Άσκηση 1

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα η παρέα που θα πάει στην συναυλία να έχει έναν τουλάχιστον φοιτητή από κάθε έτος θα χρησιμοποιήσουμε συνδυασμούς:

Δειγματικός Χώρος $|\Omega|$: $\binom{40}{6}$, δηλαδή από τους 40 επιλέγουμε 6 τυχαία άτομα.

Για να υπολογίσουμε το E: ζητούμε ενδεχόμενο (έναν πρώτο έτος, έναν από δεύτερο, έναν από το τρίτο, έναν από το τέταρτο και δύο επιπλέον τυχαίους, χωρίς να μας ενδιαφέρει το έτος που βρίσκονται.

θα αφαιρέσουμε όλα τα υπόλοιπα ενδεχόμενα από το ενδεχόμενο να επιλέξουμε τυχαία 6 από τους 40, δηλαδή $\binom{40}{6}$. Έστω $A \to$ 1ο έτος, $B \to$ 2ο έτος, $C \to$ 3ο έτος, $D \to$ 4ο έτος.

Πιο συγκεκριμένα που θα αφαιρέσουμε είναι τα εξής:

$$A^c \to \binom{40-8}{6},\ B^c \to \binom{40-12}{6},\ C^c \to \binom{40-10}{6},\ D^c \to \binom{40-10}{6}$$

$$A^c \cup B^c \to \binom{40-8-12}{6},\ A^c \cup C^c \to \binom{40-8-10}{6},\ A^c \cup D^c \to \binom{40-8-10}{6}$$

$$B^c \cup C^c \to \binom{40-12-10}{6},\ B^c \cup D^c \to \binom{40-12-10}{6},\ C^c \cup D^c \to \binom{40-10-10}{6}$$

$$A^c \cup B^c \cup C^c \to \binom{40-8-12-10}{6},\ A^c \cup B^c \cup D^c \to \binom{40-8-12-10}{6}$$

$$A^c \cup C^c \cup D^c \to \binom{40-8-10-10}{6},\ B^c \cup C^c \cup D^c \to \binom{40-12-10-10}{6}$$

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\binom{40}{6} - \left(\left(\binom{32}{6}+\binom{28}{6}+\binom{30}{6}+\binom{30}{6}\right)+\left(\binom{20}{6}+\binom{18}{6}+\binom{20}{6}+\binom{22}{6}+\binom{22}{6}+\binom{18}{6}\right)+\left(\binom{8}{6}+\binom{12}{6}+\binom{10}{6}+\binom{10}{6}\right)\right)}{\binom{40}{6}}$$

$$= \frac{3.838.380 - ((906.192+376.740+593.775+593.775)+(38.760+18.564+38.760+74.613+74.613+18.564)+(28+924+210+210))}{3.838.380}$$

$$= \frac{3.838.380 - 2.470.482 - 263.874 - 1372}{3.838.380}$$

$$= \frac{1.102.652}{3.838.380} = 0{,}28727 \text{ ή } 28.727\%$$

Άσκηση 2 (A)

Θα χρησιμοποιήσουμε συνδιασμούς με επανάληψη

z→ (Βήμα Πάνω)
x→ (Βήμα Δεξιά)
y→ (Βήμα Εμπρός)

Πλήθος ριζών Εξίσωσης: $x+y+z=k$

Θα είναι:

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{3+k-1}{3-1} = \binom{2+k}{2}$$

ή

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{3+k-1}{k} = \binom{2+k}{k}$$

(B) Για να φτάσουμε στο σημείο $(x,y,z)=(6,2,4)$ πρέπει συνολικά να έχουμε κάνει 12 βήματα, με τα 6 από αυτά να είναι Δεξιά, τα 2 να είναι Εμπρος και τα 4 να είναι Πάνω. Επομένως, ο αριθμός των μονοπατιών μπορεί να εκφραστεί ως οι συνολικές διαφορετικές λέξεις που μπορούν να γραφτούν με 6 Δεξιά (Δ), 2 Εμπρος (E) και 4 Πάνω (Π).

$$\frac{12!}{6!\cdot 2!\cdot 4!} = 13.860$$ διαφορετικά μονοπάτια μας οδηγούν στο σημείο $(6,2,4)$

(D) Θα αντιμετωπίσουμε το ερώτημα αυτό με επιτυχίες και αποτυχίες. Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα να βρίσκεται σε ύψος 5 μετά από 10 βήματα.

