x(t)$, tj. $x: t \rightarrow x(t)$. U nastavku ćemo promatrati isključivo realne signale ($x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$).



Signal $x(t)$ je signal u kontinuiranom vremenu, ako je t kontinuirana varijabla (Slika 3.1a). Takve ćemo signale u nastavku skraćeno nazivati kontinuirani signali. Primjer kontinuiranog signala je sinusni signal $x(t) = A \cdot \sin(2\pi ft)$, pri čemu je f realan broj koji predstavlja frekvenciju signala $x(t)$, a A realan broj koji predstavlja njegovu amplitudu. Ponekad signal može biti i funkcija dvije ili više varijabli. Npr. naponski signal na prijenosnoj liniji funkcija je vremena t i udaljenosti z od početka linije pa ga zapisujemo kao $x(t, z)$. Takvi se signali nazivaju višedimenzionalni signali.

Za varijablu t koja označava vrijeme kažemo da je diskretna ako poprima vrijednosti isključivo u diskretnim trenucima $t = kT$, pri čemu je T pozitivan realan broj različit od nule, a k je cijeli broj. Sukladno navedenom, signal u diskretnom vremenu najčešće označavamo kao slijed brojeva, označen kao $\{x_k\}$ ili $x[k]$, $k \in \mathbb{Z}$, što je u stvari skraćeni zapis od $x[kT]$. Takve ćemo signale u nastavku skraćeno nazivati diskretni signali. Dakle, vrijednosti signala u diskretnom vremenu definirane su samo u diskretnim vremenskim trenucima

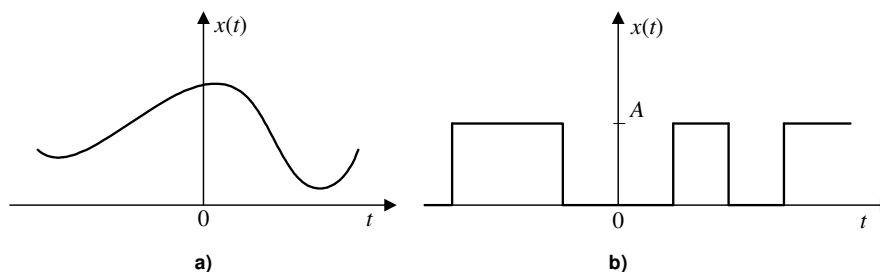
(Slika 3.1b). Na slici su vrijednosti diskretnog signala označene točkama, a okomite linije koje ih spajaju s apscisom korištene su samo zbog preglednosti prikaza.



Slika 3.1: Primjeri signala: a) signal u kontinuiranom vremenu, b) signal u diskretnom vremenu

Ako umjesto vremena t promatramo vrijednosti koje signal može poprimiti u bilo kojem trenutku, tj. $x(t)$, tada signale možemo podijeliti na analogne i digitalne. Analogni signal može u nekom trenutku poprimiti bilo koju vrijednost unutar kontinuiranog skupa mogućih vrijednosti. Primjer takvog signala je sinusni signal $x(t) = A \cdot \sin(2\pi ft)$, ranije dan kao primjer kontinuiranog signala. Sinusni signal u nekom trenutku t može poprimiti bilo koju vrijednost iz intervala $[-A, A]$: $x(t) \in [-A, A]$.

Nadalje, neka je $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ konačan skup od N realnih brojeva. Digitalni signal može u bilo kojem trenutku poprimiti samo jednu od N mogućih vrijednosti iz tog skupa: $x(t) \in \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$. Primjer digitalnog signala je binarni signal koji u bilo kojem trenutku može poprimiti jednu od dvije vrijednosti iz skupa $\{0, A\}$, $A \in \mathbb{R}$. Slika 3.2 daje primjer analognog i digitalnog signala.



Slika 3.2: Primjeri signala: a) analogni signal i b) digitalni signal

Promatrajući slučajnost vrijednosti koje neki signal može poprimiti, postoje deterministički signali i slučajni signali. Vrijednosti determinističkog signala, $x(t)$, odnosno $x[k]$, su u potpunosti specificirane u svakom vremenskom trenutku

u kojem je signal definiran. Takav je signal moguće modelirati nekom funkcijom vremena. Nasuprot tome, slučajni signal u bilo kojem vremenskom trenutku poprima neku slučajnu vrijednost i stoga se karakterizira stohastički. Slučajni se signali modeliraju pomoću slučajnih procesa.

U ovom će potpoglavlju naglasak biti stavljen na određivanje srednje snage i energije signala u kontinuiranom vremenu. Srednja snaga signala računa se u ovisnosti o vrsti signala. Signale u kontinuiranom vremenu dijelimo na determinističke i slučajne. Nadalje, determinističke signale dijelimo na periodične i neperiodične. Srednja snaga nekog determinističkog signala računa se primjenom razvoja funkcije u Fourierov red, odnosno pomoću Fourierove transformacije, dok se srednja snaga slučajnog signala računa pomoću autokorelacijske funkcije slučajnog procesa kojim je taj signal modeliran.

3.1.1. Srednja snaga i energija determinističkih signala

Iz osnova elektrotehnike poznato je da napon $u(t)$, odnosno struja $i(t)$ na otporniku od R oma $[\Omega]$ proizvodi energiju E , odnosno srednju snagu P , definirane sljedećim izrazima, [4]:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} Ri^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2(t)}{R}dt \text{ [Ws]},$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} Ri^2(t)dt \text{ [W]}.$$

U daljnjim razmatranjima napon, odnosno struja bit će zamijenjeni općenitim signalom $x(t)$, dok će za otpornik R biti pretpostavljena vrijednost od jednog oma. To je uobičajena praksa u teoriji komunikacija kako bi se izrazi za snagu, odnosno energiju pojednostavili.

3.1.2. Periodični signali

Signal $x(t)$ u kontinuiranom vremenu smatramo periodičnim ako vrijedi: $x(t) = x(t + T)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, pri čemu je T realna konstanta. Najmanji broj T veći od nule, označimo ga kao T_0 , za kojeg vrijedi ta jednakost, nazivamo osnovni period signala $x(t)$. Signali koji ne zadovoljavaju navedeno svojstvo periodičnosti su neperiodični.

Periodičan signal moguće je razviti u Fourierov red na sljedeći način, [6]:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t},$$

gdje su c_k koeficijenti razvoja u Fourierov red koje je moguće izračunati izrazom

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

Temeljem dva prethodna izraza moguće je definirati Fourierov transformacijski par:

$$x(t) \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(f - kf_0), \quad (3.1)$$

tj. funkcija $x(t)$ čini Fourierov transformacijski par sa zbrojem Diracovih funkcija $\delta(f - kf_0)$, $k \in \mathbb{Z}$, skaliranih s koeficijentima c_k . Diracova delta funkcija $\delta(t)$ definirana je sljedećim izrazima, [7]:

$$\begin{aligned} \delta(t) &\neq 0 \quad \text{za} \quad t=0 \\ &\quad i \quad , \quad t \in \mathbb{R}, \\ \delta(t) &= 0 \quad \text{za} \quad t \neq 0 \end{aligned}$$

a zadovoljava i dva važna svojstva:

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1;$$

2) neka je funkcija $x(t)$ definirana nad skupom realnih brojeva, $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tada vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) x(t) dt = x(t_0),$$

pri čemu je t_0 također realan broj.

U gore navedenim izrazima vezanim uz razvoj funkcije u Fourierov red javlja se konstanta ω_0 koja je s osnovnim periodom signala vezana jednostavnom relacijom: $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$, gdje je f_0 osnovna frekvencija periodičnog signala $x(t)$. Jedan razred periodičnih signala koje je moguće prikazati pomoću razvoja u Fourierov red su signali koji imaju konačnu energiju unutar jednog perioda, tj. za koje vrijedi

$$\int_{T_0} |x(t)|^2 dt < \infty.$$

Kad je taj uvjet zadovoljen zajamčeno je da koeficijenti c_k imaju konačan iznos. Međutim, time nije zajamčeno da su originalni signal i njegov prikaz pomoću razvoja u Fourierov red jednaki u svakom trenutku t . Time je samo zajamčeno da signal njihove razlike, $e(t)$, definiran kao

$$e(t) = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

ima energiju jednaku nuli:

$$\int_{T_0} |e(t)|^2 dt = 0.$$

Postoji i alternativni skup uvjeta koje je postavio matematičar P. L. Dirichlet, koji jamče da je signal $x(t)$ jednak svojem razvoju u Fourierov red, osim za izolirane vrijednosti od t u kojima funkcija ima prekid. U tim točkama $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$ konvergira prema srednjem iznosu od vrijednosti tog zbroja proračunatih s obje strane diskontinuiteta. Detalje o Dirichletovim kriterijima moguće je pronaći u literaturi, [4].

Koeficijenti c_k tvore spektar signala, odnosno prikaz signala u frekvencijskoj domeni. Spektar periodičnog signala je diskretan, tj. poprima vrijednosti samo za diskretne vrijednosti frekvencije, $f_k = k/T_0$, $k \in \mathbb{Z}$. U općenitom slučaju koeficijenti c_k su kompleksne veličine i zadovoljavaju relaciju $c_{-k} = \overline{c_k}$, tj. vrijednost koeficijenta c_{-k} jednaka je konjugirano-kompleksnoj vrijednosti koeficijenta c_k . Koeficijente c_k moguće je prikazati u Eulerovom obliku kao

$$c_k = |c_k| e^{-j\theta_k}, \quad (3.2)$$

gdje apsolutne vrijednosti koeficijenata c_k čine tzv. amplitudni spektar signala, a θ_k su vrijednosti tzv. faznog spektra signala $x(t)$.

Srednju snagu periodičnog signala u kontinuiranom vremenu, P , moguće je izračunati izrazom

$$P = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{kT_0} k \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt \right] = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Dakle, srednja snaga se računa nad cijelim intervalom od $-\infty$ do ∞ (otuda član k koji teži u ∞), a skraćivanjem dobivamo da je srednju snagu periodičnog signala moguće računati i samo unutar jednog perioda trajanja T_0 . Gornja se jednakost ujedno naziva i Parsevalova relacija za periodične signale u kontinuiranom vremenu. Obzirom da za koeficijente c_k vrijedi da je $c_{-k} = \overline{c_k}$, gornji izraz možemo pojednostavniti:

$$P = |c_0|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2.$$

Interpretirano riječima, srednja snaga periodičnog signala jednaka je zbroju srednjih snaga svih harmoničkih komponenti od kojih je signal sastavljen.

Primjer 1: spektar i srednja snaga trigonometrijskih signala

Signali sinusnog, odnosno kosinusnog oblika često se koriste u komunikacijama. Stoga je poželjno poznavati njihov spektar i srednju snagu. Funkcija $\sin(t)$,

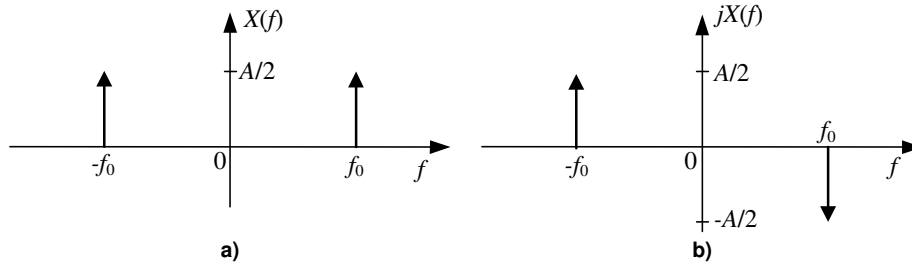
odnosno $\cos(t)$, gdje je t realna varijabla, periodična je s osnovnim periodom 2π . Neka je signal zadan kao $x(t) = A \sin(\omega_0 t)$, $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$, pri čemu je f_0 frekvencija sinusnog signala $x(t)$, T_0 njegov period, a A njegova amplituda. Koristeći izraz za razvoj periodične funkcije u Fourierov red i izraz (3.1) dobivamo spektar tako zadanog sinusnog signala $x(t)$:

$$X(f) = -j \frac{A}{2} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)].$$

Na sličan način, spektar kosinusnog signala $x(t) = A \cos(\omega_0 t)$, $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$ (f_0 , T_0 i A imaju isto značenje kao i kod sinusnog signala), dan je izrazom

$$X(f) = \frac{A}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)].$$

Slika 3.3 prikazuje spektar kosinusnog, odnosno sinusnog signala. Ako usporedimo izraze za spektar ovih dvaju signala, evidentno je da čimbenik $-j$ u izrazu za spektar sinusnog signala potječe od faznog kašnjenja funkcije sinus u odnosu na funkciju kosinus: $\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Srednja snaga sinusnog signala jednaka je srednjoj snazi kosinusnog signala i iznosi $P = A^2/2$. Srednja snaga signala uvijek ovisi samo o amplitudnom spektru, a ne i o faznom spektru.

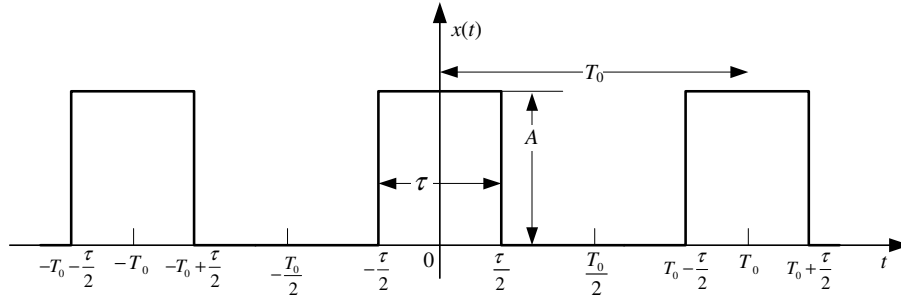


Slika 3.3: Spektar a) kosinusnog i b) sinusnog signala

Primjer 2: periodičan slijed pravokutnih impulsa

Promatrajmo beskonačan slijed pravokutnih impulsa. Neka pravokutni impuls ima amplitudu A volta, trajanje τ sekundi, a osnovni period ponavljanja iznosi T_0 [s], $T_0 > \tau$ (Slika 3.4). Na razini osnovnog perioda u području oko nule funkciju $x(t)$, koja predstavlja periodičan slijed pravokutnih impulsa, matematički je moguće zapisati kao

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{za } 0 \leq |t| < \tau/2 \\ 0 & \text{za } \tau/2 < |t| \leq T_0/2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$



Slika 3.4: Periodičan slijed pravokutnih impulsa

Naravno, funkcija $x(t)$ zadovoljava i svojstvo periodičnosti pa vrijedi $x(t + T_0) = x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Drugim riječima, poznavanje funkcije na razini jednog perioda omogućava nam da odredimo njezinu vrijednost u bilo kojem vremenskom trenutku. Kao i svaki periodičan signal, tako je i periodičan slijed pravokutnih impulsa moguće razviti u Fourierov red, što će omogućiti prikaz spektra takvog signala i proračun njegove srednje snage. Koeficijenti razvoja u Fourierov red dani su izrazom

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \left[-\frac{A}{jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t} \right]_{-\tau/2}^{\tau/2} \\ &= \frac{A}{T_0} \frac{e^{jk\omega_0 \tau/2} - e^{-jk\omega_0 \tau/2}}{jk\omega_0} = \frac{2A}{k\omega_0 T_0} \sin(k\omega_0 \tau/2). \end{aligned}$$

Konačni izraz za Fourierove koeficijente c_k moguće je napisati u obliku funkcije $\sin(x)/x$:

$$c_k = A \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin(k\omega_0 \tau/2)}{k\omega_0 \tau/2}. \quad (3.4)$$

Slika 3.5 i izraz za koeficijente Fourierovog reda, (3.4), pokazuju da je spektar periodičnog slijeda pravokutnih impulsa definiranog izrazom (3.3) diskretan i njegove se komponente c_k pojavljuju samo na diskretnim frekvencijama k/T_0 [Hz], $k \in \mathbb{Z}$. Spektar periodičnog slijeda pravokutnih impulsa najveću vrijednost

poprima u nuli: $c_0 = A\tau/T_0$. Općenito gledano, koeficijent c_0 predstavlja isto-smjernu komponentu periodičnog signala. Ovojnica spektra, koja je na slici prikazana crtkano, predstavlja spektar jednog jedinog pravokutnog impulsa amplitude A [V] i trajanja τ [s] (vidi potpoglavlje 3.1.3). Vrijednosti diskretnih komponenata c_k poklapaju se s ovojnicom. Nadalje, promatrano na frekvencijskoj osi, ovojnica prolazi kroz nulu u točkama n/τ [Hz], $n \in \mathbb{Z}$. Ovisno o omjeru

τ/T_0 , neke komponente c_k mogu biti jednake nuli. Na primjer, ako τ traje dvostruko kraće od perioda T_0 ($\tau/T_0 = 1/2$), tada će svaka parna komponenta spektra periodičnog slijeda pravokutnih impulsa biti jednaka nuli: $c_{2k} = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$ i $k \neq 0$.

Referencirajući se na općeniti izraz (3.2) za spektralne komponente, amplitudni spektar periodičnog slijeda pravokutnih impulsa definiranog izrazom (3.3) određen je na sljedeći način:

$$|c_k| = A \frac{\tau}{T_0} \left| \frac{\sin(k\omega_0 \tau/2)}{k\omega_0 \tau/2} \right|, \quad k \in \mathbb{Z},$$

dok je fazni spektar tog istog signala određen izrazom

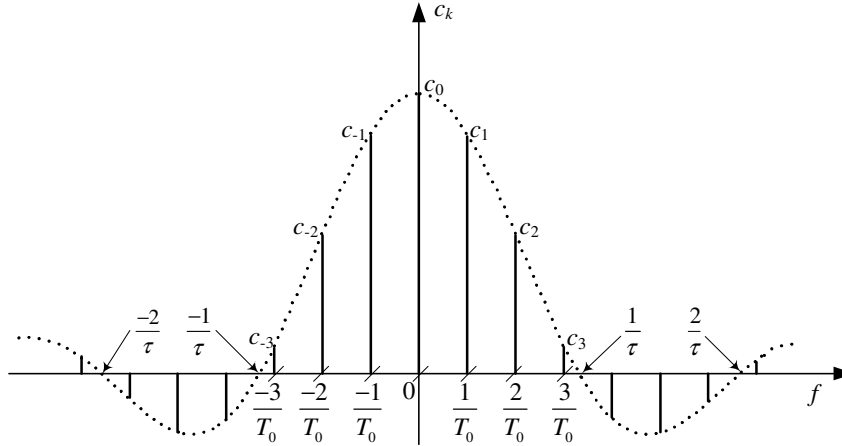
$$\theta_k = \begin{cases} 0, & \text{za } \frac{k}{T_0} \in \left[\frac{2n}{\tau}, \frac{2n+1}{\tau} \right] \\ \pi, & \text{za } \frac{k}{T_0} \in \left[\frac{2n+1}{\tau}, \frac{2(n+1)}{\tau} \right] \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z} \cup \{0\}.$$

Ako se periodičan slijed pravokutnih impulsa prikazan slikom (Slika 3.4) pomakne iz ishodišta po vremenskoj osi za neki iznos t_p , $0 \leq t_p \leq T_0$, tada se mijenja samo fazni spektar signala, dok amplitudni spektar signala ostaje nepromijenjen. Obzirom da je funkcija $x(t)$ iz izraza (3.3) zadana kao parna funkcija, koeficijenti c_k poprimaju realne vrijednosti i vrijedi $c_{-k} = c_k$. Imajući to svojstvo u vidu, funkciju $x(t)$ možemo prikazati pomoću koeficijenata c_k na sljedeći način:

$$x(t) = A \frac{\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\omega_0 \tau/2)}{k\omega_0 \tau/2} e^{jk\omega_0 t} = A \frac{\tau}{T} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\omega_0 \tau/2)}{k\omega_0 \tau/2} \cos(k\omega_0 t) \right].$$

Kad su poznati svi koeficijenti c_k , tada je srednju snagu periodičnog slijeda pravokutnih impulsa moguće izračunati kao

$$P = c_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \left(\frac{A\tau}{T} \right)^2 \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(k\omega_0 \tau/2)}{k\omega_0 \tau/2} \right]^2 \right\} = A^2 \frac{\tau}{T}.$$



Slika 3.5: Spektar periodičnog slijeda pravokutnih impulsa

3.1.3. Neperiodični signali

Promatramo neperiodičan signal $x(t)$ u kontinuiranom vremenu. Tada su energija signala $x(t)$, E , i njegova srednja snaga, P , definirani izrazima, [4]:

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt,$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt.$$

Spektar neperiodičnog signala vezan je s vremenskim prikazom signala pomoću Fourierove transformacije, [7]:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \text{ ili } X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt,$$

pri čemu je kružna frekvencija ω vezana s frekvencijom f jednostavnim izrazom: $\omega = 2\pi f$. Za funkcije $x(t)$ i $X(f)$, odnosno $x(t)$ i $X(\omega)$ kažemo da tvore Fourierov transformacijski par:

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \text{ ili } x(t) \leftrightarrow X(\omega).$$

Na sličan način kao i u slučaju razvoja funkcije u Fourierov red, funkcija $x(t)$ mora zadovoljavati tzv. Dirichletove uvjete kako bi postojala njezina Fourierova transformacija. Od tih uvjeta posebno izdvajamo kvadratnu apsolutnu integrabilnost funkcije $x(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty.$$

Fourierovu transformaciju signala $x(t)$, $X(f)$, odnosno $X(\omega)$ nazivamo spektar signala $x(t)$. Spektar signala se sastoji od dva dijela, amplitudnog i faznog spektra, određenih sljedećim izrazom:

$$X(f) = |X(f)| e^{j\theta(f)},$$

pri čemu je $|X(f)|$ amplitudni spektar, a $\theta(f)$ fazni spektar signala $x(t)$. Amplitudni spektar je parna, a fazni spektar neparna funkcija frekvencije. Ako nam je poznat spektar signala, onda je sam signal moguće odrediti primjenom inverzne Fourierove transformacije:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \text{ ili } x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Energiju neperiodičnog signala moguće je izračunati korištenjem Parsevalovog teorema:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega.$$

U svim prethodno navedenim izrazima za energiju neperiodičnog signala, ukoliko je signal definiran isključivo na intervalu $t_1 \leq t \leq t_2$, tada je dozvoljeno u spomenutim izrazima prilagoditi granice integracije, odnosno zbroja na navedene intervale. Takvo pak razmišljanje nije moguće primijeniti na izraz za srednju snagu signala. Bez obzira na eventualnu ograničenost signala na određeni konačan vremenski interval, srednja se snaga uvijek računa nad beskonačnim intervalom vremena, tj. od $-\infty$ do $+\infty$.

