UniTs - University of Trieste

Faculty of Scientific and Data Intensive Computing

Department of mathematics informatics and geosciences

# Introduction to Galaxies and Astrophysics

*Lecturers:*
**Prof. Alexandro Saro // Prof. Cebrolini Matteo**

*Author:*
**Andrea Spinelli**

May 7, 2025



github.com/Spina02 andreaspinelli2002@gmail.com

# Preface

As a student of Scientific and Data Intensive Computing, I've created these notes while attending the **Introduction to Galaxies and Astrophysics** course.

This is an optional course for the second semester of the first year my master's degree, but this course is also available for students of the Physics department, anyway, next year it will probably be removed from both curricula.

The course is held by Prof. Alexandro Saro, a researcher at the INAF Astronomical Observatory of Trieste; the lecture of the course are taken in Italian, but the notes are written in English conformly to the language of the master's degree; however, some images or text could be in Italian due to the original language of the slides.

The first part of the course will be focused on gravity and Einstein's theory of general relativity:

- Non euclidean geometry
- Tensors
- Principles and equations of Einstein
- Gravitational waves

The second part of the course will be focused on cosmology:

- Robertson-Walker metric
- Hubble law
- Friedmann equations
- Cosmological models
- Precision cosmology (hints)

# Contents

# 1
# Geometria Differenziale

La geometria differenziale rappresenta il linguaggio matematico fondamentale per descrivere spazi curvi e le loro proprietà intrinseche. In astrofisica e cosmologia, essa fornisce gli strumenti per analizzare la struttura dello spazio-tempo: tramite tensori, forme differenziali e concetti come curvature e connessioni, si può modellare il comportamento della gravità come descritto dalla relatività generale.

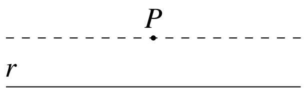
## 1.1 Geometrie Non Euclidee

La teoria che studieremo è una *teoria geometrica*:

**I 5 postulati di Euclide:**

1. Per due qualsiasi punti $A$ e $B$, esiste esattamente una retta che li attraversa.
2. Una retta può essere prolungata indefinitamente in entrambe le direzioni.
3. Dato un punto $O$ ed un raggio $R$, esiste esattamente un cerchio con centro in $O$ e raggio $R$.
4. Tutti gli angoli retti sono congruenti.
5. Data una retta $r$ ed un punto $P$ fuori da essa, per il punto $P$ passa una ed una sola retta parallela ad $r$ (possiamo intenede "parallelo" con *che incontra r solo all'infinito*, in un punto improprio).

Il quinto postulato è più complesso degli altri; i tentativi di dimostrare tale postulato a partire dagli altri postulati, considerati più evidenti, non hanno permesso di arrivare a questo, ma hanno portato, nell'800, alla nascita delle geometrie non-Euclidee (Gauss, Bolyai, Lobachevski, Klein).




Il quinto postulato si è rivelato indipendente dagli altri enunciati di Euclide, poiché è stato possibile formulare geometrie piane (in 2 dimensioni) in cui valgono tutti gli altri postulati, mentre il concetto di parallelismo assume un significato diverso:

1. Non esiste alcuna retta parallela a $R$ passante per $P$ $\quad\rightarrow$ **Geometrie ellittiche piane** $[S^2]$
2. Esistono due o più rette parallele a $R$ passanti per $P$ $\quad\rightarrow$ **Geometrie iperboliche piane** $[H^2]$

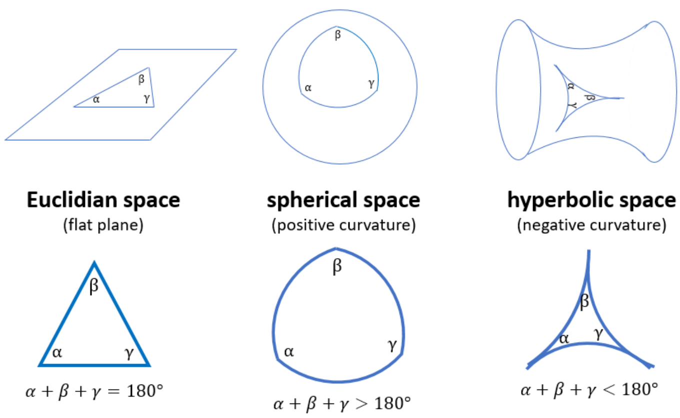



**Figure 1.1:** Geometrie ellittiche e iperboliche

### 1.1.1 Geometria Ellittica

La **geometria ellittica piana** è una forma di geometria non euclidea che rifiuta il quinto postulato di Euclide, il quale in geometria euclidea garantisce l'esistenza di una sola retta parallela passante per un dato punto. In geometria ellittica, non esistono rette parallele; invece, ogni coppia di rette si interseca eventualmente.

Un classico esempio è la geometria sferica, in cui possiamo definire come ”***punto***” la coppia di punti diametralmente opposti $(P,P')$, e come ”***retta***” un cerchio massimo passante per $P$ e $P'$. Si può dimostrare che per due punti $(P,P')$ e $(Q,Q')$ passa esattamente una retta $r$. Inoltre, per un punto $(T,T')$ esterno ad $r$ non passa alcuna retta parallela ad $r$, poiché tutte le rette passanti per $(T,T')$ intersecano $r$ in almeno un punto.

Con la geometria analitica, Descartes ha mostrato che, identificando i punti con coppie di numeri reali e definendo la distanza tra due punti $(x_1,y_1)$ e $(x_2,y_2)$ come $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, tutti i postulati di Euclide si riducono a teoremi sui numeri reali.

Definito sulla sfera un triangolo con i lati formati da archi di cerchi massimi, la somma degli angoli $\alpha+\beta+\gamma$ è sempre $>\pi$. L'area $S$ di tale triangolo, se la sfera ha raggio $R$, si può esprimere come $S=R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$. Quando $S\to 0$ (mantenendo $R$ fisso), si osserva che $(\alpha+\beta+\gamma)\to\pi$. Questo significa che se il triangolo sferico è molto più piccolo del raggio $R$, la sua differenza da un triangolo piano tende a scomparire, avvicinandosi alla geometria euclidea.

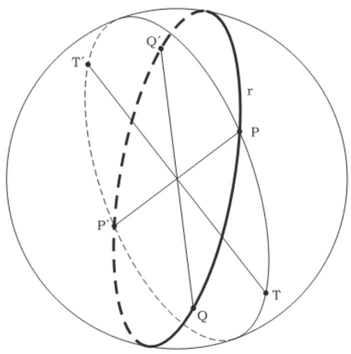



**Figure 1.2:** Geometria sferica

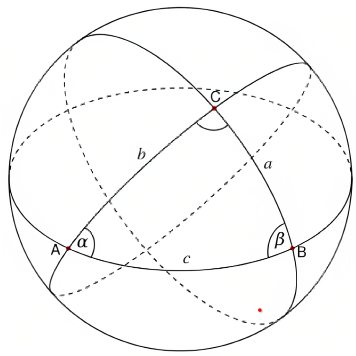



**Figure 1.3:** Triangolo sferico

In questo contesto, i triangoli, noti come triangoli sferici, mostrano una proprietà interessante: la somma dei loro angoli interni supera i 180° ($\alpha+\beta+\gamma>\pi$), un fenomeno noto come eccesso sferico, con l'eccesso proporzionale all'area del triangolo.

$$S=R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)\quad \text{dove per}\quad R\to\infty\quad \text{si ha}\quad \frac{S}{R^2}\to 0\quad \text{e}\quad \alpha+\beta+\gamma\to\pi$$

Per costruire un modello della geometria ellittica piana siamo ricorsi all'uso di una sfera (superficie bidimensionale, indicata con $\mathbf{S}^2$) immersa (*embedded*) in uno spazio euclideo tridimensionale $\mathbf{E}^3$.

Notiamo che per rappresentare il 5° postulato abbiamo dovuto ricorrere ad una superficie *curva*, cioè la sfera. Questa *curvatura* deve essere inoltre costante in tutto il piano perché gli altri postulati descrivono lo spazio come omogeneo, e se la curvatura variasse questa proprietà verrebbe meno.

Questo ci porta a comprendere che le diverse geometrie non euclidee possono essere caratterizzate matematicamente attraverso diverse definizioni di distanza. La ***curvatura*** dello spazio diventa quindi un elemento fondamentale per distinguere tra i vari tipi di geometrie, ed è data da:

$$k=\frac{1}{R^2}\quad \text{dove}\quad R=\text{raggio della superficie}$$

Si ha quindi:
- Curvatura zero $(k=0)$ → geometria euclidea
- Curvatura positiva costante $(k>0)$ → geometria ellittica
- Curvatura negativa costante $(k<0)$ → geometria iperbolica

### 1.1.2 Geometria Iperbolica

La geometria iperbolica piana è una geometria non euclidea in cui il quinto postulato di Euclide non vale, ammettendo più parallele a una retta data. I triangoli iperbolici hanno somma degli angoli inferiore a 180°, con "difetto" proporzionale all'area. Il piano iperbolico non può essere immerso interamente in uno spazio euclideo 3D, ma esistono modelli come il *cerchio di Klein* (1870), in cui i punti sono all'interno di una circonferenza unitaria e le rette ne sono le corde. Da un punto $P$ passano due parallele a una retta data, e ne esistono infinite che non la intersecano.

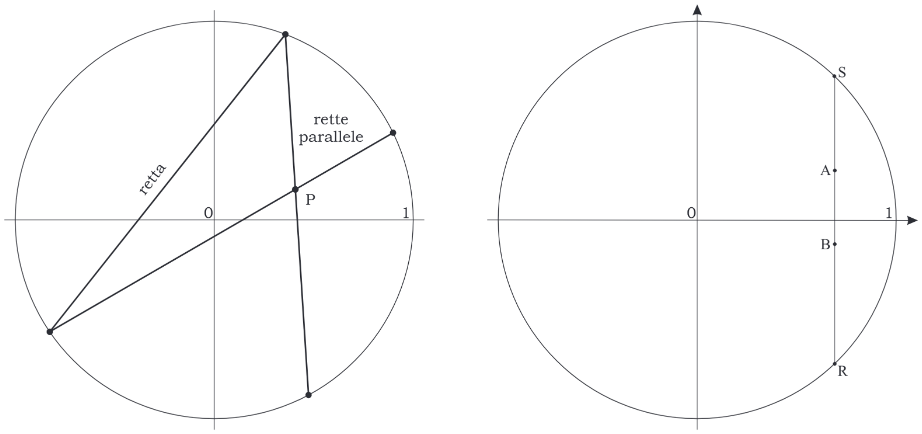



**Figure 1.4:** Geometria iperbolica

La distanza tra due punti $A$ e $B$ è

$$d(A,B) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{RA \cdot SB}{RB \cdot SA}\right),$$

che diverge se uno dei punti tende al bordo. Una rappresentazione parziale di $\mathbf{H}^2$ in uno spazio euclideo 3-D $\mathbf{E}^3$ è la cosiddetta ***pseudosfera***, una superficie a curvatura negativa costante, in contrasto con la sfera a curvatura positiva.

## 1.2 Curva piana

Si può parametrizzare una curva piana nel modo seguente: $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$, dove $t$ è un parametro, non necessariamente il tempo; il vettore tangente (velocità) è $d\bar{x}/\mathrm{d}t$. Possiamo definire l'ascissa curvilinea $s(t)$:

$$O \equiv \bar{x}(t=0) \quad P \equiv \bar{x}(t) \quad ds = |d\bar{x}| = \left|\frac{d\bar{x}}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t \quad \to \quad s(t) = \int_0^t |d\bar{x}| = \int_0^t \left|\frac{d\bar{x}}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t$$

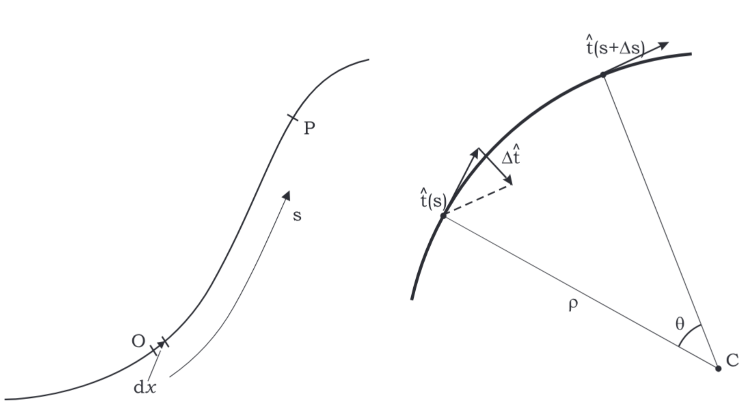



**Figure 1.5:** Ascissa curvilinea

Applicando la trasformata $t \to s$ notiamo che $\frac{d\bar{x}}{ds} = \dot{\bar{x}}(s)$ ha modulo 1: è il **versore tangente** $\hat{t}(s)$.

Poichè $|\dot{\vec{x}}(s)| = |\hat{t}(s)| = 1$, abbiamo $\hat{t}\cdot\hat{t} = 1$ e, derivando, segue che $2\hat{t}\cdot\dot{\hat{t}} = 0$, ovvero $\hat{t} \perp \dot{\hat{t}}$.

$$\boxed{\textbf{Nota}: \dot{\hat{t}} \text{ non è un versore!}}$$

Separiamo la derivata di $\hat{t}(s)$ in modulo e direzione. Definiamo $\kappa(s) = \left|\dot{\hat{t}}(s)\right|$ e $\hat{n}(s) = \frac{\dot{\hat{t}}(s)}{\left|\dot{\hat{t}}(s)\right|}$, così che

$$\dot{\hat{t}}(s) = \kappa(s)\,\hat{n}(s).$$

Geometricamente, $\kappa$ è la **curvatura** e $\hat{n}$ il **versore normale**.

Osserviamo che, se una curva è approssimabile con un arco di cerchio di raggio $\rho$, allora

$$|\Delta\hat{t}| = 2\,|\hat{t}|\sin\!\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \sim \Delta\theta \quad \text{e} \quad \Delta s \simeq \rho\,\Delta\theta. \quad \text{Da cui} \quad \left|\frac{\Delta\hat{t}}{\Delta s}\right| \simeq \frac{1}{\rho}.$$

Nel limite infinitesimo, ciò si traduce in:

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \kappa\hat{n} = \frac{1}{\rho}\hat{n} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \kappa \ : \ \text{curvatura}, \\ \rho \ : \ \text{raggio di curvatura}. \end{cases}$$

Misurando l'angolo $\theta$ da un riferimento fisso (ad esempio, rispetto all'asse $x$), si ottiene

$$\Delta s = \rho\,\Delta\theta = \frac{\Delta\theta}{\kappa} \quad \to \quad \kappa = \left|\frac{d\theta}{ds}\right|.$$

Finora $\kappa$ è stata definita come grandezza positiva. In corrispondenza di un flesso, ciò comporta però una discontinuità nella direzione di $\hat{n}$. Per ovviare a questo, fissata la parametrizzazione della curva tramite $s$, definiamo $\hat{n}$ come la rotazione di $\hat{t}$ di 90° in senso positivo (coerente con il riferimento $O, x_1, x_2$). Allora $\dot{\hat{t}}$ rimane ortogonale a $\hat{t}$, e possiamo scrivere ancora

$$\dot{\hat{t}}(s) = \kappa\hat{n},$$

ma lasciando che $\kappa$ possa anche assumere valori negativi. In tal modo, in un flesso $\hat{n}$ non cambia, mentre cambia il segno di $\kappa$, permettendo di distinguere se la curvatura si "piega" a sinistra o a destra rispetto alla tangente:

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} \quad (\text{senza valore assoluto}).$$

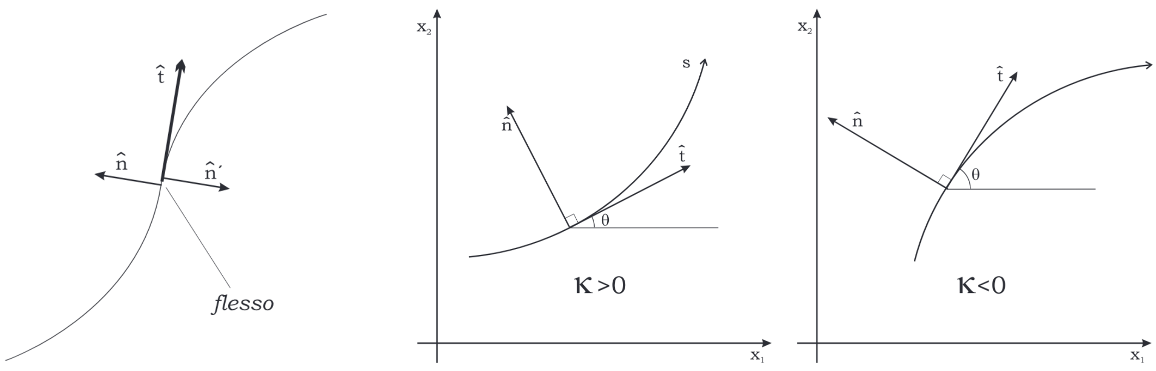



**Figure 1.6:** Segno del flesso

## 1.3 Superfici

Più che di *superfici* in senso esteso, ci interesseremo degli *elementi di superficie*, poiché vogliamo esaminare le proprietà locali. Anche in questo caso, useremo una rappresentazione parametrica.

Sia:

$$\bar{x} \colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

una funzione biunivoca (invertibile) che descrive una superficie nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbf{E}^3$.

In coordinate:

$$\bar{x}(u,v) = \big(x_1(u,v),\, x_2(u,v),\, x_3(u,v)\big).$$

Se la superficie è del tipo $z = f(x,y)$, allora la parametrizzazione diventa $\bar{x}(u,v) = \big(u,\, v,\, f(u,v)\big)$.

