**BRZE KOMUNIKACIJSKE MREŽE**

**ZADACI**

**1. zadatak** Zadan je četveropol na slici. Ulazne stezaljke četveropola označene su slovima a i b, a izlazne stezaljke četveropola označene su slovima c i d. Neka su otpor *R* i kapacitet *C* konstante neovisne o frekvenciji, dok su sve ostale zadane veličine (*V*s, *Z*s i *Z*L) frekvencijski ovisne. Ulazni napon četveropola, *V*1, ulazna struja *I*1, izlazni napon *V*2 i izlazna struja *I*2 su također frekvencijski ovisne veličine. U traženim izrazima u potpitanjima od a) do e) nije potrebno posebno isticati frekvencijsku ovisnost navedenih veličina.



Odredite:

a) matricu četveropola, **F**, koja prikazuje ulazni napon *V*1 i ulaznu struju *I*1 u ovisnosti o izlaznom naponu *V*2 i izlaznoj struji *I*2 (Napomena: s obzirom da ABCD matrica može imati više oblika, napišite onaj oblik u kojem niti jedan parametar nije jednak nuli);

Rješenje: 

b) inverznu matricu matrice **F**;

Rješenje: 

c) prijenosnu funkciju četveropola, *H*(*f*) = *V*2(*f*)/*V*1(*f*);

Rješenje: 

d) ulaznu impedanciju četveropola, *Z*ul, promatrano sa stezaljki a i b u smjeru prema *Z*L;

Rješenje: 

e) prijenosnu funkciju i ulaznu impedanciju za slučaj kad su stezaljke c i d otvorene (*Z*L ima beskonačan iznos).

Rješenje: , 

**Napomena**: u ovom zadatku nije nužno navoditi mjerne jedinice.

**2. zadatak** Razmatrajte liniju zadanu slikom.



Neka je na promatranoj frekvenciji *f*0 = 2 MHz postignuto prilagođenje impedancija *Z*s = *Z*0 = *Z*L. Napon na početku linije (stezaljke a i b) određen je izrazom *V*1(*t*) = 5cos(2π*ft* + π/4) [V]. Pretpostavimo da fazna brzina na promatranoj frekvenciji iznosi 2⋅108 m/s. Nadalje, linija ne prigušuje signal (linija bez gubitaka). Odredite:

a) Valnu duljinu na frekvenciji *f*0;

Rješenje: 100 m

b) Promjenu faze po jedinici duljine linije na frekvenciji *f*0;

Rješenje: 0,0628 rad/m

c) Fazno kašnjenje na frekvenciji *f*0;

Rješenje: 5⋅10-9 s/m

d) Ako je duljina linije, *d*, jednaka polovici vrijednosti valne duljine na frekvenciji *f*0, odredite izraz za napon *V*2(*t*) na kraju linije (stezaljke c i d);

Rješenje: 5⋅cos(2π*f*0*t* – 3π/4) [V]

e) Napon izvora, *V*s(*t*), na frekvenciji *f*0.

Rješenje: 10⋅cos(2π*f*0*t* + π/4) [V]

**3. zadatak** Razmatrajte liniju prikazanu na slici. Pretpostavite da je impedancija *Z*s kompleksna i na frekvenciji *f*0 određena izrazom *Z*s(*f*0) = *A*e*jϕ* [Ω], a impedancija *Z*L je kompleksna i određena izrazom *Z*L(*f*0) = *jX* [Ω]. Također pretpostavite da je *V*s(*f*0) = |*V*s(*f*0)|, tj. napon izvora je realna veličina.



Na frekvenciji *f*0:

a) odredite izraz za ulaznu impedanciju linije, *Z*ul, (promatranu na stezaljkama a-b) pri kojoj će biti maksimalan prijenos snage s izvora na liniju, i to u ovisnosti o parametrima *A* i *ϕ*;

Rješenje: 

b) Odredite izraz za ulaznu impedanciju linije, *Z*ul, (promatranu na stezaljkama a-b) pri kojoj će biti izbjegnuta refleksija na stezaljkama c-d, i to u ovisnosti o parametru *X*;