S obzirom na srednju snagu signala, P , i energiju signala, E , postoje tri razreda signala, [7]:

1. signali koji imaju konačnu ukupnu energiju, tj. $E < \infty$ – takvi signali moraju imati srednju snagu jednaku nuli;
 - primjer: signal $x(t)$ čija je vrijednost jednaka 1 u intervalu $0 \leq t \leq 1$, a 0 izvan tog intervala – za takav signal vrijedi $E = 1$, $P = 0$;
2. signali koji imaju konačnu srednju snagu veću od nule – ako je $P > 0$, tada je $E = \infty$;
3. signali kojima su i srednja snaga i ukupna energija beskonačne;
 - primjer: signal $x(t) = t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Primjer: Diracov impuls

Diracov impuls opisujemo Diracovom delta funkcijom $\delta(t)$, definiranom u potpoglavlju 3.1.2. Koristeći svojstva Diracove delta funkcije, spektar Diracovog impulsa, $\Delta(f)$, izračunavamo na sljedeći način:

$$\Delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = e^0 = 1.$$

Nadalje, promotrimo funkciju $x(t) = K\delta(t)$, $k \in \mathbb{R}$. Fourierova transformacija takve funkcije, $X(f)$, dana je izrazom, [7]:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K\delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = Ke^0 = K.$$

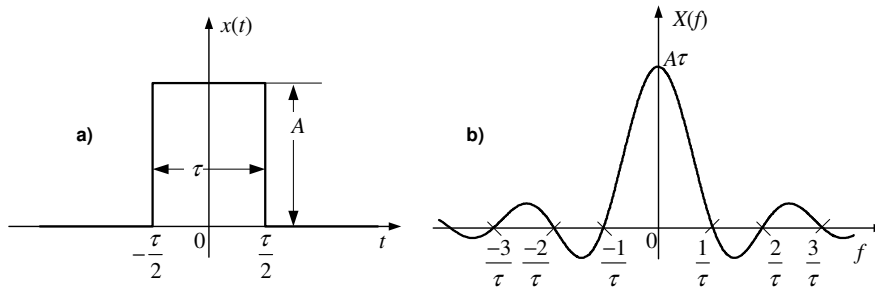
Primjer: Pravokutni impuls

Općenito, impulsom smatramo signal koji traje neko ograničeno, relativno kratko vrijeme. Riječ pravokutni u njegovom nazivu određuje oblik impulsa. Definirajmo pravokutni impuls (Slika 3.6a) sljedećom funkcijom:

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{za } 0 \leq |t| < \tau/2 \\ 0 & \text{za } |t| > \tau/2 \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

pri čemu je A amplituda impulsa, a τ je njegovo trajanje ($A, \tau \in \mathbb{R}$). Spektar tako definiranog pravokutnog impulsa moguće je odrediti korištenjem Fourierove transformacije:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = A \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j2\pi ft} dt = A\tau \frac{\sin(2\pi f\tau/2)}{2\pi f\tau/2}.$$



Slika 3.6: a) Pravokutni impuls i b) njegov spektar

Slika 3.6b prikazuje spektar pravokutnog impulsa. Spektar ima maksimalnu vrijednost za frekvenciju $f = 0$ Hz i iznosi $X(0) = A\tau$. Spektar pravokutnog

impulsa prolazi kroz nulu u točkama $f_k = k/\tau$, $k \in \mathbb{Z}$. Srednja snaga pravokutnog impulsa jednaka je nuli, a njegova je ukupna energija dana izrazom

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = A^2 \tau.$$

3.1.4. Veza između spektra periodičnih i neperiodičnih signala

Razmotrimo periodičan signal $x_0(t)$ osnovne frekvencije $f_0 = 1/T_0$, pri čemu je T_0 osnovni period signala $x_0(t)$. Signal $x_0(t)$ možemo prikazati razvojem u Fourierov red, [1]:

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t},$$

pri čemu su c_n kompleksni koeficijenti Fourierovog reda definirani izrazom

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_0(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt.$$

Nadalje, definirajmo signal impulsne naravi, $x(t)$, koji je jednak funkciji $x_0(t)$ za vrijeme trajanja jednog perioda:

$$x(t) = \begin{cases} x_0(t), & -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}, \\ 0, & \text{izvan tog intervala.} \end{cases}$$

Sada je signal $x_0(t)$ moguće izraziti pomoću signala $x(t)$ u obliku

$$x_0(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t - mT_0).$$

Temeljem ovog izraza funkciju $x(t)$ možemo smatrati generirajućom funkcijom koja tvori periodičan signal $x_0(t)$. Neka je $X(f)$ Fourierova transformacija funkcije $x(t)$. Izraz za koeficijente c_n moguće je redefinirati na sljedeći način:

$$c_n = f_0 \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = f_0 X(nf_0),$$

gdje je $X(nf_0)$ Fourierova transformacija funkcije $x(t)$ promatrana na diskretnoj frekvenciji nf_0 . Pomoću ovako definiranih koeficijenata c_n moguće je signal $x_0(t)$ prikazati u obliku Fourierovog reda kao

$$x_0(t) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nf_0) e^{j2\pi n f_0 t},$$

ili u obliku izraza za Poissonov zbroj:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t - mT_0) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nf_0) e^{j2\pi n f_0 t}.$$

Konačno, periodičan signal $x_0(t)$, prikazan pomoću generirajuće funkcije, i spektralne komponente $X(nf_0)$ čine Fourierov transformacijski par (vidi izraz

$$(3.1)): \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t - mT_0) \square f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nf_0) \delta(f - nf_0).$$

Općenito, neperiodičan signal $x(t)$ ima kontinuiran spektar. Nasuprot tome, periodičan signal $x_0(t)$, generiran neperiodičanm impulsom $x(t)$, ima diskretni spektar. Dakle, periodičnost signala u domeni vremena izaziva pojavu diskretnih spektralnih komponenti (Diracove funkcije) na frekvencijama koje su cjelobrojni višekratnici osnovne frekvencije periodičnog signala. Kao najbolja ilustracija ove tvrdnje mogu poslužiti prikazi spektra periodičnog slijeda pravokutnih impulsa (Slika 3.5) i spektra pravokutnog impulsa (Slika 3.6).

3.1.5. Slučajni signali

Obzirom da slučajni signal u bilo kojem vremenskom trenutku poprima neku slučajnu vrijednost, opisivanje takvog signala funkcijom $x(t)$ čija je vrijednost definirana u svakom trenutku t nema smisla. Stoga slučajne signale modeliramo pomoću slučajnih procesa. Slučajni ili stohastički proces $X(t)$ koji se koristi za matematički opis slučajnih signala je familija slučajnih varijabli $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, [12]. Osnovna obilježja slučajnog procesa su očekivanje (srednja vrijednost), autokorelacijska funkcija i autokovarijanca, [1]. Srednja vrijednost slučajnog procesa $X(t)$, $\mu_X(t)$, određena je izrazom

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x, t) dx,$$

pri čemu je $f_X(x, t)$ funkcija gustoće vjerojatnosti prvog reda slučajnog procesa $X(t)$. Nadalje, autokorelacijska funkcija slučajnog procesa $X(t)$ definirana je kao očekivanje produkta dviju slučajnih varijabli tog slučajnog procesa, definiranih u vremenskim trenucima t_1 i t_2 :

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)],$$

a autokovarijanca slučajnog procesa kao

$$\begin{aligned} C_X(t_1, t_2) &= E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)][X(t_2) - \mu_X(t_2)]\} \\ &= R_X(t_1, t_2) - E[X(t_1)]E[X(t_2)]. \end{aligned}$$

Autokorelacijska funkcija pokazuje u kakvom su međusobnom statističkom odnosu vrijednosti nekog slučajnog procesa promatrane u trenucima t_1 i t_2 . U komunikacijama se često razmatraju stacionarni slučajni procesi, [22]. Ako je slučajni proces $X(t)$ stacionaran u širem smislu, tada zadovoljava sljedeće uvjete:

$$E[X(t)] = \mu_X, \forall t \in \mathbb{R},$$

$$R_X(t_1, t_2) = K_X(|t_2 - t_1|) = K_X(\tau), \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

tj. njegovo očekivanje je konstantno (μ_X) i neovisno o vremenu, dok je njegova autokorelacijska funkcija ovisna samo o razlici $|t_1 - t_2| = \tau$, a ne i o samim vremenskim trenucima t_1 i t_2 . $K_X(\tau)$ ima značenje korelacijskog momenta slučajnih varijabli $X(t_1)$ i $X(t_2)$. U nastavku ćemo razmatrati samo slučajne signale koje je moguće modelirati stacionarnim slučajnim procesom.

Neka je autokorelacijska funkcija slučajnog procesa u kontinuiranom vremenu, $X(t)$, koji je stacionaran u širem smislu, definirana kao

$$R_X(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)],$$

pri čemu vrijedi: $R_X(-\tau) = R_X(\tau)$, $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$ i $R_X(0) = E[X^2(t)] \geq 0$.

Spektralna gustoća snage signala modeliranog slučajnim procesom $X(t)$ gore navedenih svojstava, $S_X(f)$, definirana je izrazom

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \text{ [W/Hz]},$$

odnosno, spektralna gustoća snage stacionarnog slučajnog procesa predstavlja Fourierovu transformaciju autokorelacijske funkcije tog procesa. Ako je poznata spektralna gustoća snage, tada je autokorelacijsku funkciju moguće odrediti inverznom Fourierovom transformacijom:

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f\tau} df.$$

Konačno, srednja snaga P slučajnog signala modeliranog stacionarnim slučajnim procesom definirana je izrazom

$$P = E[X^2(t)] = R_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df.$$

Primjer

Primjer slučajnog signala: Gaussov bijeli šum

Slučajan proces $W(t)$ nazivamo bijeli šum ako su njegove vrijednosti, tj. slučajne varijable u trenucima t_i i t_j , $t_i \neq t_j$, međusobno potpuno nekorelirane. U tom slučaju vrijedi da je autokovarianca $C_X(t_i, t_j)$ jednaka nuli kad god vrijedi $t_i \neq t_j$. Ako su slučajne varijable $W(t_i)$ i $W(t_j)$ istovremeno nekorelirane i neovisne, tada

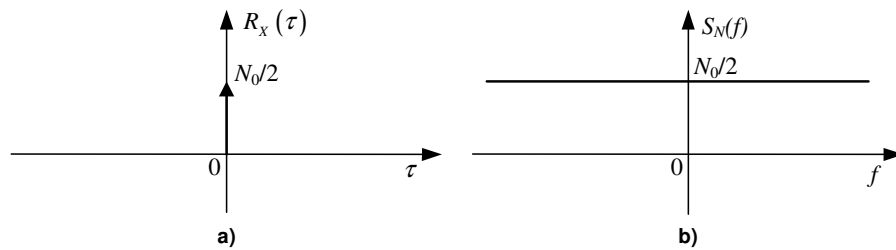
se radi o strogo bijelom šumu. Bijeli šum u kontinuiranom vremenu je stacionarni slučajni proces u širem smislu, $W(t)$, čija je srednja vrijednost jednaka nuli, a njegova autokorelacijska funkcija (Slika 3.7a) dana je izrazom:

$$R_w(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau).$$

Fourierovom transformacijom prethodnog izraza dobivamo spektralnu gustoću snage bijelog šuma:

$$S_w(f) = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = \sigma^2$$

koja je konstantna i neovisna o frekvenciji (otuda i naziv bijeli šum). Sukladno tome, srednja snaga bijelog šuma je beskonačna i takav signal predstavlja isključivo teoretski model. Unatoč tome, bijeli se šum često koristi u analizi komunikacijskih sustava. Spektralnu gustoću snage bijelog šuma, $S_N(f)$, obično izjednačavamo s konstantom $N_0/2$ (Slika 3.7b).



Slika 3.7: a) Autokorelacijska funkcija i b) spektralna gustoća snage bijelog šuma

Slučajni proces nazivamo bijeli Gaussov šum ako su zadovoljena prethodno navedena svojstva bijelog šuma i ako su slučajne varijable slučajnog procesa Gaussove. Za neku slučajnu varijablu X kažemo da ima Gaussovu razdiobu ako je njezina funkcija gustoće vjerojatnosti definirana kao

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu_X)^2 / (2\sigma_X^2)},$$

pri čemu je μ_X očekivanje, a σ_X standardna devijacija, odnosno korijen varijance slučajne varijable X .

Općenito promatrano, varijanca neke slučajne varijable X definirana je kao, [12]:

$$\text{var}(X) = E\{(X - E[X])^2\} = E[X^2] - \{E[X]\}^2 = \sigma_X^2.$$

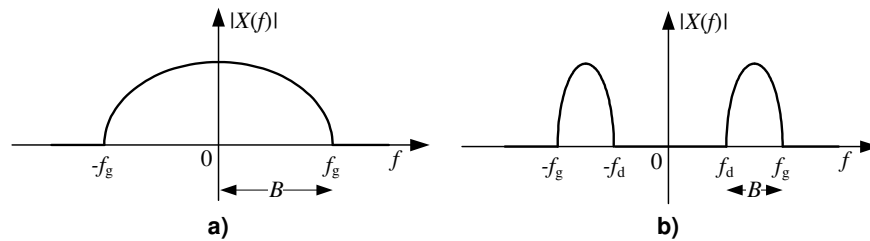
U teoriji vjerojatnosti za varijancu se koristi i izraz disperzija. Ako neka slučajna varijabla X predstavlja napon, odnosno struju, tada očekivanje $E[X]$ predstavlja srednju vrijednost tog napona, odnosno te struje, a $E[X^2]$ srednju snagu dotičnog

signala disipiranu na otporniku otpora 1Ω . Međutim, ako vrijedi da je $E[X] = 0$, tada je ispunjena jednakost $\text{var}(X) = E[X^2] = \sigma_X^2$, pa je u takvom slučaju srednja snaga signala opisanog slučajnom varijablom X jednaka kvadratu standardne devijacije te slučajne varijable.

3.1.6. Širina spektra signala

U realnim komunikacijskim sustavima, ovisno o pojasu frekvencija kojeg zauzima amplitudni spektar signala, signale dijelimo na (Slika 3.8):

1. signale u osnovnom frekvencijskom pojasu (engl. *baseband signals*)
 - amplitudni spektar im je različit od nule isključivo unutar frekvencijskog pojasa $(-f_g, f_g)$;
2. signale u pomaknutom frekvencijskom pojasu (engl. *passband signals*)
 - amplitudni spektar im je različit od nule isključivo unutar pojaseva $(-f_g, -f_d)$ i (f_d, f_g) , $f_d < f_g$ i $f_d \neq 0$; položaj ta dva pojasa, koji su za f_d herca pomaknuti u lijevo, odnosno u desno od nulte frekvencije, osnovni je razlog korištenja naziva *signal u pomaknutom frekvencijskom pojasu*.



Slika 3.8: Vrste signala prema pojasu frekvencija kojeg zauzima njihov amplitudni spektar: a) signal u osnovnom frekvencijskom pojasu i b) signal u pomaknutom frekvencijskom pojasu

Treba reći da u praksi ne postoje signali koji bi imali idealno omeđen amplitudni spektar koji je u nekom pojasu frekvencija jednak nuli. Stoga, da bi odredili širinu spektra signala (označimo je kao B [Hz]), moramo prvo definirati graničnu vrijednost amplitudnog spektra. Ako iznos amplitudnog spektra padne ispod te granične vrijednosti, tada ga smatramo praktično jednakim nuli. Sukladno slici (Slika 3.8a), ako je amplitudni spektar zanemarivo mali za sve frekvencije izvan frekvencijskog pojasa $(-f_g, f_g)$, tada je širina spektra signala jednaka: $B = f_g$ [Hz]. Također, sukladno slici (Slika 3.8b), ako je amplitudni spektar zanemarivo mali za sve frekvencije izvan frekvencijskih pojaseva $(-f_g, -f_d)$ i (f_d, f_g) , tada je širina prijenosnog pojasa određena izrazom: $B = f_g - f_d$ [Hz].

Primjer: Širina spektra pravokutnog signala

Slika 3.6b prikazuje spektar pravokutnog signala $x(t)$. Temeljem slike lako je moguće odrediti i amplitudni spektar pravokutnog signala, $|X(f)|$. Pravokutni signal smatramo signalom u osnovnom frekvencijskom pojasu. Na slici je također vidljivo je da je glavnina spektra, pa uslijed toga i energije takvog signala, smještena u području frekvencija između nul-točaka $-1/\tau$ Hz i $1/\tau$ Hz. Za praktične potrebe, širinom spektra pravokutnog signala smatra se $B = 1/\tau$ Hz.



3.2. Komunikacijski kanali u kontinuiranom vremenu

Po definiciji svjetske standardizacijske organizacije ITU (engl. *International Telecommunication Union*) komunikacijski kanal je sredstvo za jednosmjerni prijenos signala između predajnika i prijarnika. Prilikom razmatranja komunikacijskih sustava sam prijenosni medij pomoću kojeg su međusobno povezani predajnik i prijarnik predstavlja komunikacijski kanal (ili skraćeno kanal) na najnižem, tj. na fizičkom sloju komunikacije. U telekomunikacijama postoje tri osnovne vrste prijenosnih medija koje se koriste u prijenosu na većim udaljenostima:

1. žični mediji

- upredene parice (upredenu paricu čine dva metalna vodiča omotana jedan oko drugog), koaksijalni kabeli, vodovi elektroenergetske mreže,

2. optičke niti,

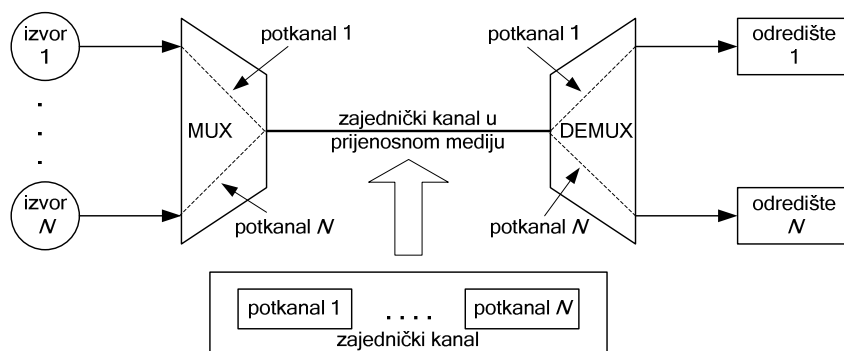
3. neomeđeni medij ili tzv. eter

- prostorno neomeđen medij (najčešće zrak) kroz koji se prostiru elektromagnetski valovi,
- prijenos signala se odvija u radijskom, mikrovalnom ili infracrvenom frekvencijskom području.

U komunikacijskim sustavima ponekad se cijeli prijenosni medij koristi samo za jednu vezu ostvarenu između dvije točke u komunikacijskoj mreži. Primjer takvog korištenja medija je pretplatnička linija kojom su međusobno povezani telefonski aparat krajnjeg korisnika i telefonska centrala u tradicionalnoj analognoj telefonskoj mreži. Međutim, tu dolazimo do suštinske razlike između fizičkog kanala, tj. same upredene parice, i telefonskog kanala, kao pojasa frekvencija korištenog za prijenos tim medijem. Poznato je da je za razumljiv prijenos ljudskog govora dovoljno prenositi frekvencije u pojasu od 300 do 3400 Hz. Za praktične proračune uzima se da efektivna širina prijenosnog pojasa

takvog kanala iznosi 4 kHz. Dakle, prilikom prijenosa ljudskog govora u odgovarajućim sklopovima u telefonskoj mreži pojas govora se ograničava na navedeno područje frekvencija. Upredena parica, kao prijenosni medij, nema izravne veze s tim. Ona formirani signal iz predajnika prihvaća i prenosi ga, sukladno svojoj prijenosnoj funkciji do prijamnika. Drugi riječima, upredena parica je fizički kanal, određen svojstvima prijenosnog medija, odnosno materije od koje je sazdan, a telefonski kanal je logički kanal, izgrađen nad prijenosnim medijem uz korištenje dodatnog sklopovlja za obradu signala i ograničavanje njegovog prijenosnog pojasa.

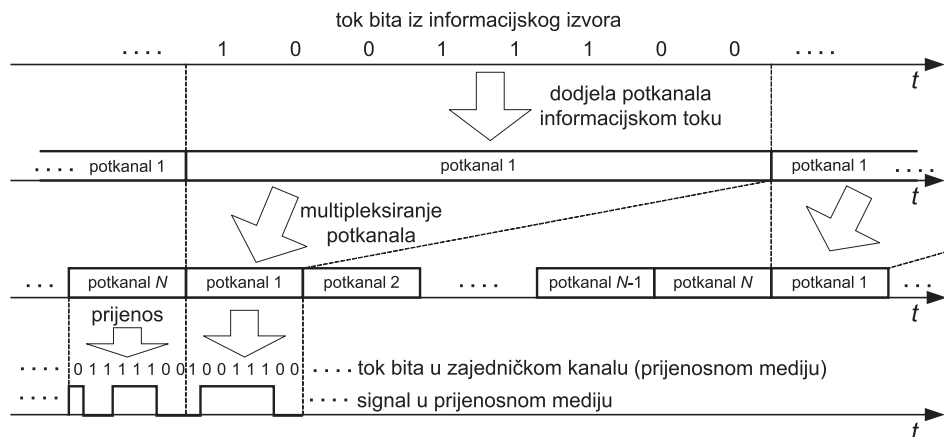
Za razliku od gore navedenog primjera, ponekad se jedan prijenosni medij koristi za istovremeni prijenos većeg broja veza ostvarenih između različitih krajnjih točaka u mreži. U tom slučaju korištenje prijenosnog medija kao cjelovitog kanala nije moguće. Prijenos signala ima četiri koordinate: prostor, frekvenciju, vrijeme i dinamiku. Kanal (fizički ili logički) unutar prijenosnog medija moguće je podijeliti na potkanale, koristeći jednu ili više koordinata. Sam postupak raspoređivanja potkanala unutar raspoloživog zajedničkog kanala odvija se u predajniku i nazivamo ga multipleksiranje, a u prijamniku se obavlja obrnut postupak, tj. demultipleksiranje, odnosno razdvajanje potkanala (Slika 3.9).



Slika 3.9: Osnovno načelo multipleksiranja i demultipleksiranja potkanala

Na primjer, jednom se upredenom paricom šalje N potkanala u vremenskoj podjeli, $N \in \mathbb{N}$ (Slika 3.10). Svakom od N informacijskih izvora pridjeljujemo vlastiti potkanal za prijenos pripadajućih mu podataka. Svaki izvor permanentno generira informacije brzinom R bit/s (često se za ovu brzinu koristi naziv *podatkovna brzina*, engleski: *data rate*). Potkanali se po vremenskom rasporedu multipleksiraju u jedan cjeloviti kanal kojim se zajednički signal, generiran temeljem informacije iz svih aktivnih izvora, prenosi upredenom paricom do prijamnika. Prijenos signala na razini parice je neprekidan, a potkanali su vremenski poredani jedan do drugog i stalno se ciklički ponavljaju. Brzina prijenosa informacijskih bita paricom iznosi $N \cdot R$ bit/s. Ova se brzina naziva

prijenosna brzina (od engleskog: *transmission rate*). Opisani način slaganja potkanala u jedan zajednički kanal naziva se multipleksiranje po vremenu ili vremensko multipleksiranje.



Slika 3.10: Prijenos kanala u vremenskom rasporedu jednim prijenosnim medijem

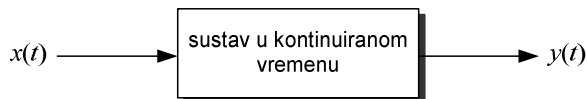
Također, prilikom odašiljanja signala u neomeđeni medij, kanal je podijeljen na potkanale, od kojih svaki koristi zaseban pojas frekvencija i u pravilu se ti pojasevi minimalno preklapaju. Takav način formiranja jednog kanala iz više potkanala naziva se multipleksiranje po frekvencijama ili frekvencijsko multipleksiranje. Primjer uporabe frekvencijskog multipleksiranja je radio-difuzijsko odašiljanje televizijskog signala.

3.2.1. Matematički model kanala

Prilikom matematičkog modeliranja, sustav definiramo kao preslikavanje skupa F (ulaz u sustav) u skup G (izlaz iz sustava), [5]. U kontekstu komunikacija, sustav možemo promatrati kao proces uslijed kojeg su ulazni signali, tj. signali na ulazu sustava, transformirani djelovanjem sustava u izlazne signale, tj. signale na izlazu sustava. Sustav je kontinuiran ili analogan, ako su elementi skupova F i G funkcije kontinuirane varijable. Nasuprot tome, sustav je diskretan ili digitalan, ako su elementi skupova F i G funkcije diskretne varijable.

U svijetlu uvodnih razmatranja danih u 3.2 ograničit ćemo se na pojam kanala u općenitom smislu, bez obzira radilo se o cijelom prijenosnom mediju ili o nekom potkanalu unutar njega. Kanal je moguće modelirati sustavom u kontinuiranom ili diskretnom vremenu. U nastavku ovog poglavlja razmatrat ćemo isključivo sustave u kontinuiranom vremenu. Slika 3.11 prikazuje sustav u kontinuiranom vremenu. Djelovanje sustava možemo zapisati kao $x(t) \rightarrow y(t)$. Pri tome signal

$x(t)$ djeluje na ulazu u sustav (ulazni signal), a signal $y(t)$ djeluje na izlazu iz sustava (izlazni signal).



