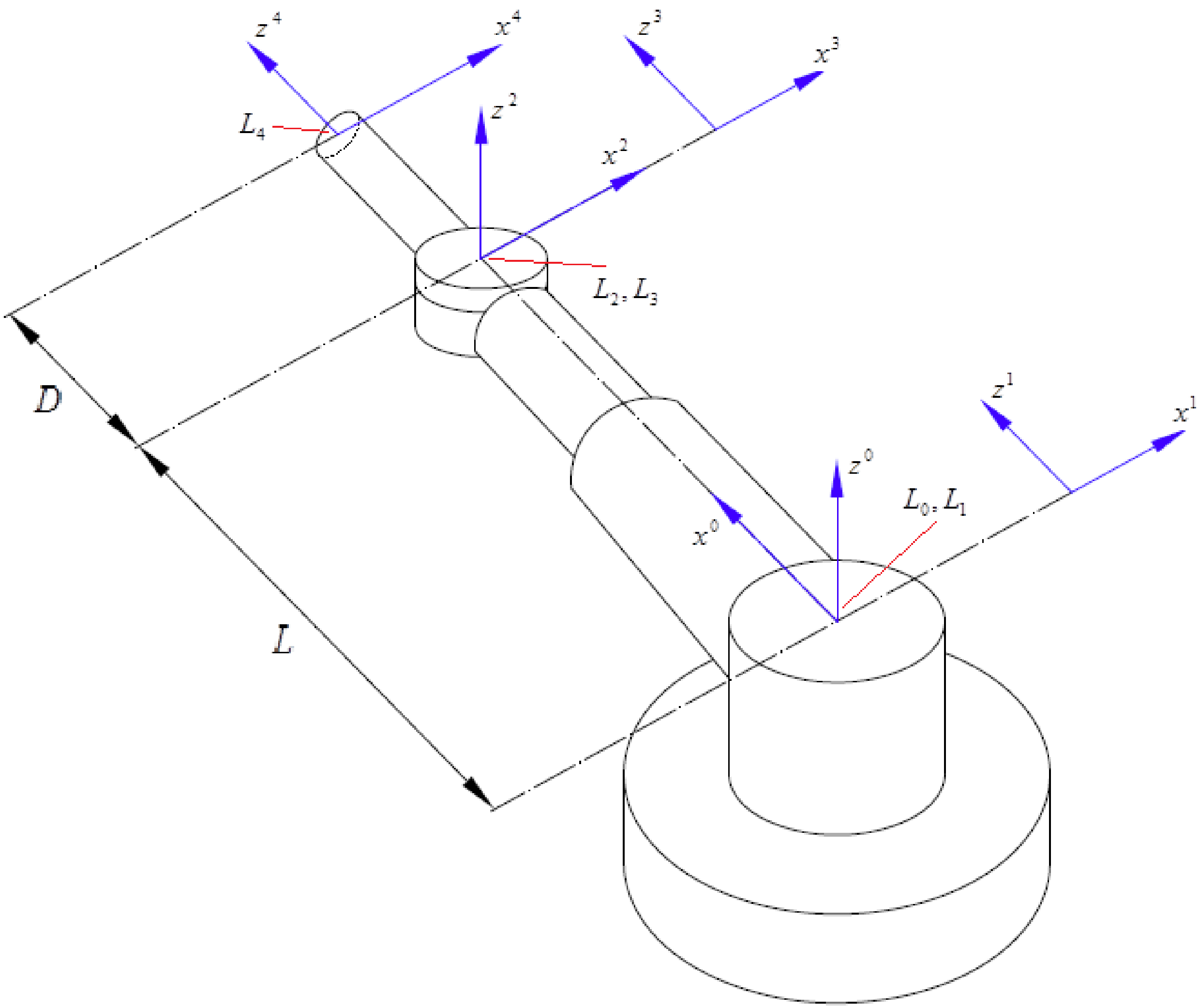
| | | |
|---|---|---|
| Ivan Rezo<br>0036466940<br>Grupa P01 | FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA<br>SVEUČILIŠTA U ZAGREBU<br>Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo<br><br>**Osnove robotike**<br><br>Planiranje trajektorije: Interpolacija polinomom *n*-tog stupnja u prostoru zglobova<br>Zadaća broj 3 | 18.11.2015. |

# Zadatak 1.

Odredite jednadžbe direktne kinematike robota.