Έτσι $p=0.6$ και $q=(1-p)=0.4$

$$\binom{10}{5}(0.6)^5\binom{5}{5}(0.4)^5 = 0.20065 \text{ ή } 20.065\%$$

(Ε) Απο τα 12 βήματα θα επιλέξουμε 6 να είναι Δεξιά πολλαπλασιάζοντας με την πιθανότητα το <u>κάθε</u> βήμα που επιλέξαμε να είναι Δεξια. Πλέον δεν έχουμε 12 βήματα αλλα 6 εφόσον έχουμε ήδη επιλέξει τα 6 να είναι Δεξιά. Άρα απο τα 6 επιλέξουμε 2 να είναι Εμπρός πολλαπλασιάζοντας με την πιθανότητα τους. Τέλος απο τα 4 που μένουν επιλέξουμε τα 4 να είναι Πανω πολλαπλασιάζοντας με την πιθανότητας τους να είναι Πανω.

$$\binom{12}{6}(0.6)^6\binom{6}{2}(0.1)^2\binom{4}{4}(0.3)^4 = 0.05237 \text{ ή } 5.237\%$$

Άσκηση 3 (A)

Δειγματικός Χώρος $|\Omega|$. Επιλέγουμε τυχαία από τα 52 φύλλα πέντε, χωρίς να μας ενδιαφέρει το περιεχόμενο τους.

Έτσι, $|\Omega| = \binom{52}{5}$

Για να υπολογίσουμε $|E|$:

Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν $\binom{13}{2}$ είδη ζευγών στην τράπουλα. Εφόσων θέλουμε δύο δυάδες ίδιας αξίας και ένα φύλλο σε άλλη αξία από αυτή των δυάδων.

Επιλέγουμε $\binom{4}{2}$ δύο φύλλα ίδιας αξίας και ξανα επιλέγουμε $\binom{4}{2}$ δυο φύλλα ίδιας Αξίας. Η δεύτερη δυάδα είναι διαφορετική από την πρώτη (ως προς τις αξίες). Τέλος επιλέγουμε ένα τυχαίο φύλλο, όμως θέλουμε να μην είναι ίδιας αξίας με τις 2 δυάδες, άρα $\binom{52-4-4}{1} = \binom{44}{1}$.

Συνολικά

Έστω E το ζητούμενο ενδεχόμενο.

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{44}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{123.552}{2.598.960} = 0.04753\ldots$$

ή 4,753%

(B)

Για να υπολογίσουμε την ζητούμενη πιθανότητα θα προσεγγίσουμε το πρόβλημα με διαφορετικό τρόπο.

Διατάξεις: Για το πρώτο χαρτί έχουμε 52 επιλογές για το δεύτερο με ίδια αξία και ίδιο χρώμα 1 επιλογή, αφαιρούμε τα δύο πρώτα χαρτιά και τώρα έχουμε 50 επιλογές για το τρίτο. Παρόμοια με το δεύτερο το τέταρτο έχουμε 1 επιλογή (ίδια αξία και ίδιο χρώμα με το τρίτο χαρτί). Τέλος για το πέμπτο αφαιρούμε τα 4 φύλλα που έχουμε επιλέξει, άρα μένουν 48 επιλογές. Έστω E: ζητούμενο ενδεχόμενο.

5 Δυνατές διατάξεις των 5 φύλλων

Άρα $|E|: 52 \cdot 1 \cdot 50 \cdot 1 \cdot 48 \cdot 5!$

Δειγματικός Χώρος $|\Omega|$: 52 επιλογές για το πρώτο φύλλο
51 επιλογές για το δεύτερο φύλλο
50 επιλογές για το τρίτο φύλλο
49 επιλογές για το τέταρτο φύλλο
48 επιλογές για το πέμπτο φύλλο

$|\Omega|: 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48$

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{52 \cdot 1 \cdot 50 \cdot 1 \cdot 48 \cdot 5!}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{14.976.000}{311.875.200} = 0.04801$$