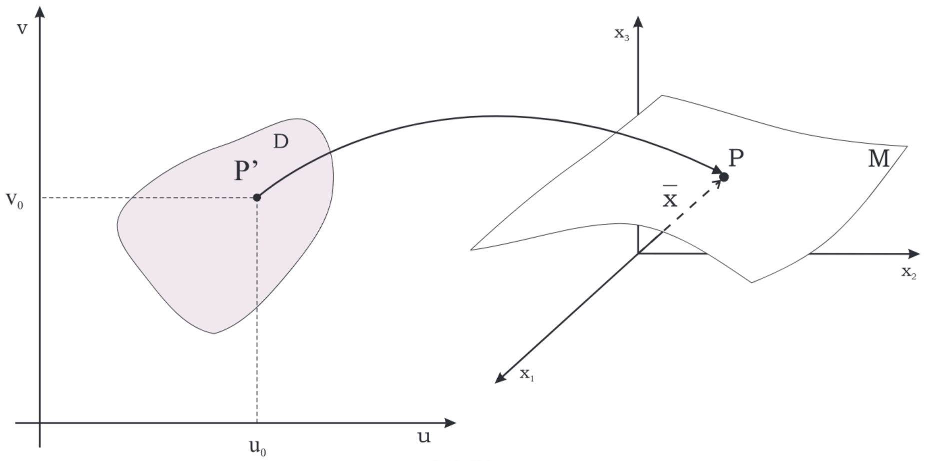



**Figure 1.7:** Superficie parametrica

**Definition**: ***Superficie Regolare***

Una ***superficie regolare*** (o *smooth*) è tale se, definendo:

$$\bar{x}_u = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u}\right), \qquad \bar{x}_v = \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v}\right),$$

si ha che in ogni punto del dominio (cioè ovunque in $D$) risulta:

$$\bar{x}_u \times \bar{x}_v \neq 0.$$

Fissando $v = v_0$ e variando $u$ nei pressi di un punto $P' \in D$ (che corrisponde al punto $P$ sulla superficie $M$), si ottiene una curva su $M$ il cui vettore tangente è $\bar{x}_u$. Analogamente, $\bar{x}_v$ è tangente a un'altra curva, e i due vettori definiscono il piano tangente in $P$.

Un versore normale alla superficie è dato da:

$$\hat{n} = \frac{\bar{x}_u \times \bar{x}_v}{|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|},$$

e i tre vettori $\hat{n}, \bar{x}_u, \bar{x}_v$ formano un triedro locale.

Poiché la corrispondenza tra $D$ e l'intorno di $P$ su $M$ è biunivoca, possiamo considerare $(u,v)$ come un sistema di coordinate curvilinee sull'intorno di $P$ (ad esempio, i paralleli e i meridiani su una sfera).

Se $u = u(t)$ e $v = v(t)$ descrivono una curva in $D$ passante per $P'(u_0, v_0)$, allora

$$\bar{r}(t) \; = \; \bar{x}\big(u(t), v(t)\big)$$

rappresenta la curva su $M$ passante per $\bar{x}(u_0, v_0)$. Il vettore velocità è

$$\dot{\bar{r}} \; = \; \frac{d\bar{r}}{\mathrm{d}t} \; = \; \bar{x}_u \, \frac{du}{\mathrm{d}t} \; + \; \bar{x}_v \, \frac{dv}{\mathrm{d}t}.$$

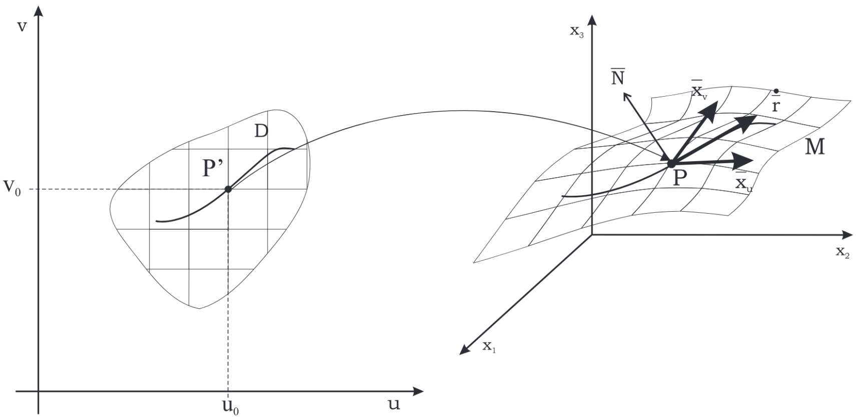



**Figure 1.8:** Curva su una superficie

Poiché $\dot{\bar{r}}$ è tangente alla curva e appartiene quindi al piano tangente di $M$, ogni vettore tangente a $M$ in $P$ si può scrivere come combinazione lineare di $\bar{x}_u$ e $\bar{x}_v$. Viceversa, per ogni combinazione $\bar{v} = a\bar{x}_u + b\bar{x}_v$ esiste una corrispondente curva su $M$ la cui velocità è esattamente $\bar{v}$. In tal senso, $\bar{x}_u$ e $\bar{x}_v$ formano una base del piano tangente.

**Example**: ***Superficie di una sfera di raggio*** $R$

Consideriamo la sfera di raggio $R$ centrata nell'origine. La sua superficie si parametrizza come

$$\bar{x}(u, v) \; = \; \big(R\cos u \cos v, \; R\sin u \cos v, \; R\sin v\big),$$

con $u \in [-\pi, \; \pi]$ e $v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \; \frac{\pi}{2}\right]$.

Calcoliamo le derivate rispetto a $u$ e $v$:

$$\bar{x}_u \; = \; \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \; = \; \big(-R\sin u \cos v, \; R\cos u \cos v, \; 0\big),$$
$$\bar{x}_v \; = \; \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \; = \; \big(-R\cos u \sin v, \; -R\sin u \sin v, \; R\cos v\big).$$

Consideriamo il punto $(u, v) = (0, 0)$:

$$\bar{x}_u\big(0{,}0\big) \; = \; (0, \; R, \; 0), \qquad \bar{x}_v\big(0{,}0\big) \; = \; (0, \; 0, \; R).$$

Tali vettori definiscono il piano tangente alla sfera in quel punto.
Il versore normale alla superficie in $(0, 0)$ si ottiene con il prodotto vettoriale:

$$\hat{n} \; = \; \frac{\bar{x}_u \times \bar{x}_v}{\big|\bar{x}_u \times \bar{x}_v\big|} \; = \; \frac{(-R^2, 0, 0)}{R^2} \; = \; (-1, 0, 0).$$

## 1.4 Prima Forma Fondamentale

In geometria differenziale, la ***prima forma fondamentale*** (o *forma metrica*) di una superficie definisce la sua metrica intrinseca. Grazie a essa possiamo misurare lunghezze, angoli e aree *rimanendo* sulla superficie, ossia senza far riferimento esplicito allo spazio tridimensionale in cui la superficie è immersa.

**Definition**: ***Prima Forma Fondamentale***

Sia $M$ una superficie regolare immersa in $\mathbb{R}^3$, e sia:

$$\bar{x} \colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

una parametrizzazione locale di $M$. In coordinate locali $(u,v)$, ponendo:

$$\bar{x}_u = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}, \quad \bar{x}_v = \frac{\partial \bar{x}}{\partial v},$$

l'espressione della **prima forma fondamentale** e:

$$\mathrm{d}s^2 = E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2,$$

con

$$E = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u, \quad F = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v, \quad G = \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v.$$

Sia $\bar{r}(t) = \bar{x}\big(u(t), v(t)\big)$, con $t \in [a,b]$, una curva su una superficie; se $s(t)$ è la relativa ascissa curvilinea, la lunghezza totale della curva risulta

$$L \;=\; s(b) \;=\; \int_a^b \frac{ds}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \;=\; \int_a^b \big|\dot{\bar{r}}(t)\big|\,\mathrm{d}t.$$

Poiché

$$\dot{\bar{r}} \;=\; \frac{d\bar{r}}{\mathrm{d}t} \;=\; \bar{x}_u\,\dot{u} \;+\; \bar{x}_v\,\dot{v} \quad (\text{dove } \dot{u} = \tfrac{du}{\mathrm{d}t},\ \dot{v} = \tfrac{dv}{\mathrm{d}t}),$$

segue che

$$\left(\frac{ds}{\mathrm{d}t}\right)^2 \;=\; \big|\dot{\bar{r}}\big|^2 \;=\; \dot{\bar{r}} \cdot \dot{\bar{r}} \;=\; (\bar{x}_u\,\dot{u} + \bar{x}_v\,\dot{v}) \cdot (\bar{x}_u\,\dot{u} + \bar{x}_v\,\dot{v}) \;=\; \dot{u}^2\,(\bar{x}_u \cdot \bar{x}_u) \;+\; 2\,\dot{u}\,\dot{v}\,(\bar{x}_u \cdot \bar{x}_v) \;+\; \dot{v}^2\,(\bar{x}_v \cdot \bar{x}_v).$$

Introduciamo le funzioni

$$E \;=\; \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u, \quad F \;=\; \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v, \quad G \;=\; \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v \qquad \longrightarrow \qquad E = E(u,v),\ F = F(u,v),\ G = G(u,v),$$

e otteniamo

$$\left(\frac{ds}{\mathrm{d}t}\right)^2 \;=\; E\,\dot{u}^2 \;+\; 2F\,\dot{u}\,\dot{v} \;+\; G\,\dot{v}^2.$$

Pertanto, la lunghezza totale della curva è

$$L \;=\; \int_a^b \sqrt{E\,\dot{u}^2 \;+\; 2F\,\dot{u}\,\dot{v} \;+\; G\,\dot{v}^2}\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{\bar{r}} \sqrt{E\,\mathrm{d}u^2 \;+\; 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \;+\; G\,\mathrm{d}v^2},$$

che in forma differenziale si esprime come

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 \;=\; E\,\mathrm{d}u^2 \;+\; 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \;+\; G\,\mathrm{d}v^2.}$$

Questa espressione, chiamata ***prima forma fondamentale***, descrive la geometria intrinseca della superficie. "Intrinseco" significa che tutte le misure (di distanze, angoli, ecc.) possono essere effettuate senza "uscire" dallo spazio bidimensionale della superficie.

Poiché esiste una corrispondenza biunivoca tra $D \subset \mathbb{R}^2$ e la porzione di superficie $M$, le linee $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$ formano sulla superficie una *griglia* di coordinate curvilinee, mentre $E(u,v)$, $F(u,v)$ e $G(u,v)$ sono interpretate come *funzioni* definite su $M$. In questo modo, ipotetici "abitanti" bidimensionali potrebbero compiere misurazioni di distanze *sulla superficie* per determinare la forma di $E$, $F$ e $G$, giungendo così a una descrizione completa della metrica locale.

**Example**: ***Il piano***

Consideriamo il piano in $\mathbf{E}^3$ descritto da $\bar{x}(u,v) = (u, v, 0)$, con coordinate cartesiane $x = u$ e $y = v$. Allora

$$\bar{x}_u = (1,0,0), \quad \bar{x}_v = (0,1,0),$$

e i coefficienti della prima forma fondamentale sono

$$E = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u = 1, \quad F = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v = 0, \quad G = \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v = 1.$$

Quindi,

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2,$$

che corrisponde al classico *teorema di Pitagora* in forma differenziale. La lunghezza di una curva $y = f(x)$, parametrizzata da $x = t$ e $y = f(t)$, è

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, \mathrm{d}x.$$

**Example**: ***Sfera in coordinate sferiche***

Consideriamo una sfera di raggio $R$ centrata nell'origine. La superficie della sfera è data da:

$$\bar{x}(u,v) = (R\cos u \cos v, R\sin u \cos v, R\sin v) \xrightarrow{\text{derive}} \begin{cases} \bar{x}_u = (-R\sin u \cos v, R\cos u \cos v, 0) \\ \bar{x}_v = (-R\cos u \sin v, -R\sin u \sin v, R\cos v) \end{cases}$$

dove $u \in [-\pi, \pi]$, $v \in [-\pi/2, \pi/2]$
Calcoliamo i coefficienti della prima forma fondamentale:

$$\begin{cases} E = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u = R^2\cos^2 v \sin^2 u + R^2 \cos^2 v \cos^2 u & = R^2\cos^2 v \\ G = \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v = R^2 \sin^2 v \cos^2 u + R^2 \sin^2 v \sin^2 u + R^2 cos^2 v & = R^2 \\ F = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v = R^2 v \cos v \cos u \sin \sin u - R^2 \cos v \cos u \sin \sin u & = 0 \end{cases}$$

Quindi, la prima forma fondamentale è:

$$\mathrm{d}s^2 = R^2\cos^2 v\, \mathrm{d}u^2 + R^2 \mathrm{d}v^2$$

### 1.4.1 Identità di Lagrange

L'identità di Lagrange è una relazione che lega la forma metrica e la prima forma fondamentale di una superficie.

Se $\begin{cases} \bar{v} = a\bar{x}_u + b\bar{x}_v \\ \bar{w} = c\bar{x}_u + d\bar{x}_v \end{cases}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sono due vettori tangenti alla superficie $M$, allora:

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = (a\bar{x}_u + b\bar{x}_v) \cdot (c\bar{x}_u + d\bar{x}_v) = acE + (ad + bc)F + bdG$$

che si può riscrivere nella forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}_{\text{Forma metrica}} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

nella quale la compare la matrice della prima forma fondamentale (forma metrica).

Quindi la conoscenza della prima forma fondamentale permette di calcolare prodotti scalari su $M$, e quindi non solo lunghezze ma anche angoli.

Ricordiamo che, essendo $\bar{x}_u \times \bar{x}_v$ perpendicolare al piano tangente alla superficie, il versore normale $\hat{N} = \frac{\bar{x}_u \times \bar{x}_v}{|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|}$ è perpendicolare alla superficie.

---

**Teorema 1.1.** ***Identità di Lagrange***

*La quantità $|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|^2$ è uguale al determinante della matrice della prima forma fondamentale:*

$$|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|^2 = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

***Dimostrazione**:*

Ricodiamo che: $\begin{cases} |\bar{x}_u \times \bar{x}_v| & = & |\bar{x}_u||\bar{x}_v|\sin\theta \\ \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v & = & |\bar{x}_u||\bar{x}_v|\cos\theta \end{cases}$ dove $\theta$ è l'angolo tra $\bar{x}_u$ e $\bar{x}_v$.

Elevando al quadrato, otteniamo:

$$|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|^2 = (|\bar{x}_u|^2|\bar{x}_v|^2\sin^2\theta) = |\bar{x}_u|^2|\bar{x}_v|^2(1-\cos^2\theta) = \underbrace{|\bar{x}_u|^2}_{E} \cdot \underbrace{|\bar{x}_v|^2}_{G} - \underbrace{(\bar{x}_u \cdot \bar{x}_v)^2}_{F^2}$$

Ricordando che $|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|^2 = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, otteniamo l'identità di Lagrange:

$$\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = EG - F^2$$

C.V.D.

---

Dalla condizione che la superficie sia regolare, segue che $EG - F^2 \neq 0$

A questo punto facciamo un cambiamento nella simbologia usata; come vedremo questo porterà ad una notevole semplificazione delle formule.

Chiamiamo: $g_{11} \equiv E, \quad g_{12} = g_{21} \equiv F, \quad g_{22} \equiv G, \qquad \bar{x}_1 \equiv \bar{x}_u, \quad \bar{x}_2 \equiv \bar{x}_v$

E scriviamo $\quad u^1 \equiv u, \quad u^2 = v \quad$ (dove gli apici 1 e 2 sono indici alti e non esponenti).9

Allora avremo $g_{ij} = \bar{x}_i \cdot \bar{x}_j \ \ (i,j = 1,2)$ e la matrice della forma metrica sarà:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che $g_{ij} = g_{ij}(u,v) = g_{ij}(u^1,u^2)$

detto $g = det(g_{ij}) = EG - F^2$, allora (dall'identità di Lagrange) $|\bar{x}_1 \times \bar{x}_2|^2 = g$.

Nella nuova notazione la prima forma fondamentale diventa:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{11}(\mathrm{d}u^1)^2 + 2g_{12}\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2 + g_{22}(\mathrm{d}u^2)^2 = g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$$

Abbiamo usato la relazione $2g_{12} = g_{12} + g_{21}$ poiché la forma metrica è simmetrica, ossia $g_{ij} = g_{ji}$.

**Tip**: ***Notazione di Einstein***

Nella *notazione di Einstein*, quando un indice compare una volta in alto e una in basso, si sottointende una somma su tutti i valori possibili di tale indice. Per esempio, $g_{ij}\,\mathrm{d}u^i\,\mathrm{d}u^j$ significa $\sum_{i,j} g_{ij}\,\mathrm{d}u^i\,\mathrm{d}u^j$.

Un vettore tangente alla superficie $M$ nel punto $P$ può essere scritto come

$$\bar{v} = a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2, \quad \text{oppure, in forma esplicita} \quad \bar{v} = v^1\,\bar{x}_1 + v^2\,\bar{x}_2 = \sum_i v^i\,\bar{x}_i,$$

dove l'indice $i$ è una variabile indicizzata (è intercambiabile con altre lettere).

Consideriamo due vettori tangenti $\bar{v} = \sum_i v^i\,\bar{x}_i$ e $\bar{w} = \sum_j w^j\,\bar{x}_j$, entrambi definiti in $P$, il loro prodotto scalare è:

$$\bar{v}\cdot\bar{w} = \sum_{i,j}\left(v^i\,\bar{x}_i\cdot w^j\,\bar{x}_j\right) = \sum_{i,j} v^i\,w^j\,(\bar{x}_i\cdot\bar{x}_j) = \sum_{i,j} g_{ij}\,v^i\,w^j.$$

I vettori $\bar{v}$ e $\bar{w}$ sono ortogonali se e solo se $\sum_{i,j} g_{ij}\,v^i\,w^j = 0$

Definiamo ora $g^{ij}$ come gli elementi della matrice inversa di $g_{ij}$, in modo tale che:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

ovvero, in forma compatta,

$$\sum_j g_{ij}\,g^{jk} = \delta_i^k,$$

dove $\delta_i^k$ è la ***delta di Kronecker*** è definito da: $\quad \delta_i^k = \begin{cases} 1, & \text{se } i = k, \\ 0, & \text{se } i \neq k.\end{cases}$

Utilizzando la formula per l'inversa di una matrice $2\times 2$, otteniamo:

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g},$$

dove $g = \det(g_{ij}) = g_{11}\,g_{22} - g_{12}^2$.

Osserviamo ora come la prima forma fondamentale consenta non solo di determinare distanze e angoli, ma anche di calcolare le aree.

Sia $x : D \to E^3$ una superficie e sia $\Omega \subset D$ una regione del dominio in cui $x$ è biunivoca. Per calcolare l'area di $x(\Omega)$ suddividiamo $\Omega$ in piccoli rettangoli, tracciando linee parallele agli assi delle coordinate $u^1$ e $u^2$.