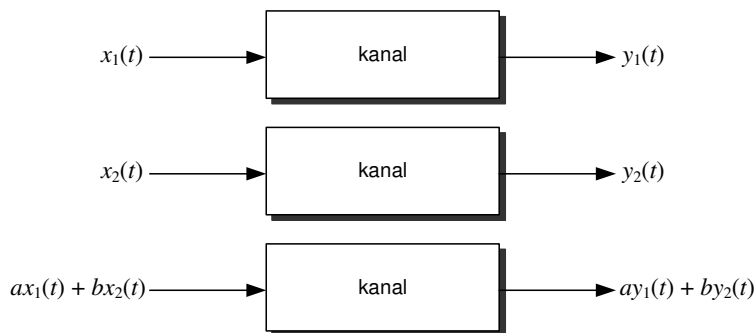
Slika 3.11: Sustav u kontinuiranom vremenu

Nadalje, kanali mogu biti linearni i nelinearni. Većinu komunikacijskih kanala najčešće opisujemo modelom linearnog vremenski nepromjenjivog sustava (skraćeno LTI sustav, LTI dolazi od engleskog pojma *Linear Time-Invariant*), [2].

Definicija

Linearnost kanala (Slika 3.12) definirana je na temelju sljedećih pretpostavki. Neka predajnik na ulaz kanala šalje signal $x_1(t)$, a na izlazu kanala, odnosno na ulazu prijamnika, kao odziv na pobudu signalom $x_1(t)$, pojavljuje se signal $y_1(t)$. Nadalje, neka predajnik na ulaz kanala šalje signal $x_2(t)$, a na izlazu kanala, odnosno na ulazu prijamnika, kao odziv na pobudu signalom $x_2(t)$, pojavljuje se signal $y_2(t)$. Kanal će biti linearan ako je odziv kanala na pobudu $a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)$ jednak $a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Drugim riječima, sustav je linearan ako je njegov odziv na pobudu linearnom kombinacijom signala na ulazu ista takva linearna kombinacija odziva na pobudu svakim od tih ulaznih signala zasebno.

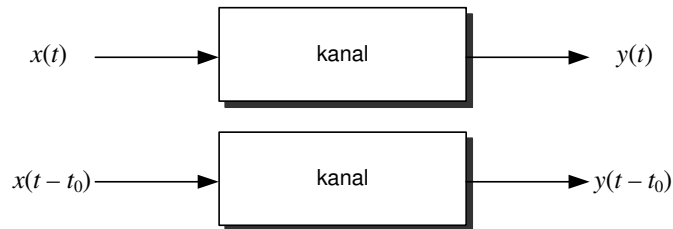
Telefonski kanal korišten u analognoj telefoniji primjer je linearnog kanala. Primjer nelinearnog kanala je satelitski kanal (iako takav kanal nije uvijek nelinearan).



Slika 3.12: Definicija linearnosti kanala u kontinuiranom vremenu

Definicija vremenske nepromjenjivosti kanala u kontinuiranom vremenu je sljedeća. Pretpostavimo da je odziv kanala na pobudu signalom $x(t)$ jednak signalu $y(t)$. Ako je odziv sustava na pobudu signalom $x(t - t_0)$ jednak signalu $y(t - t_0)$, i to za bilo koji $t_0 \in \mathbb{R}$, tada je sustav, koji zadovoljava navedeno

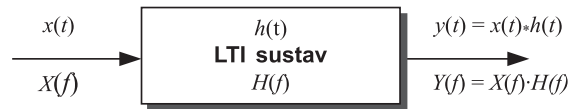
svojstvo, vremenski nepromjenjiv (Slika 3.13). Pritom t_0 predstavlja vremenski pomak signala. Dakle, kanal je vremenski nepromjenjiv ako pomak ulaznog signala u vremenu za t_0 sekundi rezultira isključivo vremenskim pomakom izlaznog signala za isti iznos t_0 .



Slika 3.13: Definicija vremenske nepromjenjivosti kanala u kontinuiranom vremenu

3.2.2. Impulsni odziv i prijenosna funkcija kanala

U vremenskoj domeni linearan sustav opisujemo impulsnim odzivom. Ako pretpostavimo da Diracov impuls nastupa na ulazu nekog LTI sustava u trenutku $t = 0$, tada je odziv na takvu pobudu jednak impulsnom odzivu dotičnog sustava, i obično se označava kao funkcija $h(t)$. Ako je sustav ujedno i vremenski nepromjenjiv, tada je oblik impulsnog odziva sustava uvijek isti, neovisno o trenutku u kojem se Diracova delta funkcija javlja na ulazu sustava.



Slika 3.14: Impulsni odziv i prijenosna funkcija LTI sustava

Nadalje, ako na ulazu nekog LTI sustava poznatog impulsnog odziva $h(t)$ djeluje signal $x(t)$, tada je signal na izlazu tog sustava, $y(t)$, moguće na jednoznačan način odrediti temeljem tih dviju funkcija (Slika 3.14), [2]:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau.$$

Dakle, odziv LTI sustava je konvolucija ulaznog signala s impulsnim odzivom sustava:

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t).$$

U gore navedenom konvolucijskom integralu parametar τ predstavlja vrijeme pobude, t predstavlja vrijeme odziva, a razlika $t - \tau$ je trajanje pamćenja sustava. Sukladno tome, impulsni odziv djeluje kao funkcija pamćenja sustava.

Nadalje, razmotrimo LTI sustav impulsnog odziva $h(t)$ na čijem ulazu djeluje kompleksni eksponencijalni signal $x(t)$ jedinične amplitude i frekvencije f :

$$x(t) = e^{j2\pi ft}.$$

Koristeći konvolucijski integral moguće je na jednostavan način odrediti odziv sustava, $y(t)$, koristeći sljedeći izraz:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j2\pi f(t-\tau)} d\tau = e^{j2\pi ft} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau.$$

Prijenosna funkcija LTI sustava, $H(f)$, definirana je kao Fourierova transformacija impulsnog odziva sustava:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt.$$

Drugim riječima, ako na ulazu sustava djeluje pobuda u obliku Diracove delta funkcije, tada prijenosna funkcija predstavlja prikaz odziva sustava u frekvencijskoj domeni. Sada je moguće odziv LTI sustava na pobudu kompleksnim eksponencijalnim signalom prikazati kao

$$y(t) = H(f) e^{j2\pi ft}.$$

Očito je da je odziv LTI sustava na pobudu kompleksnim eksponencijalnim signalom $x(t)$ jedinične amplitude i frekvencije f ista takva funkcija pomnožena koeficijentom $H(f)$. Prijenosna funkcija je u općenitom slučaju kompleksna veličina i moguće ju je prikazati kao

$$H(f) = |H(f)| e^{-j\theta(f)},$$

pri čemu $|H(f)|$ predstavlja amplitudni odziv sustava, a $\theta(f)$ fazni odziv sustava. Amplitudni odziv je parna funkcija frekvencije, a fazni odziv neparna funkcija frekvencije:

$$\begin{aligned} |H(-f)| &= |H(f)|, \\ \theta(-f) &= -\theta(f). \end{aligned}$$

Obzirom da je prijenosna funkcija LTI sustava definirana kao Fourierova transformacija impulsnog odziva, tada je evidentno da je impulsni odziv vezan s prijenosnom funkcijom $H(f)$ pomoću inverzne Fourierove transformacije:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df.$$

Dakle, impulsni odziv i prijenosna funkcija LTI sustava čine Fourierov transformacijski par: $h(t) \leftrightarrow H(f)$.

LTI sustav zadovoljava važno svojstvo da je spektar signala na njegovom izlazu jednak umnošku spektra signala na njegovom ulazu i prijenosne funkcije sustava. Neka je s $X(f)$ označen spektar ulaznog signala $x(t)$, a s $Y(f)$ spektar izlaznog signala $y(t)$. Ako je $H(f)$ prijenosna funkcija LTI sustava, tada vrijedi (Slika 3.14):

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f).$$

To svojstvo je u potpunosti u skladu sa svojstvom Fourierove transformacije temeljem kojeg se konvolucija dvaju signala u domeni vremena preslikava u umnožak Fourierovih transformacija tih signala u domeni frekvencije. Naravno, vrijedi i obrat, a to je da se umnožak dvaju signala u domeni vremena Fourierovom transformacijom preslikava u konvoluciju njihovih spektara u frekvencijskoj domeni.

Ako na ulazu LTI sustava prijenosne funkcije $H(f)$ djeluje signal obilježja stacionarnog slučajnog procesa $X(t)$, čija su srednja vrijednost μ_x i spektralna gustoća snage $S_x(f)$, tada su adekvatna obilježja slučajnog signala na izlazu, $Y(t)$, određena izrazima

$$\begin{aligned}\mu_y &= \mu_x H(0), \\ S_y(f) &= S_x(f) |H(f)|^2.\end{aligned}$$

Prolaskom kroz LTI sustav, slučajni proces zadržava stacionarnost i na izlazu sustava.

3.2.3. Širina prijenosnog pojasa kanala

Najopćenitije rečeno, širina prijenosnog pojasa kanala je područje frekvencija u kojem komunikacijski kanal propušta signale sa svojeg ulaza na izlaz. Svaki realan kanal, koji se ponaša kao LTI sustav, prigušuje signale koje prenosi, tako da je srednja snaga, odnosno energija izlaznog signala, uvijek manja od srednje snage, odnosno energije ulaznog signala. Drugim riječima, amplituda svake frekvencijske komponente od koje je sazdan izlazni signal manja je od amplitude odgovarajuće frekvencijske komponente ulaznog signala. Prigušenje kanala, $A(f)$, definirano je pomoću modula njegove prijenosne funkcije kao $A(f) = 1/|H(f)|$.

Pored prigušenja amplitude signala, kanal djeluje i na fazu ulaznog signala. Faza svake frekvencijske komponente od koje je sazdan izlazni signal različita je od faze odgovarajuće frekvencijske komponente ulaznog signala. Ta se pojava naziva disperzija signala. Djelovanje kanala na fazu signala posljedica je njegovog faznog odziva $\theta(f)$. Ako na ulaz kanala dovedemo signal $x(t)$ čiji je spektar $X(f)$ definiran kao $X(f) = |X(f)|e^{j\varphi(f)}$,

pri čemu su $|X(f)|$ amplitudni, a $\varphi(f)$ fazni spektar, tada spektar signala na izlazu linearnog i vremenski nepromjenjivog kanala, $Y(f)$, zadovoljava sljedeća svojstva:

$$\begin{aligned} Y(f) &= |Y(f)|e^{j\vartheta(f)}, \\ |Y(f)| &= |X(f)||H(f)|, \\ \vartheta(f) &= \varphi(f) - \theta(f), \end{aligned}$$

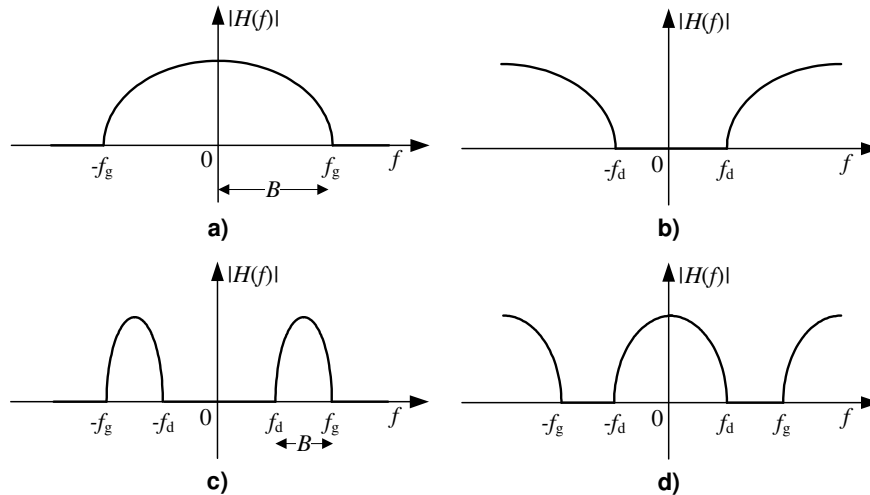
pri čemu su $|Y(f)|$ amplitudni, a $\vartheta(f)$ fazni spektar izlaznog signala.

Pojam propusnosti kanala vezan je uz prigušenje kojim kanal djeluje na signal koji se njime prenosi. Dakle, za kanal kažemo da propušta one frekvencije na kojima je njegov amplitudni odziv veći od nule. Obratno, kanal ne propušta one frekvencije na kojima je njegov amplitudni odziv jednak nuli.

Ovisno o obliku amplitudnog odziva, kanal može biti (Slika 3.15):

- a) niskopropusan
 - propušta sve frekvencije od nule do gornje granične frekvencije f_g ;
- b) visokopropusan
 - propušta sve frekvencije iznad donje granične frekvencije f_d ;
- c) pojasnopropusan
 - propušta sve frekvencije unutar pojasa između donje i gornje granične frekvencije;
- d) pojasna brana
 - propušta sve frekvencije osim one unutar pojasa između donje i gornje granične frekvencije.

U praksi se svi komunikacijski kanali ponašaju kao niskopropusni ili pojasnopropusni. Ovisno o vrsti kanala definira se i širina prijenosnog pojasa kanala. Za niskopropusni kanal širina prijenosnog pojasa, B , jednaka je gornjoj graničnoj frekvenciji kanala: $B = f_g$ [Hz]. Širina prijenosnog pojasa pojasnopropusnog kanala jednaka je razlici između gornje i donje granične frekvencije: $B = f_g - f_d$ [Hz].



Slika 3.15: Vrste kanala prema obliku amplitudnog odziva: a) niskopropusni, b) visokopropusni, c) pojasnopropusni i d) pojasna brana

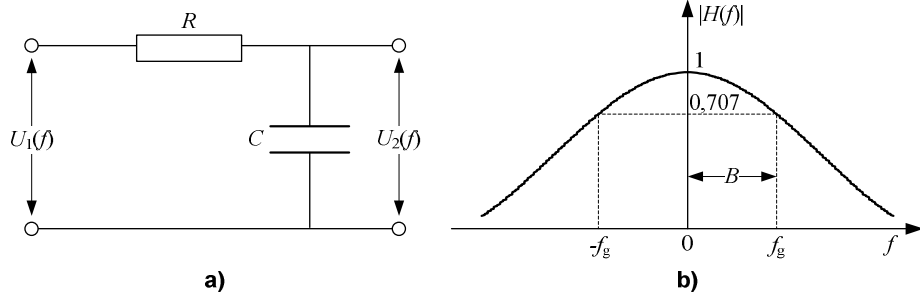
Treba napomenuti da su kanali prikazani gornjom slikom idealni u smislu da neke frekvencije propuštaju, dok neke potpuno prigušuju. U praksi takva situacija ne postoji. Svaki kanal praktično propušta sve frekvencije, više ili manje prigušene. Dakle, stvarni bi niskopropusni kanal propuštao i frekvencije iznad svoje granične frekvencije, ali uz povećano prigušenje. Najbolja ilustracija toga je tzv. RC krug (Slika 3.16a), sastavljen od jednog otpornika i jednog kondenzatora (upredena parica se ponaša slično kao i RC krug).

Njegov je amplitudni odziv (Slika 3.16b) dan izrazom

$$|H(f)| = \left| \frac{U_2(f)}{U_1(f)} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi fRC)^2}},$$

pri čemu je R [Ω] iznos otpora otpornika, C [F] kapacitet kondenzatora, a f frekvencija signala. Napon $U_1(f)$ je ulazni napon RC kruga, a $U_2(f)$ njegov izlazni napon. Iz izraza za $H(f)$ vidljivo je da se RC krug ponaša kao niskopropusni sustav. Amplitudni odziv RC kruga ima svoj maksimum na frekvenciji $f = 0$ Hz i iznosi $|H(0)| = 1$. Kako frekvencija raste od nule prema većim vrijednostima, $|H(f)|$ pada, međutim nikada ne dostiže iznos koji je potpuno jednak nuli. Dakle, strogo promatrano, širina prijenosnog pojasa RC kruga je beskonačna. Na sličan način i realan pojasnopropusni kanal propušta i frekvencije izvan pojasa (f_d , f_g), ali uz pojačano prigušenje.





Slika 3.16: a) RC krug i b) njegov amplitudni odziv

U praksi se za sustav prijenosne karakteristike slične ovoj kod RC kruga širina prijenosnog pojasa računa pomoću tzv. točaka prigušenja 3 decibela, [14]. Decibel je jedinica koja označava logaritamsku mjeru neke veličine ili omjera dviju veličina. Konkretno, amplitudni je odziv RC kruga moguće prikazati u decibelima kao

$$20 \log \left(\frac{|H(f)|}{|H(0)|} \right) = 20 \log(|H(f)|) - 20 \log(|H(0)|) = 20 \log(|H(f)|) [dB],$$

jer je $|H(0)| = 1$, pa vrijedi $20 \log(|H(0)|) = 0$ dB. Na frekvenciji na kojoj $|H(f)|$ iznosi približno $0,707$ ($=1/\sqrt{2}$) amplitudni je odziv za 3 decibela slabiji od $|H(0)|$. Ta se frekvencija naziva granična frekvencija f_g i širina prijenosnog pojasa RC kruga jednaka je: $B = f_g$. Točke prigušenja 3 decibela moguće je koristiti i za određivanje praktične širine prijenosnog pojasa pojasnopropusnog kanala, ali i za određivanje širine spektra signala, [1].

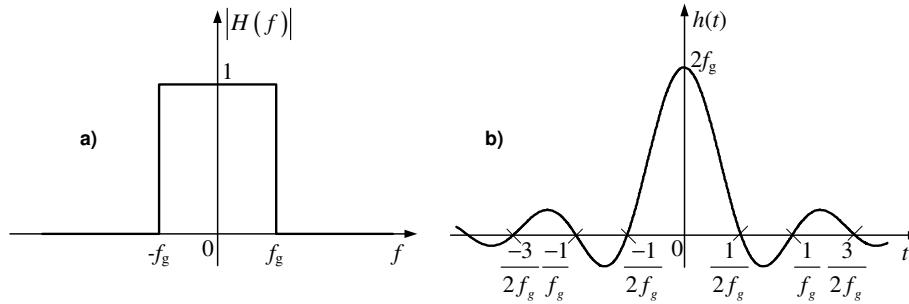
Da u stvarnosti niskopropusni kanal ne može biti strogo ograničen na neki pojas frekvencija, i to u smislu da je njegov amplitudni odziv strogo jednak nuli iznad neke frekvencije: $|H(f)| = 0$ za $|f| > f_g$, vidljivo je iz razmatranja tzv. idealnog niskopropusnog kanala. Definirajmo ga na sljedeći način (Slika 3.17a):

$$|H(f)| = \begin{cases} 1 & \text{za } |f| < f_g \\ 0 & \text{za } |f| > f_g \end{cases},$$

te pretpostavimo da je fazni odziv tog kanala linearna funkcija frekvencije: $\theta(f) = 2\pi f \tau$, pri čemu je τ realna konstanta. Impulsni odziv tako definiranog idealnog niskopropusnog kanala dan je izrazom

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-f_g}^{f_g} e^{-j2\pi f \tau} e^{j2\pi f t} df = 2f_g \frac{\sin[2\pi f_g (t - \tau)]}{2\pi f_g (t - \tau)}.$$

Slika 3.17b prikazuje impulsni odziv idealnog niskopropusnog sustava pod pretpostavkom da je $\tau = 0$. Sa slike je vidljivo da impulsni odziv ima maksimum u točki $t = 0$ i da prolazi kroz nulu u točkama $k/(2f_g)$, $k \in \mathbb{Z}$. Ako je pak $\tau \neq 0$, tada impulsni odziv treba pomaknuti u vremenu za iznos $|\tau|$ udesno (ako je $\tau > 0$) ili ulijevo (ako je $\tau < 0$).



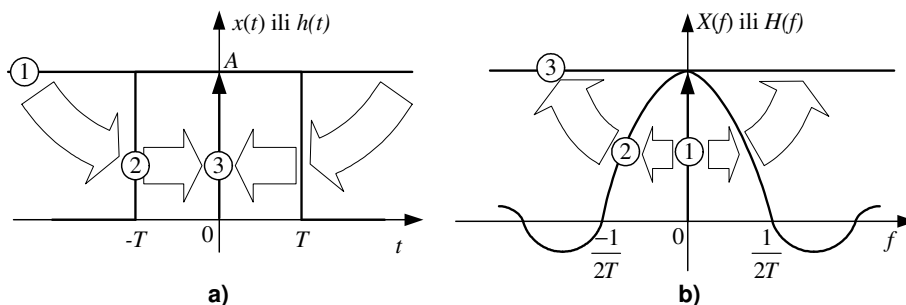
**Slika 3.17: a) Amplitudni odziv idealnog niskopropusnog kanala i
b) njegov impulsni odziv**

Međutim, najvažnije je primijetiti da impulsni odziv idealnog niskopropusnog kanala praktički počinje u $t = -\infty$. Dakle, ako je na ulaz takvog sustava doveden vrlo uzak impuls (gotovo identičan Diracovom delta impulsu), odziv idealnog niskopropusnog kanala praktički prethodi pobudi, što je u realnim sustavima nemoguće. Svi su realni sustavi kauzalni, tj. odziv sustava ne može početi prije pobude. Svako ograničavanje u domeni frekvencije, bilo prijenosne funkcije sustava ili spektra signala, dovodi do istitravanja impulsnog odziva sustava, odnosno samog signala u području vremena. Obratno, svako ograničavanje u domeni vremena, bilo impulsnog odziva sustava ili samog signala, dovodi do istitravanja prijenosne funkcije, odnosno spektra signala u domeni frekvencije. Možemo dakle zaključiti da kauzalni sustavi ne mogu biti strogo ograničeni na neki pojas frekvencija, što je tvrdnja od koje smo i krenuli u ovo razmatranje.

Slika 3.18 prikazuje što se kvalitativno događa sa spektrom signala kad signal sve više ograničavamo u vremenu. Treba napomenuti da je u ovom razmatranju pažnja primarno usmjerena na oblik spektra i njegove prolaskе kroz frekvencijsku os, a ne na točne iznose spektra. Kad signal čija je vrijednost konstantna tijekom vremena (Slika 3.18a, signal 1: $x(t) = A$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$) počnemo ograničavati unutar nekog vremenskog intervala, signal prelazi u pravokutni impuls trajanja $2T$ (Slika 3.18a, signal 2):

$$x(t) = \begin{cases} A, & t \in [-T, T] \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

i smanjivanjem trajanja impulsa on konačno prelazi u Diracov delta impuls (Slika 3.18a, signal 3). Paralelno s tim procesom u vremenskoj domeni, u frekvencijskoj se domeni zbiva obrnut proces: spektar signala iz Diracovog delta impulsa (Slika 3.18b, signal 1) prelazi u funkciju oblika $\sin(x)/x$ (Slika 3.18b, signal 2) čiji se prolasci kroz nulu (točke k/T , $k \in \mathbb{Z}$ i $k \neq 0$) sve više razmiču kako se trajanje pravokutnog impulsa skraćuje i na kraju prelazi u ravnu crtu (Slika 3.18b, signal 3). Ista razmatranja moguće je primijeniti i na par koji tvore impulsni odziv LTI sustava i njegova prijenosna funkcija. U provedenom bi razmatranju također bilo moguće zamijeniti oznake na apscisi, tako da na lijevoj slici na apscisi bude frekvencija, a na desnoj vrijeme.