Prvo je potrebno postaviti koordinatne osi zglobova robota prema pravilima *Denavit-Hartenbergovog* postupka. Na slici 1.1. zglob broj 3 predstavlja virtualni zglob.




Slika 1.1. Koordinatne osi zglobova robota

Nakon toga je potrebno odrediti parametre *DH* tablice robota.

Tablica 1.1. Parametri *DH* tablice robota

| | **θ** | ***d*** | **α** | **a** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | $q_1(-90°)$ | 0 | -90° | 0 |
| **2** | 0 | $q_2(L)$ | 90° | 0 |
| **3** | $q_3(0°)$ | 0 | -90° | 0 |
| **4** | 0 | D | 0 | 0 |

Kako vrijedi da je matrica homogene transformacije $T_{k-1}^{k}$ zadana kao:

$$T_{k-1}^{k} = \begin{bmatrix} \cos\theta_k & -\cos\alpha_k \sin\theta_k & \sin\alpha_k \sin\theta_k & a_k \cos\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\alpha_k \cos\theta_k & -\sin\alpha_k \cos\theta_k & a_k \sin\theta_k \\ 0 & \sin\alpha_k & \cos\alpha_k & d_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1\text{-}1)$$

Nakon uvrštavanja parametara iz tablice 1.1. u jednadžbu (1-1) dobiju se jednadžbe direktne kinematike robota:

$$T_0^4 = T_0^1 \cdot T_1^2 \cdot T_2^3 \cdot T_3^4 \quad (1\text{-}2)$$

$$T_0^4 = \begin{bmatrix} \sin(q_1+q_3) & 0 & \cos(q_1+q_3) & D\cos(q_1+q_3)+q_2\cos q_1 \\ -\cos(q_1+q_3) & 0 & \sin(q_1+q_3) & D\sin(q_1+q_3)+q_2\sin q_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1\text{-}3)$$

# Zadatak 2.

Odredite jednadžbe inverzne kinematike robota.

Potrebno je iščitati matricu konfiguracije alata iz matrice $T_0^4$ tako što će prva tri retka matrice *w(q)* biti prva tri retka četvrtog stupca matrice $T_0^4$, a druga tri retka matrice *w(q)* će biti prva tri retka trećeg stupca matrice $T_0^4$.

Prema tome:

$$w(q) = \begin{bmatrix} D\cos(q_1+q_3)+q_2\cos q_1 \\ D\sin(q_1+q_3)+q_2\sin q_1 \\ 0 \\ \cos(q_1+q_3) \\ \sin(q_1+q_3) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2\text{-}1)$$

Odnosno:

$$w_1 = D\cos(q_1 + q_3) + q_2 \cos q_1 \tag{2-2}$$
$$w_2 = D\sin(q_1 + q_3) + q_2 \sin q_1 \tag{2-3}$$
$$w_4 = \cos(q_1 + q_3) \tag{2-4}$$
$$w_5 = \sin(q_1 + q_3) \tag{2-5}$$

Jednadžbe inverzne kinematike robota su:

***-q1***

Ako se iz jednadžbe (2-2) izrazi $q_2$ te se uvrsti u jednadžbu (2-3) dobije se:

$$w_2 = D\sin(q_1 + q_3) + \frac{w_1 - D\cos(q_1 + q_3)}{\cos q_1} \cdot \sin q_1 \tag{2-6}$$

Ako se sada u jednadžbu (2-6) uvrste jednadžbe (2-4) i (2-5) dobije se:

$$w_2 = Dw_5 + (w_1 - Dw_4) \cdot \tan q_1 \tag{2-7}$$

Odnosno:

$$q_1 = \mathrm{a}\tan 2\left(\frac{w_2 - Dw_5}{w_1 - Dw_4}\right) \tag{2-8}$$

***-q2***

Ako se iz se jednadžbe (2-2) i (2-3) raspišu, dobije se:

$$w_1 = D \cdot (\cos q_1 \cos q_3 - \sin q_1 \sin q_3) + q_2 \cos q_1 \tag{2-9}$$
$$w_2 = D \cdot (\sin q_1 \cos q_3 + \cos q_1 \sin q_3) + q_2 \sin q_1 \tag{2-10}$$