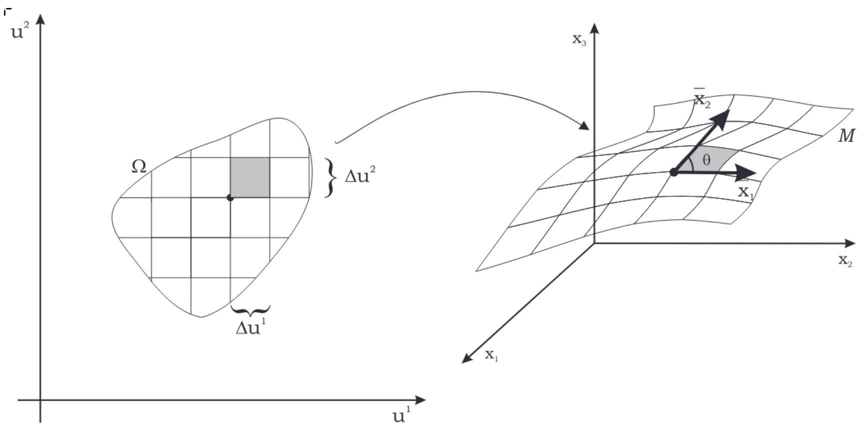



**Figure 1.9:** Area di una superficie

Ad una piccola areola di $\Omega$ con lati $\Delta u^1$ e $\Delta u^2$ corrisponde, approssimativamente, un pezzo di superficie a forma di parallelogramma, i cui lati sono paralleli ai vettori $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$. Le lunghezze dei lati sono rispettivamente

$$\Delta l_1 \simeq |\bar{x}_1|\,\Delta u^1, \qquad \Delta l_2 \simeq |\bar{x}_2|\,\Delta u^2.$$

Ricordiamo che, per definizione, $|\bar{x}_1| = \left|\frac{\partial\bar{x}}{\partial u^1}\right|$, per cui

$$\Delta\bar{x}_1 = \frac{\partial\bar{x}}{\partial u^1}\,\Delta u^1.$$

L'area dell'areola è data da

$$\Delta A = |\bar{x}_1|\,\Delta u^1 \cdot |\bar{x}_2|\,\Delta u^2\,\sin\theta = \underbrace{|\bar{x}_1 \times \bar{x}_2|\,\Delta u^1\,\Delta u^2 = \sqrt{g}\,\Delta u^1\,\Delta u^2}_{\text{identità di Lagrange}}$$

dove $\theta$ è l'angolo tra $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ e $g = \det(g_{ij})$.
Passando al limite in cui $\Delta u^1$, $\Delta u^2 \to 0$ e sommando su tutte le areole, l'area di $x(\Omega)$ è data da:

$$A = \iint_\Omega \sqrt{g}\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2.$$

Osserviamo che, in due dimensioni, la misura di un insieme coincide con l'area; in spazi di dimensione $n$, l'integrale di $\sqrt{g}$ fornisce rispettivamente un volume $n$-dimensionale. Questo procedimento vale per spazi (o *manifolds*) ***Riemanniani***, in cui $\mathrm{d}s^2 > 0$. Negli spazi ***pseudo-Riemanniani*** (ad esempio, lo *spazio-tempo di Minkowski* nella Relatività Speciale) alcuni elementi del tensore metrico possono essere negativi; in tali casi, poiché il determinante $g$ può risultare negativo, si usa in generale $\sqrt{|g|}$.

**❓ Example**: ***Sfera***

La sfera è uno spazio Riemanniano:

$$\mathrm{d}s^2 = R^2\cos^2 v\mathrm{d}u^2 + R^2\mathrm{d}v^2 \qquad \begin{cases} -\pi < u < \pi \\ -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Otteniamo la matrice:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2\cos^2 v & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad g = R^4\cos^2 v, \quad \sqrt{g} = R^2\cos v$$

Calcoliamo l'area:

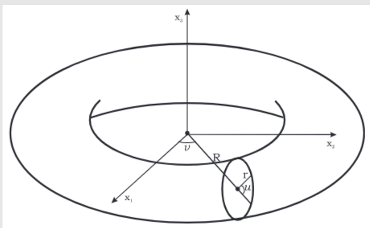
$$A = \iint_\Omega \sqrt{g}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}u\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos v\,\mathrm{d}v = \boxed{4\pi R^2}$$

**❓ Example**: ***Toro***

Consideriamo un esmepio più complesso, il toro:

$$\bar{x}(u,v) = [R + r\cos u]\cos v, [R + r\cos u]\sin n, r\sin u,$$

$$\begin{cases} 0 < v < 2\pi \\ 0 < u < 2\pi \\ 0 < r < R \end{cases}$$




Calcoliamo la prima forma fondamentale:

$$\begin{cases} E = R^2 + r^2\cos^2 u \\ F = 0 \\ G = r^2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{g} = \sqrt{EG - F^2} = r(R + r\cos u)$$

Calcoliamo l'area:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} r(R + r\cos u)du\right]\mathrm{d}v = 2\pi r\left[\int_0^{2\pi} R\,du + \int_0^{2\pi} r\cos u\,du\right] = \\ &= 2\pi r\left[2\pi R + r\int_0^{2\pi}\cos u\,du\right] = \boxed{4\pi^2 Rr} \end{aligned}$$

# 2
# Tensori

Introduciamo il concetto di *tensore*, fondamentale per descrivere grandezze geometriche e fisiche in modo indipendente dal sistema di coordinate scelto. Analizzeremo come queste grandezze si trasformano passando da un sistema di coordinate a un altro, definendo tensori controvarianti, covarianti e misti. Vedremo infine come il tensore metrico permetta di convertire tra componenti controvarianti e covarianti.

## 2.1 Leggi di Trasformazione Tensoriale

Il concetto chiave per definire un tensore è la sua **legge di trasformazione** al cambiare delle coordinate. Consideriamo due sistemi di coordinate $n$-dimensionali, $u^i = (u^1, ..., u^n)$ e $u'^j = (u'^1, ..., u'^n)$.

### Tensori Controvarianti (di Rango 1)

Ricordiamo dal Capitolo 1 che i differenziali delle coordinate si trasformano secondo la regola:

$$du'^j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u'^j}{\partial u^i} du^i$$

Una qualsiasi grandezza le cui componenti $V^i$ nel sistema $u$ si trasformano in $V'^j$ nel sistema $u'$ seguendo la *stessa* regola dei differenziali:

$$\boxed{V'^j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u'^j}{\partial u^i} V^i \quad \xrightarrow{\text{notazione di Einstein}} \quad V'^j = \frac{\partial u'^j}{\partial u^i} V^i}\,0$$

è definita **tensore controvariante di rango 1**, o semplicemente ***vettore controvariante***. Ne consegue che le componenti del differenziale delle coordinate, $du^i$, costituiscono esse stesse un vettore controvariante.

**Observation**: ***Scalari***

Una grandezza ***scalare*** $\Phi$ è una quantità il cui valore in un punto non dipende dal sistema di coordinate ($\Phi(u^i) = \Phi(u'^j)$). È considerato un **tensore di rango 0**. Un esempio fisico è la temperatura in un punto dello spazio.

### Tensori Covarianti (di Rango 1)

Consideriamo ora il ***gradiente*** di un campo scalare $\Phi$. Le sue componenti nel sistema $u^i$ sono date dalle derivate parziali $W_i = \partial\Phi/\partial u^i$. Vediamo come si trasformano queste componenti passando al sistema $u'^j$. Le componenti nel nuovo sistema sono $W'_j = \partial\Phi/\partial u'^j$. Usando la regola della catena per la derivazione:

$$W'_j = \frac{\partial\Phi}{\partial u'^j} = \sum_i \frac{\partial\Phi}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial u'^j} = \sum_i W_i \frac{\partial u^i}{\partial u'^j}$$

Una qualsiasi grandezza le cui componenti $W_i$ si trasformano secondo questa regola:

$$\boxed{W'_j = \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} W_i \quad \xrightarrow{\text{notazione di Einstein}} \quad W'_j = \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} W_i}$$

è definita **tensore covariante di rango 1**, o ***covettore*** (o ***forma 1***).

Notiamo che la trasformazione usa le derivate $\partial u^i/\partial u'^j$, inverse rispetto a quelle usate per i tensori controvarianti ($\partial u'^j/\partial u^i$). Le componenti del gradiente $\partial\Phi/\partial u^i$ formano un covettore.

**Tensore Metrico ($g_{ij}$) e suo Inverso ($g^{ij}$)**

Abbiamo visto nel Capitolo 1 che la distanza infinitesima al quadrato, $ds^2$, è uno scalare (invariante per cambi di coordinate). La sua espressione è data dalla prima forma fondamentale $ds^2 = g_{ij}du^i du^j$. Poiché $ds^2$ è invariante, deve valere in qualsiasi sistema di coordinate $ds^2 = g_{ij}du^i du^j = g'_{lk}du'^l du'^k$.

Sostituendo la legge di trasformazione per i differenziali $du^i = \frac{\partial u^i}{\partial u'^l}du'^l$ (e analogamente per $du^j$), otteniamo:

$$ds^2 = g_{ij}\left(\frac{\partial u^i}{\partial u'^l}du'^l\right)\left(\frac{\partial u^j}{\partial u'^k}du'^k\right) = \left(g_{ij}\frac{\partial u^i}{\partial u'^l}\frac{\partial u^j}{\partial u'^k}\right)du'^l du'^k$$

Confrontando questa espressione con $ds^2 = g'_{lk}du'^l du'^k$, e poiché l'uguaglianza deve valere per qualsiasi scelta dei differenziali $du'^l, du'^k$, deduciamo la legge di trasformazione per le componenti del tensore metrico:

$$\boxed{g'_{lk} = g_{ij}\frac{\partial u^i}{\partial u'^l}\frac{\partial u^j}{\partial u'^k}}$$

Tale trasformazione coinvolge due fattori $\partial u/\partial u'$ e conferma che $g_{ij}$ è un **tensore covariante di rango 2**.

Consideriamo ora la matrice inversa del tensore metrico, le cui componenti sono indicate con $g^{ij}$, definita dalla relazione fondamentale $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$. Vogliamo determinare come si trasformano le componenti $g^{ij}$ al cambiare delle coordinate. Supponiamo che $g^{ij}$ si trasformi come un tensore controvariante di rango 2, ovvero:

$$g'^{pq} = g^{ik}\frac{\partial u'^p}{\partial u^i}\frac{\partial u'^q}{\partial u^k} \quad \text{(Ipotesi)}$$

Per verificare questa ipotesi, controlliamo se essa è consistente con l'invarianza della delta di Kronecker, cioè se $g'^{pq}g'_{qn} = \delta_n^p$. Utilizziamo le leggi di trasformazione per $g'^{pq}$ (ipotizzata) e per $g'_{qn}$ (nota):

1. Partiamo da
$$g'^{pq}g'_{qn} = (g^{ik}\frac{\partial u'^p}{\partial u^i}\frac{\partial u'^q}{\partial u^k})(g_{mj}\frac{\partial u^m}{\partial u'^q}\frac{\partial u^j}{\partial u'^n})$$

2. Raggruppiamo le derivate e i tensori metrici:
$$= g^{ik}g_{mj}\frac{\partial u'^p}{\partial u^i}(\frac{\partial u'^q}{\partial u^k}\frac{\partial u^m}{\partial u'^q})\frac{\partial u^j}{\partial u'^n}$$

3. Applichiamo la regola della catena all'interno delle parentesi:
$$\frac{\partial u'^q}{\partial u^k}\frac{\partial u^m}{\partial u'^q} = \delta_k^m \qquad \rightarrow \qquad = g^{ik}g_{mj}\frac{\partial u'^p}{\partial u^i}\delta_k^m\frac{\partial u^j}{\partial u'^n} = g^{ik}g_{kj}\frac{\partial u'^p}{\partial u^i}\frac{\partial u^j}{\partial u'^n}$$

4. Usiamo $g^{ik}g_{kj} = \delta_j^i$:
$$= \delta_j^i\frac{\partial u'^p}{\partial u^i}\frac{\partial u^j}{\partial u'^n} = \frac{\partial u'^p}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial u'^n}$$

5. Di nuovo la catena dà
$$\frac{\partial u'^p}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial u'^n} = \delta_n^p$$

Poiché la verifica $g'^{pq}g'_{qn} = \delta_n^p$ ha successo, l'ipotesi iniziale era corretta. La legge di trasformazione per le componenti della metrica inversa è quindi:

$$\boxed{g'^{lk} = g^{ij}\frac{\partial u'^l}{\partial u^i}\frac{\partial u'^k}{\partial u^j}}$$

Tale trasformazione coinvolge due fattori $\frac{\partial u'}{\partial u}$ e conferma che $g^{ij}$ è un **tensore controvariante di rango 2**.

**Tensori Misti**

Un tensore può avere sia indici controvarianti (in alto) che covarianti (in basso). Un esempio fondamentale è la **delta di Kronecker** $\delta_i^k$, che è un ***tensore misto di rango 2*** (1 controvariante, 1 covariante). Per un generico tensore misto, come $V_i^j$, la legge di trasformazione combina le regole precedenti: un fattore $\partial u' / \partial u$ per ogni indice controvariante e un fattore $\partial u / \partial u'$ per ogni indice covariante:

$$V_l'^k = \frac{\partial u'^k}{\partial u^j} \frac{\partial u^i}{\partial u'^l} V_i^j$$

**Observation**: ***Rango e Indici***

Un tensore ha **rango** $N+M$ se ha $N$ indici controvarianti e $M$ covarianti (spesso detto di tipo $(N,M)$).
**Nota**: *Non tutti gli oggetti matematici definiti con indici si trasformano come tensori. Un esempio importante che vedremo più avanti sono i simboli di Christoffel* $\Gamma_{ij}^k$.

**Tip**: ***Invarianza della Delta di Kronecker***

Si può dimostrare che $\delta_i^k$ è l'unico tensore (a parte gli scalari costanti e il tensore nullo) le cui componenti sono le stesse in tutti i sistemi di coordinate.

$$\delta_l'^k = \frac{\partial u'^k}{\partial u^j} \frac{\partial u^i}{\partial u'^l} \delta_i^j = \frac{\partial u'^k}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} = \frac{\partial u'^k}{\partial u'^l} = \delta_l^k$$

### 2.1.1 Algebra Tensoriale

Le operazioni algebriche di base (somma, prodotto per scalare) si applicano ai tensori componente per componente, a patto che abbiano lo stesso rango e lo stesso tipo (stesso numero di indici controvarianti e covarianti). Esistono inoltre operazioni specifiche per i tensori:

- **Prodotto Esterno (o Tensoriale):** Il prodotto esterno di due tensori genera un nuovo tensore il cui rango è la somma dei ranghi dei tensori originali. Ad esempio, il prodotto esterno di un tensore di tipo (0,2), $A_{ij}$, e di un vettore controvariante (tipo (1,0)), $C^k$, è un tensore di tipo (1,2):

  $$D_{ij}^k = A_{ij} C^k$$

  Le componenti del nuovo tensore sono semplicemente il prodotto delle componenti dei tensori originali. Non si applica la somma di Einstein in questo caso, poiché non ci sono indici ripetuti.
- **Contrazione:** La contrazione riduce il rango di un tensore di 2. Si applica a un tensore che abbia almeno un indice controvariante e uno covariante. Consiste nell'eguagliare uno degli indici superiori con uno degli indici inferiori e sommare su quell'indice secondo la convenzione di Einstein. Ad esempio:

  $$\text{Sia } T_{kl}^j \text{ un tensore (1,2). Contraendo gli indici } j \text{ e } l \text{ si ottiene:} \quad B_k = T_{kj}^j$$

  $B_k$ è un tensore di rango 1 (covariante).
- **Prodotto Scalare (Contrazione + Prodotto Esterno):** Il prodotto scalare tra due vettori (che geometricamente è $\bar{v} \cdot \bar{w}$) può essere visto come il prodotto esterno seguito da una doppia contrazione usando il tensore metrico. Per due vettori controvarianti $v^i$ e $w^j$, il prodotto esterno è $v^i w^j$. Contraendo con $g_{ij}$:

  $$\text{Scalare } = g_{ij} v^i w^j \quad (= \bar{v} \cdot \bar{w})$$

  Analogamente, per due vettori covarianti $v_i$ e $w_j$:

  $$\text{Scalare } = g^{ij} v_i w_j$$

  E per un vettore controvariante $v^i$ e uno covariante $w_j$:

  $$\text{Scalare } = v^i w_i \quad (= v^i g_{ij} w^j)$$

- **Innalzare e Abbassare Indici:** Il tensore metrico $g_{ij}$ e il suo inverso $g^{ij}$ permettono di convertire componenti controvarianti in covarianti e viceversa, mantenendo l'identità del tensore sottostante. Per un vettore **D** con componenti controvarianti $D^j$ e covarianti $D_i$:

  $$\boxed{D_i = g_{ij} D^j} \quad \text{(abbassare l'indice } j)$$

  $$\boxed{D^i = g^{ij} D_j} \quad \text{(innalzare l'indice } j)$$

  Questo si estende a tensori di rango superiore. Ad esempio, per un tensore $T^{ij}$: $T^i_j = g_{jk} T^{ik}$, $T_{ij} = g_{ik} T^k_j = g_{ik} g_{jl} T^{kl}$, ecc.

**Tip:**

L'operazione di abbassare l'indice di un vettore controvariante $v^i$ per ottenere $v_k = g_{ik} v^i$ corrisponde geometricamente a calcolare la proiezione del vettore $\bar{v}$ sulla direzione definita dal vettore di base $\bar{x}_k$: $v_k \equiv \bar{v} \cdot \bar{x}_k$. Questo sarà utile nell'interpretazione grafica.

### 2.1.2 Rappresentazione Geometrica delle Componenti Vettoriali

Mentre un vettore $\bar{A}$ è un'entità geometrica indipendente dalle coordinate, le sue *componenti* dipendono dal sistema di coordinate e dalla base scelta. Capire la differenza tra componenti controvarianti ($A^i$) e covarianti ($A_i$) può essere più intuitivo con un esempio grafico.

Consideriamo un piano con un sistema di coordinate $u^1, u^2$ non necessariamente ortogonali. In un punto $P$, i **vettori di base covarianti** $\bar{x}_1 = \partial \bar{r} / \partial u^1$ e $\bar{x}_2 = \partial \bar{r} / \partial u^2$ sono tangenti alle linee coordinate passanti per $P$. Questi vettori formano la *base naturale* o *base covariante*.

Un vettore $\bar{A}$ può essere scomposto in questa base:

$$\bar{A} = A^1 \bar{x}_1 + A^2 \bar{x}_2 = A^i \bar{x}_i$$

Le $A^i$ sono le **componenti controvarianti**. Geometricamente, esse corrispondono alle componenti ottenute scomponendo il vettore $\bar{A}$ tramite la *regola del parallelogramma*, usando direzioni parallele ai vettori di base $\bar{x}_i$. Sono le "usuali" componenti vettoriali.