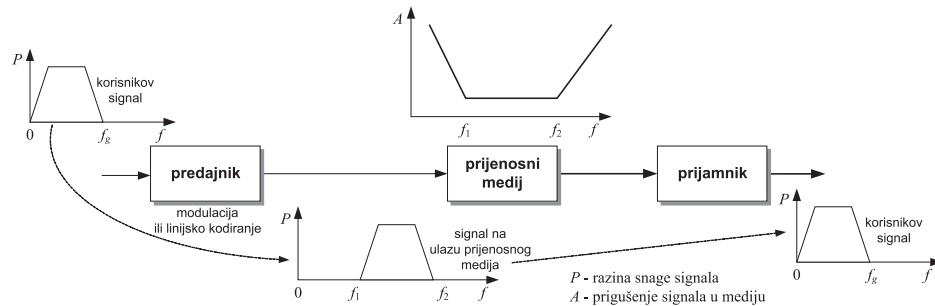
**Slika 3.18: a) Ograničavanje signala u domeni vremena ima za posljedicu
b) proširenje spektra signala**

Međutim, prilikom praktičnog modeliranja kanala zbog jednostavnijeg proračuna pretpostavljamo da su kanali pojasno ograničeni. Kako bi u praksi mogli odrediti točnu širinu prijenosnog pojasa kanala, potrebno je definirati iznos prigušenja iznad kojeg smatramo da je prijenosna funkcija kanala praktično jednaka nuli. Dakle, ako se radi o niskopropusnom kanalu (Slika 3.15a), potrebno je definirati frekvenciju f_g takvu da vrijedi $|X|(f) \approx 0$ za $|f| > f_g$. Takav je kanal ograničen pojasno i širina njegovog prijenosnog pojasa po iznosu je jednaka graničnoj frekvenciji. U slučaju pojasnopropusnog kanala (Slika 3.15b) potrebno je definirati frekvencije f_d i f_g takve da vrijedi $|X|(f) > 0$ samo ako je $|f_g| > |f| > |f_d|$. Sada je takav kanal ograničen pojasno i širina njegovog prijenosnog pojasa jednaka je razlici između gornje i donje granične frekvencije.

Kanali su, osim po širini prijenosnog pojasa, ograničeni i po snazi signala predajnika, kako u samom prijenosnom mediju ne bi došlo do pojave nelinearnih izobličenja te kako bi se kod nekih medija smanjila štetna emisija elektromagnetskog zračenja u okolinu.

Veza između širine prijenosnog pojasa kanala i širine spektra signala

Ako objedinimo razmatranje širine prijenosnog pojasa kanala i širine spektra signala na ulazu kanala, dolazimo do sljedećih zaključaka. Da bi prijenos signala kanalom bio uspješan, svakako je poželjno da širina spektra signala po mogućnosti bude manja od raspoložive širine prijenosnog pojasa kanala, te da sam pojas frekvencija u kojem je smještena glavnina spektra signala bude sadržan unutar pojasa frekvencija koje tvore propusni pojas kanala. Naravno, ako taj uvjet i nije u potpunosti zadovoljen, prijenos će biti moguć, ali uz povećane gubitke, tj. pogreške u prijenosu. Stoga se signal prije samog prijenosa kanalom oblikuje kako bi se svojim spektrom što bolje uklopio u prijenosni pojas kanala. U tu se svrhu koriste modulacijski postupci i linijsko kodiranje (Slika 3.19). Njihova je osnovna uloga da spektar signala iz osnovnog područja, u kojem se nalazi prije obrade, prebace u neko drugo frekvencijsko područje, pogodno za prijenos.



Slika 3.19: Uloga linijskog kodiranja, odnosno modulacije u prilagodbi spektra signala karakteristikama prijenosnog medija

3.3. Uzorkovanje signala

Kao što je već rečeno u ovom poglavlju, realni kanali imaju ograničenu širinu prijenosnog pojasa (f_1, f_2), $f_1 < f_2$, unutar kojeg je prigušenje signala zadovoljavajuće malo. Izvan tog pojasa prigušenje u kanalu znatno raste, pa spektar signala treba prilagoditi pojasu frekvencija (f_1, f_2). U nastavku razmatranja u ovom poglavlju ograničit ćemo se na skup strogo pojasno ograničenih signala, $\{x(t)\}$, za koje spektar signala $x(t)$ postaje jednak nuli iznad neke granične frekvencije f_g :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = 0 \text{ za } |f| > f_g \neq 0.$$

Pri prijenosu signala, koji nije pojasno ograničen nužno je prenositi neprebrojiv skup kontinuiranih vrijednosti tog signala, tj. sve vrijednosti signala $x(t)$, $\forall t \in [t_1, t_2]$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, pri čemu je $[t_1, t_2]$ promatrani vremenski interval unutar kojeg se odvija prijenos signala $x(t)$. Takav prijenos ujedno zovemo i analogni prijenos. Međutim, ako je signal pojasno ograničen, tada je unutar promatranog vremenskog intervala dovoljno prenositi prebrojiv skup njegovih vrijednosti. Dakle, pojasno ograničen signal u kontinuiranom vremenu moguće je jednoznačno specificirati pomoću njegovih vrijednosti uzetih u diskretnim trenucima. Taj proces uzimanja uzoraka kontinuiranog signala u diskretnim trenucima naziva se *uzorkovanje* (engleski: *sampling*). Uzorkovanje se provodi u predajniku, a rekonstrukcija izvornog signala u prijarniku. Uzorkovanje predstavlja osnovu digitalnog prijenosa signala, [6], odnosno prvi korak u pretvorbi analognog u digitalni signal, tj. u digitalizaciji analognog signala.

Pored uzorkovanja signala u vremenskoj domeni, postoji i inačica koja se odnosi na uzorkovanje spektra signala, tj. na uzorkovanje u frekvencijskoj domeni, a primjenjuje se na signale ograničene u vremenu: $x(t) = 0$ izvan intervala (t_1, t_2) .

3.3.1. Teorem uzorkovanja u vremenskoj domeni

Teorem uzorkovanja za strogo pojasno ograničene signale konačne energije glasi, [1]:

- Pojasno ograničeni signal konačne energije, $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, čiji spektar ne sadrži frekvencijske komponente na frekvencijama iznad B herca ($X(f) = 0$ za $|f| > B$), u potpunosti je i na jednoznačan način opisan pomoću vrijednosti tog signala uzetih u diskretnim vremenskim trenucima $T_n = n/(2B)$, gdje je n cijeli broj, a B je gornja granična frekvencija signala;
- Pojasno ograničeni signal $x(t)$ konačne energije, čiji spektar ne sadrži frekvencijske komponente na frekvencijama iznad B herca ($X(f) = 0$ za $|f| > B$) moguće je u potpunosti i na jednoznačan način rekonstruirati na temelju poznavanja njegovih uzoraka uzetih u diskretnim trenucima međusobno razmaknutim za $1/(2B)$ sekundi.

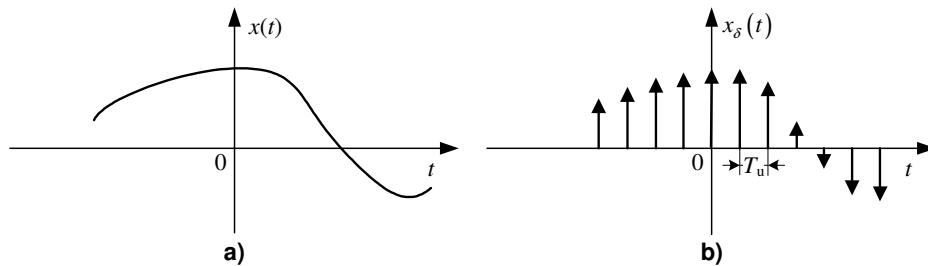
Iako su oba dijela teorema gotovo identična, prvi se dio odnosi na predajnik, u kojem se provodi proces uzorkovanja, a drugi na prijarnik, u kojem se provodi rekonstrukcija signala. Frekvencija uzorkovanja u iznosu od $2B$ uzoraka po sekundi, uzetih od signala pojasno ograničenog na B herca, naziva se Nyquistova frekvencija (prema američkom znanstveniku Harryju Nyquistu), a njezina recipročna vrijednost, $1/(2B)$ [s], naziva se Nyquistov interval uzorkovanja.

U nastavku slijedi dokaz teorema koji će pokazati kako se rješava osnovni problem uzorkovanja, a to je odabir adekvatne frekvencije uzorkovanja kako bi slijed uzoraka jednoznačno definirao izvorni analogni signal. Bez ikakvog dokazivanja jasno je da je poželjno da frekvencija uzorkovanja signala bude što manja kako bi broj uzoraka također bio što manji. Što su uzorci gušći, tj. frekvencija uzorkovanja veća, to se sve više približavamo izvornom signalu, a broj uzoraka, koje je potrebno prenijeti, sve je veći, uslijed čega se neučinkovito troše raspoloživi resursi kanala, prije svega njegov kapacitet.

Dokaz teorema uzorkovanja: inačica 1

Promatrajmo proizvoljni signal $x(t)$ konačne energije, koji je definiran za svaki realan argument t . Pretpostavimo da se u procesu uzorkovanja takvog signala uzorci uzimaju jednolikom frekvencijom (međusobno su jednako razmaknuti u vremenu): jedan uzorak svakih T_u sekundi (Slika 3.20). Na taj način nastaje slijed uzoraka $\{x(nT_u)\}$, $n \in \mathbb{Z}$. T_u nazivamo period uzorkovanja, a $f_u = 1/T_u$ *frekvencija uzorkovanja* (engleski: *sampling rate*). Idealno (trenutno) uzorkovanje je ono kod kojeg trajanje uzorka, Δt , teži u nulu: $\Delta t \rightarrow 0$. Iako uzorke u matematičkom alatu za prikaz procesa uzorkovanja opisujemo Diracovim delta impulsima, u stvarnim sustavima trajanje uzorka je veće od nule, a sami uzorci su pravokutni signali vrlo malog trajanja. Uzorkovani signal, $x_\delta(t)$, je slijed Diracovih delta impulsa, međusobno jednoliko razmaknutih za T_u sekundi, a svakom je impulsu pridodan težinski koeficijent $x(nT_u)$:

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_u) \delta(t - nT_u). \quad (3.5)$$



Slika 3.20: Proces uzorkovanja: a) originalni kontinuirani signal i b) njegova uzorkovana inačica

Signal $x_\delta(t)$ nazivamo idealno uzorkovani signal. Član u zbroju, $\delta(t - nT_u)$, predstavlja Diracove delta impulse pozicionirane u diskretnim vremenskim trenucima nT_u . Po definiciji je poznato da Diracova delta funkcija ima površinu

1. Diracovu delta funkciju kojoj je dodan težinski koeficijent $x(nT_u)$ moguće je približno točno aproksimirati pravokutnim impulsom trajanja Δt i amplitude $x(nT_u)/\Delta t$. Naravno, što je Δt manji, to je aproksimacija bolja. Nadalje, iskoristimo dva svojstva Fourierove transformacije.

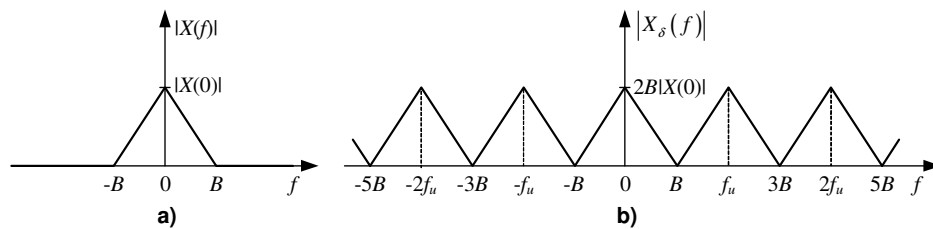
Prvo svojstvo: beskonačni slijed Diracovih delta impulsa, međusobno razmaknutih za T_0 sekundi, preslikava se u beskonačan slijed Diracovih delta impulsa međusobno razmaknutih za $1/T_0$ herca:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \square \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right). \quad (3.6)$$

Drugo svojstvo: umnožak dviju funkcija u vremenskoj domeni preslikava se u konvoluciju njihovih spektara. Obzirom da je funkcija $x_\delta(t)$ umnožak funkcije $x(t)$, čiji je spektar $X(f)$, i beskonačnog slijeda Diracovih delta impulsa $\delta(t - nT_u)$, čiji je spektar moguće odrediti pomoću izraza (3.6), ona se Fourierovom transformacijom preslikava u konvoluciju spektra $X(f)$ i beskonačnog slijeda Diracovih impulsa $\delta(f - nf_u)$, međusobno jednoliko razmaknutih za $1/T_u$:

$$\begin{aligned} X(f) * \left[f_u \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_u) \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\phi) f_u \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_u - \phi) d\phi \\ &= f_u \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\phi) \delta(f - nf_u - \phi) d\phi = f_u \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_u), \\ x_\delta(t) &\square f_u \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_u). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Taj je izraz moguće interpretirati na sljedeći način: proces jednolikog uzorkovanja kontinuiranog signala konačne energije rezultira periodičnim spektrom čiji je period jednak frekvenciji uzimanja uzoraka (Slika 3.21).



Slika 3.21: a) Amplitudni spektar signala pojasno ograničenog na pojas frekvencija $(-B, B)$ i b) amplitudni spektar uzorkovane inačice tog signala uzorkovane frekvencijom $f_u = 1/(2B)$

Ako primijenimo Fourierovu transformaciju na obje strane izraza (3.5), te iskoristimo svojstvo Fourierove transformacije da Diracov delta impuls tvori Fourierov transformacijski par s eksponencijalnom funkcijom:

$$\delta(t - nT_u) \leftrightarrow e^{-j2\pi n f T_u},$$

dobivamo sljedeću relaciju:

$$X_\delta(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_u) e^{-j2\pi n f T_u},$$

pri čemu je $X_\delta(f)$ spektar signala $x_\delta(t)$. Ta se relacija naziva Fourierova transformacija u diskretnom vremenu, odnosno diskretna Fourierova transformacija (skraćeno: DFT), [7].

Navedeni izrazi primijenjeni su na kontinuirani signala $x(t)$ konačne energije i beskonačnog trajanja. Pretpostavimo u nastavku da je signal $x(t)$ strogo ograničen na određeni pojas frekvencija, tj. da njegov spektar ne sadrži komponente na frekvencijama većim od B herca (a): $X(f) = 0$ za $|f| > B$. Trokutasti oblik spektra na slici ima isključivo ilustrativan značaj. Pretpostavimo također da je period uzorkovanja signala $x_\delta(t)$, T_u , jednak $1/(2B)$. Tada je spektar uzorkovanog signala $x_\delta(t)$, $X_\delta(f)$ (Slika 3.21b), određen izrazom

$$X_\delta(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2B}\right) e^{-j\pi n f / B}. \quad (3.8)$$

Koristeći izraz (3.7) spektar $X_\delta(f)$ moguće je prikazati kao

$$X_\delta(f) = f_u X(f) + f_u \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} X(f - mf_u).$$

Ako su ispunjena sljedeća dva uvjeta:

- $X(f) = 0$ za $|f| > B$, i
- $f_u = 2B$,

u prethodnom izrazu član $f_u \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} X(f - mf_u)$ postaje jednak nuli pa vrijedi

sljedeće:

$$X(f) = \begin{cases} \frac{1}{2B} X_\delta(f), & -B \leq f \leq B \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Uvrštavajući (3.8) u prethodni izraz dobivamo

$$X(f) = \begin{cases} \frac{1}{2B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2B}\right) e^{-j\pi n f / B}, & -B \leq f \leq B \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Dakle, ako su uzorkovane vrijednosti signala $x(t)$, $x[n/(2B)]$, poznate za sve cjelobrojne vrijednosti n , tada je njegova Fourierova transformacija, $X(f)$, jednoznačno određena diskretnom Fourierovom transformacijom definiranom prethodnim izrazom. Budući da je $x(t)$ vezan sa spektrom $X(f)$ pomoću inverzne Fourierove transformacije, slijedi da je signal $x(t)$ jednoznačno određen uzorcima $x[n/(2B)]$, $-\infty < n < \infty$. Drugim riječima, slijed uzoraka signala $x(t)$, $\{x[n/(2B)]\}$, sadrži svu informaciju koju sadrži i kontinuirani signal $x(t)$.

Rekonstrukcija signala temeljem njegovih uzoraka

Nakon što smo definirali proces uzorkovanja signala kojim se čuva kompletna informacija sadržana u izvornom signalu, potrebno je definirati i obrnuti proces, tj. kako iz slijeda uzoraka $\{x[n/(2B)]\}$ dobiti originalni kontinuirani signal $x(t)$. Uvrstimo li prethodni izraz u izraz za inverznu Fourierovu transformaciju koja povezuje signal $x(t)$ s njegovim spektrom $X(f)$, dobivamo sljedeće, [1]:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-B}^B \frac{1}{2B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2B}\right) e^{-j\pi n f / B} e^{j2\pi f t} df.$$

Nakon izmjene redoslijeda integracije i zbrajanja, prethodni izlaz prelazi u

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{1}{2B} \int_{-B}^B e^{j2\pi f [t - n/(2B)]} df.$$

Nakon rješavanja integrala dobivamo konačni rezultat:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{\sin(2\pi B t - n\pi)}{2\pi B t - n\pi}, \quad -\infty < t < \infty.$$

U literaturi se često koristi djelomično skraćena inačica ovog izraza:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2B}\right) \sin c(2Bt - n), \quad -\infty < t < \infty,$$

pri čemu vrijedi $\sin c(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$. Dakle, izvorni signal $x(t)$ dobiva se interpolacijom slijeda uzoraka $\{x[n/(2B)]\}$, pri čemu $\sin c(2Bt)$ ima ulogu interpolacijske funkcije. Svaki je uzorak pomnožen sa zakašnjelom inačicom interpolacijske funkcije, $\sin c(2Bt - n)$, i svi tako dobiveni signali međusobno se zbrajaju kako bi dali signal $x(t)$ (Slika 3.25).

Također, ako su uzorci signala uzeti u trenucima $t = n/(2B)$, gdje je α realna konstanta, $0 < \alpha \leq 1$, tada izraz za signal $x(t)$ poprima oblik

$$x(t) = \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{\sin(2\pi Bt - \pi n\alpha)}{2\pi Bt - \pi n\alpha}, -\infty < t < \infty.$$

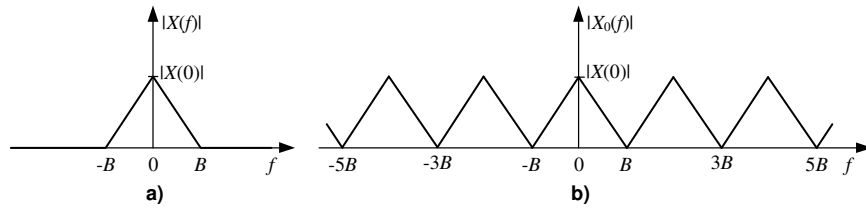
Dokaz teorema uzorkovanja: inačica 2

Do istog rezultata mogli smo doći na sljedeći način, [6]. Neka je signal $x(t)$ pojasno ograničen i vrijedi $X(f) = 0$ za $|f| > B$, pri čemu je $X(f)$ spektar, odnosno Fourierova transformacija signala $x(t)$:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt,$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df.$$

Signal je uzorkovan u trenucima međusobno jednoliko razmaknutim za $1/(2B)$ sekundi. Nadalje, spektar signala $X(f)$ možemo proizvoljno pretvoriti u periodični spektar $X_0(f)$, s periodom ponavljanja $2B$, a da to ne utječe na iznos spektra u području frekvencija $|f| \leq B$ (Slika 3.22).



Slika 3.22: Prikaz pojasno ograničenog amplitudnog spektra kao periodične funkcije

Uzmimo sada izraz za razvoj neke periodične funkcije $g(t)$ u Fourierov red:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn2\pi f_0 t},$$

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g(t) e^{-jn2\pi f_0 t} dt,$$

pri čemu je T_0 osnovni period funkcije $g(t)$. Zamijenimo u tom izrazu vrijeme s frekvencijom, tj. T_0 s $2B$, granice integracije $-T_0/2$ i $T_0/2$ s novim granicama $-B$ i B , funkciju $g(t)$ sa spektrom $X(f)$, frekvenciju f_0 s frekvencijom f , a vrijeme t s periodom uzimanja uzoraka, $T_u = 1/(2B)$. Dakle, periodični je spektar $X_0(f)$

moguće razviti u Fourierov red, a za potrebe pojasno ograničene funkcije možemo koristiti vrijednosti reda u pojasu frekvencija $|f| \leq B$:

$$X(f) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi f n T_u} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\pi f n / B}, & |f| \leq B, \\ 0, & |f| > B. \end{cases}$$

Koeficijenti Fourierovog reda, c_n , određeni su izrazom

$$c_n = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B X(f) e^{-j\pi f n / B} df.$$

Obzirom da je $X(f)$ pojasno ograničen, za signal $x(t)$ vrijedi

$$x(t) = \int_{-B}^B X(f) e^{j2\pi f t} df.$$

Koristeći prethodni izraz moguće je proračunati vrijednosti signala $x(t)$ u trenucima $t = -n/(2B)$

$$x\left(-\frac{n}{2B}\right) = \int_{-B}^B X(f) e^{-j\pi f n / B} df = 2B c_n.$$

Temeljem ovog izraza zaključujemo da je koeficijente Fourierovog reda, c_n , moguće izračunati temeljem poznatih vrijednosti signala $x(t)$ u trenucima uzimanja uzoraka: $t = \dots, -3/(2B), -2/(2B), -1/(2B), 0, 1/(2B), 2/(2B), 3/(2B), \dots$, pa je i spektar signala $x(t)$, $X(f)$, jednoznačno određen temeljem vrijednost signala u trenucima uzimanja uzoraka

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\pi f n / B} = \frac{1}{2B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(-\frac{n}{2B}\right) e^{j\pi f n / B}.$$

Rekonstrukcija signala temeljem njegovih uzoraka

Rekonstrukcija originalnog signala temeljem njegovih uzoraka odvija se na načelu opisanom u prvoj inačici dokaza teorema uzorkovanja u vremenskoj domeni.

3.3.2. Fizikalna interpretacija teorema uzorkovanja

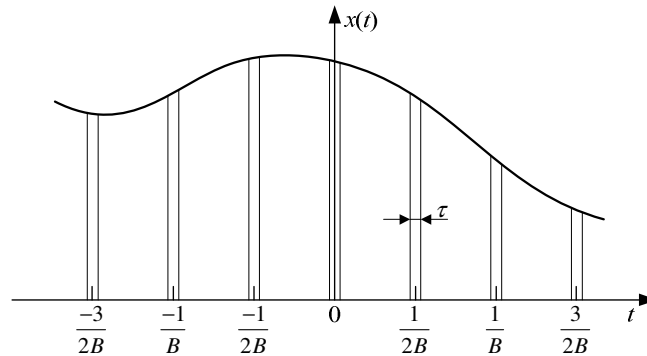
Promatrajmo signal $x(t)$ čiji je spektar $X(f)$ pojasno ograničen. Uzorkujmo signal $x(t)$ u trenucima koji su međusobno jednoliko razmaknuti za $1/(2B)$. Međutim, ovaj put pretpostavimo da trajanje uzimanja svakog pojedinog uzorka nije jednako nuli, već da ima konačan (iako mali) iznos τ [s] (Slika 3.23), [6].

Ako vrijedi da je $\tau \ll 1/(2B)$, tada možemo pretpostaviti da je vrijednost signala $x(t)$ približno konstantna za cijelo vrijeme uzimanja uzorka. Shodno pretpostavci, uzorak u točki $n/(2B)$ i uzorak kratkog trajanja τ možemo definirati funkcijom $x_n(t)$ kao

$$x_n(t) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{2B}\right), & \frac{n}{2B} - \frac{\tau}{2} < t < \frac{n}{2B} + \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Dakle, za Fourierovu transformaciju n -tog uzorka vrijedi

$$X_n(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_n(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{n/(2B)-\tau/2}^{n/(2B)+\tau/2} x_n(t) e^{-j2\pi ft} dt \approx \int_{n/(2B)-\tau/2}^{n/(2B)+\tau/2} x\left(\frac{n}{2B}\right) e^{-j2\pi ft} dt.$$



Slika 3.23: Uzorkovanje pomoću impulsa trajanja τ , $\tau \neq 0$ i $\tau \ll 1/(2B)$

Funkcija $e^{-j2\pi ft}$ također je praktično konstantna na pretpostavljenom intervalu kratkog trajanja od $n/(2B) - \tau/2$ do $n/(2B) + \tau/2$ pa izraz za Fourierovu transformaciju n -tog uzorka konačno postaje jednak

$$X_n(f) \approx \tau \cdot x\left(\frac{n}{2B}\right) e^{-j\pi f n/B}.$$

Nadalje, upotrijebimo izraz za Fourierovu transformaciju Diracove delta funkcije koja je za iznos t_0 pomaknuta iz ishodišta:

$$\Delta_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi f t_0}.$$

Promatrajući ova dva izraza slijedi da je $X_n(f)$ Fourierova transformacija Diracove delta funkcije površine $\tau x[n/(2B)]$ koja se javlja u trenutku $t_n = n/(2B)$.