Nakon toga se jednadžba (2-9) pomnoži sa $\cos q_1$, a jednadžba (2-10) sa $\sin q_1$:

$$w_1 \cos q_1 = D \cdot (\cos^2 q_1 \cos q_3 - \sin q_1 \sin q_3 \cos q_1) + q_2 \cos^2 q_1 \tag{2-11}$$
$$w_2 \sin q_1 = D \cdot (\sin^2 q_1 \cos q_3 + \cos q_1 \sin q_3 \sin q_1) + q_2 \sin^2 q_1 \tag{2-12}$$

Zbroje se jednadžbe (2-11) i (2-12) te se $q_2$ izrazi kao:

$$q_2 = w_1 \cos q_1 + w_2 \sin q_1 - D\cos q_3 \tag{2-13}$$

***-q3***

Iz jednadžbe (2-4) se $q_3$ može izraziti kao:

$$q_3 = \arccos(w_4) - q_1 \tag{2-14}$$

# Zadatak 3.

Primjenom Taylorovog postupka ograničenih odstupanja isplanirajte putanju robota u kojoj ćete osigurati da odstupanje robota u $x_0$ osi bude manje od $L/2$ za svaku točku putanje.

Pokretanjem *MatLAB* skripte *zad3.m* provede se Taylorov postupak ograničenih odstupanja te se dobije da je odstupanje $\varepsilon \le L/2$.

$$Q^1 \longrightarrow Q^M \longrightarrow Q^2$$

| | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ |
|---|---|---|---|
| $Q^1$ | $\pi/3$ | $L$ | $-\pi/3$ |
| $Q^M$ | 0 | $L/2$ | 0 |
| $Q^2$ | $-\pi/3$ | $L$ | $\pi/3$ |

# Zadatak 4.

Za putanju dobivenu u prethodnom zadatku, isplanirajte trajektoriju jedinstvenim polinomom odgovarajućeg stupnja, tako da trajektorija robota počinje i završava gibanje u mirovanju, tj. $\dot{q}(t) = 0$ i $\ddot{q}(t) = 0$.

Opći oblik polinoma je:

$$q(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_1 t + a_0 \tag{4-1}$$

Zadani uvjeti su:

$$\dot{q}(0) = 0 \tag{4-2}$$
$$\dot{q}(T) = 0 \tag{4-3}$$
$$\ddot{q}(0) = 0 \tag{4-4}$$
$$\ddot{q}(T) = 0 \tag{4-5}$$
$$q(0) = Q^1 \tag{4-6}$$
$$q(\mu T) = Q^M \tag{4-7}$$
$$q(T) = Q^2 \tag{4-8}$$

Kako postoji sedam početnih uvjeta, stupanj polinoma će biti šest.

$$q(t) = a_6 t^6 + a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \tag{4-9}$$
$$\dot{q}(t) = 6a_6 t^5 + 5a_5 t^4 + 4a_4 t^3 + 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1 \tag{4-10}$$
$$\ddot{q}(t) = 30a_6 t^4 + 20a_5 t^3 + 12a_4 t^2 + 6a_3 t + 2a_2 \tag{4-11}$$

Nakon uvrštavanja početnih uvjeta dobije se:

$$\dot{q}(0) = a_1 = 0 \tag{4-12}$$

$$\dot{q}(T) = 6a_6T^5 + 5a_5T^4 + 4a_4T^3 + 3a_3T^2 + 2a_2T + a_1 = 0 \tag{4-13}$$

$$\ddot{q}(0) = 2a_2 = 0 \tag{4-14}$$

$$\ddot{q}(T) = 30a_6T^4 + 20a_5T^3 + 12a_4T^2 + 6a_3T + 2a_2 = 0 \tag{4-15}$$

$$q(0) = a_0 = Q^1 \tag{4-16}$$

$$q(\mu T) = a_6(\mu T)^6 + a_5(\mu T)^5 + a_4(\mu T)^4 + a_3(\mu T)^3 + a_2(\mu T)^2 + a_1(\mu T) + a_0 = Q^M \tag{4-17}$$

$$q(T) = a_6T^6 + a_5T^5 + a_4T^4 + a_3T^3 + a_2T^2 + a_1T + a_0 = Q^2 \tag{4-18}$$

Odnosno:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6T^5 & 5T^4 & 4T^3 & 3T^2 & 2T & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 30T^4 & 20T^3 & 12T^2 & 6T & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ (\mu T)^6 & (\mu T)^5 & (\mu T)^4 & (\mu T)^3 & (\mu T)^2 & (\mu T) & 1 \\ T^6 & T^5 & T^4 & T^3 & T^2 & T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_6 \\ a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q^1 \\ Q^M \\ Q^2 \end{bmatrix} \tag{4-19}$$

Koeficijenti polinoma (matrica *a*) se prema tome računaju kao:

$$a = A^{-1} \cdot Q \tag{4-20}$$

Rezultat se dobije pokretanjem *MatLAB* skripte *zad4.m*.