Rješenje: 

c) Odredite izraz za valnu impedanciju linije ako je na stezaljkama c-d koeficijent refleksije jednak 0.5, i to u ovisnosti o parametru *X*;

Rješenje: 

d) Vezano uz pitanje a), odredite izraz za snagu *P*(*f*0) koja se pri tome prenosi s izvora na liniju (na stezaljkama a-b), i to u ovisnosti o amplitudi napona generatora, *V*s(*f*0), te o *A* i *ϕ*;

Rješenje: 

e) Odredite izraz za snagu *P*(*f*0) koja se prenosi s izvora na liniju (na stezaljkama a-b), ako je na frekvenciji *f*0 postignuta prilagodba impedancija, tj. *Z*ul = *Z*s. Snagu prikažite u ovisnosti o amplitudi napona generatora, *V*s(*f*0), te o *A* i *ϕ*.

Rješenje: 

**4. zadatak** Zadana je linija koje se u kabelu nalazi zajedno s još 9 identičnih linija.



Na oba kraja svake linije nalaze se predajnik (Tx) i prijemnik (Rx) koji su na liniju spojeni rašljastim sklopom H. Pretpostavka je da je na oba kraja postignuto prilagođenje na liniju. Promatrajte sljedeći scenarij. Predajnik Tx1 spojen na ometajuću liniju šalje signal na drugu stranu linije prijemniku Rx2. Predajnik Tx2 spojen na ometajuću liniju je neaktivan.

* srednja snaga na početku ometajuće linije u točki a, *P*1 = 10 dBm,
* srednja snaga na kraju ometajuće linije u točki b, *P*2 = –40 dBm,
* prigušenje preslušavanja na bližem kraju *A*b = 70 dB,
* prigušenje preslušavanja na daljem kraju *A*d = 80 dB.

Odredite sljedeće veličine:

a) Razinu srednje snage *P*3 (dBm) na susjednoj ometanoj liniji u točki a, ako je samo jedna linija (ometajuća) u kabelu aktivna;

Rješenje: -60 dBm

b) Razinu srednje snage *P*4 (dBm) na susjednoj ometanoj liniji u točki b, ako je samo jedna linija (ometajuća) u kabelu aktivna;

Rješenje: -70 dBm

c) Umetnuto prigušenje ometajuće linije,

Rješenje: 50 dB

d) ELFEXT na ometanoj liniji,

Rješenje: 30 dB

e) Razinu ukupne preslušane snage na bližem kraju (dBm) s devet aktivnih ometajućih linija identičnih parametara na jednu ometanu liniju.

Rješenje: -50,46 dBm

**5. zadatak** Na donjoj slici 1 prikazan je sklop koji se sastoji od izvora napajanja koji generira izmjenični napon *u*(*t*) = 10[V] i ima unutarnji otpor *R* = 100 Ω, a na njegove stezaljke priključen je otpor *Z* = 100 Ω. Izračunajte koliko je umetnuto prigušenje (*insertion loss*) mjereno na otporu *Z* za slučaj prikazan na donjoj slici 2 (otpornik *W* = 100 Ω).



Rješenje: 3,52 dB

**6. zadatak** Zadana je linija bez gubitaka sa sljedećim primarnim parametrima na frekvenciji 100 Hz: *C* = 49 nF/km, *L* = 700 µH/km. Općeniti izrazi za proračun konstante prigušenja, fazne konstante i valne impedancije linije u ovisnosti o frekvenciji signala i primarnim parametrima linije *R*, *L*, *G* i *C*, zadanim u odgovarajućim jedinicama po kilometru duljine linije su sljedeći:



Odredite:

a) konstantu prostiranja na zadanoj frekvenciji;

Rješenje: *γ* = *j*⋅3,68⋅10-3 [Np/km]

b) valnu impedanciju linije;

Rješenje: 119,5 Ω

c) valnu duljinu na zadanoj frekvenciji;

Rješenje: 1707,5 km

d) faznu brzinu vala na liniji;

Rješenje: 170747 km/s

e) grupnu brzinu vala na liniji.