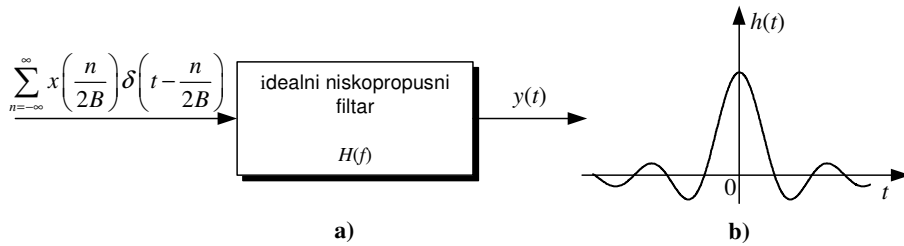
Budući da smo već pretpostavili da je τ vrlo mali, uzorak trajanja τ sekundi je aproksimiran delta impulsom površine $\tau \cdot x[n/(2B)]$.

Propustimo sada takav impuls kroz idealni niskopropusni filter (Slika 3.24) prijenosne funkcije $H(f)$ definirane kao

$$H(f) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |f| < B, \\ 0, & |f| > B. \end{cases}$$

Očito je da takav filter ima amplitudni odziv jednak jedinici u pojasu frekvencija $[-B, B]$ (na ostalim frekvencijama $|H(f)| = 0$), a fazni odziv mu je jednak nuli na svim frekvencijama. Odziv takvog filtra na pobudu uzorkom $f[n/(2B)]$ dan je izrazom

$$\begin{aligned} y_n(t) &= \int_{-B}^B X_n(f) e^{j2\pi ft} df = x\left(\frac{n}{2B}\right) \tau \int_{-B}^B e^{j2\pi f[t - n/(2B)]} df \\ &= 2B\tau \cdot x\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{\sin\left[2\pi B\left(t - \frac{n}{2B}\right)\right]}{2\pi B\left(t - \frac{n}{2B}\right)}. \end{aligned}$$

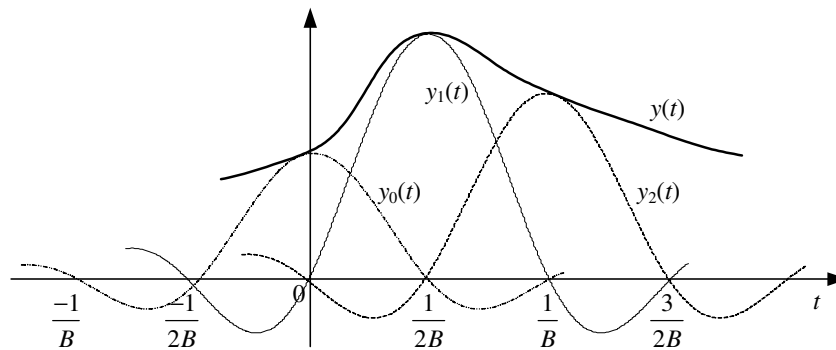


Slika 3.24: a) Rekonstrukcija signala $x(t)$ propuštanjem kroz idealni niskopropusni filter, b) impulsni odziv idealnog niskopropusnog filtra

Potpuni signal odziva idealnog niskopropusnog filtra na pobudu slijedom uzoraka signala $x(t)$ moguće je odrediti kao superpoziciju odziva na pojedinačne uzorke (to nam prije svega omogućava svojstvo linearnosti idealnog niskopropusnog filtra, (Slika 3.25):

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n(t) = 2B\tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{\sin\left[2\pi B\left(t - \frac{n}{2B}\right)\right]}{2\pi B\left(t - \frac{n}{2B}\right)} = 2B\tau \cdot x(t).$$

Dakle, odziv idealnog niskopropusnog filtra proporcionalan je ulaznom signalu u svim trenucima, a ne samo u trenucima uzorkovanja.



Slika 3.25: Odziv idealnog niskopropusnog filtra kao superpozicije odziva na pojedinačne uzorke

Funkcije $y_n(t)$ od kojih je sastavljen odziv idealnog niskopropusnog filtra vrlo brzo padaju po amplitudi i doprinos ukupnom odzivu $y(t)$ svake od njih je nezanemariv samo unutar relativno malog broja intervala trajanja $1/(2B)$ u okolini odgovarajućeg trenutka $n/(2B)$. Razmotrimo proizvoljnu funkciju $x(t)$ čiji je spektar pojasno ograničen: $X(f) = 0$ za $|f| > B$, a i njezine vrijednosti izvan intervala $T_1 < t < T_2$ su vrlo male. Uzorkujmo tu funkciju frekvencijom od $2B$ uzorak/s. Ako vrijedi da je $T_2 - T_1 = T$, tada broj uzoraka uzetih unutar odgovarajućeg intervala iznosi $2BT$. Tih $2BT$ uzoraka značajno doprinose vrijednosti signala $x(t)$.

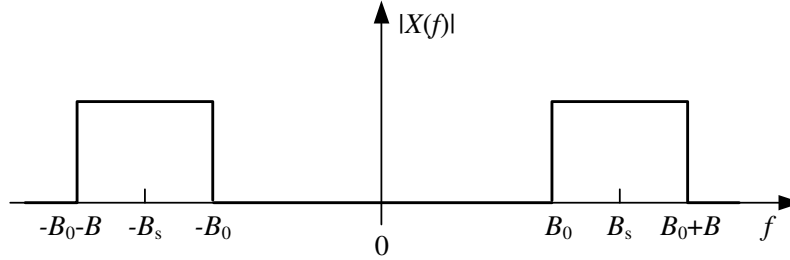
Međutim, čak i kad signal $x(t)$ ne poprima zanemarivo male vrijednosti izvan intervala $T_1 < t < T_2$, glavni doprinos njegovoj vrijednosti u bilo kojem trenutku unutar navedenog intervala daje upravo $2BT$ uzoraka uzetih unutar (T_1, T_2) . Razlog tome opet leži u činjenici da odziv na svaki pojedini uzorak, $y_n(t)$, brzo opada što se više udaljavamo od trenutka uzimanja odgovarajućeg uzorka, $n/(2B)$.

3.3.3. Uzorkovanje signala u pomaknutom frekvencijskom pojasu

Razmotrimo idealni signal u pomaknutom pojasu frekvencija, $x(t)$, čiji je spektar $X(f)$ ograničen na pojas frekvencija $[B_0, B_0 + B]$: $X(f) = 0$ za $0 \leq |f| < B_0$ i $|f| > B_0 + B$ (Slika 3.26). Kao što je već ranije istaknuto, spektar uzorkovanog

signala, $X_\delta(f)$, je periodičan i ponavlja se frekvencijom f_u , frekvencijom uzorkovanja (Slika 3.21):

$$X_\delta(f) = f_u \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_u).$$



Slika 3.26: Idealni signal u pomaknutom frekvencijskom pojasu

Dakle, jednako kao i prilikom uzorkovanja signala u osnovnom frekvencijskom pojasu, moguće je korištenje samo onih perioda uzorkovanja koji ne izazivaju preklapanje spektara u frekvencijskoj domeni. Pitanje je: koja je minimalna frekvencija uzorkovanja potrebna za rekonstrukciju originalnog signala temeljem njegovih uzoraka?

Radi jednostavnosti, pretpostavimo da se proces uzorkovanja odvija pomoću Diracovih delta funkcija. Kako bi mogli rekonstruirati uzorkovani signal $x_\delta(t)$,

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_u) \delta(t - nT_u),$$

potrebno ga je propustiti kroz odgovarajući filter [6]. Od svih mogućih opcija odaberimo filter prijenosne funkcije

$$H(f) = \begin{cases} T_u, & B_0 \leq |f| \leq B_0 + B, \\ 0, & \text{na ostalim frekvencijama.} \end{cases}$$

Impulсни odziv tako definiranog filtra dan je izrazom

$$h(t) = \frac{T_u}{\pi t} \left\{ \sin[2\pi(B_0 + B)t] - \sin(2\pi B_0 t) \right\} = 2BT_u \frac{\sin(\pi B t)}{\pi B t} \cos(2\pi B_s t).$$

gdje je B_s središnja frekvencija u pojasu $[B_0, B_0+B]$: $B_s = B_0+B/2$. Rekonstrukcija izvornog signala pomoću njegovih uzoraka daje sljedeći prikaz signala $x(t)$:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_u) h(t - nT_u) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_u) \frac{T_u}{\pi t} \left\{ \sin[2\pi(B_0 + B)(t - nT_u)] - \sin[2\pi B_0(t - nT_u)] \right\}, \\
 x(t) &= 2BT_u \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_u) \frac{\sin[\pi B(t - nT_u)]}{\pi B(t - nT_u)} \cos[2\pi B_s(t - nT_u)].
 \end{aligned}$$

Dozvoljene vrijednosti perioda uzorkovanja određene su sljedećom relacijom, [6]:

$$\frac{m}{2B_0} \leq T_u \leq \frac{m+1}{2(B_0 + B)}, \quad m=0,1,2,\dots$$

pri čemu frekvencija B_0 mora biti različita od nule. Od svih vrijednosti koje m može poprimiti, postoji maksimalna vrijednost, označimo je kao M , koja zadovoljava gornju relaciju i relaciju $M \leq B_0/B$. Tada je maksimalna dozvoljena vrijednost perioda uzorkovanja, $(T_u)_{\max}$, određena izrazom

$$(T_u)_{\max} = \frac{M+1}{2(B_0 + B)} \leq \frac{1}{2B}.$$

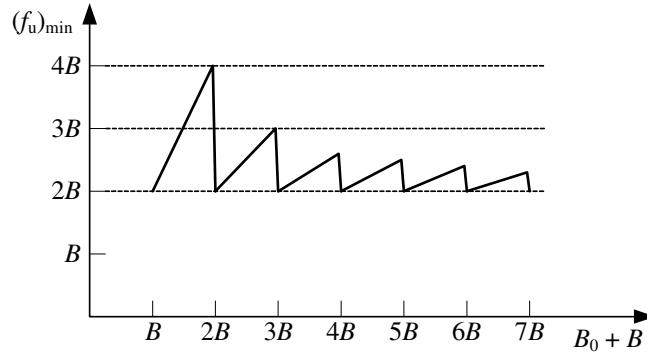
Stoga je minimalna dozvoljena frekvencija uzorkovanja dana kao

$$(f_u)_{\min} = \frac{1}{(T_u)_{\max}} = 2B \left(1 + \frac{k}{M_m} \right),$$

pri čemu je $M_m = M + 1$ najveći cijeli broj koji je manji ili jednak omjeru $(B_0+B)/B$, tj. $M = \left\lfloor \frac{B_0}{B} + 1 \right\rfloor$, a k je određen izrazom $k = (B_0 + B)/B - M_m = B_0/B - M$, pa gornji izlaz prelazi u:

$$(f_u)_{\min} = \frac{1}{(T_u)_{\max}} = 2 \frac{B_0 + B}{M + 1}.$$

Očito je da se k kreće u rasponu od nule do jedinice. Sukladno tome i frekvencija uzorkovanja raste od $2B$ do $2B(1 + 1/M)$. Neovisno o tome gdje se točno na frekvencijskoj osi nalazi pojas frekvencija $[B_0, B_0+B]$, minimalna frekvencija uzorkovanja, potrebna za točnu rekonstrukciju signala u pomaknutom frekvencijskom pojasu, leži u intervalu između $2B$ i $4B$ uzorak/s (Slika 3.27).



Slika 3.27: Ovisnost minimalne frekvencije uzorkovanja o najvišoj frekvenciji u pojasu

Sa slike je vidljivo da je minimalna frekvencija uzorkovanja potrebna za točnu rekonstrukciju izvornog signala u pomaknutom frekvencijskom pojasu najveća kad se spektar signala nalazi unutar pojasa frekvencija $[B - \Delta f, 2B - \Delta f]$, $\Delta f \rightarrow 0$. Tada potrebna minimalna frekvencija uzorkovanja iznosi $2(2B - \Delta f)$, što se približava iznosu $4B$ kako se Δf približava nuli. Kad je Δf jednak nuli, frekvencija uzorkovanja naglo pada na minimalni iznos, tj. na $2B$. U okolini točaka kB , $k \in \mathbb{Z}$, funkcija ima diskontinuitete. Također, kada je maksimalna frekvencija u spektru signala $x(t)$ jednaka B , tada se radi o idealnom niskopropusnom filteru koji propušta frekvencije u pojasu $[-B, B]$, pa je i minimalna frekvencija, potrebna za točnu rekonstrukciju signala $x(t)$, jednaka $2B$ uzorak/s, što je identično ranije izvedenom rezultatu.

3.3.4. Uzorkovanje u frekvencijskoj domeni

Uzmimo u razmatranje signal $x(t)$ koji je ograničen na neki vremenski interval, $T_1 < t < T_2$. Taj signal u području $(-\infty, T_1]$ i $[T_2, \infty)$ isključivo poprima vrijednost nula, dok unutar (T_1, T_2) može poprimiti proizvoljne vrijednosti (između ostalog, i vrijednost nula). Primjer takvog signala je

$$x(t) = \begin{cases} \sin(2\pi f_0 t), & T_1 < t < T_2, \\ 0, & (-\infty, T_1] \cup [T_2, \infty). \end{cases}$$

Fourierova transformacija općenitog signala $x(t)$ koji je ograničen na neki vremenski interval određena je izrazom

$$X(f) = \int_{T_1}^{T_2} x(t) e^{-j2\pi ft} dt.$$

U nastavku ćemo pokazati da je signal $x(t)$ potpuno određen vrijednostima spektra $X(f)$ uzetim u točkama f_n na frekvencijskoj osi koje su određene relacijom

$$f_n = n \frac{1}{T_2 - T_1}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dokaz ove tvrdnje je jednostavan i sličan dokazu provedenom za uzorkovanje u vremenskoj domeni, [6]. Signal $x(t)$ moguće je na intervalu $T_1 < t < T_2$ razviti u Fourierov red:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{j2\pi n t / (T_2 - T_1)},$$

$$d_n = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} x(t) e^{-j2\pi n t / (T_2 - T_1)} dt = \frac{1}{T_2 - T_1} X\left(\frac{n}{T_2 - T_1}\right).$$

Naravno, prikazavši signal $x(t)$ pomoću Fourierovog reda pretpostavili smo da je periodičan, s periodom ponavljanja $T = T_2 - T_1$. To, međutim, ne mijenja vrijednosti signala unutar intervala $T_1 < t < T_2$. Gornja dva izraza pokazuju da je signal $x(t)$ u potpunosti određen uzorcima spektra uzetim na diskretnim frekvencijama $f_n = n/(T_2 - T_1)$. Također, temeljem povezanosti spektra sa signalom pomoću Fourierove transformacije možemo reći da je spektar $X(f)$ u potpunosti određen pomoću uzoraka.

Teorem uzorkovanja u frekvencijskoj domeni: spektar signala $x(t)$, ograničenog u vremenu na interval (T_1, T_2) , tj. izvan tog intervala vrijedi $x(t) = 0$, $\forall t \in (-\infty, T_1] \cup [T_2, \infty)$, je na bilo kojoj frekvenciji u potpunosti određen pomoću uzoraka uzetih na diskretnim frekvencijama kontinuiranog spektra $X(f)$ koje su međusobno razmaknute za $1/(T_2 - T_1)$ herca.

Pretpostavimo li da je $T_2 = T/2$ i $T_1 = -T/2$, prikaz spektra pomoću uzoraka poprima sljedeći oblik:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{T} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{T_2 - T_1}\right) e^{j2\pi n t / T} \right] e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{T_2 - T_1}\right) e^{j2\pi t(-f + n/T)} dt = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{T}\right) \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi t(-f + n/T)} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{T}\right) \frac{\sin(\pi f T - n\pi)}{\pi f T - n\pi}. \end{aligned}$$

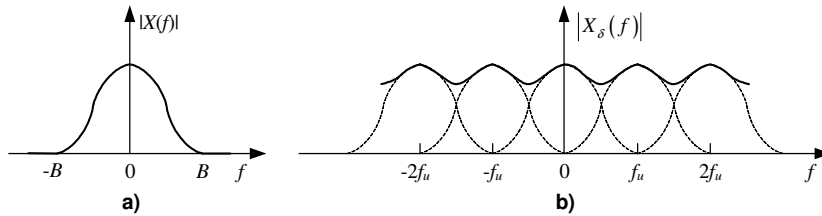
Sada je signal $x(t)$ moguće prikazati pomoću uzoraka uzetih u frekvencijskoj domeni:



$$x(t) = \frac{1}{T_2 - T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{T_2 - T_1}\right) e^{j2\pi nt/(T_2 - T_1)}.$$

3.3.5. Poduzorkovanje

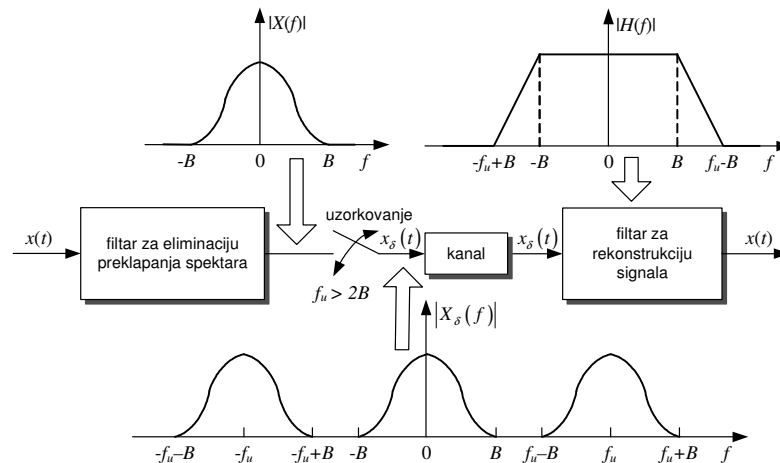
Sam teorem uzorkovanja i cijeli njegov dokaz počivaju na pretpostavci da je uzorkovani signal strogo pojasno ograničen. U praksi, međutim, signali nisu strogo pojasno ograničeni i to rezultira tzv. *poduzorkovanjem* (engleski: *under-sampling*). Drugim riječima, obzirom da signal sadrži i frekvencijske komponente iznad neke granične frekvencije B , prilikom uzorkovanja frekvencijom $f_u = 2B$ nije ispunjen uvjet da je uzorkovanje provedeno frekvencijom koja je barem dvostruko veća od najveće frekvencije u spektru signala. Poduzorkovanje se u spektru uzorkovanog signala reflektira preklapanjem spektara $X(f - n f_u)$, $n \in \mathbb{Z}$, u engleskom nazvano *aliasing*.



Slika 3.28: a) Spektar izvornog signala i b) spektar poduzorkovanog signala, $f_u=B$

Slika 3.28 prikazuje primjer jednog signala koji je pojasno ograničen, a obzirom da je poduzorkovan frekvencijom f_u manjom od $2B$ herca, amplitudni spektar poduzorkovanog signala, $X_\delta(f)$, je izobličen. Iz takvog izobličenog spektra nije moguće rekonstruirati izvorni signal, [1].

Mjere za izbjegavanje preklapanja spektara uzorkovanog signala su sljedeće. Prvo, prije uzorkovanja potrebno je signal propustiti kroz niskopropusni filter (engleski naziv za takav filter je *anti-aliasing filter*) koji će prigušiti one visokofrekvencijske komponente signala koje nisu bitne s aspekta informacije koju signal prenosi (Slika 3.29). Nakon toga slijedi uzorkovanje filtriranog signala frekvencijom koja je neznatno veća od Nyquistove frekvencije.



Slika 3.29: Sprečavanje preklapanja spektra prilikom uzorkovanja – na slici je pretpostavljen idealan kanal, čiji je izlaz jednak ulazu

Uporaba frekvencije uzorkovanja koja je veća od Nyquistove ima još jednu povoljnu posljedicu, a to je jednostavnija izvedba filtra za rekonstrukciju izvornog signala iz slijeda primljenih uzoraka. Filtar za rekonstrukciju je niskopropusni filtir, a korištenje frekvencije uzorkovanja koja je veća od Nyquistove omogućava da nagib amplitudnog odziva filtra nije previše strm, što znači i jednostavniju izvedbu sklopovlja. Treba svakako imati na umu da idealni niskopropusni filtir beskonačne strmine amplitudnog odziva u točki granične frekvencije nije fizički ostvariv pa ima isključivo teoretsko značenje.

3.3.6. Kvantizacija uzoraka

Sljedeći korak (nakon uzorkovanja) u pretvorbi analognog u digitalni signal je kvantizacija uzetih uzoraka. Analogni signal, kao signal koji poprima vrijednosti na kontinuiranom skupu, ima beskonačno mnogo mogućih vrijednosti amplitude. Međutim, nije potrebno prenositi točne vrijednosti uzoraka. Uporište za takvo razmišljanje leži u činjenici da ljudska osjetila (vid, sluh), kao krajni prijammnik signala (audio, govor, video) mogu detektirati samo konačne razlike između razina signala. Drugim riječima, originalni analogni signal je moguće aproksimirati signalom sastavljenim od diskretnih amplitudnih razina koje se odabiru iz konačnog skupa po kriteriju minimalne pogreške u razlici između stvarnih i aproksimiranih vrijednosti signala. Takav pristup predstavlja osnovu tzv. *impulsno-kodne modulacije* (skraćeno PCM, od engleskog *Pulse-code Modulation*). Nadalje, ako su diskretne razine dovoljno bliske susjednim razinama tada je aproksimirani signal praktički identičan originalu.

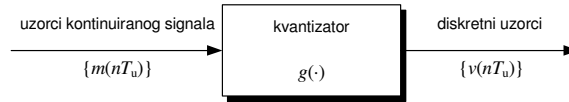
Kvantizacija uzoraka je definirana kao proces pretvorbe amplituda uzoraka $m(nT_u)$, uzetih od analognog signala $m(t)$ u diskretnim trenucima nT_u , $n \in \mathbb{Z}$, u diskretne amplitudne razine $v(nT_u)$, odabrane iz konačnog skupa mogućih razina. Jednako kao i u potpoglavljima o uzorkovanju, T_u označava period uzorkovanja signala. Daljnja pretpostavka je da je kvantizacijski proces bezmemorijski i trenutni, što znači da trenutna transformacija signala u bilo kojem trenutku ne ovisi o prethodnim niti o narednim uzorcima originalnog signala. Takva se kvantizacija koristi u modulacijskom postupku impulsno-kodne modulacije, ali ne i u naprednijim metodama pretvorbe analognog u digitalni signal. Više detalja o naprednim tehnikama kvantizacije dano je u šestom poglavlju.