# Zadatak 5.

Isplanirajte trajektoriju s istim uvjetima kao iz prethodnog zadatka koristeći interpolaciju po segmentima trajektorije, pri tom osigurajte kontinuiranost brzine gibanja.

Kako se ovog puta traži interpolacija po segmentima trajektorije, rastavlja se putanja na dva dijela:

$$Q^1 \xrightarrow{q_A} Q^M \xrightarrow{q_B} Q^2$$

I ovog puta vrijede isti uvjeti kao u prethodnom zadataku pa za putanju od $Q^1$ do $Q^M$ vrijedi:

$$q_A(0) = Q^1 \tag{5-1}$$
$$\dot{q}_A(0) = 0 \tag{5-2}$$
$$\ddot{q}_A(0) = 0 \tag{5-3}$$
$$q_A(T_1) = Q^M \tag{5-4}$$

Pošto postoje četiri uvjeta, stupanj polinoma $q_A$ je tri:

$$q_A(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 \tag{5-5}$$
$$\dot{q}_A(t) = 3a_3t^2 + 2a_2t + a_1 \tag{5-6}$$
$$\ddot{q}_A(t) = 6a_3t + 2a_2 \tag{5-7}$$

Nakon uvrštavanja početnih uvjeta dobije se:

$$q_A(0) = a_0 = Q^1 \tag{5-8}$$
$$\dot{q}_A(0) = a_1 = 0 \tag{5-9}$$
$$\ddot{q}_A(0) = 2a_2 = 0 \tag{5-10}$$
$$q_A(T_1) = a_3T_1^3 + a_2T_1^2 + a_1T_1 + a_0 = Q^M \tag{5-11}$$

Odnosno:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ T_1^3 & T_1^2 & T_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^1 \\ 0 \\ 0 \\ Q^M \end{bmatrix} \tag{5-12}$$

Izračun matrice *a* je dan *MatLAB* skriptom *zad5.m*

Za putanju od $Q^M$ do $Q^2$ vrijedi:

$$q_B(0) = Q^M \tag{5-13}$$
$$\dot{q}_B(T_2) = 0 \tag{5-14}$$
$$\ddot{q}_B(T_2) = 0 \tag{5-15}$$
$$q_B(T_2) = Q^2 \tag{5-16}$$

Dodatni uvjet koji vrijedi je da se osigura kontinuiranost brzine gibanja pa prema tome mora vrijediti:

$$\dot{q}_A(T_1) = \dot{q}_B(0) \tag{5-17}$$

Za polinom $q_B$ postoji pet početnih uvjeta pa je četvrtog stupnja:

$$q_B(t) = a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \tag{5-18}$$
$$\dot{q}_B(t) = 4a_4 t^3 + 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1 \tag{5-19}$$
$$\ddot{q}_B(t) = 12a_4 t^2 + 6a_3 t + a_2 \tag{5-20}$$

Nakon uvrštavanja uvjeta dobije se:

$$q_B(0) = a_0 = Q^M \tag{5-21}$$
$$\dot{q}_B(T_2) = 4a_4 T_2^3 + 3a_3 T_2^2 + 2a_2 T_2 + a_1 = 0 \tag{5-22}$$
$$\ddot{q}_B(T_2) = 12a_4 T_2^2 + 6a_3 T_2 + 2a_2 = 0 \tag{5-23}$$
$$q_B(T_2) = a_4 T_2^4 + a_3 T_2^3 + a_2 T_2^2 + a_1 T_2 + a_0 = Q^2 \tag{5-24}$$
$$\dot{q}_B(0) = a_1 = \dot{q}_A(T_1) \tag{5-25}$$

Odnosno:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4T_2^3 & 3T_2^2 & 2T_2 & 1 & 0 \\ 12T_2^2 & 6T_2 & 2 & 0 & 0 \\ T_2^4 & T_2^3 & T_2^2 & T_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^M \\ 0 \\ 0 \\ Q^2 \\ \dot{q}_A(T_1) \end{bmatrix} \tag{5-26}$$

Izračun matrice *a* je također dan *MatLAB* skriptom *zad5.m*