Rješenje: 170747 km/s

**7. zadatak** Razmatrajte liniju zadanu slikom.



Mjerenjima na frekvenciji *f*0 na stezaljkama a-b utvrđene su dvije vrijednosti ulazne impedancije linije: ulazna impedancija linije s otvorenim stezaljkama c-d određena je kao *Z*uo(*f*0) = *R* + j*X* [Ω] i ulazna impedancija linije sa stezaljkama c-d u kratkom spoju određena je kao *Z*uk(*f*0) = *R* – j*X* [Ω], pri čemu su *R* i *X* izmjereni parametri.

Odredite sljedeće izraze na frekvenciji *f*0:

a) izraz za valnu impedanciju linije *Z*0 u ovisnosti o parametrima *R* i *X*;

Rješenje: 

b) koeficijent refleksije na stezaljkama a-b u ovisnosti o parametrima *R* i *X* te pod pretpostavkom da je *Z*s = 0 Ω;

Rješenje: -1

c) izraz za ulaznu impedanciju linije na stezaljkama a-b u ovisnosti o parametrima *R* i *X*, ako je linija zaključena s impedancijom *Z*L = *R + jX*;

Rješenje: *Z*u = *R* [Ω]

d) izraz za ulaznu impedanciju linije na stezaljkama a-b u ovisnosti o parametrima *R* i *X*, ako je linija zaključena s impedancijom *Z*L = *R – jX*;

Rješenje: 

e) ako je linija na stezaljkama c-d zaključena nepoznatom impedancijom *Z*L i mjerenjem je na frekvenciji *f*0 na stezaljkama a-b utvrđena njena ulazna impedancija *Z*u, odredite izraz za proračun impedancije *Z*L u ovisnosti o *Z*u, *Z*uk i *Z*uo;

Rješenje: 

**8. zadatak** Razmatrajte liniju prikazanu na slici. Pretpostavite da je impedancija *Z*s kompleksna i na frekvenciji *f*0 određena izrazom *Z*s(*f*0) = *A* – j*B* [Ω], a impedancija *Z*L je realna i određena izrazom *Z*L = *R* [Ω]. Također pretpostavite da je *V*s(*f*0) = |*V*s(*f*0)|, tj. napon je realna veličina.



Na frekvenciji *f*0:

a) Odredite izraz za ulaznu impedanciju linije, *Z*ul, (promatranu sa stezaljkama a-b) pri kojoj će biti maksimalan prijenos snage s izvora na liniju, i to u ovisnosti o parametrima *A*, *B* i *R*.

Rješenje: 

b) Odredite izraz za ulaznu impedanciju linije, *Z*ul, (promatranu sa stezaljkama a-b) pri kojoj će biti izbjegnuta refleksija na stezaljkama c-d, i to u ovisnosti o parametrima *A*, *B* i *R*.

Rješenje: *Z*ul = *Z*0 = *R* [Ω]

c) Vezano uz pitanje a), odredite izraz za snagu *P*(*f*0) koja se pri tome prenosi s izvora na liniju (na stezaljkama a-b), i to u ovisnosti o amplitudi napona generatora, *V*s(*f*0), te o *A* i *B*.

Rješenje: 

d) Odredite izraz za snagu *P*(*f*0) koja se prenosi s izvora na liniju (na stezaljkama a-b), ako je na frekvenciji *f*0 postignuta prilagodba impedancija, tj. *Z*ul = *Z*s. Snagu prikažite u ovisnosti o amplitudi napona generatora, *V*s(*f*0), te o *A* i *B*.

Rješenje: 

e) Pod pretpostavkom da su odabrane druge impedancije *Z*s i *Z*L s kojima je na frekvenciji *f*0 postignuta prilagodba impedancija *Z*s = *Z*0 = *Z*L i ako je linija dugačka 5 km, odredite umetnuto prigušenje linije. Konstanta prigušenja na frekvenciji *f*0 iznosi 10 dB/km.

Rješenje: 50 dB

**9. zadatak** Razmatrajte jako dugačku liniju prikazanu na slici. Pretpostavite da je impedancija *Z*s kompleksna i određena izrazom *Z*s = *X* – j*Y* [Ω], *X*, *Y* ∈ **R**.



a) Odredite izraz za ulaznu impedanciju linije, *Z*ul, (promatranu sa stezaljki izvora, na mjestu spoja predajnika i linije) pri kojoj će biti maksimalan prijenos snage s predajnika na liniju, i to u ovisnosti o *X* i *Y*, te odredite izraz za impedanciju na kraju linije, *Z*L, uz koju će biti ostvaren maksimalan prijenos snage s linije na prijemnik ulazne impedancije *Z*L.