Slika 3.30 prikazuje pojednostavljenu shemu kvantizatora, na čiji se ulaz dovode uzorci analognog signala, $m(nT_u)$, a na izlazu se pojavljuju diskretni uzorci $v(nT_u)$, tj. kvantizirani signal. Diskretna amplituda kvantiziranog signala u nekom trenutku nT_u će poprimiti indeks k , tj. $v(nT_u)$ će biti izjednačen s diskretnom vrijednošću v_k , ako amplituda originalnog uzorka signala na ulazu kvantizatora zadovoljava svojstvo:

$$mk < m(nT_u) < (k+1)m, \quad k = 1, 2, \dots, L,$$

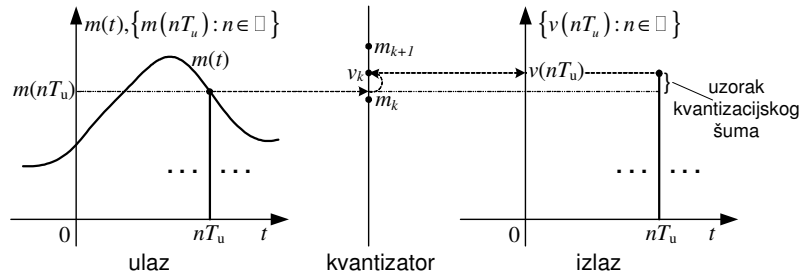
pri čemu je L broj stupnjeva amplitude koje kvantizator koristi, odnosno broj kvantizacijskih razina. Također vrijedi i sljedeće:

$$mk < v_k < (k+1)m, \quad k = 1, 2, \dots, L.$$



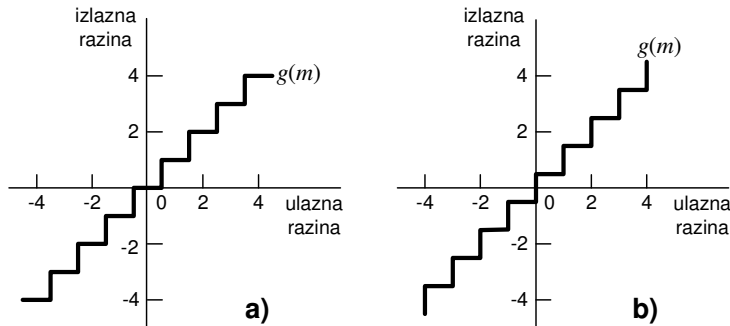
Slika 3.30: Bezmemorijski kvantizator

Dakle, kvantizator vrši preslikavanje $m(nT_u) \rightarrow v_k$ prema gore navedenom pravilu (Slika 3.31). Amplitudne razine koje se javljaju na ulazu u kvantizator, m_k , nazivaju se i razine odlučivanja ili pragovi odluke. Diskretne razine definirane u kvantizatoru, koje se ujedno javljaju i na izlazu kvantizatora, tj. kvantizacijske razine v_k , nazivaju se i razine prikaza signala ili razine za rekonstrukciju signala. Razmak među dvjema susjednim kvantizacijskim razinama, $v_{k+1} - v_k$, naziva se korak kvantizacije u k -toj razini. Preslikavanje definirano funkcijom $v = g(m)$ naziva se kvantizacijska karakteristika. U praksi se najčešće kvantizacijska razina odabire na sredini između dvije susjedne razine odlučivanja, tj. vrijedi $v_k = (m_k + m_{k+1})/2$.



Slika 3.31: Primjer kvantiziranja uzorka analognog signala

Kvantizacija može biti jednolika ili nejednolika, ovisno o veličini koraka kvantizacije. Ako su svi koraci kvantizacije međusobno jednaki, tada se radi o jednolikoj kvantizaciji. U suprotnom je riječ o nejednolikoj kvantizaciji. U nastavku ćemo razmatrati isključivo jednoliku kvantizaciju. Slika 3.32 prikazuje dvije različite karakteristike kvantizatora, koje imaju oblik stepenaste funkcije, a međusobno se razlikuju po načinu na koji kvantizacijska karakteristika prolazi kroz ishodište koordinatnog sustava.



Slika 3.32: Karakteristike jednolikog kvantiziranja

Kvantizacijski šum

Proces kvantizacije nije idealan, već unosi određenu pogrešku u kvantizirani signal. Ta je pogreška posljedica moguće razlike između uzorka analognog signala na ulazu, $m(nT_u)$, i diskretnog uzorka na izlazu kvantizatora, $v(nT_u)$ (Slika 3.31), a nazivamo je kvantizacijski šum, [1]. Obzirom da na ulazu kvantizatora djeluju uzorci čije veličine potječu od analognog signala kojeg je realno modelirati slučajnim procesom (a ne ga promatrati kao deterministički signal), ulaz u kvantizator opisujemo kontinuiranom slučajnom varijablom M . Sukladno tome, kvantizator preslikava slučajnu varijablu M u diskretnu slučajnu varijablu V na izlazu kvantizatora. Vrijednosti koje mogu poprimiti slučajne

varijable M i V označit ćemo kao m i v , i vrijedi: $v = g(m)$. Opišimo kvantizacijski šum slučajnom varijablom Q čije ćemo vrijednosti označiti kao q . Dakle, vrijedi $Q = M - V$, odnosno $q = m - v$. Ako je $E[M] = 0$ i kvantizacijska karakteristika je simetrična kao na slici (Slika 3.32), tada vrijedi i da je $E[V] = E[Q] = 0$. Dakle, preostaje odrediti standardnu devijaciju kvantizacijskog šuma.

Prilikom dizajna kvantizatora pretpostavlja se da amplitude ulaznog signala mogu poprimati kontinuirane vrijednosti iz intervala $(-m_{\max}, m_{\max})$. Ako se na ulazu kvantizatora pojavi signal čije su amplitude izvan navedenog intervala, nastupit će preopterećenje kvantizatora i izobličenje izlaznog signala. Zadatak je dizajnera cijelog sustava za pretvorbu analognog u digitalni signal da spriječi takav scenarij. Nadalje, ako pretpostavimo da se koristi jednolika kvantizacija i kvantizator karakteristike prikazane slikom (Slika 3.32b), te da se amplitude ulaznog signala kreću u granicama od $-m_{\max}$ do m_{\max} , tada je korak kvantizacije određen izrazom $\Delta = 2m_{\max}/L$, pri čemu je L broj kvantizacijskih razina. Dakle, kvantizacijski će šum po amplitudi biti ograničen uvjetom $-\Delta/2 \leq q \leq \Delta/2$. Nadalje, ako je korak kvantizacije dovoljno mali, tada je opravdano pretpostaviti da slučajna varijabla Q ima jednoliku razdiobu, a sam utjecaj kvantizacijskog šuma na ulazni signal sličan je utjecaju termičkog šuma. Funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable Q definirana je izrazom

$$f_Q(q) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & -\frac{\Delta}{2} < q \leq \frac{\Delta}{2}, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Obzirom da smo već ranije utvrdili da je očekivanje slučajne varijable Q jednako nuli, njezina je varijanca određena sljedećim izrazom

$$\text{var}(Q) = \sigma_Q^2 = E[Q^2] = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} q^2 f_Q(q) dq.$$

Kombinirajući prethodna dva izraza dobivamo sljedeće:

$$\text{var}(Q) = \sigma_Q^2 = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} q^2 dq = \frac{\Delta^2}{12}.$$

Kvantizirani se signal ne prenosi do prijarnika diskretnim uzorcima v_k , već se oni pretvaraju u binarni kôd i prenose binarnim signalom. Neka r označava broj bita koji se koriste za opis svakog uzorka v_k . Ako je L ukupan broj svih diskretnih razina na izlazu kvantizatora, tada mora vrijediti da je $L = 2^r$. Kad bi L bio veći od 2^r , tada ne bismo mogli jednoznačno opisati sve uzorke. Nasuprot tome, korištenje broja bita po uzorku za kojeg vrijedi $L < 2^r$ je nepotrebno jer se u prijenos uvodi nepotrebna zalihost. Stoga je korištenje broja bita r za kojeg vrijedi $L = 2^r$ jedino opravdano. Ako ovaj izraz ubacimo u izraz za korak kvantizacije, dobivamo $\Delta = 2m_{\max}/2^r$ pa vrijedi:

$$\sigma_Q^2 = \frac{1}{3} m_{\max}^2 2^{-2r}.$$

Neka je sa S označena srednja snaga signala $m(t)$. Tada za odnos srednje snage signala i srednje snage kvantizacijskog šuma, N , na izlazu kvantizatora vrijedi

$$(S/N) = \frac{S}{\sigma_Q^2} = \left(\frac{3S}{m_{\max}^2} \right) 2^{2r}.$$

Primjer: Kvantizacija sinusnog signala

Pretpostavimo da na ulaz kvantizatora dolazi sinusni signal amplitude A_m koji koristi sve razine za rekonstrukciju signala. Srednja snaga takvog signala na otporniku otpora od jednog oma iznosi

$$P = \frac{A_m^2}{2}.$$

Obzirom da se razine ulaznog signala kreću između $-A_m$ i A_m , ukupni raspon amplituda na ulazu kvantizatora iznosi $2A_m$. Dakle, $m_{\max} = A_m$, pa za kvantizacijski šum vrijedi:

$$\sigma_Q^2 = \frac{1}{3} A_m^2 2^{-2r},$$

a odnos srednje snage signala prema srednjoj snazi kvantizacijskog šuma dan je izrazom

$$(S/N) = \frac{A_m^2/2}{A_m^2 2^{-2r}/3} = \frac{3}{2} (2^{2r}).$$

Omjer snaga se često u praksi izražava u logaritamskom mjerilu pri čemu se koristi jedinica decibel (dB). Dakle, $10 \log_{10} (S/N) = 1,76 + 6,02 \cdot r$ [dB].

Tablica 3.1 prikazuje odnos između broja kvantizacijskih razina, broja bita po uzorku i odnosa S/N .

Tablica 3.1: Odnos između parametara kvantizacije

L	r	S/N [dB]
32	5	31,8
64	6	37,8
128	7	43,8
256	8	49,8



3.3.7. Kodiranje kvantiziranih uzoraka

Nakon uzorkovanja i kvantizacije, zadnji korak u digitalizaciji analognog signala je kodiranje kvantiziranih uzoraka, tj. njihovo pretvaranje u slijed simbola koji se prenose adekvatnim signalom. Svako kvantizacijskoj razini potrebno je pridijeliti jednoznačan slijed simbola, [13]. Pravilo dodjele sljedova simbola diskretnim kvantizacijskim razinama naziva se kôd, a slijed simbola koji se dodjeljuje nekoj kvantizacijskoj razini naziva se kodna riječ.

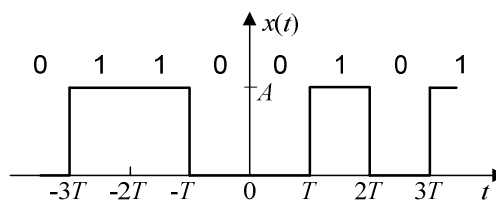
Ako se prilikom kodiranja uzoraka koriste binarni simboli, tada se radi o binarnom kodu. Pravilo kodiranja ovisi o vrsti komunikacijskog sustava, a najčešće je određeno odgovarajućim preporukama, odnosno normama. Na primjer, pretpostavimo da na izlazu kvantizatora imamo četiri kvantizacijske razine ($L = 4$): $-3U$, $-U$, U i $3U$, pri čemu je U razina napona u voltima. Tada je za njihovo jednoznačno kodiranje nužno koristiti 2 bita po svakoj razini, tj. po svakom uzorku ($R = 2$), a jedno od mogućih preslikavanja tih razina u binarne simbole je sljedeće: $-3U \rightarrow 11$, $-U \rightarrow 10$, $U \rightarrow 00$ i $3U \rightarrow 01$. Pritom prvi bit određuje polaritet (0 – pozitivan, 1 – negativan), a drugi apsolutni iznos razine ($0-U$, $1-3U$).

Na izlazu kvantizacijskog koda javlja se binarni digitalni signal koji koristi dvije naponske razine, 0 i A volta (Slika 3.33). Takav se signal ujedno naziva i unipolarni binarni signal. Pritom svaka naponska razina prenosi jedan binarni simbol, 0 ili 1. Možemo također reći da se svaki binarni simbol prenosi jednim signalnim elementom, $x_A(t+kT)$ ili $x_0(t+kT)$, a uzastopni slijed signalnih elemenata tvori cjeloviti binarni signal $x(t)$:

$$x_A(t+kT) = A \text{ za } kT \leq t < (k+1)T, k \in \mathbb{Z},$$

$$x_0(t+kT) = 0 \text{ za } kT \leq t < (k+1)T, k \in \mathbb{Z},$$

pri čemu je T trajanje signalnih elemenata. Dodjeljivanje razina binarnim simbolima varira od sustava do sustava. Uobičajeno je da se binarnoj nuli pridjeljuje razina 0 [V], a binarnoj jedinici razina A [V].



Slika 3.33: Unipolarni binarni signal

Trajanje binarnih signalnih elemenata, označeno kao T , jednako je za svaki signalni element od kojeg je sastavljen neki binarni signal. T se naziva i trajanje

bita (obzirom da se svaki bit prenosi jednim signalnim elementom), a recipročna vrijednost od T se naziva prijenosna brzina: $R = 1/T$ [bit/s] (engleski naziv za prijenosnu brzinu je *transmission rate* ili *bit rate*).

Iako je pri kodiranju kvantiziranih uzoraka teoretski moguće i korištenje drugih kodova osim binarnih (npr. ternarnih, kvaternarnih i dr.), najčešće se upravo koriste binarni kodovi. Međutim, pri prijenosu signala, ovisno o vrsti kanala, često se binarni signal u predajniku pretvara u linijski kôd (Slika 3.19) koji je pogodniji za prijenos u dotičnom kanalu. Pored linijskih binarnih kodova (bipolarni binarni kôd, kôd Manchester), u području linijskih kodova svoju su primjenu našli ternarni kodovi (svaki simbol može poprimiti jednu od tri vrijednosti), kvaternarni kodovi (svaki simbol može poprimiti jednu od četiri vrijednosti) te višerazinski PAM kodovi (skr. od engl. *Pulse-amplitude Modulation*). Detaljnije razmatranje linijskih kodova nije u području kojim se bavi ova knjiga.

3.4. Kapacitet kanala u kontinuiranom vremenu

U ovom će potpoglavlju prvo biti definirane entropije u kanalima u kontinuiranom vremenu. Nakon definiranja transinformacije u takvim kanalima, bit će definiran kapacitet kanala u kontinuiranom vremenu i određen izraz za njegov proračun. Konačno, primjenom teorema uzorkovanja, taj će izraz biti prilagođen pojasno ograničenim kanalima.

3.4.1. Entropija u kanalima u kontinuiranom vremenu

Entropiju jednodimenzionalne slučajne varijable X s kontinuiranom razdiobom definiramo izrazom

$$H(X) = E[-\log f_X(X)] = - \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log f_X(x) dx,$$

pri čemu je $f_X(x)$ kontinuirana funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable X . Entropija slučajne varijable koja je definirana pomoću logaritma po bazi 2 izražava se jedinicom bit/simbol. Naziv koji se ponekad koristi za entropiju definiranu gornjim izrazom je diferencijalna entropija slučajne varijable X , [9]. Prilikom prelaska s diskretnih kanala na kontinuirane javlja se nekoliko problema vezanih uz definiciju entropije danu prethodnim izrazom. U diskretnom je modelu entropija slučajne varijable uvijek pozitivna, tj. veća ili jednaka nuli. U kontinuiranom modelu entropija može biti i negativna.




Primjer: Entropija slučajne varijable s jednolikom razdiobom

Neka kontinuirana slučajna varijabla X ima jednoliku razdiobu na intervalu $(0, a)$. Funkcija gustoće vjerojatnosti takve slučajne varijable dana je sljedećim izrazom:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & 0 < x < a, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Ako sada primijenimo izraz za diferencijalnu entropiju, dobivamo sljedeći rezultat:

$$H(X) = \int_0^a \frac{1}{a} \log(a) dx = \log(a).$$

Ako je $a < 1$, tada je $\log(a) < 0$, pa je diferencijalna entropija takve kontinuirane slučajne varijable negativna.

Nadalje, entropija slučajne varijable s kontinuiranom razdiobom može (iako ne mora) postati i beskonačno velika (vidi izraz (3.9)), što nije slučaj kod entropije slučajne varijable s diskretnom razdiobom. Ipak, poznavanje diferencijalne entropije je korisno. Opravdanost gornjeg izraza za diferencijalnu entropiju kontinuirane slučajne varijable moguće je dokazati sljedećim razmatranjem. Aproksimirajmo kontinuiranu slučajnu varijablu X s diskretnom slučajnom varijablom koja poprima vrijednosti $x_k = k \cdot \Delta x$, $k \in \mathbb{Z}$, a Δx teži u nulu. Sukladno aproksimaciji, kontinuirana slučajna varijabla X poprima vrijednosti u intervalu $[x_k, x_k + \Delta x]$ s vjerojatnošću $f_X(x_k) \cdot \Delta x$. Dopuštajući da Δx teži u nulu, te sukladno definiciji entropije za diskretnu slučajnu varijablu, entropiju kontinuirane slučajne varijable X sada je moguće zapisati kao

$$\begin{aligned} H(X) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_X(x_k) \Delta x \log \left(\frac{1}{f_X(x_k) \Delta x} \right), \\ H(X) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_X(x_k) \Delta x \log \left(\frac{1}{f_X(x_k)} \right) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_X(x_k) \Delta x \log(\Delta x) \right], \\ H(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log \left(\frac{1}{f_X(x)} \right) dx - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\log(\Delta x) \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_k) dx \right]. \end{aligned}$$

Obzirom da je površina ispod funkcije gustoće vjerojatnosti $f_X(x)$ jednaka jedinici, konačni izraz za entropiju kontinuirane slučajne varijable X je sljedeći

$$H(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log \left(\frac{1}{f_X(x)} \right) dx - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [\log(\Delta x)] \quad (3.9)$$

Kad Δx teži u nulu $-\log(\Delta x)$ teži u beskonačnost. To znači da je entropija kontinuirane slučajne varijable beskonačno velika. Takav zaključak je i intuitivno opravdan, jer kontinuirana slučajna varijabla može poprimiti neprebrojiv skup vrijednosti na intervalu na kojem je definirana pa je samim time i njezina neodređenost beskonačna. Problem koji proizlazi iz ovih razmatranja zaobilazi

se uvođenjem diferencijalne entropije koja je jednaka $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log \left(\frac{1}{f_X(x)} \right) dx$,

a $-\log(\Delta x)$, kao član u izrazu (3.9), a ostaje služiti samo kao referentna vrijednost. Na kraju ovog kratkog razmatranja treba naglasiti da, unatoč njezinoj korisnosti u razmatranju informacijskog kapaciteta kanala u kontinuiranom vremenu, diferencijalna entropija ni na koji način ne predstavlja mjeru neodređenosti slučajne varijable X .

Informacijske mjere kontinuiranog informacijskog sustava

Neka je ulaz u kontinuirani kanal modeliran slučajnom varijablom X , čija je funkcija gustoće vjerojatnosti $f_1(x)$ kontinuirana. Na sličan način izlaz iz kanala modelirajmo slučajnom varijablom Y kontinuirane funkcije gustoće razdiobe $f_2(y)$. Neka je združena funkcija gustoće vjerojatnosti slučajnih varijabli X i Y definirana kao kontinuirana funkcija $f(x,y)$. Vezu između združene funkcije gustoće vjerojatnosti $f(x,y)$ i funkcija gustoće vjerojatnosti $f_1(x)$ i $f_2(y)$ opisuju sljedeći izrazi:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy,$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx.$$

Tada su, po analogiji s potpoglavljem 2.4.3, odgovarajuće informacijske mjere koje opisuju sustav definirane sljedećim izrazima:

- entropija na ulazu kanala:

$$H(X) = E[-\log f_1(X)] = - \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \log f_1(x) dx,$$

- entropija na izlazu kanala:

$$H(Y) = E[-\log f_2(Y)] = - \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y) \log f_2(y) dy,$$



- ekvivokacija:

$$H(X|Y) = E[-\log f_y(X|Y)] = -\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \log \frac{f(x, y)}{f_2(y)} dx dy,$$

- entropija šuma:

$$H(Y|X) = E[-\log f_x(Y|X)] = -\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \log \frac{f(x, y)}{f_1(x)} dx dy,$$

- združena entropija:

$$H(X, Y) = E[-\log f(X, Y)] = -\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \log f(x, y) dx dy.$$

Međutim, naglasak je potrebno staviti na transinformaciju $I(X; Y)$ umjesto na pojedinačne entropije $H(X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$ i $H(X, Y)$. Brzinu prijenosa informacije u kanalu, tj. transinformaciju moguće je definirati kao očekivanje

slučajne varijable I definirane funkcijom $\log \left(\frac{f(X, Y)}{f_1(X) f_2(Y)} \right)$. Dakle,

$$E[I] = I(X; Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \log \frac{f(x, y)}{f_1(x) f_2(y)} dx dy.$$

Vežu između transinformacije i ranije definiranih entropija određuju sljedeći izrazi:

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) + H(Y) - H(X, Y),$$

što je ekvivalentno odnosima u diskretnom informacijskom sustavu, opisanim u drugom poglavlju. Transinformacija $I(X; Y)$ nikad nije negativna i u općenitom slučaju uvijek ima konačnu vrijednost (to vrijedi ako su funkcije gustoće vjerojatnosti apsolutno kontinuirane). Elementarna svojstva transinformacije vidljiva su iz definicije ove veličine, [9]:

$$I(X; Y) = I(Y; X)$$

$$I(X; Y) \geq 0$$

$$I(X; Y) = 0 \text{ ako su } X \text{ i } Y \text{ međusobno neovisne slučajne varijable.}$$

Obzirom da se transinformacija računa kao razlika između dviju entropija, te imajući u vidu izraz (3.9), evidentno je da će se prilikom operacije oduzimanja referentne vrijednosti $-\log(\Delta x)$ međusobno poništiti pa stoji tvrdnja da je transinformaciju moguće izračunati poznavanjem diferencijalnih entropija kontinuiranih slučajnih varijabli.

Entropija slučajnog vektora

Neka je \mathbf{X} slučajni vektor sastavljen od n kontinuiranih slučajnih varijabli X_k , $k = 1, \dots, n$. Tada se diferencijalna entropija računa kao

$$\begin{aligned} H(X_1, \dots, X_n) &= E[-\log\{f_{\mathbf{X}}(X_1, \dots, X_n)\}] \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) \log[f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n)] dx_1 \dots dx_n, \end{aligned}$$

ili skraćeno zapisano kao

$$H(\mathbf{X}) = E[-\log\{f(\mathbf{X})\}] = -\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \log[f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})] d\mathbf{x},$$

pri čemu je $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ združena funkcija gustoće vjerojatnosti slučajnog vektora \mathbf{X} .

U nastavku razmatranja u ovom poglavlju koristit ćemo isključivo diferencijalnu entropiju kontinuirane slučajne varijable i slučajnog vektora.

3.4.2. Problem maksimizacije entropije kontinuirane slučajne varijable

Maksimalna entropija diskretne slučajne varijable nastupa kad su svi njezini elementarni događaji jednako vjerojatni. Ako je kontinuirana slučajna varijabla definirana na cijelom skupu realnih brojeva, tada prethodna tvrdnja nema neko posebno značenje, jer postoji mogućnost da entropija nije konačna. Međutim, pretpostavimo li da je kontinuirana slučajna varijabla ograničena na neki konačan interval, tada ima smisla razmatrati koja gustoća vjerojatnosti daje maksimalnu vrijednost entropije. U nastavku će biti analizirana tri različita scenarija, [9]:

- slučajna varijabla X definirana je na konačnom intervalu $[a, b]$ i njezina je funkcija gustoće vjerojatnosti $f_1(x)$;
- slučajna varijabla X poprima samo nenegativne vrijednosti, i ima unaprijed zadano očekivanje $E[X] = a$, $a > 0$;
- neka slučajna varijabla X , čije je očekivanje jednako nuli, ima definiranu standardnu devijaciju σ_X .