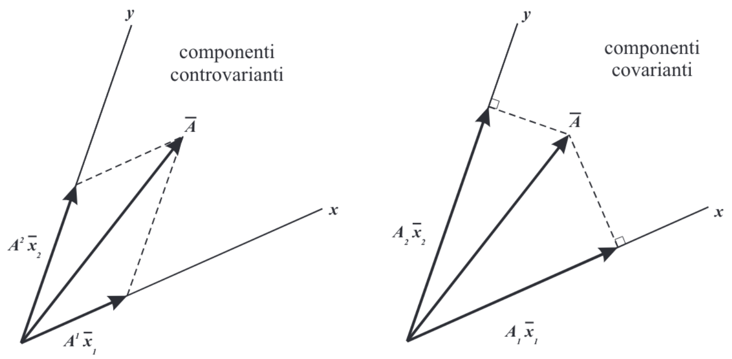



**Figure 2.1:** Rappresentazione geometrica delle componenti controvarianti ($A^i$) e covarianti ($A_i$) di un vettore $\bar{A}$ in una base non ortogonale ($\bar{x}_1, \bar{x}_2$). Le componenti controvarianti sono ottenute con proiezioni parallele agli assi, mentre quelle covarianti con proiezioni ortogonali ai vettori della base duale (non mostrata) o equivalentemente $A_i = \bar{A} \cdot \bar{x}_i$.

Le **componenti covarianti** $A_i$ sono definite dal prodotto scalare del vettore $\bar{A}$ con i vettori della base covariante:

$$A_i = \bar{A} \cdot \bar{x}_i$$

Geometricamente, $A_i$ rappresenta la *proiezione ortogonale* del vettore $\bar{A}$ sulla direzione del vettore di base $\bar{x}_i$, moltiplicata per la lunghezza di $\bar{x}_i$ (infatti $A_i = |\bar{A}||\bar{x}_i| \cos \theta_i$).

**Attenzione:** questo <u>non</u> corrisponde alla proiezione ortogonale sugli assi coordinati, a meno che la base non sia ortonormale.

- Se la base $\{\bar{x}_i\}$ è **ortonormale** ($g_{ij} = \delta_{ij}$), allora $\bar{A} = A^i \bar{x}_i$ e $A_i = \bar{A} \cdot \bar{x}_i = (A^j \bar{x}_j) \cdot \bar{x}_i = A^j (\bar{x}_j \cdot \bar{x}_i) = A^j \delta_{ji} = A^i$. In questo caso, e solo in questo caso, le componenti controvarianti e covarianti coincidono.
- Se la base è solo **ortogonale** ($g_{ij} = 0$ per $i \neq j$), le componenti controvarianti e covarianti sono proporzionali: $A_i = g_{ii} A^i$ (no somma).
- Nel caso generale **non ortogonale**, le componenti sono distinte e legate dalla metrica: $A_i = g_{ij} A^j$.

**Observation**: ***Principio di Covarianza Generale***

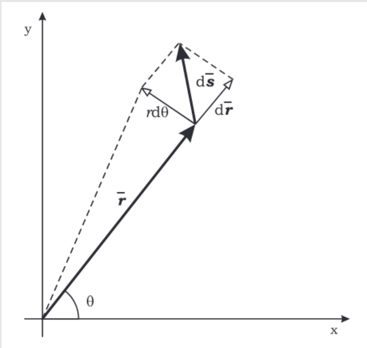
La distinzione tra componenti controvarianti e covarianti è cruciale in Relatività Generale. Il **Principio di Covarianza Generale** afferma che le leggi fisiche devono essere espresse da equazioni tensoriali. Un'equazione tra tensori (es. $A^{\alpha}_{\beta\gamma} = B^{\alpha}_{\beta\gamma}$) è valida in un sistema di coordinate se e solo se è valida in tutti i sistemi di coordinate, poiché entrambi i membri si trasformano allo stesso modo. Questo garantisce che le leggi fisiche siano indipendenti dalla scelta (arbitraria) delle coordinate.

**Example**: ***Vettori nel piano in coordinate polari***

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad \rightarrow \quad u^1 \equiv r \qquad u^2 = \theta$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$$

$$g = r^2 \quad \rightarrow \quad \sqrt{g} = r$$




Dati $A_i = (5,9)$ e $B^i = (3,7)$, abbiamo:

$$A_i B^i = A_1 B^1 + A_2 B^2 = 5 \cdot 3 + 9 \cdot 7 = 78$$

in particolare:

$$\begin{array}{lcl} A^i = g^{ij} A_j & \rightarrow & A^1 = g^{11} A_1 + g^{12} A_2 = 1 \cdot 5 + 0 \cdot 9 = 5 \\ & \rightarrow & A^2 = g^{21} A_1 + g^{22} A_2 = 0 \cdot 5 + 1/r^2 \cdot 9 = 9/r^2 \\ B_i = g_{ij} B^j & \rightarrow & B_1 = g_{11} B^1 + g_{12} B^2 = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 7 = 3 \\ & \rightarrow & B_2 = g_{21} B^1 + g_{22} B^2 = 0 \cdot 3 + r^2 \cdot 7 = 7r^2 \end{array}$$

Quindi:

$$A^i B_i = A^1 B_1 + A^2 B_2 = 5 \cdot 3 + 9/r^2 \cdot 7r^2 = 78 = A_i B^i$$

Cioè $A^i B_i = g_{ij} A^i B^j = g^{ij} A_j B_i = A_i B^i$ è invariante.

<u>**Nota**</u>: Abbiamo che $dS = \sqrt{g} \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2 \rightarrow r dr d\theta$ è l'elemento di superficie.

## 2.2 Curvatura di una Superficie

Dopo aver definito la metrica intrinseca di una superficie tramite la prima forma fondamentale, possiamo esplorare un concetto geometrico fondamentale: la ***curvatura***. Mentre la curvatura di una curva piana è descritta da un singolo numero (il raggio di curvatura o il suo inverso), la curvatura di una superficie in un punto è più complessa e dipende dalla direzione considerata.

### 2.2.1 Curvature Normali e Principali

Consideriamo un punto $P$ su una superficie regolare $M$ e il versore normale $\hat{n}$ in $P$. Per ogni vettore tangente $\bar{v}$ in $P$, il piano definito da $\hat{n}$ e $\bar{v}$ interseca la superficie $M$ lungo una curva $\mathscr{C}_{\bar{v}}$.

Questa curva $\mathscr{C}_{\bar{v}}$ ha una sua curvatura $k$ nel punto $P$, definita come visto per le curve piane (Sezione 1.2). La **curvatura normale** $k_n(\bar{v})$ della superficie $M$ in $P$ lungo la direzione $\bar{v}$ è definita come:

$$k_n(\bar{v}) = k\cos\alpha$$

dove $\alpha$ è l'angolo tra il versore normale alla curva $\mathscr{C}_{\bar{v}}$ e il versore normale alla superficie $\hat{n}$ in $P$. Alternativamente, si può definire $k_n = \pm 1/R$, dove $R$ è il raggio di curvatura della curva $\mathscr{C}_{\bar{v}}$ e il segno dipende da quale lato giace il centro di curvatura rispetto a $\hat{n}$.

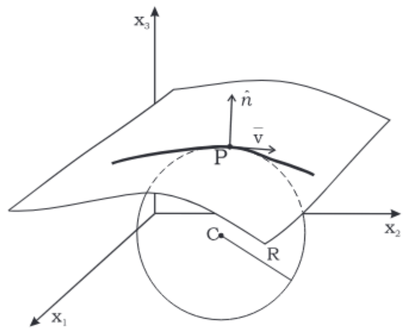



**Figure 2.2:** Curvatura normale $k_n$ in un punto $P$ lungo la direzione $\bar{v}$.

Si dimostra (Teorema di Eulero sulla curvatura) che al variare della direzione del versore tangente $\bar{v}$ nel piano tangente in $P$, la curvatura normale $k_n(\bar{v})$ assume un valore massimo $k_1$ e un valore minimo $k_2$ in due direzioni tra loro ortogonali.

$k_1$ e $k_2$ sono chiamate **curvature principali** e le rispettive direzioni sono dette **direzioni principali**.

### 2.2.2 Curvatura Gaussiana e Curvatura Media

A partire dalle curvature principali, si definiscono due importanti misure scalari della curvatura in $P$:

- La **Curvatura Gaussiana** $K$: È il prodotto delle curvature principali.

  $$K = k_1 \cdot k_2$$

  La curvatura Gaussiana è una misura *intrinseca* della curvatura (Teorema Egregium di Gauss): può essere calcolata conoscendo solo la prima forma fondamentale ($g_{ij}$) e le sue derivate, senza riferimento allo spazio ambiente $\mathbb{R}^3$. Questo la rende fondamentale in Relatività Generale.

- La **Curvatura Media** $H$: È la media aritmetica delle curvature principali.

  $$H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

  La curvatura media è una misura *estrinseca*, dipende da come la superficie è immersa nello spazio ambiente.

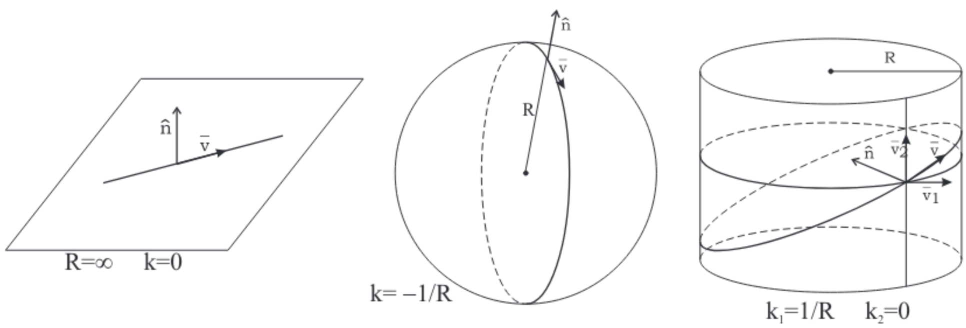



**Figure 2.3:** Esempi di curvature principali e Gaussiana: (a) Piano: $k_1 = k_2 = 0 \Rightarrow K = 0$. (b) Sfera di raggio R: $k_1 = k_2 = 1/R \Rightarrow K = 1/R^2 > 0$. (c) Cilindro: $k_1 = 1/R, k_2 = 0 \Rightarrow K = 0$.

**Observation**: ***Curvatura e Forma Locale della Superficie***

La curvatura Gaussiana $K$ fornisce informazioni qualitative sulla forma locale della superficie attorno a un punto $P$.

- Se $K > 0$ (punto ellittico), la superficie sta "tutta da una parte" rispetto al piano tangente $\pi$ in $P$ (almeno localmente), come nel caso della sfera.
- Se $K < 0$ (punto iperbolico o a sella), la superficie attraversa il piano tangente, assomigliando localmente a una sella. Un esempio è il paraboloide iperbolico $z = x^2 - y^2$.
- Se $K = 0$ (punto parabolico), la situazione è intermedia (come nel cilindro o nel piano).

Possiamo capire meglio questa relazione analizzando lo sviluppo in serie di Taylor della superficie attorno al punto $P$.

Supponiamo, per semplicità, di scegliere un sistema di coordinate $(x, y)$ tale che $P$ sia l'origine $(0,0)$ e il piano tangente in $P$ sia il piano $z = 0$.

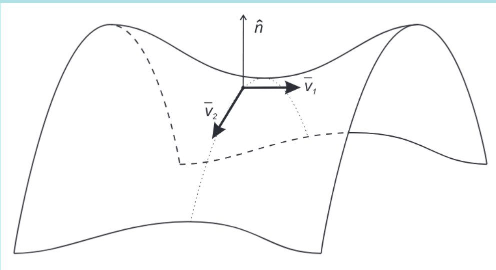



**Figure 2.4:** Punto iperbolico ($K < 0$)

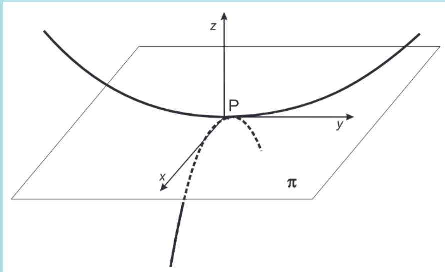



**Figure 2.5:** Sviluppo locale attorno a $P$

L'equazione locale della superficie sarà $z = f(x,y)$, con $f(0,0) = 0$ e $\partial f/\partial x|_P = \partial f/\partial y|_P = 0$. Lo sviluppo di Taylor al secondo ordine è:

$$z = \underbrace{f(0,0)}_{0} + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P}_{0} x + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P}_{0} y + \frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_P x^2 + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_P xy + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_P y^2\right] + \mathcal{O}(3)$$

Raccogliendo i termini del secondo ordine:

$$z \approx \frac{1}{2}\left(ax^2 + 2bxy + cy^2\right)$$

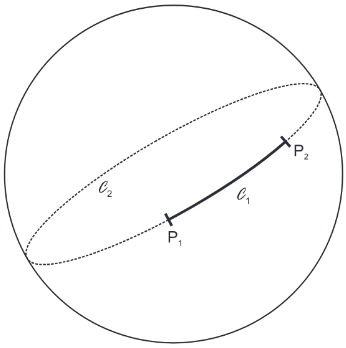
dove $a = \partial^2 f/\partial x^2|_P$, $b = \partial^2 f/\partial x\partial y|_P$, $c = \partial^2 f/\partial y^2|_P$.
L'equazione $ax^2 + 2bxy + cy^2 =$ costante (corrispondente a tagliare la superficie con un piano $z =$ costante vicino a $P$) descrive una conica nel piano $xy$. La natura di questa conica dipende dal segno del discriminante della forma quadratica, $\Delta = ac - b^2$.

Si può dimostrare che questo segno è direttamente legato al segno della curvatura Gaussiana $K$ in $P$:

- Se $ac - b^2 > 0$ (corrisponde a $K > 0$): l'equazione descrive un'ellisse. La superficie è localmente concava o convessa come una scodella (punto ellittico).
- Se $ac - b^2 = 0$ (corrisponde a $K = 0$): l'equazione descrive una parabola o linee parallele (punto parabolico).
- Se $ac - b^2 < 0$ (corrisponde a $K < 0$): l'equazione descrive un'iperbole (punto iperbolico o a sella).

Inoltre, orientando opportunamente gli assi $x, y$ lungo le direzioni principali in $P$, il termine misto $b$ si annulla e lo sviluppo diventa $z \approx \frac{1}{2}(a'x'^2 + c'y'^2)$. Le costanti $a'$ e $c'$ sono direttamente proporzionali alle curvature principali $k_1$ e $k_2$.

## 2.3 Geodetiche




Intuitivamente, una ***geodetica*** su una superficie (o più in generale, su una varietà Riemanniana o pseudo-Riemanniana) è la curva che generalizza il concetto di "linea retta" in uno spazio curvo. È la curva di lunghezza "stazionaria" (spesso minima, ma non sempre) tra due punti sufficientemente vicini.

Ad esempio su una sfera sono geodetiche tra i punti $P_1$ e $P_2$ sia $\mathscr{C}_1$ che $\mathscr{C}_2$ (entrambi archi di cerchio massimo), ma il cammino più breve corrisponde a $\mathscr{C}_1$ .

**Definizione Variazionale**

Consideriamo una curva $\bar{r}(t) = \bar{x}(u^i(t))$ su una superficie, che collega due punti $P_1 = \bar{r}(t_1)$ e $P_2 = \bar{r}(t_2)$. La lunghezza di questa curva è data dall'integrale dell'elemento di lunghezza $ds$:

$$ds^2 = g_{jk} du^j du^k \qquad \Rightarrow \qquad S = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{jk} \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt}}\, dt$$

Definiamo il Lagrangiano $L$ come l'integrando:

$$L(u^i, \dot{u}^i, t) = \sqrt{g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k} \equiv \sqrt{F} \qquad \text{dove } \dot{u}^i = \frac{du^i}{dt}$$

**Definition: *Geodetiche***

Una curva è una geodetica se la sua lunghezza $S$ è stazionaria rispetto a piccole variazioni della curva che mantengano fissi gli estremi $P_1$ e $P_2$. Dal calcolo delle variazioni, ciò avviene se le coordinate $u^i(t)$ soddisfano le **equazioni di Eulero-Lagrange**:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial u^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i}\right) = 0 \quad \text{per ogni } i}$$

### 2.3.1 Derivazione dell'Equazione delle Geodetiche

Calcoliamo i termini delle equazioni di Eulero-Lagrange usando $L = \sqrt{F}$.

1. **Calcolo di $\partial L / \partial u^i$**:

$$\frac{\partial L}{\partial u^i} = \frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{\partial F}{\partial u^i} = \frac{1}{2L} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^j \dot{u}^k$$

2. **Calcolo di $\partial L / \partial \dot{u}^i$**:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i} = \frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{\partial F}{\partial \dot{u}^i} = \frac{1}{2L} (g_{ik} \dot{u}^k + g_{ji} \dot{u}^j)$$

Usando la simmetria $g_{ji} = g_{ij}$ e scambiando gli indici muti $k \leftrightarrow j$ nel secondo termine:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i} = \frac{1}{2L} (g_{ik} \dot{u}^k + g_{ik} \dot{u}^k) = \frac{1}{L} g_{ik} \dot{u}^k$$

3. **Equazione di Eulero-Lagrange**: Sostituendo i termini calcolati:

$$\frac{1}{2L} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^j \dot{u}^k - \frac{d}{dt}\left(\frac{g_{ik} \dot{u}^k}{L}\right) = 0$$

4. **Semplificazione con Parametrizzazione Affine**: L'equazione si semplifica notevolmente se scegliamo un parametro $t$ tale che sia proporzionale all'ascissa curvilinea $s$, cioè $s = \alpha t + \beta$. Per semplicità, assumiamo $t = s$ (scegliendo $\alpha = 1, \beta = 0$), che corrisponde a parametrizzare la curva con la sua lunghezza d'arco. In questo caso:

$$L = \sqrt{g_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}} = \frac{ds}{ds} = 1 \quad \text{(costante)}$$

Poiché $L = 1$, la derivata $\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{ds} = 0$. L'equazione di Eulero-Lagrange diventa:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\dot{u}^j\dot{u}^k - \frac{d}{ds}\left(g_{ik}\dot{u}^k\right) = 0$$

dove ora $\dot{u}^k = du^k/ds$. Calcolando la derivata totale rispetto a $s$:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\dot{u}^j\dot{u}^k - \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}\frac{du^l}{ds}\dot{u}^k + g_{ik}\frac{d\dot{u}^k}{ds}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\dot{u}^j\dot{u}^k - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}\dot{u}^l\dot{u}^k - g_{ik}\ddot{u}^k = 0$$

dove $\ddot{u}^k = d^2u^k/ds^2$. Moltiplicando per -1 e riordinando:

$$g_{ik}\ddot{u}^k + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}\dot{u}^l\dot{u}^k - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{lk}}{\partial u^i}\dot{u}^l\dot{u}^k = 0$$

(Nell'ultimo termine abbiamo scambiato gli indici muti $j \leftrightarrow l$).