ή

4.801%

Συνδιασμοί: Για το πρώτο φύλλο $\binom{52}{1}$, για το δεύτερο $\binom{1}{1}$, αφαιρούμε το πρώτο και δεύτερο φύλλο, άρα $\binom{50}{1}$ για το τρίτο φύλλο και $\binom{1}{1}$ για το τέταρτο. Αφαιρούμε τα 4 φύλλα που επιλέξαμε. Άρα για το πέμπτο $\binom{48}{1}$

$|E|: \binom{52}{1}\binom{1}{1}\binom{50}{1}\binom{1}{1} \cdot \binom{48}{1}$

Δειγματικός Χώρος: $|\Omega| = \binom{52}{5}$, δηλαδή απο τα 52 φύλλα επιλέγουμε 5 φύλλα τυχαία

$$P(E) = \frac{\binom{52}{1}\binom{1}{1}\binom{50}{1}\binom{1}{1}\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}} = 0.04801 \text{ ή } 4.801\%$$

Άσκηση 4

<u>Συνδυασμοί</u>: Απο το σύνολο των 10 ανδρων και 10 γυναικων, συνολικά δηλαδή των 20 ατόμων επιλέγω 3.

$$|\underline{\Omega}| : \binom{20}{3}$$

<u>Διατάξεις</u>: Έχουμε 20 διαθέσιμες επιλογές για το πρώτο άτομο, 19 διαθέσιμες επιλογές για το δεύτερο άτομο και 18 διαθέσιμες επιλογές για το τρίτο.

$$|\underline{\Omega}| = 20 \cdot 19 \cdot 18 \quad \text{ή} \quad |\underline{\Omega}| = \frac{40!}{(40-3)!}$$

(A) E: Κληρωθούν μόνο Άνδρες

<u>Συνδυασμοί</u>: Απο τους 10 άνδρες επιλέγουμε 3.

$$P(E) = \frac{|E|}{|\underline{\Omega}|} = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{120}{1140} = 0{,}1052 \text{ ή } 10{,}52\%$$

<u>Διατάξεις</u>: Έχουμε 10 διαθέσιμες επιλογές για τον πρώτο, 9 για τον δεύτερο και 8 για τον τρίτο.

$$P(E) = \frac{|E|}{|\underline{\Omega}|} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{720}{6.840} = 0{,}1052 \text{ ή } 10.52\%$$

(B) E: Κληρωθούν δύο άνδρες και μια γυναίκα

Συνδυασμοί: Απο τους 10 άνδρες choose (επέλεξε) 2
και απο τις 10 γυναίκες choose (επέλεξε) 1

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\binom{10}{2}\binom{10}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{45 \cdot 10}{1140} = 0.3947 \text{ ή } 39.47\%$$

Διατάξεις: Έχουμε 10 επιλογές για τον πρώτο άνδρα, 9 επιλογές για τον δεύτερο άνδρα και 10 επιλογές για την γυναίκα. Φυσικά υπάρχουν 3 διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης. (A, A, Γ), (A, Γ, A), (Γ, A, A)

Συνολικά:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{2700}{6.840} = 0.3947 \text{ ή } 39.47\%$$

(C)

E: Επιλεγμένη τριάδα να μην υπάρχει κανένα ζεύγος συζύγων.

Συνδυασμοί: Απο τα 10 ζεύγη επιλέγουμε 3, κάθε ένα ζεύγος που επιλέξαμε αποτελείται απο 2 άτομα, για κάθε ένα ζεύγος (απο τα τρία) επιλέγουμε 1 άτομο.

Συνολικά:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\binom{10}{3}\cdot\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{120 \cdot 2^3}{1140} = 0.8421$$

ή 84.21%

Διατάξεις: Έχουμε 20 διαθέσιμες θέσεις για το πρώτο άτομο, 18 διαθέσιμες για το δεύτερο άτομο (εφόσων έχουμε αφαιρέσει το πρώτο άτομο και το ζευγάρι του) και 16 διαθέσιμες θέσεις για το τρίτο άτομο.