U sva tri scenarija maksimalna se entropija određuje temeljem zadanih ograničenja i korištenjem metode Lagrangeovih multiplikatora i Euler-Lagrangeove jednakosti. Zbog jednostavnijeg proračuna entropiju slučajne varijable X moguće je definirati i kao

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \ln f_1(x) dx \text{ [nat/simbol]}.$$

U ovom izrazu entropija slučajne varijable X se računa pomoću prirodnog logaritma pa je njezina vrijednost određena jedinicom nat/simbol. Rezultati su sljedeći:

- za prvi scenarij: maksimalnu entropiju će imati slučajna varijabla s jednolikom funkcijom gustoće vjerojatnosti na intervalu $[a, b]$, tj. $f_1(x) = 1/(b-a)$, $a \leq x \leq b$ i $H(X) = \ln(b-a)$ nat/simbol;
- za drugi scenarij: maksimalnu entropiju uz unaprijed zadanu srednju vrijednost a ima slučajna varijabla čija je funkcija gustoće vjerojatnosti $f_1(x) = (1/a)e^{-x/a}$ pa je $H(X) = \ln(ae) = 1 + \ln(a)$;
- za treći scenarij: maksimalnu entropiju će imati slučajna varijabla funkcije gustoće vjerojatnosti $f_1(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma_x^2)}$, što daje $H(X) = \ln(\sigma_x \sqrt{2\pi e})$.

Od svih jednodimenzionalnih razdioba s unaprijed zadanom standardnom devijacijom najveću entropiju pruža Gaussova (normalna) razdioba.

3.4.3. Prijenos informacije u prisustvu aditivnog šuma

Određivanje maksimuma transinformacije $I(X;Y)$ u ovisnosti o funkcijama gustoće vjerojatnosti $f(x,y)$, $f_1(x)$ i $f_2(y)$ te uz dodatna ograničenja vodi prema konceptu kapaciteta kontinuiranog kanala, [9], [8], [9], [3]. Za razliku od diskretnog kanala, kapacitet kontinuiranog kanala nije apsolutna veličina već ovisi o ograničenjima. Općenito gledano, proračun kapaciteta kontinuiranog kanala je vrlo složen problem i ne postoji općenita metoda za određivanje kapaciteta u svim okolnostima. Međutim, u nekim posebnim slučajevima moguće je relativno jednostavno proračunati kapacitet kanala i odrediti njegov maksimum. Jedan od kanala za koje vrijedi prethodna tvrdnja je i kanal s aditivnim šumom.

Neka je X slučajna varijabla koja opisuje signal na izlazu predajnika, a Y slučajna varijabla koja opisuje signal na ulazu u prijamnik. Definirajmo uvjetnu funkciju gustoće vjerojatnosti $f_x(y|x)$ kao

$$f_x(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}.$$

Nadalje, pretpostavimo da je šum u kanalu aditivan i neovisan o X :

$$Y = X + Z \quad \text{ i } \quad f_x(y|x) = f_x(z+x|x) = \phi(z),$$

pri čemu je Z slučajna varijabla koja opisuje šum čija je funkcija gustoće vjerojatnosti $\phi(z)$. Drugim riječima, $f_x(z+x|x)$ ovisi samo o z . Da relacija jednakosti između funkcija gustoće vjerojatnosti $f_x(z+x|x)$ i $\phi(z)$ doista vrijedi, moguće je ustanoviti na temelju sljedećih relacija. Temeljem definicije funkcije razdiobe vrijedi:

$$P\{z < Z \leq z + dz\} = \phi(z)dz.$$

Obzirom da smo već ranije pretpostavili da vrijedi $y = x + z$, također vrijedi i sljedeće:

$$P\{y < Y \leq y + dy \mid X = x\} = P\{z < Z \leq z + dz \mid X = x\}.$$

Ta je uvjetna vjerojatnost neovisna o x i ovisi samo o strukturi šuma, tj.

$$\begin{aligned} P\{y < Y \leq y + dy \mid X = x\} &= P\{y < Z + X \leq y + dy \mid X = x\} = P\{y < Z + X \leq y + dy \mid X = x\} \\ &= P\{y < Z + X \wedge Z + X \leq y + dy \mid X = x\} = P\{y - x < Z \wedge Z \leq y - x + dy\} \\ &= P\{y - x < Z \leq y - x + dy\} \end{aligned}$$

Konačno, obzirom da je $y = x + z$ i $dy = dz$, vrijedi

$$\begin{aligned} P\{y < Y \leq y + dy \mid X = x\} &= P\{z < Z \leq z + dz\} = \phi(z)dz, \\ \text{tj. } f_x(y|x) &= f_x(z+x|x) = \phi(z). \end{aligned}$$

Iz toga proizlazi jednakost $H(Y|X) = H(X + Z|X) = H(Z)$, pa za transinformaciju vrijedi:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y) - H(Z) = H(Y) + \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) \log[\phi(z)] dz.$$

Kapacitet kontinuiranog kanala s aditivnim šumom određujemo pronalaženjem maksimuma transinformacije $I(X;Y)$ u ovisnosti o funkciji $f_1(x)$ i pod određenim ograničenjima. Najučestalije ograničenje je ograničenje vršne ili srednje snage signala na izlazu predajnika. Rješavanje ovog problema je složeno i zahtijeva dugotrajno izvođenje. Međutim, uz odgovarajuće pretpostavke taj je problem moguće pojednostaviti.

Određivanje kapaciteta kanala u prisustvu Gaussovog aditivnog šuma te uz zadanu srednju snagu signala na izlazu predajnika i srednju snagu šuma

Na samom početku potrebno je definirati ograničenja bitna za proračun kapaciteta. Za šum je pretpostavljeno da ima Gaussovu razdiobu, srednju vrijednost jednaku nuli i srednju snagu jednaku σ_z^2 , a prvo ograničenje, koje proizlazi iz općenitog svojstva funkcije gustoće vjerojatnosti, dano je sljedećim izrazom:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} e^{-z^2/(2\sigma_z^2)} dz = 1,$$

pri čemu je σ_z standardna devijacija šuma, [9]. Preostala ograničenja odnose se na ulazni signal funkcije gustoće vjerojatnosti $f_1(x)$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) dx &= 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx &= 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x) dx &= \sigma_x^2, \end{aligned}$$

što znači da je srednja vrijednost ulaznog signala jednaka nuli, pa, shodno tome, σ_x^2 , predstavlja srednju snagu ulaznog signala (vidi 3.1.5). Transinformacija je dana izrazom

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Z) = H(Y) - \frac{1}{2} \ln(2\pi e \sigma_z^2),$$

a za njezin maksimum vrijedi: $\max I(X;Y) = \max [H(Y) - H(Z)]$. Dakle, kapacitet kanala je moguće izračunati maksimizacijom entropije $H(Y)$ uz ranije navedena ograničenja. Za srednju vrijednost i standardnu devijaciju signala na izlazu kanala vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[X + Z] = E[X] + E[Z] = 0, \\ E[Y^2] &= E[(X + Z)^2] = E[X^2] + 2E[X]E[Z] + E[Z^2]. \end{aligned}$$

Obzirom da je produkt $E[X]E[Z]$ jednak nuli, vrijedi

$$E[Y^2] = \sigma_x^2 + \sigma_z^2 = \text{konst.}$$

Sukladno tim jednakostima, problem pronalaženja kapaciteta kanala svodi se na pronalaženje funkcije gustoće vjerojatnosti koja daje srednju vrijednost 0 i standardnu devijaciju $\sigma_x^2 + \sigma_z^2$. U potpoglavlju 3.4.2 navedeno je da ako je standardna devijacija slučajne varijable unaprijed zadana (uz srednju vrijednost jednaku nuli) tada najveću entropiju daje Gaussova funkcija gustoće vjerojatnosti. U skladu s navedenim, maksimalna entropija signala na ulazu u prijamnik je dana izrazom

$$H(Y) = \ln \left[\sqrt{2\pi e (\sigma_x^2 + \sigma_z^2)} \right] [\text{nat/simbol}].$$

Ovdje je korištena jedinica nat/simbol zbog prirodne baze logaritma. Kapacitet kanala po simbolu, C_1 , jednak je maksimalnoj vrijednosti transinformacije:

$$C_1 = \max I(X;Y) = \max \left[H(Y) - \frac{1}{2} \ln(2\pi e \sigma_z^2) \right] = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_z^2}{\sigma_z^2} \right) [\text{nat/simbol}].$$

Konačno, ako pretpostavimo da vrijedi $\sigma_x^2 = S$ i $\sigma_z^2 = N$, pri čemu je S srednja snaga signala na izlazu predajnika, a N je srednja snaga šuma u kanalu, tada izraz za kapacitet kanala po simbolu prelazi u

$$C_1 = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{S}{N} \right) [\text{nat/simbol}].$$

Korištenje prirodnog logaritma pogodno je s aspekta izvođenja izraza za kapacitet kanala. Međutim, u praksi se u izrazu za kapacitet kanala češće koristi logaritam po bazi 2 jer u konačnici daje kapacitet po simbolu izražen brojem bita po simbolu:

$$C_1 = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) [\text{bit/simbol}].$$

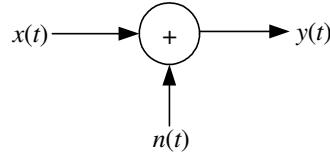
Na kraju ovog razmatranja o prijenosu informacije moguće je rezimirati u kanalu u kojem djeluje aditivni Gaussov šum, a srednja snaga signala na izlazu predajnika i srednja snaga šuma su ograničene, signal na ulazu kanala i signal na izlazu kanala moraju imati Gaussovu razdiobu kako bi brzina prijenosa informacije takvim kanalom bila maksimalna, tj. jednaka kapacitetu tog kanala.

3.4.4. Informacijski kapacitet pojasno ograničenog kanala

U prethodnom dijelu ovog poglavlja razmatrali smo prijenos kontinuiranih signala kanalom. Problem koji se javlja kod egzaktnog opisa kontinuiranih signala je u sljedećem. Vrijednost slučajnog kontinuiranog signala $x(t)$ je nepredvidiva u bilo kojem trenutku. U bilo kojem trenutku t_k , $x(t_k)$ je slučajna varijabla. Prilikom matematičkog opisivanja takvih signala potrebno je poznavanje statističkih svojstava praktički beskonačnog broja slučajnih varijabli. Rješenje tog problema nazire se u sljedećem: prikazati kontinuirani signal diskretnim signalom. Upravo u prelasku s kontinuiranog prikaza signala na diskretni uzorkovanje ima glavnu ulogu, a promatrani skup signala svodi se na pojasno ograničene signale.

AWGN kanal

Bijeli Gaussov šum se obično koristi u modelu tzv. AWGN kanala (engleski: *Additive White Gaussian Noise*, u prijevodu aditivni bijeli Gaussov šum, Slika 3.34).



Slika 3.34 : Model AWGN kanala

U takvom kanalu na ulazu djeluje signal $x(t)$ kojemu se pribraja bijeli Gaussov šum $n(t)$ i zajedno čine izlaz iz kanala $y(t)$:

$$y(t) = x(t) + n(t).$$

U praksi postoji pravilo za korištenje bijelog šuma u analizi realnih sustava: sve dok je širina frekvencijskog pojasa šuma na ulazu sustava znatno veća nego širina prijenosnog pojasa sustava, šum možemo modelirati kao bijeli šum.

Teorem o informacijskom kapacitetu AWGN kanala

Slika 3.34 prikazuje općeniti model AWGN kanala u kojem se izvorni signal $x(t)$ algebarski zbraja s bijelim Gaussovim šumom $n(t)$ i tvori signal $y(t)$, [9]. Ako signale $x(t)$ i $y(t)$ uzorkujemo sukladno teoremu uzorkovanja, dobivamo diskretne signale koje je moguće prikazati n -dimenzionalnim slučajnim vektorima \mathbf{X} , odnosno \mathbf{Y} :

$$\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n] \text{ i } \mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_n],$$

gdje su X_k , $k = 1, 2, \dots, n$ i Y_k , $k = 1, 2, \dots, n$ uzorci signala $x(t)$, odnosno $y(t)$, koje opisujemo slučajnim varijablama. Statistička svojstva slučajnih varijabli X_k , $k = 1, 2, \dots, n$, određena kao

$$E[X_k] = 0,$$

$$E[X_k^2] = \sigma_{xk}^2.$$

Šum u kanalu je također moguće prikazati n -dimenzionalnim slučajnim vektorom:

$$\mathbf{Z} = [Z_1, Z_2, \dots, Z_n],$$

pri čemu su statistička svojstva slučajnih varijabli Z_k , $k = 1, 2, \dots, n$, određena izrazima

$$E[Z_k] = 0,$$

$$E[Z_k^2] = \sigma_{zk}^2,$$

a autokovarijanca zadovoljava sljedeće svojstvo:

$$C_z(Z_i, Z_j) = 0, i \neq j.$$

Drugim riječima, komponente od kojih je sastavljen slučajni vektor šuma su međusobno potpuno neovisne. Obzirom da je šum u AWGN kanalu aditivan, za slučajni vektor izlaznog signala vrijedi jednostavna relacija

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{Z}.$$

Sljedeći korak na putu do određivanja kapaciteta AWGN kanala je određivanje transinformacije u kanalu, $I(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$. Za transinformaciju vrijedi da je

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = H(\mathbf{Y}) - H(\mathbf{Y}|\mathbf{X}).$$

Sukladno izvodu u potpoglavlju 3.4.3 vrijedi:

$$f_x(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = f_x(\mathbf{x} + \mathbf{z}|\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{z}),$$

gdje je $\phi(\mathbf{z})$ funkcija gustoće razdiobe šuma, definirana kao

$$\phi(\mathbf{z}) = \prod_{k=1}^n \left[\frac{1}{\sigma_{z_k} \sqrt{2\pi}} e^{-z_k^2 / (2\sigma_{z_k}^2)} \right].$$

Budući da su komponente šuma međusobno neovisne, entropija šuma jednaka je zbroju entropija njegovih pojedinačnih komponenata:

$$H(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = H(\mathbf{Z}) = - \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{z}) \log[\phi(\mathbf{z})] d\mathbf{z} = \sum_{k=1}^n \log(\sigma_{z_k} \sqrt{2\pi e}).$$

Dakle, transinformacija će biti jednaka

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = H(\mathbf{Y}) - H(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = H(\mathbf{Y}) - H(\mathbf{Z}) = H(\mathbf{Y}) - \sum_{k=1}^n \log(\sigma_{z_k} \sqrt{2\pi e}).$$

Kako bi odredili kapacitet kanala, prvo je potrebno odrediti maksimalnu vrijednost transinformacije uz pretpostavljena ograničenja. Taj se problem svodi na maksimizaciju entropije $H(\mathbf{Y})$. Na svaku komponentu slučajnog vektora \mathbf{X} djeluje neovisna Gaussova smetnja: $Y_k = X_k + Z_k$. S obzirom na ranije zadane srednje vrijednosti i standardne devijacije signala \mathbf{X} i šuma \mathbf{Z} vrijedi:

$$\sigma_{y_k}^2 = \sigma_{x_k}^2 + \sigma_{z_k}^2, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Entropija $H(\mathbf{Y})$ će biti maksimalna kad su ispunjeni sljedeći uvjeti:

1. sve komponente slučajnog vektora \mathbf{Y} su međusobno neovisne slučajne varijable;
2. svaka komponenta ima najveću entropiju pod zadanim uvjetima.

Prvi uvjet implicira da su uzorci Y_k međusobno neovisni, a ispunjenje drugog uvjeta pretpostavlja da svaki uzorak ima Gaussovu razdiobu, kao što je već ranije pokazano u ovom poglavlju. Dakle, maksimalna transinformacija je određena izrazom

$$\begin{aligned} I_{\max}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) &= \sum_{k=1}^n \log(\sigma_{y_k} \sqrt{2\pi e}) - \sum_{k=1}^n \log(\sigma_{z_k} \sqrt{2\pi e}) \\ &= \sum_{k=1}^n \log\left(\frac{\sigma_{y_k}}{\sigma_{z_k}}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{\sigma_{x_k}^2}{\sigma_{z_k}^2}\right). \end{aligned}$$

Izvor koji omogućava postizanje maksimalne transinformacije također generira signal čije su komponente međusobno neovisne i imaju Gaussovu razdiobu, jer je njihovu funkciju gustoće vjerojatnosti moguće dobiti konvolucijom funkcija gustoće vjerojatnosti slučajnih varijabli Y_k i Z_k . Konačno, pretpostavimo da su standardne devijacije svih komponenti X_k međusobno jednake te da su i standardne devijacije svih komponenti Z_k također međusobno jednake

$$\begin{aligned} \sigma_{x_k} &= \sigma_x, \\ \sigma_{z_k} &= \sigma_z, \end{aligned} \quad k=1, 2, \dots, n.$$

U tom slučaju izraz za maksimalnu transinformaciju prelazi u

$$I_{\max}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2}\right) = \frac{n}{2} \log\left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2}\right).$$

Sada možemo σ_x^2 i σ_z^2 zamijeniti oznakama S i N , koje predstavljaju srednju snagu signala, odnosno srednju snagu šuma (vidi 3.1.5):

$$I_{\max}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = \frac{n}{2} \log\left(1 + \frac{S}{N}\right) [\text{bit/simbol}].$$

Praktična važnost ovog izraza je u tome što je maksimalna transinformacija prikazana pomoću srednje snage signala i srednje snage šuma, koje je moguće mjeriti u laboratoriju. Nadalje, ako je slučajni signal \mathbf{X} pojasno ograničen na pojas $0 \leq |f| \leq B$ herca, tada je prilikom njegova uzorkovanja potrebno poštivati uvjet da je frekvencija uzorkovanja, f_u , barem dvostruko veća od gornje granične frekvencije B : $f_u \geq 2B$. U tom slučaju broj uzoraka uzetih unutar jedinice vremena iznosi $2B$ (dakle $n = 2B$), pa konačan izraz za kapacitet kanala, C , prelazi u

$$C = \frac{2B}{2} I_{\max}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = B \log\left(1 + \frac{S}{N}\right) [\text{bit/s}].$$

Pored ovog oblika, izraz za kapacitet kanala moguće je kraće zapisati i kao $C = 2BD$, pri čemu je D dinamika, prikazana brojem bita prenijetih svakim uzorkom:

$$D = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{S}{N} \right) [\text{bit/uzorak}].$$

Ako spektralnu gustoću snage šuma, $S_N(f)$, definiramo kao

$$S_N(f) = \frac{N_0}{2}, \forall f \in \square,$$

tada je srednja snaga šuma unutar frekvencijskog pojasa $0 \leq |f| \leq B$ dana kao: $N = N_0 B$, pa izraz za kapacitet kanala prelazi u

$$C = B \log \left(1 + \frac{S}{N_0 B} \right) [\text{bit/s}]. \quad (3.10)$$

Ovaj izraz predstavlja konačni izraz za određivanje informacijskog kapaciteta kanala, kojeg je postavio Claude Shannon. Dakle, uz uvjete zadane teoremom kanalom je moguće prenositi C bit/s uz proizvoljno malu vjerojatnost pogreške, ako se primijeni sustav za kodiranje zadovoljavajuće razine složenosti. Kanalom nije moguće prenositi informaciju brzinom većom od C bit/s, a da je pri tome vjerojatnost pogreške proizvoljno mala, bez obzira na složenost koda. Teorem o informacijskom kapacitetu kanala određuje fundamentalno ograničenje za prijenos bez pogrešaka kroz pojasno ograničen Gaussov kanal s ograničenom snagom predajnika. Kako bi se u stvarnom kanalu približili tom ograničenju nužno je da poslani signal ima statistička svojstva koja su približno jednaka svojstvima bijelog Gaussovog šuma. Iz gornjeg izraza vidljivo je da je informacijski kapacitet kanala lakše povećati proširenjem frekvencijskog pojasa kanala nego povećavanjem snage signala na izlazu predajnika.

Primjer: Ograničenje informacijskog kapaciteta kanala uzrokovano kvantizacijskim šumom

Pretpostavimo da se radi o telefonskom kanalu, čija širina prijenosnog pojasa iznosi 3100 Hz. Telefonski kanal je pojasnopropusni sustav koji propušta frekvencije u pojasu od 300 do 3400 herca. Nadalje, pretpostavimo da kroz takav kanal želimo slati digitalni signal koji nastaje obradom sinusnog signala. Ako se koristi kvantizacija s 256 razina ($L = 256$, $R = 8$), tada odnos srednje snage sinusnog signala prema srednjoj snazi kvantizacijskog šuma iznosi 49,8 dB (Tablica 3.1). Dakle, $B = 3100$ Hz i $S/N = 95499$. S ovim podacima, koristeći Shannonovu formulu, možemo izračunati informacijski kapacitet telefonskog kanala: $C = 51283$ bit/s.



Naravno, kvantizacija nije jedini uzrok smetnji u telefonskom kanalu pa je stvarni kapacitet takvog kanala i manji od izračunatog iznosa. Mjerenja pokazuju da je kod barem 50% krajnjih korisnika odnos srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma manji ili jednak 35 dB. Dakle, $S/N = 3162$, pa informacijski kapacitet C iznosi 36044 bit/s. Ovo je glavni razlog zašto modemi za prijenos podataka telefonskim kanalima (na engleskom: *voiceband modems*) nisu razvijeni za brzine veće od 33.600 bit/s.

3.4.5. Učinkovitost prijenosnog pojasa

Definirajmo kao idealan onaj sustav u kojem se bitovi prenose brzinom $R_b = C$ [bit/s]. Nadalje, ako promatramo neki signal $x(t)$ (na primjer, signal sličan onom na Slika 3.33) trajanja T pomoću kojeg se bitovi informacije prenose kanalom, tada je srednja snaga tog signala, S , definirana kao

$$S = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{E}{T},$$

pri čemu je E energija signala $x(t)$. Očito je da ako srednju snagu predajnika ograničimo na neki iznos, energija signala raste linearno s vremenom. Predajnik koji generira R_b bita u jedinici vremena u stvari šalje jedan bit informacije u kanal svakih $1/R_b$ sekundi. Dakle, srednja energija po svakom bitu, E_b , jednaka je $E_b = S/R$. Sukladno tome, u idealnom će sustavu vrijediti da je $S = E_b C$. Omjer kapaciteta kanala, C , i širine prijenosnog pojasa, B , određen je sljedećim izrazima:

$$\frac{C}{B} = \log_2 \left(1 + \frac{E_b C}{N_0 B} \right),$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{C/B} - 1}{C/B},$$

pri čemu je E_b/N_0 omjer energije signala po bitu prema spektralnoj gustoći snage šuma. Općenito, omjer prijenosne brzine R_b i širine prijenosnog pojasa sustava naziva se učinkovitost prijenosnog pojasa (engleski: *bandwidth efficiency*), [1]. Kako se širina prijenosnog pojasa povećava prema beskonačnosti, omjer E_b/N_0 se približava svojoj donjoj graničnoj vrijednosti (taj omjer teoretski nema gornju graničnu vrijednost):

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \left(\frac{E_b}{N_0} \right) = \log(2) = 0,693.$$

Ta se vrijednost naziva i Shannonovo ograničenje AWGN kanala, uz pretpostavku da je zalihost koda korištenog u prijenosu informacije jednaka nuli. Odgovarajuća gornja granična vrijednost kapaciteta kanala je

$$\lim_{B \rightarrow \infty} C = \frac{S}{N_0} \log_2 e.$$

3.4.6. Odnos prijenosne brzine i kapaciteta kanala

Prijenosna brzina R_b može biti u sljedećim odnosima s kapacitetom kanala, C :

$$R_b = C$$

- granična vrijednost prijenosne brzine;

$$R_b < C$$

- prijenos brzinom, koja je manja od kapaciteta kanala, moguće je realizirati s po volji malom vjerojatnošću pogrešaka simbola u prijemu;

$$R_b > C$$

- prijenos brzinom, koja je veća od kapaciteta kanala, nije moguće realizirati s po volji malom vjerojatnošću pogrešaka simbola u prijemu.