5. **Introduzione dei Simboli di Christoffel**: Per raggruppare i termini e introdurre i simboli di Christoffel.

Sfruttando la simmetria del prodotto $\dot{u}^l\dot{u}^k$ (che è simmetrico rispetto allo scambio degli indici $l,k$), si ottiene:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}\dot{u}^l\dot{u}^k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^k}\right)\dot{u}^l\dot{u}^k$$

Sostituendo nell'equazione precedente:

$$g_{ik}\ddot{u}^k + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^i}\right)\right]\dot{u}^l\dot{u}^k = 0$$

Il termine tra parentesi quadre è proprio $\Gamma_{ilk}$. Quindi:

$$g_{ik}\ddot{u}^k + \Gamma_{ilk}\dot{u}^l\dot{u}^k = 0$$

(Abbiamo rinominato l'indice muto $j \to l$ rispetto alla formula $\Gamma_{ijk}$ per coerenza).

6. **Equazione Finale**: Moltiplichiamo ora per $g^{mi}$ e sommiamo sull'indice $i$:

$$g^{mi}g_{ik}\ddot{u}^k + g^{mi}\Gamma_{ilk}\dot{u}^l\dot{u}^k = 0$$

$$\delta^m_k\ddot{u}^k + \Gamma^m_{lk}\dot{u}^l\dot{u}^k = 0$$

dove abbiamo usato la definizione dei simboli di Christoffel di seconda specie $\Gamma^m_{lk} = g^{mi}\Gamma_{ilk}$. Ridenominando l'indice libero $m \to l$ e gli indici muti $(l,k) \to (j,k)$:

$$\boxed{\frac{d^2u^l}{ds^2} + \Gamma^l_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds} = 0}$$

Questa è l'**equazione delle geodetiche** quando la curva è parametrizzata rispetto alla sua lunghezza d'arco $s$. Tale equazione esprime la condizione di stazionarietà, cioè l'equazione differenziale che definisce una geodetica

**Definition**: ***Simboli di Christoffel***

1. I **simboli di Christoffel di prima specie** sono:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\right)$$

2. I **simboli di Christoffel di seconda specie** (o ***connessione affine*** di Levi-Civita) sono:

$$\Gamma^l_{jk} = g^{li}\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}g^{li}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\right)$$

cioè è una quantità dipendente da $g_{ij}$ e dalle sue derivate prime. Si noti inoltre che $\Gamma^l_{jk} = \Gamma^l_{kj}$.
Entrambi sono simmetrici negli ultimi due indici inferiori: $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ikj}$ e $\Gamma^l_{jk} = \Gamma^l_{kj}$.
Per convenienza, si usa spesso la notazione con la virgola per le derivate parziali: $\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} \equiv g_{ik,j}$.

È fondamentale notare che i simboli di Christoffel $\Gamma^l_{jk}$, nonostante abbiano tre indici, **non sono le componenti di un tensore**. La loro legge di trasformazione sotto un cambio di coordinate $u^i \to u'^m$ è più complessa:

$$\Gamma'^l_{mn} = \frac{\partial u'^l}{\partial u^l}\frac{\partial u^j}{\partial u'^m}\frac{\partial u^k}{\partial u'^n}\Gamma^l_{jk} + \underbrace{\frac{\partial u'^l}{\partial u^l}\frac{\partial^2 u^l}{\partial u'^m \partial u'^n}}$$

La presenza del secondo termine (che coinvolge le derivate seconde delle funzioni di trasformazione) impedisce ai $\Gamma^l_{jk}$ di trasformarsi come un tensore. Tuttavia, l'intera equazione delle geodetiche è un'equazione tensoriale (uguaglianza tra due tensori nulli, o meglio, tra l'accelerazione covariante e zero), garantendo la sua validità in ogni sistema di coordinate.

**Example**: ***Piano in coordinate cartesiane***

Nel caso banale di una trasformazione da coordinate cartesiane ad altre coordinate cartesiane $(u,v) \to (x,y)$, la metrica è data da:

$$u,v \to x,y \quad \Rightarrow \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il tensore metrico è diagonale, quindi l'elemento di linea si semplifica a:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j = \sum_{ij} g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j = \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2$$

Nel piano cartesiano, tutte le derivate della metrica sono nulle, quindi anche tutti i simboli di Christoffel sono nulli. Le equazioni delle geodetiche si semplificano quindi a:
Abbiamo quindi:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2u^i}{\mathrm{d}s^2} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2v^i}{\mathrm{d}s^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = a \quad \to \quad x = as+b \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = b \quad \to \quad y = cs+d \end{cases}$$

Abbiamo dunque:

$$s = \frac{x-b}{a} \qquad y = c\frac{x-b}{a} + d = \frac{c}{a}x + \left(d - \frac{cb}{a}\right)$$

dunque, rinominando $m = \dfrac{c}{a}$ e $n = d - \dfrac{cb}{a}$, otteniamo l'equazione di una retta:

$$y = mx + n$$

**Example**: ***Piano in coordinate polari***

Nel caso del piano in coordinate polari, le coordinate sono $(r, \theta)$ e la metrica è data da:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2, \qquad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}.$$

$$\frac{d^2u^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0$$

Ricordiamo che i simboli di Christoffel sono dati da:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ir} \left( \frac{\partial g_{jr}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^r} \right)$$

ricordando anche la simmetria su $j$ e $k$.
Calcoliamo esplicitamente i simboli di Christoffel:

- Se $i = r = 1$:

$$\Gamma^1_{jk} = \frac{1}{2} g^{11} \left( \frac{\partial g_{j1}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{k1}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^1} \right) \quad \text{perchè } g^{12} = 0$$

  - Se $j = k = 2$ (tutti gli altri termini sono nulli):

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2} g^{11} \left( \cancel{\frac{\partial g_{21}}{\partial u^2}} + \cancel{\frac{\partial g_{21}}{\partial u^2}} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right) = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\partial r^2}{\partial r} = -r$$

- Se $i = r = 2$:

$$\Gamma^2_{jk} = \frac{1}{2} g^{22} \left( \frac{\partial g_{j2}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{k2}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^2} \right) \quad \text{perchè } g^{21} = 0$$

  - Se $j = 1, k = 2$ (tutti gli altri termini sono nulli):

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2} g^{22} \left( \cancel{\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - \cancel{\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r}$$

Si ottiene quindi:

$$\boxed{\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = 0}$$

Da cui otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2r}{ds^2} - r \left( \dfrac{d\theta}{ds} \right)^2 = 0 \\ \dfrac{d^2\theta}{ds^2} + \dfrac{2}{r} \left( \dfrac{dr}{ds} \right) \left( \dfrac{d\theta}{ds} \right) = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema di equazioni differenziali rappresentano sempre rette nel piano Euclideo, come ci si aspetta. Un caso particolare per illustrarlo si ha se $\frac{d\theta}{ds} = 0$ (corrispondente a un moto lungo un raggio, con $\theta =$ costante). In questa situazione, la prima equazione del sistema si semplifica in $\frac{d^2r}{ds^2} = 0$. Integrando due volte, si ottiene $\frac{dr}{ds} =$ costante e $r(s)$ lineare in $s$, il che descrive appunto una retta passante per l'origine.

Abbiamo definito le geodetiche su una superficie (che sono le analoghe alle rette nel piano cartesiano). Sappiamo che, sul piano, la circonferenza $C$ di un cerchio di raggio $a$ è $C = 2\pi a$.

In modo analogo, su una superficie qualsiasi, possiamo definire una "circonferenza geodetica" di raggio $a$ e centro $O$ nel seguente modo:

- Da $O$ tracciamo tutte le geodetiche (le "rette" della superficie).
- Su ciascuna geodetica, individuiamo il punto che dista da $O$ una lunghezza (ascissa curvilinea) pari ad $a$.

L'insieme di tutti questi punti costituisce la circonferenza geodetica di raggio $a$ e centro $O$.

Possiamo ora chiederci: qual è la lunghezza $C$ di questa circonferenza? E come dipende dalla curvatura della superficie?

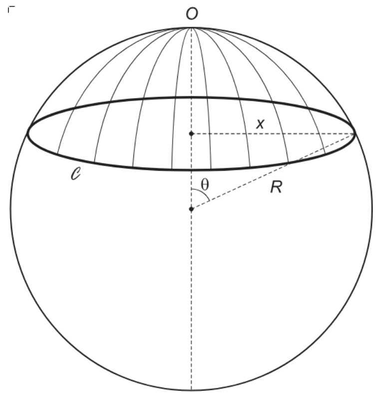
Vediamo il caso della sfera di raggio $R$ (che possiamo visualizzare nello spazio euclideo $E^3$):

$$C = 2\pi x = 2\pi R \sin\left(\frac{a}{R}\right)$$

Dove $x = R\sin(a/R)$ è il raggio del "parallelo" a distanza $a$ dal polo.

Per $a \ll R$ (cioè per cerchi piccoli rispetto al raggio della sfera), possiamo sviluppare il seno in serie di Taylor:

$$\sin\left(\frac{a}{R}\right) \approx \frac{a}{R} - \frac{1}{6}\left(\frac{a}{R}\right)^3 + \cdots$$




Sostituendo:

$$C \approx 2\pi R\left(\frac{a}{R} - \frac{1}{6}\frac{a^3}{R^3}\right) = 2\pi a - \frac{\pi}{3}\frac{a^3}{R^2} + O(a^5)$$

Osserviamo che:

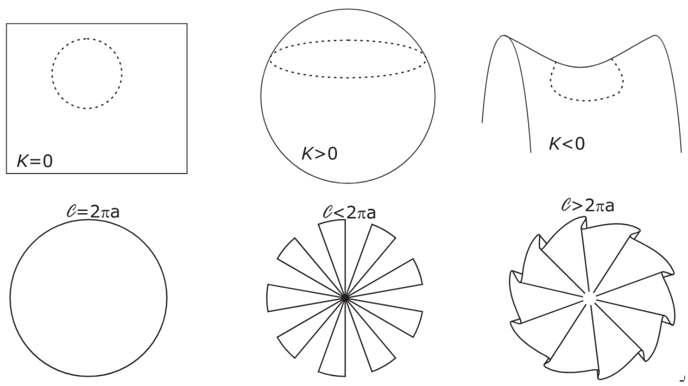
- **Sul piano**, $C = 2\pi a$ esattamente.
- **Sulla sfera**, la lunghezza della circonferenza è minore di $2\pi a$ a causa della curvatura positiva.

La differenza $2\pi a - C$ è legata alla curvatura della superficie. Infatti, per la sfera la curvatura di Gauss è $K = 1/R^2$. Possiamo allora scrivere, trascurando i termini di ordine superiore:

$$K = 3\pi \lim_{a\to 0}\left(\frac{2\pi a - C}{a^3}\right)$$

Questa formula vale in generale: misura come la lunghezza della circonferenza geodetica si discosta dal caso piano, per piccoli raggi $a$.

Se $K = 0$ (piano): $C = 2\pi a$. Se $K > 0$ (sfera): $C < 2\pi a$. Se $K < 0$ (punto di sella): $C > 2\pi a$.




La curvatura di Gauss $K$ è dunque una proprietà ***locale*** e ***intrinseca*** della superficie: dipende solo dalle distanze misurabili sulla superficie stessa, non dal modo in cui essa è immersa nello spazio. $K$ è invariante rispetto al sistema di coordinate scelto (come $ds^2$), anche se può variare da punto a punto sulla superficie (invariante non significa costante).

Come si fa a determinare $K$ a partire da $g_{ij}$? Poichè il tensore metrico è quello che contiene l'informazione sulle distanze, e misurando queste ottengo $K$, ci deve essere un legame tra le due grandezze. Vediamo che $K$ deve dipendere dalle derivate seconde (almeno) di $g_{ij}$ in un punto. Questo deriva dal fatto che $K$ è invariante, non dipende dal sistema di coordinate usato, ed è una quantità locale, cioè dipende dal comportamento di $g_{ij}$ in un intorno infinitesimo del punto scelto.

In un intorno infinitesimo di un punto è sempre possibile scegliere un sistema di coordinate in cui la matrice dei componenti metrici $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ed in cui le derivate parziali $g_{ij,k}$ sono nulle. Tale sistema viene definito *localmente euclideo*.

Per capire come ciò sia possibile, ricordiamo che la trasformazione della metrica da $g_{ij}$ a $g'_{kl}$ è:

$$g'_{kl} = \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij}.$$

Espandiamo $g'_{kl}$ attorno al punto $x_0$ (usiamo la notazione $\frac{\partial g'_{kl}}{\partial x^m} = g'_{kl,m}$ per le derivate parziali):

$$g'_{kl}(x) = g'_{kl}(x_0) + g'_{kl,m}(x_0)\,(x^m - x_0^m) + \frac{1}{2} g'_{kl,mn}(x_0)\,(x^m - x_0^m)(x^n - x_0^n) + \cdots,$$

dove

$$g'_{kl}(x_0) = \left[ \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij} \right]_{x_0},$$

$$g'_{kl,m}(x_0) = \left[ \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij,m} \right]_{x_0} + \left[ \frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^m \partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij} \right]_{x_0} + \left[ \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^m \partial u'^l} g_{ij} \right]_{x_0}$$

Per la simmetria tra gli indici $i$ e $j$ e tra $k$ e $l$, possiamo riscrivere:

$$g'_{kl,m}(x_0) = \left[ \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij,m} \right]_{x_0} + \left[ 2 \frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^m \partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij} \right]_{x_0}$$

Analogamente, per le derivate seconde si ha:

$$g'_{kl,mn}(x_0) = \left[ \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij,mn} \right]_{x_0} + \left[ 2 \frac{\partial^3 u^i}{\partial u'^m \partial u'^n \partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij} \right]_{x_0} + \text{ derivate prime, seconde e terze}$$

Supponendo di voler, tramite un'opportuna trasformazione di coordinate, portare $g'_{kl}$ in una forma voluta in un intorno di $x_0$, dobbiamo specificare nella trasformazione le seguenti quantità:

| **Derivate** | **2–D** | **3–D** | **4–D** | **N–D** |
|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{\partial u^i}{\partial u'^k}\right)_{x_0}$ | $2 \times 2 = 4$ | 9 | 16 | $N^2$ |
| $\left(\frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^m \partial u'^k}\right)_{x_0}$ | $2 \times 3 = 6$ | 18 | 40 | $\frac{N^2(N+1)}{2}$ |
| $\left(\frac{\partial^3 u^i}{\partial u'^m \partial u'^n \partial u'^k}\right)_{x_0}$ | $2 \times 4 = 8$ | 30 | 80 | $\frac{N^2(N+1)(N+2)}{6}$ |

D'altro canto, il ***numero dei valori e delle derivate indipendenti*** del tensore metrico risulta:

| | **2–D** | **3–D** | **4–D** | **N–D** |
|---|---|---|---|---|
| $g'_{kl}(x_0)$ | 3 | 6 | 10 | $\frac{N(N+1)}{2}$ |
| $g'_{kl,m}(x_0)$ | 6 | 18 | 40 | $\frac{N^2(N+1)}{2}$ |
| $g'_{kl,mn}(x_0)$ | 9 | 36 | 100 | $\left[\frac{N(N+1)}{2}\right]^2$ |

Dalle considerazioni precedenti possiamo trarre le seguenti conclusioni per le dimensioni 2, 3 e 4:

- **2–D:** Se si fissano i valori di $g'_{kl}(x_0)$ si hanno 3 equazioni per 4 coefficienti, lasciando un grado di libertà (la rotazione degli assi attorno a $x_0$). Se si impone $g'_{kl,m}(x_0) \equiv 0$, si dispongono di 6 equazioni per 6 parametri, dunque la condizione è realizzabile. Tuttavia, se si volesse anche annullare $g'_{kl,mn}(x_0)$, si avrebbero 9 equazioni per 8 parametri: il sistema risulta troppo vincolato e non ammette soluzioni, quindi le derivate seconde non possono essere annullate localmente.
- **3–D:** Per fissare $g'_{kl}(x_0)$ ci sono 6 equazioni e 9 parametri, con 3 gradi di libertà associati alla rotazione dello spazio (ad es. gli angoli di Eulero). Si può porre $g'_{kl,m}(x_0) = 0$ (18 equazioni per 18 incognite), ma non $g'_{kl,mn}(x_0) = 0$ (36 equazioni per 30 incognite).
- **4–D (Spazio di Minkowski):** Per imporre $g'_{kl}(x_0)$ si hanno 10 equazioni e 16 parametri, con 6 gradi di libertà (3 rotazioni più 3 trasformazioni di Lorentz). È possibile forzare $g'_{kl,m}(x_0) = 0$ (40 equazioni per 40 incognite), ma non $g'_{kl,mn}(x_0) = 0$ (100 equazioni per 80 incognite).

Poiché in un punto si può sempre imporre $g_{ij} = \delta_{ij}$ e $g_{ij,k} = 0$, la curvatura deve necessariamente dipendere dalle derivate seconde di $g_{ij}$. La forma di dipendenza più semplice, plausibilmente, è quella lineare. Prima di indagare se esista un'espressione di questo tipo, occorre definire la derivata covariante.

## 2.4 Derivata Covariante

Abbiamo visto che la derivata (o gradiente) di un campo scalare $\varphi$, ossia $\frac{\partial \varphi}{\partial u^i}$, è un vettore covariante. Potrebbe sembrare naturale derivare allo stesso modo un campo vettoriale $A_i(u^k)$, ottenendo un tensore di rango due; tuttavia, ciò non avviene. In generale, il differenziale $dA_i$ (ingrediente essenziale nel rapporto incrementale) non si comporta come un tensore. Infatti, dalla legge di trasformazione

$$A_i = \frac{\partial u'^k}{\partial u^i} A'_k$$

discende che

$$dA_i = \frac{\partial u'^k}{\partial u^i} dA'_k + A'_k d\Big(\frac{\partial u'^k}{\partial u^i}\Big) = \frac{\partial u'^k}{\partial u^i} dA'_k + \frac{\partial^2 u'^k}{\partial u^i \partial u^l} A'_k du^l.$$

Osserviamo che $dA_i$ è un vettore solo se $\frac{\partial^2 u'^k}{\partial u^i \partial u^l} = 0$, ossia se le nuove coordinate $u'^i$ sono funzioni lineari delle $u^i$ (ad esempio, quando si passa da un sistema di coordinate rettilinee a un altro rettilineo).