Rješenje: *Z*0 = *X* + *jY* [Ω], *Z*L = *X* – *jY* [Ω]

b) Vezano uz pitanje a), odredite izraz za snagu *P*(*f*) koja se pri tome prenosi s predajnika na liniju, i to u ovisnosti o amplitudi napona generatora, *V*s(*f*), te o *X* i *Y*, te odredite koeficijent refleksije na mjestu spoja predajnika i linije.

Rješenje: 

c) Odredite izraz za ulaznu impedanciju linije, *Z*ul, pri kojoj će biti postignuto prilagođenje između predajnika i linije (nema refleksije signala na ulazu linije), i to u ovisnosti o *X* i *Y*, te odredite izraz za impedanciju na kraju linije, *Z*L, pri kojoj će biti postignuto prilagođenje prijemnika na liniju (nema refleksije signala na ulazu linije), također u ovisnosti o *X* i *Y*.

Rješenje: *Z*ul = *X* – *jY* [Ω], *Z*L = *X* – *jY* [Ω]

d) Odredite izraz za snagu *P*(*f*) koja se prenosi s predajnika na liniju, ako je na ulazu linije postignuto prilagođenje impedancija, tj. *Z*ul = *Z*s. Snagu prikažite u ovisnosti o amplitudi napona generatora, *V*s(*f*), te o *X* i *Y*. Također odredite koeficijent refleksije na mjestu spoja predajnika i linije.

Rješenje: 

e) Odredite koeficijent refleksije na kraju linije (na opterećenju *Z*L), i to za oba slučaja, kad je postignut maksimalni prijenos snage s predajnika na liniju i s linije u prijemnik, te kad je postignuto prilagođenje impedancija *Z*s = Z0 = *Z*L.

Rješenje: 

**10. zadatak** Razmatrajte četveropol prikazan na slici. Impedancije *R* i *X* su otporne, izražene u omima.



a) Odredite jednadžbe koje prikazuju ulazni napon i struju (*U*1 i *I*1) u ovisnosti o izlaznom naponu i struji (*U*2 i *I*2).

Rješenje: *I*1 = *U*2/*X* + *I*2, *U*1 = *U*2 + *I*2∙(*X* + *R*)

b) Prikažite jednadžbe iz pitanja a) u matričnom obliku.

Rješenje: 

c) Odredite matrični prikaz četveropola koji prikazuje izlazni napon i struju u ovisnosti o ulaznom naponu i struji.

Rješenje: *U*2 = *U*1 – *I*1∙*X*, *I*2 = -*U*1/*X* + 2*I*1

d) Odredite prijenosnu funkciju četveropola *H* = *U*2/*U*1 u ovisnosti o impedancijama *X* i *R*.

Rješenje: 

e) Odredite ulaznu impedanciju četveropola, *Z*ul = *U*1/*I*2, u ovisnosti o impedancijama *X* i *R*.

Rješenje: 

**11. zadatak** Razmatrajte liniju određenu primarnim parametrima *R*, *L*, *G* i *C*. Pod pretpostavkom da se radi o liniji bez gubitaka, odredite sljedeće veličine u ovisnosti o frekvenciji *f* i primarnim parametrima:

a) konstantu prostiranja linije bez gubitaka,

Rješenje: ****

b) konstantu prigušenja linije bez gubitaka,

Rješenje: 0 dB/km

c) faznu konstantu linije bez gubitaka,

Rješenje: ****[rad/km]

d) karakterističnu valnu impedanciju linije bez gubitaka,

Rješenje: ****[Ω]

e) faznu brzinu signala na liniji bez gubitaka.