Dakle, realni prijenosni sustavi uvijek su projektirani tako da je prijenosna brzina manja od kapaciteta kanala (vrijednost $R_b = C$ je ionako ostvariva isključivo teoretski). To je nužno kako bi takvi sustavi bili pouzdani. Stoga je prilikom razmatranja praktičnih prijenosnih sustava u kojima je vjerojatnost pogreške dovoljno mala (iznos dovoljno male vjerojatnosti pogreške određuju dizajneri sustava) potrebno uvesti novu veličinu, nazvanu smanjenje odnosa srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma, Γ , [1]. Γ je funkcija dozvoljene vjerojatnosti pogreške i kodnog sustava korištenog u prijenosu, te određuje učinkovitost realnog kodnog sustava u odnosu na idealni sustav (kakvog je Shannon pretpostavio u teoremu o informacijskom kapacitetu kanala). Ako je kapacitet kanala određen izrazom $C = 1/2 \log(1 + S/N)$ [bit/simbol], tada vrijedi

$$\Gamma = \frac{2^{2C} - 1}{2^{2R} - 1} = \frac{(S/N)}{2^{2R} - 1}.$$

Dakle, za prijenosnu brzinu sada vrijedi

$$R = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{S}{\Gamma N} \right) [\text{bit/simbol}],$$

odnosno

$$R_b = B \log \left(1 + \frac{S}{\Gamma N} \right) [\text{bit/s}].$$

3.4.7. Informacijski kapacitet kanala s obojenim šumom

U ovom potpoglavlju Shannonov teorem o informacijskom kapacitetu kanala bit će proširen s pojasno ograničenog AWGN kanala na općenitiji model kanala s obojenim šumom, [1], [3]. Obojenim šumom (engleski: *coloured noise*) se ponekad naziva i šum koji nije bijeli (engleski: *non-white noise*), a njegova spektralna gustoća snage nije konstantna po svim frekvencijama.

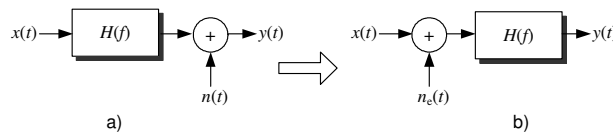
Slika 3.35a prikazuje model kanala s obojenim šumom, pri čemu $H(f)$ označava prijenosnu funkciju kanala. Šum koji aditivno djeluje na izlaz kanala, $n(t)$, je modeliran funkcijom koja predstavlja jedan od mogućih ishoda stacionarnog Gaussovog procesa srednje vrijednosti jednake nuli i spektralne gustoće snage $S_N(f)$ (Slika 3.35a).

Cilj pri određivanju kapaciteta kanala s obojenim šumom je sljedeći:

- Pronaći takav ulazni signal, opisan spektralnom gustoćom snage $S_X(f)$, koji omogućava postizanje maksimalnog uzajamnog sadržaja informacije između izlaza kanala, $y(t)$, i ulaza u kanal, $x(t)$, uz pretpostavku da je srednja snaga ulaznog signala $x(t)$ ograničena na fiksni iznos S . Samim time bit će određen informacijski kapacitet takvog kanala.

Prilikom rješavanja ovog optimizacijskog problema bit će korištena zamjena modela kanala u kojem šum djeluje na izlazu kanala sa sličnim modelom u kojem šum, opisan signalom $n_e(t)$, aditivno djeluje na ulazni signal $x(t)$ (Slika 3.35b). Tu zamjenu nam omogućava linearnost kanala. Usporedimo li spektralna obilježja signala mjerena na izlazu kanala, oba modela kanala su ekvivalentna. Naravno, kako bi ta ekvivalentnost bila potpuna, spektralna gustoća snage šuma $n_e(t)$ mora biti povezana sa spektralnom gustoćom snage šuma $n(t)$ sljedećim izrazom:

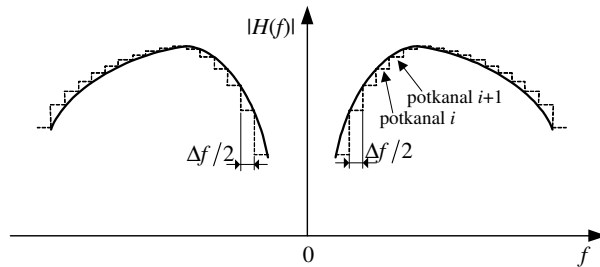
$$S_{N_e}(f) = \frac{S_N(f)}{|H(f)|^2}.$$



Slika 3.35: a) Model pojasno ograničenog kanala s obojenim šumom i b) ekvivalentni model takvog kanala

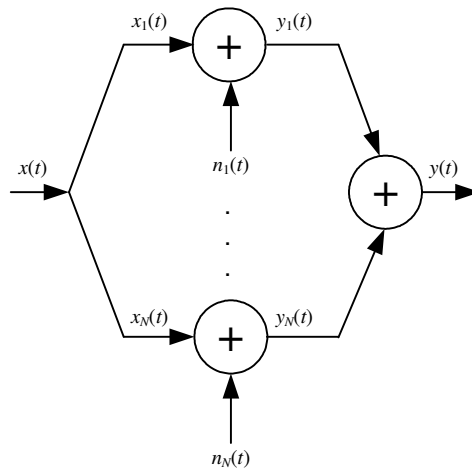
Kako bi lakše proveli analizu, kanal će u ekvivalentnom modelu biti podijeljen u veliki broj frekvencijskih odsječaka (potkanala), kao što je prikazano slikom

(Slika 3.36). Što je manja širina prijenosnog pojasa potkanala, Δf , to je aproksimacija bolja. U graničnom slučaju, kad Δf teži u nulu, stepenasta se aproksimacija približava stvarnom amplitudnom odzivu kanala, $|H(f)|$. Moguće je pretpostaviti da svaki potkanal u aproksimaciji djeluje kao AWGN kanal.



Slika 3.36: Stepenasta aproksimacija (crtkana linija) amplitudnog odziva kanala (debela linija)

Uvođenjem ekvivalentnog modela kanala (Slika 3.35b) i podjelom kanala na potkanale širine prijenosnog pojasa Δf herca, izvorni je model kanala (Slika 3.35a) zamijenjen paralelnom kombinacijom N potkanala (svaki potkanal zauzima zasebno frekvencijsko područje), pri čemu u svakom od njih djeluje pojasno ograničeni bijeli Gaussov šum (Slika 3.37), [1], [15].



Slika 3.37: Aproksimacija kanala s N paralelnih potkanala

Dakle, za k -ti potkanal u ekvivalentnom modelu vrijedi:

$$y_k(t) = x_k(t) + n_k(t), \quad k=1, 2, \dots, N.$$

Srednja snaga komponente ulaznog signala $x(t)$ u k -tom potkanalu, označene funkcijom $x_k(t)$, je dana izrazom

$$S_k = S_x(f_k) \Delta f, \quad k=1, 2, \dots, N, \quad (3.11)$$

gdje $S_x(f_k)$ označava spektralnu gustoću snage ulaznog signala na frekvenciji f_k .

Varijanca komponente šuma, $n_k(t)$, dana je sljedećim izrazom:

$$\sigma_k^2 = \frac{S_N(f_k)}{|H(f_k)|^2} \Delta f, \quad k=1, 2, \dots, N, \quad (3.12)$$

pri čemu je $S_N(f_k)$ spektralna gustoća snage šuma na frekvenciji f_k , a $|H(f_k)|$ je amplitudni odziv kanala na toj istoj frekvenciji. Sada je moguće izračunati informacijski kapacitet k -tog potkanala, C_k , koristeći izraz (3.10), pri čemu uvodimo jednostavnu zamjenu $B = \Delta f/2$:

$$C_k = \frac{1}{2} \Delta f \log \left(1 + \frac{S_k}{\sigma_k^2} \right), \quad k=1, 2, \dots, N.$$

Faktor $1/2$ u gornjem izrazu potječe od činjenice da se širina prijenosnog pojasa Δf podjednako odnosi na pozitivne i negativne frekvencije u nekom potkanalu. Nadalje, svi su potkanali međusobno neovisni jedni o drugima. Stoga je ukupni informacijski kapacitet cijelog kanala dan zbrajanjem komponenti C_k :

$$C = \sum_{k=1}^N C_k = \frac{1}{2} \Delta f \sum_{k=1}^N \log \left(1 + \frac{S_k}{\sigma_k^2} \right). \quad (3.13)$$

Problem je kako postići maksimalan ukupni informacijski kapacitet kanala uz uvjet da je ukupna snaga ulaznog signala ograničena na fiksni iznos S :

$$\sum_{k=1}^N S_k = S.$$

Uobičajeni postupak za rješavanje takvog problema je primjena metode Lagrangeovih multiplikatora. Prije nastavka optimizacijske procedure potrebno je prvo definirati ciljnu funkciju koja zajedno obuhvaća informacijski kapacitet kanala i ograničenje snage ulaznog signala:

$$J = \frac{1}{2} \Delta f \sum_{k=1}^N \log \left(1 + \frac{S_k}{\sigma_k^2} \right) + \lambda \left(S - \sum_{k=1}^N S_k \right),$$

pri čemu je λ Lagrangeov multiplikator. Derivirajući ciljnu funkciju J po snazi S_k i izjednačavajući rezultat s nulom, dobivamo sljedeći izraz:

$$\frac{\Delta f \log(e)}{S_k + \sigma_k^2} - \lambda = 0.$$

Kako bi zadovoljili to rješenje, postavljamo sljedeći uvjet:

$$S_k + \sigma_k^2 = K \Delta f, \quad k=1, 2, \dots, N, \quad (3.14)$$

pri čemu je K konstanta jednaka za sve potkanale. Drugim riječima, zbroj srednje snage signala i srednje snage šuma mora u svakom potkanalu biti konstantan. Uvrštavajući izraze (3.11) i (3.12) u (3.14), nakon sređivanja dobivamo sljedeći izraz:

$$S_x(f_k) = K - \frac{S_N(f_k)}{|H(f_k)|^2}, \quad k=1, 2, \dots, N. \quad (3.15)$$

Neka \mathfrak{S} označava područje frekvencija unutar kojeg konstanta K zadovoljava uvjet

$$K \geq \frac{S_N(f_k)}{|H(f_k)|^2}.$$

Tada, ako se Δf približava nuli i broj potkanala raste u beskonačnost, moguće je upotrijebiti izraz (3.15) kako bi utvrdili da je spektralna gustoća snage ulaznog signala, uz koju se postiže maksimalna vrijednost informacijskog kapaciteta, nenegativna veličina definirana na sljedeći način:

$$S_x(f) = \begin{cases} K - \frac{S_N(f_k)}{|H(f_k)|^2}, & \text{za } f \in \mathfrak{S}, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases} \quad (3.16)$$

Budući da je srednja snaga slučajnog procesa dana ukupnom površinom ispod krivulje spektralne gustoće snage procesa, srednju snagu ulaznog signala $x(t)$ moguće je izraziti kao

$$S = \int_{f \in \mathfrak{S}} \left(K - \frac{S_N(f_k)}{|H(f_k)|^2} \right) df. \quad (3.17)$$

Uz unaprijed zadanu snagu S i specificirane $S_N(f)$ i $|H(f)|$ potrebno je odrediti konstantu K tako da bude zadovoljena jednadžba (3.17).

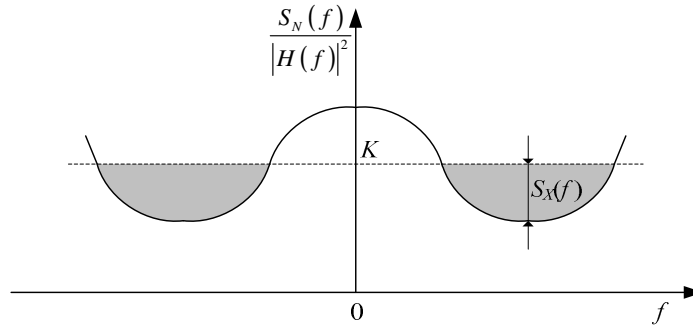
Preostalo je još određivanje maksimalnog informacijskog kapaciteta kanala. Supstitucijom izraza (3.14) u izraz (3.13), i nakon toga uvrštavanjem definicij-skih vrijednosti iz izraza (3.11) i (3.12) konačno dobivamo

$$C \approx \frac{1}{2} \Delta f \sum_{k=1}^N \log \left(K \frac{|H(f_k)|^2}{S_N(f_k)} \right).$$

Kad pustimo da Δf teži u nulu, gornji izraz prelazi u svoj granični oblik:

$$C = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \log \left(K \frac{|H(f)|^2}{S_N(f)} \right) df,$$

pri čemu je konstanta K odabrana kao rješenje jednadžbe (3.17) uz unaprijed zadanu snagu ulaznog signala S . Izrazi (3.16) i (3.17) sugeriraju sljedeći grafički prikaz (Slika 3.38). Temeljem tog prikaza moguće je zaključiti da je snaga ulaznog signala, S , određena ukupnom površinom osjenčanih područja na slici. Takav se prikaz naziva interpretacija punjenjem vode jer je proces po kojem se snaga ulaznog signala raspoređuje u odnosu na funkciju $S_N(f)/|H(f)|^2$ identičan načinu na koji se voda raspoređuje unutar posude.



Slika 3.38: Interpretacija teorema o informacijskom kapacitetu kanala s obojenim šumom punjenjem posude vodom

Razmotrimo idealiziran slučaj pojasno ograničenog signala na kojeg djeluje aditivan bijeli Gaussov šum spektralne gustoće snage $N_0/2$. Prijenosna funkcija idealnog pojasno propusnog kanala definirana je kao

$$H(f) = \begin{cases} 1, & 0 \leq f_0 - B/2 \leq |f| \leq f_0 + B/2, \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

pri čemu je f_0 središnja frekvencija u pojasu širine B . Za ovaj poseban slučaj izrazi (3.16) i (3.17) svode se na sljedeće:

$$S = 2B \left(K - \frac{N_0}{2} \right),$$

$$C = B \log \left(\frac{2K}{N_0} \right).$$

Eliminirajući konstantu K iz gornja dva izraza dobivamo standardni oblik Shannonovog izraza za informacijski kapacitet kanala

$$C = B \log \left(1 + \frac{S}{N_0 B} \right).$$

3.5. Sažetak poglavlja

Cilj ovog poglavlja bio je odrediti kapacitet komunikacijskog kanala u kontinuiranom vremenu. Za određivanja kapaciteta kanala neophodno je poznavanje signala i njihovih srednjih snaga (potpoglavlje 3.1) te poznavanje obilježja prijenosnog sustava (potpoglavlje 3.2), s posebnim naglaskom na njegovu širinu prijenosnog pojasa. Kao što je opisano u potpoglavlju 3.4, prilikom proračuna kapaciteta pojasno ograničenog kanala ulazni je signal bilo potrebno uzorkovati (potpoglavlje 3.3). Konačni rezultat, prikazan izrazom (3.10), predstavlja maksimalnu teoretsku vrijednost kapaciteta pojasno ograničenog kanala. Međutim, kapacitet kanala u stvarnim uvjetima ima vrijednost manju od teoretski ostvarive, a njegov proračun izlazi izvan okvira ove knjige.

3.6. Zadaci

Zadatak-1: Razvijte u kompleksni eksponencijalni Fourierov red funkciju $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) + \sin^2(2\pi f_0 t)$.

Zadatak-2: Odredite koji su od navedenih signala (a)-(c) signali snage, signali energije ili niti jedno od toga.

(a) $x(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$;

(b) $x(t) = u(t)$;

(c) $x(t) = t \cdot u(t)$;

gdje je $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$.

Zadatak-3: Signal šuma, $n(t)$, ima spektralnu gustoću snage $S_n(f)$ definiranu kao

$$S_n(f) = \begin{cases} N_0/2 & \text{za } f_0 - B < |f| < f_0 + B \\ 0 & \text{za ostale vrijednosti } f \end{cases} \quad [\text{W/Hz}]$$

(a) Odredite autokorelacijsku funkciju šuma (Napomena: $f_0 > B$).

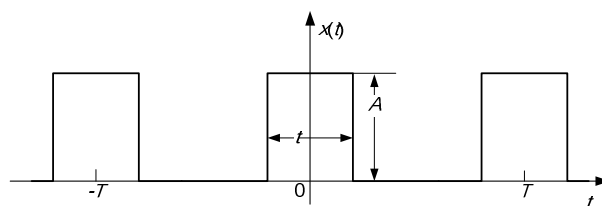
(b) Odredite srednju snagu šuma.

Zadatak-4: Dan je periodičan slijed pravokutnih impulsa $x(t)$ amplitude A [V], frekvencije $f = 2$ kHz i odnosa $\tau/T = 1/4$ (Slika 3.39).

(a) Skicirajte spektar danog signala.

(b) Odredite vrijednosti komponenata spektra (c_0 do c_5).

(c) Izračunajte odnos snaga $\frac{\sum_{i=-3}^3 P_i}{P}$.



Slika 3.39

Zadatak-5: Periodični slijed pravokutnih impulsa $x(t)$ (Slika 1. Zadatak-4) frekvencije 10 kHz i odnosa impuls-pauza 3:1 treba biti propušten kroz idealni niskopropusni filter, ali tako da se barem 90% snage signala prenese na izlaz filtra.

(a) Odredite graničnu frekvenciju filtra f_g .

(Napomena: Kod proračuna raditi s najmanje 3 decimalna mjesta!)

(b) Skicirajte realni dio spektra signala na ulazu u filter za područje od -80 do 80 kHz.

(c) Odredite poziciju prve nul-točke ovojnice spektra signala.

Zadatak-6: Odredite prijenosnu funkciju LTI sustava čiji je impulsni odziv $h(t) = 0,5e^{-10|t|}$.

Zadatak-7: Na ulazu LTI sustava impulsnog odziva $h(t) = e^{-bt}u(t)$ ($b =$ konstanta, $b \in \mathbf{R}^+$), djeluje signal obilježja stacionarnog slučajnog procesa $X(t)$ čija je autokorelacijska funkcija $R_X(\tau) = Ae^{-a|\tau|}$ ($a =$ konstanta, $a \in \mathbf{R}^+$; $A =$ konstanta, $A \in \mathbf{R}^+$). Odredite autokorelacijsku funkciju slučajnog signala na izlazu, $Y(t)$, LTI sustava.

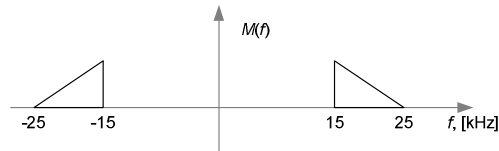
(Napomena: $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$)

Zadatak-8: Neka je dan pojasno ograničeni signal $m(t)$ sa spektrom predloženim na slici (Slika 3.40).

(a) Odredite minimalnu dozvoljenu frekvenciju uzorkovanja i skicirajte spektar uzorkovanog signala. Odredite na koji način moguće provesti rekonstrukciju signala $m(t)$ iz uzorkovanog signala.

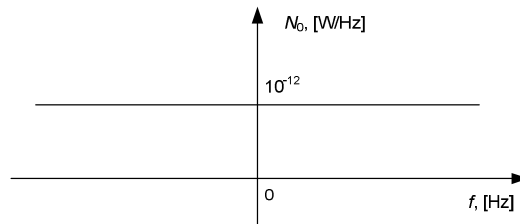
(b) Skicirajte spektar uzorkovanog signala za slučaj uzorkovanja signala $m(t)$ s $f_u = 45$ kHz. Odredite na koji način je moguće provesti rekonstrukciju signala $m(t)$ iz uzorkovanog signala.

(c) Ponovite b) ako je $f_u = 50$ kHz.



Slika 3.40

Zadatak-9: Dan je kontinuirani komunikacijski sustav s frekvencijskim pojasom prijenosa od 4 kHz i aditivnim bijelim Gausovim šumom spektralne gustoće snage kao na slici (Slika 3.41). Odredite kapacitet danog prijenosnog sustava ako se na prijamnoj strani zahtijeva snaga signala od 0,1 mW.



Slika 3.41

Zadatak-10: Signal $x(t) = 3\cos(12000\pi \cdot t) + \cos(5000\pi \cdot t) + \cos(10000\pi \cdot t)$ [V] prisutan je u kanalu s aditivnim pojasno ograničenim bijelim šumom spektralne gustoće snage 0,2 mW/Hz za 0-12 kHz i 0 mW/Hz iznad 12 kHz. Na prijamnoj strani signal i pridodani šum propušteni su kroz idealni pojasnopropusni filter sa širinom pojasa 1 kHz i centralnom frekvencijom pojasa propuštanja na 6 kHz.

(a) Izračunajte srednji odnos signal-šum na ulazu u filter (u dB!).

(b) Izračunajte srednji odnos signal-šum na izlazu iz filtra (u dB!).

Zadatak-11: Govorni se signal na ulazu nekog prijenosnog sustava uzorkuje s frekvencijom uzorkovanja $f_u = 8$ kHz, a potom kodira s 8 bitova po uzorku. Odnos

srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma u kanalu iznosi 30 dB. Odredite potrebni pojas prijenosa ako se šum u kanalu poveća za 3 dB.

Zadatak-12: Na ulaz sklopa za analogno-digitalnu (A/D) pretvorbu signala dovodi se analogni signal širine pojasa prijenosa 4 kHz. Signal se uzorkuje frekvencijom uzorkovanja koja je 1,25 puta veća od minimalne dozvoljene frekvencije uzorkovanja. Nakon toga se svaki uzorak kodira s 8 bitova.

a) Odredite informacijsku brzinu na izlazu sklopa za A/D pretvorbu.

b) Da li je moguće informacijski slijed bitova iz A/D pretvornika bez pogrešaka prenositi kanalom s aditivnim bijelim Gaussovim šumom, u kojem je odnos srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma (S/N) 20 dB i koji ima pojas prijenosa 10 kHz?

c) Odredite odnos S/N (u dB) koji osigurava prijenos bez pogrešaka za b) dio zadatka.

Zadatak-13: Na ulaz kvantizatora dolazi sinusni signal amplitude A_m koji koristi sve razine za rekonstrukciju signala. Minimalni zahtjevani odnos srednje snage signala i srednje snage kvantizacijskog šuma na izlazu kvantizatora je 40 dB. Odredite broj kvantizacijskih nivoa kvantizatora te proračunajte odgovarajući odnos srednje snage signala i srednje snage kvantizacijskog šuma na izlazu kvantizatora.

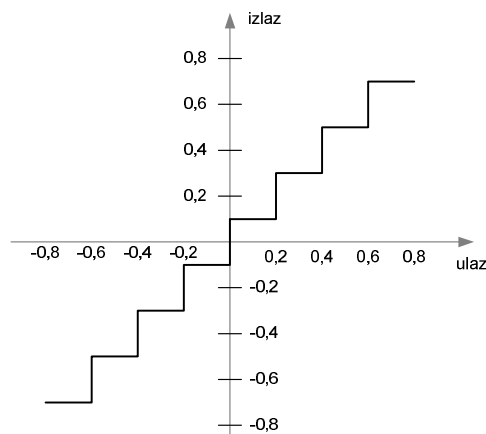
Zadatak-14: Signal $u_m(t) = 10\sin(2\pi 1000t)$ uzorkuje se frekvencijom od 3 kHz. Uzorci se potom kvantiziraju u kvantizatoru ((jednoliko kvantiziranje) s osam nivoa. Proračunajte odnos srednje snage signala i srednje snage kvantizacijskog šuma na izlazu kvantizatora.

Zadatak-15: Na ulaz PCM (engl. *Pulse Code Modulation*) sustava dolazi signal

$$u_m(t) = 0,8 \sin(2\pi 2000t + \frac{\pi}{4}).$$

Uzimanje uzoraka izvodi se u trenucima $t = kT_0$,

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ i $T_0 = 125 \mu s$. Amplitude uzoraka nalaze se u intervalu $|u(t)| \leq 0,8$ i kvantiziraju u kvantizatoru (jednoliko kvantiziranje) s osam kvantizacijskih nivoa (Slika 3.42). Koder izvodi kodiranje uzoraka binarnim kodom. Odredite analitički oblik signala na izlazu iz dekodera (prijamnik!).



Slika 3.42