Perché $dA_i$ non è un vettore? Perché la differenza

$$dA_i = A_i(u^i + du^i) - A_i(u^i)$$

riguarda due vettori applicati in punti diversi (anche se infinitamente vicini). In un sistema di coordinate generico, i coefficienti di trasformazione variano da punto a punto, quindi tali vettori non si trasformano nello stesso modo. Perché la differenza di due vettori sia a sua volta un tensore, i due vettori devono essere *confrontati nello stesso punto*. Se ambedue si trovano nello stesso punto, allora subiscono la stessa trasformazione, e anche la loro differenza si comporta come un tensore. Ne segue che, per definire una derivata che si comporti da tensore, abbiamo bisogno di una *derivata covariante*.

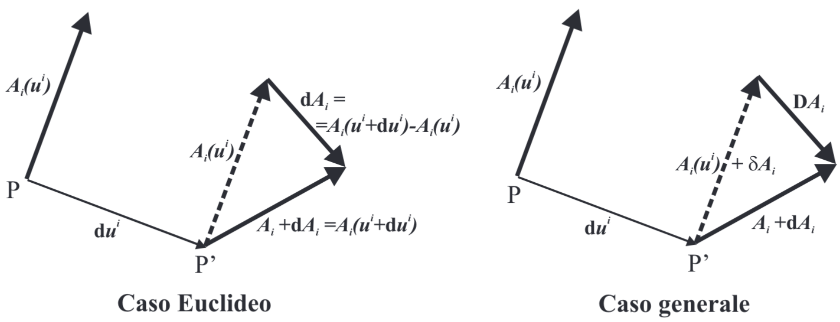



**Figure 2.6:** Derivata covariante

In uno spazio euclideo, per derivare un vettore $A_i(u^i)$ si procede *spostando parallelamente* $A_i(u^i)$ fino a farne coincidere il punto di applicazione con quello di $A_i(u^i+du^i)$, senza modificarne modulo né direzione. Nel nuovo punto $P'$, si calcola la differenza e si prende il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{du^i\to 0} \frac{A_i(u^i+du^i) - A_i(u^i)}{du^i}.$$

Come riprodurre un processo analogo in uno spazio non euclideo? Definiamo il *trasporto parallelo* da $u^i$ a $u^i+du^i$ come quello spostamento che produce una variazione $\delta A_i$ tale che, passando a un sistema localmente euclideo (il che, localmente, è sempre possibile), tale variazione risulti nulla: $\delta A_i = 0$. Pertanto, in $P'$, abbiamo $A_i+dA_i \equiv A_i(u^i+du^i)$ e $A_i+\delta A_i$, corrispondente al trasporto parallelo di $A_i(u^i)$ da $P$ a $P'$. La differenza

$$DA_i = \left(A_i+dA_i\right) - \left(A_i+\delta A_i\right) = dA_i - \delta A_i$$

è un vettore, perché è la differenza di due vettori applicati allo stesso punto. Questo $DA_i$, chiamato ***Diferenziale Assoluto***, ci consente di definire il nuovo tipo di derivata che si comporta come un tensore, la ***derivata covariante***.

Resta ora da determinare $\delta A_i$: se imponiamo che $DA_i$ (dierenziale assoluto) sia lineare come i dierenziali ordinari, $\delta A_i$ dovrà dipendere linearmente sia dal vettore trasportato $A_i$ che dallo spostamento $du^i$, per cui potremo scrivere:

$$\delta A_i = \Delta^l_{mi} A_m du^l$$

dove le quantità $\Delta^l_{mi}$ sono funzioni delle coordinate e dipendono dal sistema di riferimento. Nel sistema localmente Euclideo i $\Delta^l_{mi}$ sono nulli, ma non lo saranno in generale, per cui si osserva che i $\Delta^l_{mi}$ non rappresentano un tensore (ricordiamo che un tensore nullo in un sistema di riferimento rimane nullo in tutti gli altri). Questo suggerisce un altro oggetto a tre indici che non è un tensore, cioè la connessione affine. Come si può verificare, è infatti $\Delta^l_{mi} \equiv \Gamma^l_{mi}$, per cui $\delta A_i = \Gamma^l_{mi} A_m du^l$.

Allora il differenziale assoluto diventa:

$$DA_i = \mathrm{d}A_i - \delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial u^l} du^l - \Gamma^m_{il} A_m$$

La **derivata covariante** $DA_i/\partial u^l$ indicata con $A_{i,l}$ sarà:

$$A_{i,l} = \frac{DA_i}{\partial u^l} = \frac{\partial A_i}{\partial u^l} - \Gamma^m_{il} A_m$$

La derivata covariante di un tensore si può ricavare considerando questo come il prodotto di due vettori e richiedendo che essa soddisfi la regola di *Leibniz* per la derivazione di un prodotto. Allora, se $T_{ik} \equiv A_i B_k$, si ha che:

$$\begin{aligned} T_{ik;l} &= B_k A_{i;l} + A_i B_{k;l} \\ &= B_k \left( \frac{\partial A_i}{\partial u^l} - \Gamma^m_{il} A_m \right) + A_i \left( \frac{\partial B_k}{\partial u^l} - \Gamma^m_{kl} B_m \right) \\ &= B_k \frac{\partial A_i}{\partial u^l} + A_i \frac{\partial B_k}{\partial u^l} - \Gamma^m_{il} A_m B_k - \Gamma^m_{kl} A_i B_m \\ &= \frac{\partial T_{ik}}{\partial u^l} - \Gamma^m_{il} T_{mk} - \Gamma^m_{kl} T_{im} \end{aligned}$$

Questa relazione vale in generale. Osserviamo ora l'espressione:

$$A_{i;l} = (g_{ik} A^k)_{;l} = g_{ik;l} A^k + g_{ik} A^k_{;l}$$

Ma $A_{i;k}$ è un tensore, e posso usare il tensore metrico per scriverlo come $A_{i;k} = g_{ik} A^k_{;l}$; se confrontiamo con l'espressione scritta sopra vediamo che $g_{ik;l} = 0$. Usiamo ora la relazione per la derivata covariante di un tensore per scrivere esplicitamente questo risultato:

$$g_{ik;l} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} - \Gamma^m_{il} g_{mk} - \Gamma^m_{kl} g_{im} = 0 \tag{I}$$

Facciamo ora, in questa relazione, una rotazione in senso antiorario degli indici $i$, $k$ e $l$; otteniamo:

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} - \Gamma^m_{ki} g_{ml} - \Gamma^m_{li} g_{km} = 0 \tag{II}$$

Ed ancora una rotazione degli indici:

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial u^k} - \Gamma^m_{lk} g_{mi} - \Gamma^m_{ik} g_{lm} = 0 \tag{III}$$

Se facciamo ora (I) + (III) - (II) otteniamo, sfruttando la simmetria degli indici bassi di $\Gamma^m_{il}$ e $g_{ik}$:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} - \Gamma^m_{il} g_{mk} - \Gamma^m_{kl} g_{im} - \Gamma^m_{lk} g_{mi} - \Gamma^m_{ik} g_{lm} + \Gamma^m_{ki} g_{ml} + \Gamma^m_{li} g_{km} = 0$$

E semplificando:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} - 2\Gamma^m_{kl} g_{im} = 0$$

Moltiplicandoora quest'ultima relazione per $\frac{1}{2} g^{ij}$ otteniamo:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} \right) = \Gamma^m_{kl} g_{im} g^{ij} = \Gamma^m_{kl} \delta^j_m = \Gamma^j_{kl}$$

Ritroviamo quindi la relazione che definisce la connessione affine, e con ciò abbiamo verificato l'assunzione $\Delta^m_{il} \equiv \Gamma^m_{il}$.

Consideriamo ora il *prodotto scalare* $A_i B^i$; essendo una quantità scalare essa non cambia per trasporto parallelo ($\delta(A_i B^i) = 0$), da cui:

$$B^i\delta A_i + A_i\delta B^i = 0 \quad \rightarrow \quad A_i\delta B^i = -B^i\delta A_i$$
$$A_i\delta B^i = -B^i\Gamma^m_{il}A_m du^l$$

Essendo $i$ ed $m$ indici muti sommati, li scambio tra loro:
$$A_i\delta B^i = -B_m\Gamma^i_{ml}A_i du^l$$

ed essendo $A_i$ un vettore generico, dovrà essere:
$$\delta B^i = -\Gamma^i_{ml}B^m du^l$$

da cui la relazione che esprime la derivata covariante per un vettore controvariante:
$$\frac{DB^i}{du^l} = \frac{\partial B^i}{\partial u^l} - \Gamma^i_{ml}B^m$$

La regola generale per la derivazione covariante di un tensore di rango arbitrario consiste nel farne la derivata parziale e poi di aggiungere un termine del tipo $+\Gamma$ per ogni indice controvariante ed un termine del tipo $-\Gamma$ per ogni indice covariante.

### 2.4.1 Trasporto parallelo e tensore di curvatura

Sia $u^i = u^i(s)$ l'equazione parametrica di una curva, con $s$ ascissa curvilinea misurata a partire da un certo punto sulla curva. Sappiamo che $du^i$ è un vettore (dalla definizione di vettore controvariante), ds è uno scalare, e $du^i/ds \equiv v^i$ è quindi un vettore. In particolare, $v^i$ è il versore tangente alla curva.

**Tip**: ***Verifica di un versore***

Per verificare che $v^i$ è un versore, vediamo quanto vale il suo modulo eseguendo il prodotto scalare $v_i v^i$:
$$v_i v^i = g_{ij}v^i v^j = g_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} \equiv 1 \quad \text{da} \quad ds^2 = g_{ij}du^i du^j$$

Se fossi in uno spazio Euclideo, per definire una geodetica come un segmento di linea retta, direi che il versore tangente non cambia con $s$:
$$\frac{dv^i}{ds} = 0$$

Se ora voglio generalizzare questa relazione ad uno spazio qualsiasi, a 2 o più dimensioni, devo usare non la derivata normale, ma quella covariante:
$$\frac{Dv^i}{ds} = 0$$

Esplicitando i termini
$$\frac{Dv^i}{ds} = \frac{dv^i}{du^l}\frac{du^l}{ds} = \frac{du^l}{ds}\left(\frac{\partial v^i}{\partial u^l} + \Gamma^i_{ml}v^m\right) = 0$$

Cioè:
$$\frac{dv^i}{du^l}\frac{du^l}{ds} + \Gamma^i_{ml}v^m\frac{du^l}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv^i}{ds} + \Gamma^i_{ml}v^m v^l = 0$$

da cui, ricordando che $du^i/ds = v^i$, abbiamo:
$$\frac{d^2u^i}{ds^2} + \Gamma^i_{ml}\frac{du^m}{ds}\frac{du^l}{ds} = 0$$

Ritroviamo cioè la nostra equazione della geodetica (anche a riprova del fatto che, passando dal caso Euclideo a quello generale, si devono sostituire le derivate "normali" con quelle covarianti).

Vediamo che lungo la geodetica $Dv^i = 0$, cioè $dv^i = \delta v^i$: il versore $v^i$, trasportato parallelamente da un punto $u^i$ sulla geodetica, a un punto $u^i + du^i$ silla stessa geodetica, coincide con il vettore $v^i + dv^i$, tangente alla geodetica in $u^i + du^i$.

Consideriamo ora un vettore $A_i$ che viene trasportato parallelamente lungo la stessa geodetica. L'angolo che esso forma con $v^i$, versore tangente, sarà dato dal prodotto scalare $A_i v^i$. Ma uno scalare non cambia per trasporto parallelo, per cui lungo la geodetica l'angolo tra $A_i$ e $v^i$ rimane costante: ***un vettore trasportato parallelamente lungo una geodetica forma sempre lo stesso angolo con la tangente alla curva***.

Immaginiamo ora di trasportare parallelamente un vettore $\bar{v}_0$ lungo un triangolo formato da pezzi di geodetica. Se siamo in uno spazio Euclideo (ad esempio su un piano) il vettore $\bar{v}_f$ che ottengo dopo aver chiuso il cammino coinciderà con $\bar{v}_0$.

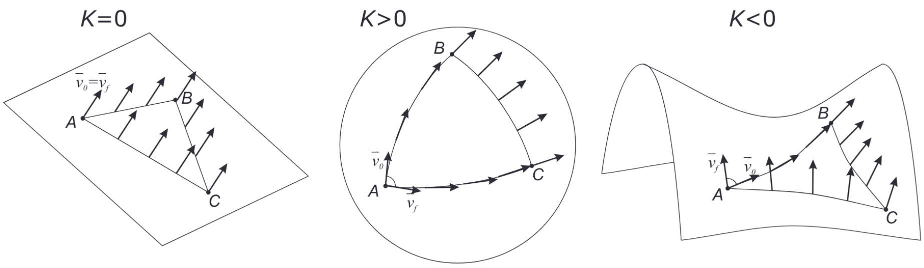



**Figure 2.7:** Trasporto di un vettore lungo un triangolo nelle varie geometrie.

La stessa cosa non accade lungo un triangolo sferico: il vettore appare ruotato di un angolo che ha lo stesso verso di rotazione del verso in cui ho percorso il triangolo sferico. L'opposto accade per un triangolo iperbolico (K < 0).

Possiamo vedere la cosa anche in un altro modo: immaginiamo di andare da un punto A ad un punto B sia direttamente che passando per un punto C, sempre lungo archi di geodetica.

Nello spazio Euclideo il risultato del trasporto parallelo lungo i due percorsi è il medesimo, ma la stessa cosa non accade sulle superfici curve (quanto qui detto per un triangolo formato da archi di geodetica vale per un percorso generico, che si può pensare come costituito da un gran numero di archetti di geodetica). Il risultato è che, a meno di non essere in uno spazio Euclideo, ***non esiste un modo naturale e non ambiguo per muovere un vettore da un punto ad un altro***; possiamo trasportarlo parallelamente, ma il risultato dipende dal cammino, e non c'è una scelta naturale per questo. Quindi ***posso confrontare due vettori solamente se sono applicati allo stesso punto***. Ad esempio, due particelle che passano una accanto all'altra hanno una velocità relativa ben definita (e minore di $c$, con $c$ velocità della luce), ma due particelle in differenti punti di uno spazio generico non hanno una velocità relativa ben definita.

Vediamo di quantificare quanto detto sopra in modo qualitativo. Muovendosi lungo un cammino chiuso formato da archi di geodetica, un vettore $A_k$ trasportato parallelamente subirà, tornando al punto di partenza, una variazione

$$\Delta A_k = \oint \delta A_k = \oint \Gamma^i_{km} A_i du^m$$

Per risolvere l'integrale usiamo il Teorema di Stokes:

---

**Teorema 2.1.** ***Teorema di Stokes****:*

*La circuitazione di una curvatura $C_1$ in un campo vettoriale $A$ è data dall'integrale del rotore di $A$ lungo il perimetro della curva chiusa $C$:*

$$\oint_{C_1} A \cdot dl = \int_S \nabla \times A \cdot dS$$

---

Applicando il teorema di Stokes all'integrale precedente otteniamo:

$$\oint A_i du^i = \frac{1}{2}\int_{Superficie}\left(\frac{\partial A_m}{\partial u^l} - \frac{A_l}{\partial u^m}\right) df^{lm}$$

dove $df^{lm}$ è un tensore che corrisponde alla proiezione dell'elemento di area della superficie sui piani coordinati. Nel nostro caso $A_m du^m \to \Gamma^i_{km} A_i du^m$, per cui:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}\int_{Superficie}\left[\frac{\partial(\Gamma^i_{km}A_i)}{\partial u^l} - \frac{\partial(\Gamma^i_{kl}A_i)}{\partial u^m}\right] df^{lm}$$

Se supponiamo che la superficie delimitata dalla curva chiusa sia infinitesima (una superficie finita si può scomporre in elementi infinitesimi), l'integrando sarà costante, a meno di infinitesimi di ordine superiore, e potremo scrivere:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(\Gamma^i_{km})}{\partial u^l}A_i - \frac{\partial(\Gamma^i_{kl})}{\partial u^m}A_i + \Gamma^i_{km}\frac{\partial A_i}{\partial u^l} - \Gamma^i_{kl}\frac{\partial A_i}{\partial u^m}\right]\Delta f^{lm}$$

Siccome $A_i$ viene spostato parallelamente sulla curva:

$$\frac{\partial A_i}{\partial u^l} = \frac{\delta A_i}{\partial u^l} = \Gamma^n_{il}A_n$$

Allora:

** here missing something **

$$\begin{aligned}\Delta A_k &= \frac{1}{2}\Delta f^{lm}\left[\frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial u^l}A_i - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial u^m}A_i + \Gamma^i_{km}\Gamma^n_{il}A_n - \Gamma^i_{kl}\Gamma^n_{im}A_n\right] = \\ &= \frac{1}{2}A_i\Delta f^{lm}\left[\frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial u^m} + \Gamma^n_{km}\Gamma^i_{nl} - \Gamma^n_{kl}\Gamma^i_{nm}\right]\end{aligned}$$

dove il secondo passaggio, in cui si è esplicitato $A_i$, è stato ottenuto scambiando tra loro gli indici muti $i$ ed $n$ nei termini con i prodotti delle connessioni affini. La quantità in parentesi graffa è un tensore, poichè lo sono $A_i$, $\Delta f^{lm}$ e $\Delta A_k$ (differenza di due vettori applicati allo stesso punto). Ad essa si da il nome di **tensore di Riemann - Christoffel** o **tensore di curvatura**:

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial u^m} + \Gamma^n_{km}\Gamma^i_{nl} - \Gamma^n_{kl}\Gamma^i_{nm}$$

**Nota bene**: talvolta lo si trova definito con i segni scambiati

Se in un punto, o una zona di spazio, $R^i_{klm} = 0$, allora $\Delta A_k = 0$: il trasporto parallelo lungo una curva chiusa lascia il vettore inalterato, e la zona di spazio si dice ***piatta***.