Rješenje: ****[km/s]

**12. zadatak** Razmatrajte liniju prikazanu na donjoj slici.



Odredite sljedeće veličine.

a) Koeficijent refleksije na kraju linije (na opterećenju *Z*L), ako je linija na tom kraju kratko spojena; Rješenje: -1

b) Vezano uz pitanje a), ako je upadni val napona na tom kraju linije dan izrazom *u*u(*t*) = *A*∙sin(*ωt*), odredite izraz za reflektirani napon, *u*r(*t*), na tom istom kraju linije;

Rješenje: *A∙*sin(*ωt* + π)

c) Koeficijent refleksije na kraju linije (na opterećenju *Z*L), ako linija na tom kraju ima otvorene stezaljke;

Rješenje: 1

d) Vezano uz pitanje c), ako je upadni val napona na tom kraju linije dan izrazom *u*u(*t*) = *A*sin(*ωt*), odredite izraz za reflektirani napon, *u*r(*t*), na tom istom kraju linije;

Rješenje: *A∙*sin(*ωt*)

e) Odredite gubitke uslijed refleksije (*return loss*) na kraju linije (na opterećenju *Z*L), ako je linija kratko spojena, odnosno ako ima otvorene stezaljke.

Rješenje: 0 dB

**13. zadatak** Razmatrajte liniju prikazanu na slici. Pretpostavite da je impedancija *Z*s kompleksna i određena izrazom *Z*s = *X* + j*Y* [Ω].



a) Odredite izraz za ulaznu impedanciju linije, *Z*ul, (promatranu sa stezaljki izvora) pri kojoj će biti maksimalan prijenos snage s izvora na liniju, i to u ovisnosti o *X* i *Y*;

Rješenje: ***X* – *jY***

b) Vezano uz pitanje a), odredite izraz za impedanciju na kraju linije, *Z*L, uz koju će biti ostvaren maksimalan prijenos snage s linije na opterećenje *Z*L;

Rješenje: ***X* + *jY***

c) Vezano uz pitanje a), odredite izraz za snagu *P*(*f*) koja se pri tome prenosi s izvora na liniju, i to u ovisnosti o amplitudi napona generatora, *V*s(*f*), te o *X* i *Y*;

Rješenje: 

d) Odredite izraz za snagu *P*(*f*) koja se prenosi s izvora na liniju, ako je na ulazu linije postignuto prilagođenje impedancija, tj. *Z*ul = *Z*s. Snagu prikažite u ovisnosti o amplitudi napona generatora, *V*s(*f*), te o *X* i *Y*;

Rješenje: 

e) Pretpostavite da je linija određena primarnim parametrima *R*, *L*, *G* i *C*. Nadalje, pretpostavite da promatrana linija nema gubitke. Prikažite *X* i *Y*, parametre impedancije *Z*s, pri kojima će biti maksimalan prijenos snage na liniju, u ovisnosti o primarnim parametrima linije.

Rješenje: , Y = 0

**14. zadatak** Pretpostavite da prijenosna linija, prikazana slikom u prethodnom zadatku, ima širinu prijenosnog pojasa *B* herca. Linija je idealno zaključena na oba kraja (*Z*s = *Z*0 = *Z*L). Srednja snaga signala na ulazu u liniju iznosi *P* vata. Prigušenje linije iznosi *α* dB/km, a linija je dugačka *l* kilometara.

a) Odredite izraz za snagu na kraju linije, tj. na ulazu u prijemnik;

Rješenje: *P*[dBm] – *α∙l*

b) Ako je šum preslušavanja na kraju linije modeliran bijelim šumom spektralne gustoće snage *S*n(*f*) = *N*0/2 [W/Hz] za -∞ < f < ∞, odredite srednju snagu šuma na ulazu u prijemnik;

Rješenje: *N*0∙*B* [W]

c) Koristeći proračunate srednje snage signala i šuma, odredite izraz za kapacitet takve linije, izražen jedinicom bit/s;

Rješenje: [W]

d) Uzevši u obzir ranije zadane parametre *B*, *P*, Sn(f), i *α* i *l*, odredite izraz za prigušenje preslušavanja na bližem kraju između dvije identične linije prikazane slikom iz prethodnog zadatka.

Rješenje: 10∙log2[*P*/(*N*0∙*B*)] [dB]

e) Uzevši u obzir ranije zadane parametre *B*, *P*, Sn(f), i *α* i *l*, odredite izraz za prigušenje preslušavanja na daljem kraju između dvije identične linije prikazane slikom iz prethodnog zadatka.