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{20 \cdot 18 \cdot 16}{20 \cdot 19 \cdot 18} = 0.8421 \text{ ή } 84.21\%$$

Άσκηση 5 Ⓐ Έστω K: Κορώνα, A: Νόμισμα τύπου A, B: Νόμισμα τύπου B

Θέλουμε να υπολογίσουμε:

$$P(K_2|K_1) = \frac{P(K_2 \cap K_1)}{P(K_1)} = \frac{P(A\cap K_1 \cap K_2) + P(B \cap K_1 \cap K_2)}{P(A\cap K_1\cap K_2) + P(A\cap K_1 \cap K_2^c) + P(B\cap K_1\cap K_2) + P(B\cap K_1 \cap K_2^c)} \quad (1)$$

Έχουμε ανεξαρτησία. Άρα:

$P(A\cap K_1\cap K_2) = P(A)\cdot P(K_1|A)\cdot P(K_2|A) = 0.147$

$P(B\cap K_1\cap K_2) = P(B)\cdot P(K_1|B)\cdot P(K_2|B) = 0.112$

$P(A\cap K_1\cap K_2^c) = P(A)\cdot P(K_1|A)\cdot P(K_2^c|A) = 0.063$

$P(B\cap K_1\cap K_2^c) = P(B)\cdot P(K_1|B)\cdot P(K_2^c|B) = 0.168$

$$(1) \Rightarrow \frac{0.147 + 0.112}{0.147 + 0.063 + 0.112 + 0.168} = 0.5285 \text{ ή } 52.85\%$$

(B) Θέλουμε να υπολογίσουμε:

$$P(A|K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_8) = \frac{P(A \cap K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_8)}{P(K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_8)}$$

<u>όπου</u>: $P(K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_8) = P(A \cap K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_8) + P(B \cap K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_8)$

$$P(A \cap K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_8) = P(A) \cdot P(K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_8 | A)$$
$$= 0.3 \cdot \binom{10}{8}(0.7)^8 \binom{2}{2}(0.3)^2 = 0.070042$$

$$P(B \cap K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_8) = P(B) \cdot P(K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_8 | B)$$
$$= 0.7 \cdot \binom{10}{8}(0.4)^8 \binom{2}{2}(0.6)^2 = 0.00743$$

Άρα:

$$P(A|K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_8) = \frac{0.070042}{0.070042 + 0.00743} = \frac{0.070042}{0.077472} = 0.904$$

(C)

Για να υπολογίσουμε το $P(K_9|K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_8)$, θα χρησιμοποιήσουμε την εξής σχέση:

$$P(K_9|K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_8) = P(A|K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_8) \cdot P(K_9|A)$$
$$+ P(B|K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_8) \cdot P(K_9|B)$$

Έχουμε ήδη υπολογίσει $P(A|K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_8) = 0.904$

γνωρίζουμε $P(K_9|A) = 0.7$ και $P(K_9|B) = 0.4$

$$P(B|K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_8) = \frac{P(B \cap K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_8)}{P(K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_8)} = \frac{0.00743}{0.077472} = 0.0959$$

$$P(K_9|K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_8) = 0.904 \cdot 0.7 + 0.0959 \cdot 0.4 = 0.67116$$

ή 67.116%

Άσκηση 6

Θέλουμε τα γενέθλια n ατόμων να απέχουν μεταξύ τους τουλάχιστον 3 ημέρες. Για παράδειγμα, αν έχω γενέθλια 24 Ιουνίου για να έχει κάποιος άλλος γενέθλια 3 τουλάχιστον ημέρες μετά ή πριν από εμένα θα πρέπει να αφαιρέσουμε τις εξής ημέρες. (21, 22, 23, 24, 25, 26, 27 Ιουνίου) Συνολικά, δηλαδή θα πρέπει να αφαιρέσουμε 7 ημέρες.

Γενικοποιώντας:

$$\frac{365}{365}\cdot\frac{365-7}{365}\cdot\frac{365-7-7}{365}\cdot \ldots\ldots = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{365-7k}{365}$$

Χρησιμοποίησα Π (product) και όχι Σ (Sum) εφόσον θέλουμε πολλαπλασιάζουμε. Ξεκίνησα με $k=0$ εφόσον θέλουμε η ακολουθία να ξεκινάει με $\frac{365}{365}$ και εφόσον ξεκίνησα με $k=0$ έπρεπε να αφαιρέσω 1 από το n.

$$\prod_{k=0}^{8}\frac{365-7k}{365} = \frac{365}{365}\cdot\frac{358}{365}\cdot\frac{351}{365}\cdot\frac{344}{365}\cdot\frac{337}{365}\cdot\frac{330}{365}\cdot$$

$$\cdot\frac{323}{365}\cdot\frac{316}{365}\cdot\frac{309}{365}\simeq 0.48 \approx 0.5$$

Άσκηση 7

Έστω X: Σωστές Απαντήσεις

Θέλουμε τουλάχιστον 5 σωστές απαντήσεις από τις 10.