Questo accade in uno spazio Euclideo, come anche in qualunque (zona di) spazio in cui $g_{ij}$ sia costante, perchè le connessioni affini sono nulle e così pure il tensore di curvatura; e poichè un tensore uguale a zero in un sistema di coordinate rimane nullo in qualunque sistema di coordinate, allora $R^i_{klm} = 0$ in qualunque sistema di riferimento. Se invece $R^i_{klm} \neq 0$ il trasporto parallelo dipende dal percorso, e lo spazio (o la zona di spazio) si dice, per contrasto, curvo (da qui in nome di tensore di curvatura).

# 3 Lecture 28/03/2025

**Proprietà di un tensore di curvatura**

Si può dimostrare che $R^i_{klm}$ è l'unico ensore che può essere costruita dal tensore metrico e dalle sue derivate prime e seconde, e che è lineare nelle derivate seconde (e anche quadratico nelle derivate prime). Del tensore metrico si può scrivere la forma totalmente covariante $R_{jklm} = g_{ji}R^i_{klm}$.

…

$$R^i_{klm;j} + R^i_{kmj;l} + R^i_{kjl;m} = 0$$

Questa è detta ***identità di Bianchi***. Ricordiamo che, anche se l'abbiamo ricavata nel sistema localmente euclideo, essendo una relazione tensoriale, essa vale in tutti i sistemi di riferimento.

Possiamo anche abbassare l'indice controvariante con il tensore metrico e otteniamo:

$$R_{ijkl;m} + R_{ijml;k} + R_{ijlk;m} = 0$$

Il tensore di Riemann presenta delle proprietà, vediamole nella versione completamente covariante $R_{jklm} = g_{ji}R^i_{klm}$:



- **Simmetria**:
$$R_{jklm} = R_{lmjk}$$
- **Antisimmetria**:
$$R_{jklm} = -R_{kjlm} = -R_{jkml} = R_{kjml}$$
- **Ciclicità**:
$$R_{jklm} + R_{klmj} + R_{lmjk} = 0$$

Dal tensore di Riemann, per contrazione, si può ricavare un tensore di rango 2, il tensore di Ricci, definito come:

$$R_{km} = R^i_{kim}$$

Il tensore di Ricci è simmetrico:

$$R_{mk} = R^i_{mik} = g^{ir}R_{rmik} = g^{ir}R_{ikrm} = R^r_{krm} = R_{km}$$

Esso è l'unico tensore simmetrico di rango 2 che si può ottenere da $R^i_{klm}$. Dal tensore di Ricci si ricava lo ***scalare di Ricci*** o ***scalare di curvatura***:

$$R = g^{km}R_{km}$$

Esso è il solo scalare che si può ottenere da $R^i_{klm}$.

Le proprietà sopra evidenziate del tensore di Riemann fanno si che, in $N$ dimensioni, il numero delle sue componenti indipendenti sia:

$$\mathcal{N} = \frac{N^2(N^2-1)}{12}$$

In particolare:

$$R_{11} = R^{l}_{1l1} = g^{11}R_{1111} + g^{11}R_{1121} + g^{21}R_{2111} + g^{22}R_{2121} = g^{22}R_{1212}$$

$$R_{12} = R_{21} = ... = -g^{21}R_{1212}$$

$$R_{22} = ... = g^{11}R_{1212}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} R &= g^{11}g^{22}R_{1212} - 2g^{12}g^{21}R_{2121} + g^{22}g^{11}R_{1212} \\ &= 2R_{1221}\left(g^{11}g^{22} - g^{12}g^{21}\right) \\ &= 2R_{1221}\det g^{ij} \end{aligned}$$

- Per $N = 1, \mathscr{N} = 0$ ed $R_{1111} \equiv 0$ sempre: una curva ha sempre curvatura (intrinseca) nulla, non ho informazioni su come la curva è "embedded" in uno spazio a 2 o più dimensioni.
- Per $N = 2, \mathscr{N} = 1$. C'è un'unica componente indipendente, ad esempio $R_{1212}$.
- Per $N = 3, \mathscr{N} = 6$. tante quante sono le componenti del tensore di Ricci (simmetrico). Quindi per $N = 3$ basta conoscere $R_{km}$ per descrivere la curvatura dello spazio.
- Per $N = 4, \mathscr{N} = 20$, mentre $R_{km}$ ha 10 componenti soltanto. È necessario ricorrere al tensore $R^{i}_{klm}$ completo (a parte situazioni di particolare simmetria, e vedremo che così sarà nel caso dell'universo isotropo ed omogeneo).

Dall'identità di Bianchi, nella forma covariante, sfruttando le proprietà di antisimmetria del tensore di Riemann, si ha:

$$\begin{gathered} R_{iklm;j} - R_{kimj;l} - R_{iklj;m} = 0 \\ g^{km}R^{l}_{klm;j} - g^{il}R^{m}_{imj;l} - g^{km}R^{l}_{klj;m} = 0 \end{gathered}$$

cioè:

$$g^{km}R_{km;j} - g^{il}R_{ij;l} - g^{km}R_{kj;m} = 0$$

da cui:

$$R_{;j} - R^{l}_{j;l} - R^{m}_{j;m} = R_{;j} - 2R^{l}_{j;l} = 0$$

dalla quale si ha:

$$R^{l}_{j;l} = \frac{1}{2}R_{;j} = \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial u^{j}}$$

dove l'ultimo passaggio è dovuto al fatto che $R$ è uno scalare, non dipende quindi dal sistema di riferimento usato, e la sua derivata covariante coincide con la semplice derivata parziale. La quantità $R^{l}_{j;l}$ rappresenta la divergenza (covariante) del tensore di Ricci. Consideriamo ora il tensore misto:

$$R^{l}_{j} - \frac{1}{2}\delta^{l}_{j}R$$

La sua divergenza sarà (per la regola della derivazione di un prodotto ed essendo $\delta^{l}_{j;l} = 04$):

…

$$g_{il}R^{l}_{j} - \frac{1}{2}g_{il}\delta^{l}_{j}R = R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R \equiv Gij$$

dove $G_{ij}$ è detto ***tensore di Einstein***. Questo tensore ha importantissime proprietà: è simmetrico, ha divergenza nulla e, derivando dal tensore di Riemann, contiene termini lineari nelle derivate seconde della metrica e quadratici nelle sue derivate prime.

# 4
# Relatività Generale

…

L'equazione delle geodetiche è sempre:

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} = 0$$

se la metrica è data da $\eta_{\alpha\beta}$, allora i $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ osno nulli e resta $d^2x^\alpha/ds^2 = 0$, cioè $x^\alpha = a^\alpha \cdot s + b^\alpha$, ovvero:

$$\begin{cases} ct = a^0 \cdot s + b^0 \\ \bar{x} = \bar{a} \cdot s + \bar{b} \end{cases}$$

e la traiettoria è una retta percorsa di moto rettilineo uniforme.

**Tensore energia-impulso**

Vogliamo ora descrivere le proprietà gravitazionali di un fluido

Consideriamo un fluido in cui l'unica forza presente è quella gravitazionale. Chiamiamo tale fluido "polvere" (dust).



Le due quantità che ci interessano sono densità e velocità.

Il tensore più sempliche che possiamo pensare che descriva tali quantità è il ***tensore energia-impulso***:

$$T^{\alpha\beta} = \rho_0 c^2 u^\alpha u^\beta$$

Nel dettaglio abbiamo:

$$T^{00} = \rho_0 c^2 \gamma^2 = \gamma^2 \rho_0 c^2 = \rho c^2 \qquad \text{posto } \rho = \gamma^2 \rho_0$$

Per interpretare questo risultato ricordiamo che la massa è $m = \gamma m_0$ (con $m_0$ massa a riposo) e che un elemento di volume in moto appare contratto di un fattore $1/\gamma$, per cui la densità cresce di un ulteriore fattore $\gamma$.

Perciò, se la densità propria è $\rho_0$, un osservatre rispetto al quale il fluido ha velocità $\bar{v}$ misurerà una densità $\gamma^2 \rho_0$.

$T^{00}$ misura quindi la densità di massa-energia (qui l'unico contributo all'energia viene dal moto della materia).

Le componenti di $T^{\alpha\beta}$ sono:

$$T^{\alpha\beta} = \rho c^2 \cdot \begin{matrix} 1 & v_x/c & v_y/c & v_z/c \\ v_x/c & v_x^2/c^2 & v_x v_y/c^2 & v_x v_z/c^2 \\ v_y/c & v_x v_y/c^2 & v_y^2/c^2 & v_y v_z/c^2 \\ v_z/c & v_x v_z/c^2 & v_y v_z/c^2 & v_z^2/c^2 \end{matrix}$$

Vediamo come le equazioni del moto possono essere ricavate in modo sintetico come $\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$

- Per $\alpha = 0$ si ha $\partial_\beta T^{0\beta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial T^{0\beta}}{\partial x^\beta} = 0$, che scritta per esteso:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial(\rho c^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho c v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho c v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho c v_z)}{\partial z} = 0$$

che si può semplificare in:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0$$

(dove $\bar{v}$ è la velocità totale) cioè l'equazione di continuità per un fluido, che esprime la conservazione della massa-energia.

- Per $\alpha = 1, 2, 3$ si ha:

$$\begin{cases} \frac{1}{c}\frac{\partial(\rho c v_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho c v_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho c v_x v_z)}{\partial z} = 0 \quad (\alpha = 1) \\ \frac{1}{c}\frac{\partial(\rho c v_y)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c v_y v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho c v_y v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho c v_y v_z)}{\partial z} = 0 \quad (\alpha = 2) \\ \frac{1}{c}\frac{\partial(\rho c v_z)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c v_z v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho c v_z v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho c v_z v_z)}{\partial z} = 0 \quad (\alpha = 3) \end{cases}$$

moltipichiamo le tre equazioni per i versori $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ e sommiamo membro a membro:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z \bar{v}) = 0$$

che, sviluppando e usando poi l'equazione di continuità, si riduce a:

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v}\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v})\right] + \rho v_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \rho v_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = 0$$

cioè:

$$\underbrace{\rho\left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla)\bar{v}\right] = 0}_{(I)} \qquad \Leftrightarrow \qquad \underbrace{\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = 0}_{(II)}$$

Questa relazione, tipica della fluidodinamica, rappresenta l'equazione del moto per un fluido senza pressione, viscosità e forze esterne.

...

# 5
# Lecture 01/04/2025

…

In un ***sistema inerziale localmente in quiete*** (**SILQ**) rispetto al fluido, nel quale quindi $u^a = (1,0,0,0)$, $T^{\alpha\beta}$ ha la forma particolarmente semplice:

$$T^{\alpha\beta}_{SILQ} = \rho_0 c^2 u^\alpha u^\beta = \begin{pmatrix} \rho_0 c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Veniamo adesso a considerare il caso in cui le particelle interagiscono nel modo più semplice, cioè attraverso urti dovuti all'agitazione termica: è presente una pressione del fluido. Assumiamo che non vi sia trasporto di energia per conduzione o irraggiamento e non vi sia viscosità. Il fluido così definito è detto perfetto

…

$$T^{\alpha\beta}_{SILQ} = \rho_0 c^2 u^\alpha u^\beta = \rho_0 c^2 \begin{pmatrix} 1 & \langle v_x \rangle / c & \langle v_y \rangle / c & \langle v_z \rangle / c \\ & \langle v_x^2 \rangle / c^2 & \langle v_x v_y \rangle / c^2 & \langle v_x v_z \rangle / c^2 \\ & & \langle v_y^2 \rangle / c^2 & \langle v_y v_z \rangle / c^2 \\ & & & \langle v_z^2 \rangle / c^2 \end{pmatrix} = \rho_0 c^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

…

$$T^{\alpha\beta}_{SILQ} = (p + \rho c^2) u^\alpha u^\beta - p \eta^{\alpha\beta}$$

…

**Example**: ***Conservazione dell'entropia per particella***

Vediamo ora di ricavare, come detto poco sopra, una relazione scalare dalla $\partial_\beta T^{\alpha\beta}$; per fare questo la moltiplicheremo per $u_\alpha$.
Partiamo dal fatto che, come abbiamo già visto, $u^\alpha u_\alpha = 1$. Sarà quindi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\beta}(u^\alpha u_\alpha) &= u^\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} + u_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \\ &= \eta^{\alpha\gamma} u_\gamma \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} + u_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \\ &= u_\gamma \frac{\partial u^\gamma}{\partial x^\beta} + u_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \\ &= 2 u_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} = 0 \end{aligned}$$

da cui $\dfrac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} = 0$ (abbiamo sfruttato il fatto che $\alpha$ e $\gamma$ sono indici muti). Se riprendiamo l'equazione che esprime la divergenza di $T^{\alpha\beta}$ e la moltiplichiamo per $u_\alpha$ otteniamo:

$$u_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left[(p + \rho c^2) u \alpha u^\beta\right] - \frac{\partial p}{\partial x^\beta} \eta^{\alpha\beta} u_\alpha = 0$$

e, sviluppando la derivata del primo termine, abbiamo:

$$u_\alpha \left\{ u^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta}[(p+\rho c^2)u^\beta] + (p+\rho c^2)u^\beta \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \right\} - \partial p \partial x^\beta u^\beta = 0$$

Se ricordiamo che $u^\alpha u_\alpha = 1$ e che $\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} = 0$ possiamo scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}[(p+\rho c^2)u^\beta] - u^\beta \frac{\partial p}{\partial x^\beta} = 0$$

$$(p+\rho c^2)\frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta} + u^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}(p+\rho c^2) - u^\beta \frac{\partial p}{\partial x^\beta} = 0$$

Dalla conservazione del numero di particelle abbiamo

$$\frac{\partial (n u^\beta)}{\partial x^\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad n\frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta} + u^\beta \frac{\partial n}{\partial x^\beta} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta} = -\frac{u^\beta}{n}\frac{\partial n}{\partial x^\beta}$$

Sostituendo quest'ultimo risultato nella precedente relazione e raccogliendo $u^\beta$ abbiamo:

$$u^\beta \left\{ \frac{\partial (p+\rho c^2)}{\partial x^\beta} - \frac{p+\rho c^2}{n}\frac{\partial n}{\partial x^\beta} - \frac{\partial p}{\partial x^\beta} \right\} = 0$$

...

Ricordiamo ora il primo principio della termodinamica: $dU = dQ + dL$; se introduciamo l'entropia $S$ possiamo scrivere: $TdS = dU + pdV$, dove l'energia interna è $U = \rho c^2$. Se lo riscrivo riferendomi ad una particella, avrò $Td\sigma = d\left(\frac{\rho c^2}{n}\right) + pd\,(dfrac1n)$, con $\sigma$ entropia per particella. Sviluppando i differenziali si ha:

$$Td\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial x^\beta}dx^\beta = \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{\rho c^2}{n}\right)dx^\beta + p\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{1}{n}\right)dx^\beta \qquad / \cdot \frac{1}{ds}$$

Se ricordiamo che $\frac{dx^\beta}{ds} \equiv u^\beta$ e confrontiamo questa relazione con la precedente, otteniamo:

$$u^\beta \frac{\partial \sigma}{\partial x^\beta} = 0$$

che, sviluppando, diventa:

$$\gamma \frac{1}{c}\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \gamma \frac{v_x}{c}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \gamma \frac{v_y}{c}\frac{\partial \sigma}{\partial y} + \gamma \frac{v_z}{c}\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\bar{v}\cdot\nabla)\sigma = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \underbrace{\frac{d\sigma}{dt} = 0}_{\text{conservazione dell'entropia per particella}}$$

Si ha come risultato che, nel sistema in cui il fluido è in quiete, l'entropia per particella (o, se preferiamo, l'entropia per un certo numero $N$ di particelle contenute in un volume cubico $V$ di spigolo $L$, che può variare mantenendo però sempre al suo interno lo stesso numero di particelle) è costante. Questo è legato al fatto che, nel fluido ideale, non c'è scambio di energia per conduzione (o irraggiamento), né vi è dissipazione. Dal $1^\circ$ principio della termodinamica, nel sistema che segue il fluido, $dQ = dU + pdV$ e $U = \rho c^2 \cdot V$, per cui:

$$dQ = \rho c^2 dV + Vd(\rho c^2) + pdV = (p+\rho c^2)dV + Vd(\rho c^2) = TdS$$

Poichè $dQ = 0 \rightarrow dS = 0$

Se scriviamo $p = w\rho c^2$ (con $w$ costante, anche se, più in generale, potrà dipendere dalla temperatura $w = w(T)$),

$$(1+w)\rho c^2 dV = -V d(\rho c^2)$$

e se $w = cost$, ho $d\rho/\rho = -(1+w)dV/V$, cioè $\rho V^{1+w} = cost$.

Incontreremo tre casi interessanti in cosmologia:

1. Per un gas non-relativistico $p \ll \rho_0 c^2$ ($\rho \approx \rho_0$) per cui $w \approx 0$ e quindi $\rho_0 V \approx$ cost. Detto $L$ lo spigolo di un volume cubico $V = L^3$, abbiamo $\rho \propto 1/L^3$
2. Per un gas di fotoni $\rho_{\text{rad}} \propto aT^4$ e $p = \frac{1}{3}\rho c^2$; $w = \frac{1}{3}$:

$$T^4 V^{4/3} = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad T \cdot V^{1/3} = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad V \propto L^3 \quad \Rightarrow \quad T \propto \frac{1}{L}$$

$$\rho_{\text{rad}} V^{4/3} = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad V \propto L^3 \quad \Rightarrow \quad V^{4/3} \approx L^4 \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{rad}} \approx \frac{1}{L^4}$$

3. Se $p = -\rho c^2 \quad (w = -1) \quad \leftarrow \quad \rho V^0 = cost$, cioè $\rho$ non dipende da $V$ e da $L$ e rimane costante se $V$ varia.

Possiamo riscrivere il primo principio in un'altra forma utile, ponendo $V \propto L^3$:

$$\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) dC + V d\rho = 0 \qquad \rightarrow \qquad \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \cdot 3L^2 dL + L^3 d\rho = 0$$

da cui:

$$3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{dL}{L} + d\rho = 0$$

e, tenendo conto di una dipendenza di $L$ dal tempo:

$$3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{dL}{dt} + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Abbiamo scritto $\partial_\alpha T^{\beta\alpha} = 0$ nello spazio di Minkowski; se però $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ non sono tutti nulli, ed in generale sarà così, al posto della derivata parziale semplice si deve utilizzare la derivata covariante:

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$$

che esprime le leggi di conservazione in un sistema di riferimento generico.