Rješenje: 10∙log2[*P*/(*N*0∙*B*)] – *α∙l* [dB]

**15. zadatak** Zadana je linija bez gubitaka sa sljedećim primarnim parametrima na frekvenciji 100 Hz: *C* = 49 nF/km, *L* = 700 µH/km. Odredite konstantu prostiranja na toj frekvenciji.

Rješenje: *j*⋅0,0037 rad/km

**16. zadatak** Fazna brzina neke linije na frekvenciji 1000 kHz iznosi 200.000 km/s. Odredite koliko iznosi najmanja udaljenost između dvije točke na liniji koje su u protufazi (faza sinusnog signala u te dvije točke razlikuje se za π rad).

Rješenje: 100 m

**17. zadatak** Linija bez gubitaka ima sljedeće primarne parametre na nekoj frekvenciji: *L* = 675 µH/km i *C* = 49 nF/km. Odredite impedanciju s kojom mora biti zaključena ta linija pa da faktor refleksije na zaključenju bude jednak nuli?

Rješenje: 117,37 Ω

**18. zadatak** Na ulaz linije primijenimo signal *u*(*t*) = sin(2π⋅106*t* + π/8) [V]. Ako brzina prostiranja faze signala linijom na toj frekvenciji iznosi 2⋅108 m/s, odredite koliko iznosi najmanja udaljenost između točaka na liniji u kojima se faze signala međusobno razlikuju za π/4.

Rješenje: 25 m

**19. zadatak** Pretpostavite da je na ulaz jako dugačke linije karakteristične valne impedancije *Z*0 = *R* + j*X*, pri čemu na frekvenciji *f*0 vrijedi da je *R* = *X*, spojen izvor s unutarnjom impedancijom *Z*s. Nadalje, pretpostavite da je na frekvenciji *f*0 postignut maksimalan prijenos snage s izvora na liniju. Koliko iznosi faktor refleksije na izvoru (na ulazu linije) na frekvenciji *f*0?

Rješenje: – *j*

**20. zadatak** Na donjoj slici 1 prikazan je sklop koji se sastoji od izvora napajanja koji generira izmjenični napon *u*(*t*) = 10[V] i ima unutarnji otpor *R* = 100 Ω, a na njegove stezaljke priključen je otpor *Z* = 100 Ω. Izračunajte koliko je umetnuto prigušenje (*insertion loss*) mjereno na otporu *Z* za slučaj prikazan na donjoj slici 2 (otpornik *W* = 100 Ω).



Rješenje: 3,56 dB

**21. zadatak** Na ulazne stezaljke četveropola spojen je naponski izvor koji generira napon *U* unutrašnjeg otpora *R*, a na izlazne stezaljke četveropola priključen je otpornik *Z* (Slika 1). Ako između izvora i zaključenja umetnemo četveropol koji se sastoji od otpora *W* (Slika 2), napišite izraz za matricu umetnutog kratkospojnog četveropola koja opisuje ovisnost napona i struje na stezaljkama izvora o naponu i struji na otporu *Z*.



Rješenje: 

**22. zadatak** Sinusni napon frekvencije *f*0 na ulazu linije koja je idealno zaključena na oba kraja (*Z*s = *Z*0 = *Z*L) ima amplitudu 5 V. Koliko iznosi amplituda tog napona na opterećenju *Z*L, ako umetnuto prigušenje linije na frekvenciji *f*0 iznosi 20 dB?

Rješenje: 0,5 V

**23. zadatak** Ako preslušavanje na daljem kraju (FEXT) na nekoj liniji iznosi -70 dB na frekvenciji *f*0, koliko onda na toj istoj frekvenciji iznosi preslušavanje ELFEXT, ako umetnuto prigušenje linije na frekvenciji *f*0 iznosi 30 dB?

Rješenje: -40 dB

**24. zadatak** Ako se na nekoj liniji promjena faze signala po jedinici duljine mijenja u ovisnosti o frekvenciji prema zakonu *β* = *Af*2 + *Bf* + *C*, napišite izraz za grupno kašnjenje signala u ovisnosti o frekvenciji *f*.

Rješenje: 