$P\{X=5\} = \binom{10}{5}(0.53)^5\binom{5}{5}(0.47)^5 = 0.241695$ ή 24.1695%

$P\{X=6\} = \binom{10}{6}(0.53)^6\binom{4}{4}(0.47)^4 = 0.227125$ ή 22.7125%

$P\{X=7\} = \binom{10}{7}(0.53)^7\binom{3}{3}(0.47)^3 = 0.146354$ ή 14.6354%

$P\{X=8\} = \binom{10}{8}(0.53)^8\binom{2}{2}(0.47)^2 = 0.061889$ ή 6.1889%

$P\{X=9\} = \binom{10}{9}(0.53)^9\binom{1}{1}(0.47)^1 = 0.015508$ ή 1.5508%

$P\{X=10\} = \binom{10}{10}(0.53)^{10} = 0.001748$ ή 0.1748%

Δίνεται $p=0.53$ και $1-p=0.47$

Άρα: $P\{X \geq 5\} = P\{X=5\} + P\{X=6\} + P\{X=7\} + P\{X=8\} + P\{X=9\}$

$+ P\{X=10\} = 0.241695 + 0.227125 + 0.146354$

$+ 0.061889 + 0.015508 + 0.001748$

$= 0.694319$ ή 69.4319%

(2) Θέλουμε να υπολογίσουμε το n, δηλαδή πόσες ερωτήσεις πρέπει να έχει το διαγώνισμα για να έχω 85% να πετύχω στο διαγώνισμα.

$$\mu = p \cdot n = 0.53n \,, \quad \sigma^2 = p(1-p)n = 0.53 \cdot 0.47n$$

και θέλουμε να υπολογίσουμε πόσα n χρειάζονται ώστε να "πετύχουμε" το διαγώνισμα, (τουλάχιστον 0.5)

$$P\{X \geq 0.5n\} = 0.85 \Leftrightarrow P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{0.5n - 0.53n}{\sqrt{0.53 \cdot 0.47n}}\right\} = 0.85$$

$$P\left\{Z \geq \frac{0.5n - 0.53n}{\sqrt{0.2491n}}\right\} = 0.85 \Leftrightarrow$$

$$1 - \Phi\left(\frac{0.5n - 0.53n}{\sqrt{0.2491n}}\right) = 0.85 \Leftrightarrow \frac{0.5n - 0.53n}{\sqrt{0.2491n}} = -1.036$$

$$\frac{0.5n - 0.53n}{\sqrt{0.2491n}}\sqrt{0.2491n} = -1.036\sqrt{0.2491n} \Leftrightarrow -0.03n = -1.036\sqrt{0.2491n}$$

$$\Leftrightarrow 0.0009n^2 = 0.26735n \Leftrightarrow n = \frac{0.26735\ldots}{0.0009}$$

$$n \simeq 297.064$$

Άσκηση 8 | 1

Στο πρόβλημα αυτό έχουμε ομοιόμορφες κατανομές με επικάλυψη. Έστω X βάρος εξαρτήματος, και B το βάρος ενός τυχαία επιλεγμένου αντικειμένου.

$$f_B(x) = \begin{cases} 0.35 \cdot \frac{1}{3-2} = 0.35, & 2.0 \le X \le 2.3 \\ 0.35 \cdot \frac{1}{3-2} + 0.2 \cdot \frac{1}{3.5-2.3} = 0.51666\ldots, & 2.3 \le X \le 2.9 \\ 0.35 \cdot \frac{1}{3-2} + 0.2 \frac{1}{3.5-2.3} + 0.45 \cdot \frac{1}{4-2.9} = 0.925757\ldots, & 2.9 \le X \le 3. \\ 0.2 \frac{1}{3.5-2.3} + 0.45 \frac{1}{4-2.9} = 0.575757\ldots, & 3.0 \le X \le 3.5 \\ 0.45 \frac{1}{4-2.9} = 0.409090\ldots, & 3.5 \le X \le 4.0 \end{cases}$$

Επαλήθευση..

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_B(x)\,dx = \int_{2.0}^{2.3} 0.35\,dx + \int_{2.3}^{2.9} 0.51666\ldots + \int_{2.9}^{3.0} 0.925757\ldots\,dx$$

$$+ \int_{3.0}^{3.5} 0.575757\ldots\,dx + \int_{3.5}^{4.0} 0.409090\ldots\,dx =$$

$$0.105 + 0.31 + 0.0925757\ldots + 0.287879 + 0.204545$$

$$0.999999\ldots \simeq 1$$

Άσκηση 8 (2)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_B(x)\,dx = \int_{2.0}^{2.3} x \cdot 0.35\,dx + \int_{2.3}^{2.9} x \cdot 0.51666\ldots\,dx + \int_{2.9}^{3.0} x \cdot 0.925757\ldots\,dx + \int_{3.0}^{3.5} x \cdot 0.575757\ldots\,dx$$

$$+ \int_{3.5}^{4.0} x \cdot 0.409090\ldots\,dx = 0.22575 + 0.806 + 0.27309 + 0.9356 + 0.76704 = \boxed{3.00748}$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_B(x)\,dx = \int_{2.0}^{2.3} x^2 \cdot 0.35\,dx + \int_{2.3}^{2.9} x^2 \cdot 0.51666\ldots\,dx + \int_{2.9}^{3.0} x^2 \cdot 0.925757\ldots\,dx + \int_{3.0}^{3.5} x^2 \cdot 0.575757\ldots\,dx$$

$$+ \int_{3.5}^{4.0} x^2 \cdot 0.409090\ldots\,dx = 0.48615 + 2.10490 + 0.80571 + 3.04671 + 2.88068 = \boxed{9.32415}$$

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= 9.32415 - (3.00748)^2$$

$$= 9.32415 - 9.04493$$

$$= \boxed{0.27922}$$

③ Έχουμε ήδη υπολογίσει:

$$\mu = 3{,}00748 \quad \text{και} \quad \sigma^2 = 0{,}27922$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα το συνολικό βάρος του κιβωτίου να υπερβαίνει τα 305 κιλά, αν τοποθετήσουμε 100 εξαρτήματα σε ένα κιβώτιο.

$n=100$, n μεγάλο νούμερο άρα θεωρούμε ότι η μεταβλητή T ακολουθεί κανονική κατανομή, εκτελούμε κεντρικό οριακό θεώρημα. (ΚΟΘ)

$$T = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad, \text{με } \mu_T = n\cdot\mu = 300{,}748 \text{ και } \sigma_T^2 = n\cdot\sigma^2 = 100\cdot 0{,}27922$$

$$P\{X>305\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{305-300{,}748}{\sqrt{100\cdot 0{,}27922}}\right\} = P\left\{Z > \frac{4{,}252}{5{,}28413}\right\}$$

$$= 1 - \Phi(0{,}80) = 1 - 0{,}7881 = 0{,}2119 \text{ ή } 21{,}19\%$$

Άσκηση 9 ①

Προσδιορισμός από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

Από διάγραμμα προκύπτει $z=3x$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} c\, dz\, dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^2\int_0^{3x} c\, dz\, dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^2 3xc\, dx = 1$$

$$\Leftrightarrow 6c = 1 \Leftrightarrow c = 1/6$$

Άρα $f_{X,Z}(x,z) = 1/6 \;,\; 0\le x\le 2 \quad 0\le z\le 3x$

② $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XZ}(x,z)\, dz = \int_0^{3x}\frac{1}{6}\, dz = 1/2\cdot x$$

Άρα $f_X(x) = 1/2\, x \quad, 0\le x\le 2$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Z}(x,z)\, dx = \int_0^{1/3 z} 1/6\, dx = 1/18\, z$$

Άρα $f_Z(z) = 1/18\, z \quad, \; 0\le z\le 6$

(3)

$$P(X>Z)=\int_0^2\int_{\frac{3}{2}x}^{3x} \tfrac{1}{6}\, dz\, dx=\int_0^2\left(3x-\tfrac{3}{2}x\right)\tfrac{1}{6}\, dx$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^2\right]_{x=0}^{x=2}=\frac{1}{6}\left[(6-3)\right]=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Απο διάγραμμα λόγο συμμετρίας η πιθανότητα ο Χρήστος να φτάσει μετά τη Ζωή είναι 0.5 ή 1/2.

Σπήλιος Δημακοπουλος 8220035