# 6
# Lecture: 04/04/2025

## 6.1 Il principio di Mach

…

## 6.2 Il principio di equivalenza

L'esperienza che corpi diversi cadono (in assenza di resistenza dell'aria) allo stesso modo per effetto della gravità ha portato a concludere, con grande precisione, che massa inerziale min e massa gravitazionale mgrav sono tra loro proporzionali (e in pratica uguali, facendo rientrare entro la costante di gravitazione G la costante di proporzionalità). Einstein assunse che, per definizione, $m_{in} \equiv m_{grav}$ . Questo porta al famoso esperimento pensato dell'***ascensore di Einstein***: se un osservatore, dotato di strumenti scientifici, è rinchiuso in un ascensore e non può quindi vedere cosa accade attorno a lui, non sarà in grado di distinguere, dai suoi esperimenti di meccanica, tra le due situazioni:

- è fermo in un campo gravitazionale con accelerazione di gravità $\bar{g}$.
- è nello spazio vuoto, e l'ascensote è accelerato verso l'alto con accelerazione costante $\bar{g}$.

Analogamente, poichè tutto case allo stesso modo in un campo gravitazionale, l'osservatore non sarà in grado di distinguere tra le situazioni di:

- moto rettilineo uniforme nel vuoto
- moto accelerato (caduta libera) in un campo gravitazionale.

Questo ci permette di dire quali sono i sistemi localmente inerziali: quelli in caduta libera. Quindi in un sistema in caduta libera valgono localmente (e al prim'ordine in $g_{\alpha\beta}$) le leggi della Relatività Ristretta. Il Principio di Equivalenza richiede che tutte le leggi della fisica (non solamente quelle della Meccanica) siano le stesse sia in un sistema localmente inerziale, sia nella Relatività Ristretta. Il fatto che gli effetti della gravitazione scompaiano in un sistema in caduta libera, fa sì che i fenomeni che vi avvengono sono completamente indipendenti dalla presenza di masse vicine. Secondo il punto di vista di Mach, invece, una grossa massa vicina dovrebbe introdurre una anisotropia della massa inerziale. Effetti dovuti al Sole o alla nostra Galassia sono stati ricercati, ma non trovati entro $\Delta m/m \sim 10^{-20}$, per cui il principio di equivalenza sembra favorito rispetto alle ipotesi di Mach (che quindi non sono completamente coerenti con la Relatività Generale, a parte l'ispirazione fornita ad Einstein)

## 6.3 Il principio di covarianza generale

…

## 6.4 Le equazioni di Einstein

…

## 6.5 Il limite newtoniano - campo debole (weak field)

Scritte le equazioni di Einstein, occorre verificare che, nel limite di validità della fisica classica, esse si riducono alla legge di Newton; dobbiamo anche vedere quanto vale la costante $\kappa$ che compare nelle equazioni.

Supponiamo che il campo sia stazionario (cioè la sua derivata temporale sia nulla), che le velocità delle particelle siano piccole ($v \ll c$) e che, a grandi distanze dalle masse che generano il campo, il tensore metrico sia asintoticamente piatto: $g_{\alpha\beta} \to \eta_{\alpha\beta}$. Supponiamo inoltre che il campo sia debole: cioè che gli scostamenti dalla metrica $\eta_{\alpha\beta}$ siano piccoli:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \qquad \text{con } |h| \ll 1$$

Poich+ $v/c \ll 1$ sarà:

$$\frac{dx^0}{ds} = \frac{cdt}{cd\tau} = \frac{dt}{d\tau}$$
$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{dx^i}{cd\tau} = \frac{1}{c}\frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{v^i}{c}\frac{dt}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau} \equiv \frac{dx^0}{ds}$$

L'equazione delle geodetiche sarà, come al solito,

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} = 0$$

ma, per $\alpha$fissato, nella somma sugli indici $\beta$ e $\gamma$, i termini in cui compaiono i $dx^i/ds$ sono trascurabili rispetto al termine con $dx^0/ds$, per cui possiamo scrivere:

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{00}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 = \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \simeq 0$$

Con l'assnzione che $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ $(h \ll 1)$ vediamo come calcolare $g^{\alpha\beta}$. Sappiamo che, per definizione, $g_{\alpha\delta}g^{\delta\beta} \equiv \delta^\beta_\alpha$ e che $\eta_{\alpha\delta}\eta^{\alpha\delta} \equiv \delta^\beta_\alpha$.
Definiamo la quantitò $h^{\gamma\delta} \equiv \eta^{\gamma\alpha}\eta^{\gamma\beta}h_{\alpha\beta}$. Mostriamo che:

$$(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})(\eta^{\alpha\beta - h^{\alpha\beta}}) = \delta^\delta_\alpha$$

Sviluppando il termine a sinistra, e trascurando i termini del secondo ordine in $h$,

$$(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})(\eta^{\alpha\beta - h^{\alpha\beta}}) = \eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\delta} - \eta_{\alpha\beta}h^{\beta\delta} + h_{\alpha\beta}\eta^{\beta\delta} - h_{\alpha\beta h^{\beta\delta}} =$$
$$= \delta^\delta_\alpha - \eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\sigma}\eta^{\delta\tau}h_{\sigma\tau} + h_{\alpha\beta}\eta^{\beta\delta} = \delta^\delta_\alpha$$

Infatti $\eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\sigma} \equiv \delta^\sigma_\alpha$, $\delta^\sigma_\alpha h_{\sigma\tau} = h_{\alpha\tau}$, e $\eta^{\delta\tau}h_{\alpha\tau} \equiv h^\beta_\alpha\eta^{\delta\beta}$, poichè $\tau$ è un indice muto e posso chiamarlo $\beta$.
Vedo quindi che $\eta^{\beta\delta} - h^{\beta\delta} = g^{\beta\delta}$.
Calcoliamo $\Gamma^\alpha_{00}$ (ricordiamo che la stazioanrietà implica che le derivate rispetto a $x^0$ soo nulle):

$$\Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{0\gamma}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\gamma}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\gamma}\right) = \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\gamma} - h^{\alpha\gamma})\left(-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\gamma}\right) \simeq -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\gamma}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\gamma}$$

Al primo ordin in $h$, quindi:

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} \simeq -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\gamma}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\gamma}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$$

- Se $\alpha = 0$, ottengo:

$$\frac{d^2x^0}{ds^2} = -\frac{1}{2}\eta^{00}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^0}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \quad \to \quad \frac{dx^0}{ds} = \frac{dt}{d\tau} = \text{costante}$$

- Se $\alpha = i$, ottengo:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{d^2x^i}{c^2d\tau^2} = \frac{1}{c^2}\frac{dt}{d\tau}\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{dt}{d\tau}\frac{dx^i}{dt}\right] = \frac{1}{c^2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\frac{d^2x^i}{dt^2}$$

Per cui,
$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \frac{d^2x^i}{dt^2} \simeq \frac{1}{2}\eta^{i\gamma}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\gamma}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \qquad (\eta^{i\gamma}) = -1 \text{ per } \gamma = i$$
cioè:
$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2x^i}{dt^2} \simeq -\frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \quad \text{vettorialmente:} \quad \frac{1}{c^2}\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} \simeq -\frac{1}{2}\bar{\nabla}h_{00}$$
Ma secondo la gravità newtoniana, indicando con $\Phi$ il potenziale gravitazionale, abbiamo:
$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = -\bar{\nabla}\Phi$$
e, confrontando i due risultati, otteniamo:
$$-\bar{\nabla}\Phi \simeq -\frac{c^2}{2}\bar{\nabla}h_{00} \quad \rightarrow \quad h_{00} \simeq \frac{2\Phi}{c^2} + \text{cost.}$$
Ma, se a grandi distanze dalle masse sorgenti del campo, $\Phi \rightarrow 0$ e $h_{00} \rightarrow 0$, pure perchè assumiamo che $g_{\alpha\beta} \rightarrow \eta_{\alpha\beta}$, segue che $cost. = 0$, cioè:
$$h_{00} \simeq \frac{2\Phi}{c^2} \qquad \rightarrow \qquad g_{00} \simeq 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$$
L'ipotesi di campo debole, $|h| \ll 1$, implica quindi che sia $2\Phi/c^2 \ll 1$.

Nel caso di una massa $M$ in cui la densità è distribuita con simmetria sferica, il potenziale esterno è dato da $\Phi = -GM/r$ secondo Newton. L'ipotesi che il campo sia debole implica quindi che $|2\Phi/c^2| \ll 1$, cioè:
$$\frac{2GM}{rc^2} \ll 1$$
Per un buco nero o un corpo generico sferico, $R_S \equiv 2GM/c^2$ è il cosiddetto ***raggio di Schwartzschild***, corrispondente, per un buco nero non rotante ed elettricamente neutro, all'***orizzonte degli eventi***, la zona dalla quale nulla può uscire (prescindendo da effetti quantistici di evaporazione). In questo caso vedo che la condizione di campo debole è che
$$\frac{R_S}{r} \ll 1 \qquad \rightarrow \qquad r \gg R_S$$
Per il nostro sole, $R_S \sim 3km$.

Vediamo ora, con le stesse assunzioni fatte sopra, che le equaizoni di Einstein si riducono all'equazione di Poisson $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho_0$ e determiniamo la costante $\kappa$.Il tensore di curvatura è:
$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} + \Gamma^\sigma_{\beta\delta}\Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} - \Gamma^\sigma_{\beta\gamma}\Gamma^\alpha_{\sigma\delta} \simeq \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} \quad \text{(gli altri termini sono } O(h^2))$$
I simboli di Christoffel sono:
$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}\left(\frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\sigma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\sigma}\right) \simeq \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma}\left(\frac{\partial h_{\beta\sigma}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial h_{\gamma\sigma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial x^\sigma}\right) \quad \text{(allo } O(h))$$
Il tensore di Ricci si ottiene da $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ contraendo il primo e il terzo indice:
$$\begin{aligned} R_{\beta\delta} &= R^\alpha_{\beta(\gamma\equiv\alpha)\delta} = \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} = \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma}... \end{aligned}$$

# 7 Lezione 11/04/2025

…

$$k_\sigma k^\sigma = 0$$

Possiamo riscrivere:

$$k_\sigma k^\sigma = \eta_{\sigma\alpha} k^\sigma k^\alpha = k^0 k^0 - \left(k^1 k^1 + k^2 k^2 + k^3 k^3\right) = \frac{\omega^2}{c^2} - |\bar{k}|^2 \equiv 0$$

Da cui si ha

$$\omega = kc \quad \rightarrow \quad \hbar\omega = \hbar k \cdot c \quad \Rightarrow \quad E = P \cdot c$$

come per i fotoni, con massa a riposo nulla: il quanto mediatore dell'interazione gravitazionale, il gravitone, ha massa nulla.

OSserviamo anche che

$$k_\gamma \cdot x^\gamma = \eta_{\gamma\sigma} \cdot x^\gamma = k^0 x^0 - |\bar{k} \cdot \bar{x}| = \omega t - \bar{k} \cdot \bar{x}$$

poichè $\quad h^\alpha_\delta = \eta^{\alpha\sigma} h_{\sigma\delta} = \eta^{\alpha\sigma} A_{\sigma\delta} e^{ik_\gamma \cdot x^\gamma} \quad$ si ha $\quad \dfrac{\partial h_{\delta^\alpha}}{\partial x^\alpha}$

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(A_{\sigma\delta}\eta^{\alpha\sigma} e^{ik_\gamma \cdot x^\gamma}\right) = A_{\sigma\delta}\eta^{\alpha\sigma} e^{ik_\gamma \cdot x^\gamma} \cdot ik_\alpha$$

cioè

$$ik_\alpha A^\alpha_\delta e^{ik_\gamma \cdot x^\gamma} = ik_\alpha h^\alpha_\delta = 0 \quad \Rightarrow \quad h^\alpha_\delta k_\alpha = 0$$

che è detta ***condizione di tarsversalità***.

Scegliamo la direzione di propagazione lungo l'asse $x$, ovvero $\bar{k} = (k, 0, 0)$ e quindi $h^\alpha_\sigma \cdot k_\alpha = \eta^{\alpha\delta} h_{\delta\sigma} k_\alpha = h_{\delta\sigma} k^\delta = 0$.

Ricordiamo che le condizioni di scelta del sistema di riferimento ($h = 0$ e $h_{0i} = 0$):

$$\begin{array}{lclcc}
\sigma = 0 & \rightarrow & h_{00}k^0 + h_{10}k^1 + h_{20}k^2 + h_{30}k^3 = 0 & \rightarrow & h_{00} = 0 \\
\sigma = 1 & \rightarrow & h_{01}k^0 + h_{11}k^1 + h_{21}k^2 + h_{31}k^3 = 0 & \rightarrow & h_{11} = 0 \\
\sigma = 2 & \rightarrow & h_{02}k^0 + h_{12}k^1 + h_{22}k^2 + h_{32}k^3 = 0 & \rightarrow & h_{12} = h_{21} = 0 \\
\sigma = 3 & \rightarrow & h_{03}k^0 + h_{13}k^1 + h_{23}k^2 + h_{33}k^3 = 0 & \rightarrow & h_{13} = h_{31} = 0
\end{array}$$

In forma matriciale:

$$h_{\beta\delta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{22} & h_{23} \\ 0 & 0 & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}$$

dove $h=0 \Rightarrow h_{22}+h_{33}=0 \Rightarrow h_{22}=-h_{33} \equiv h_+$ e per simmetria $h_{23}=h_{32} \equiv h_\times$.

Quindi, in forma matriciale:

$$h_{\beta\delta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_+ & h_\times \\ 0 & 0 & h_\times & -h_+ \end{pmatrix}$$

se $\bar{k}$ è lungo l'asse $x$, le componenti non nulle dell'onda sono perpendicolari all'asse $x$ e quindi sono onde trasversali a due componenti (polarizzazioni):

$$\begin{cases} h_+ = A_+ e^{i(\omega t - \bar{k}\bar{x})} \\ h_\times = A_\times e^{i(\omega t - \bar{k}\bar{x})} \end{cases}$$

…

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0$$

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{00} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du^\mu}{d\tau} + = -\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}\left(\underbrace{\frac{\partial h_{\sigma 0}}{\partial x^0}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\partial h_{0\sigma}}{\partial x^0}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\sigma}}_{\to 0}\right)$$

…

Per onde di tipo $h_+$ abbiamo:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0-h_+ \end{pmatrix} e^{-(\nu x - \omega t)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0-h_+ \end{pmatrix} \cos(\omega t - x\nu + \phi)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_+ \end{pmatrix} e^{-(\mu x - \omega t)}$$

…

$$ds^2 = c^2dt^2 - \left\{dx + [1 - h_+ \sin(\omega t)]\,dy^2 + [1 - h_+ \sin(\omega t)]\,dz^2\right\}$$

$$\begin{cases} Y = (1 + \frac{1}{2}h_+ \sin(\omega t))y \\ Z = (1 - \frac{1}{2}h_+ \sin(\omega t))z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left\{dY^2 = dy^2 + dy^2 h_+ \sin(\omega t) dZ^2 = dz^2 + dz^2 h_+ \sin(\omega t)\right.$$

…

Per onde $h_\times$ avremo similmente:

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2dt^2 - [dx^2 + dy^2 + dydzh_\times \sin\omega t + dz^2 + dydzh_\times \sin(\omega t)] \\ &= c^2dt^2 - [dy^2 + dz^2 + 2h_\times \sin\omega t dydz] \end{aligned}$$

$$\begin{cases} Y = y + \frac{1}{2} h_\times \sin \omega t z \\ Z = z + \frac{1}{2} h_\times \sin \omega t y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dY^2 = dy^2 + h_\times \sin \omega t \; dy \; dz \\ dZ^2 = dz^2 + h_\times \sin \omega t \; dy \; dz \end{cases}$$

Dunque possiamo accorgerci del passaggio di un'onda gravitazionale osservando lo spostamento tra le particelle.

Lo *strain* è definito come la variazione della lunghezza di un braccio dell'interferometro rispetto alla lunghezza originale:

$$h = \frac{dL}{L} = \frac{1}{2}\sqrt{h_\times^2 + h_+^2} \approxeq 10^{-21}$$

# 8 Lecture 15/05/2025

Una massa singola, ferma nello spazio (Mass Monopole):

$$\int \rho(x)\, d^3x = M$$

non genera una perturbazione del tensore metrico, dunque non genera onde gravitazionali.

Una massa in movimento (Mass Dipole):

…

La **configurazione quadrupolare** è la principale sorgente di onde gravitazionali nei sistemi astrofisici a bassa frequenza, poiché i termini di ordine inferiore (monopolo e dipolo) non producono radiazione gravitazionale. In questo schema, le masse in orbita o in vibrazione generano una variazione del *momento di quadrupolo* del sistema, che si traduce in un'emissione di onde gravitazionali. Matematicamente, la *formula del quadrupolo* (in approssimazione newtoniana e gauge di Lorentz) fornisce un'espressione per l'ampiezza delle onde, proporzionale alla seconda derivata del momento di quadrupolo e che decresce come $1/r$ con la distanza dalla sorgente.

Questi oggetti emanano una radiazione di sincrotrone (osservabile dai segnali radio). Ogni qual volta ci arriva un raggio di tale tipo, sappiamo che il sistema ha compiuto un giro completo. La radiazione di sincrotrone è generata da particelle cariche che si muovono in un campo magnetico, e la sua emissione è associata a fenomeni astrofisici come le esplosioni di supernova o i getti relativistici emessi da buchi neri.

La prima osservazione diretta di onde gravitazionali è avvenuta il 14 settembre 2015, quando gli interferometri LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) hanno registrato le onde gravitazionali generate dalla fusione di due buchi neri. L'interferometro, in breve, funziona come segue:

- 2 bracci lunghi 4 km
- misura le onde gravitazionali attraverso la variazione della lunghezza dei bracci
- il raggio laser viene diviso in due e inviato lungo i due bracci, dove viene riflesso da specchi e poi ricombinato
- la variazione della lunghezza dei bracci provoca un cambiamento nell'interferenza del raggio laser, che viene misurato

Quando i due oggetti si avvicinano, la loro forza gravitazionale aumenta, accelerando le masse e generando onde gravitazionali, questa fase prende il nome di ***inspiral***. Quando i due corpi iniziano a fondersi, la loro velocità aumenta e la forza gravitazionale diventa così intensa che le onde gravitazionali emesse aumentano di intensità, questa fase prende il nome di ***merger***. In questa fase, la radiazione gravitazionale emessa è così intensa che può essere rilevata anche a distanze cosmiche. Infine, quando i due oggetti si fondono in un unico corpo, si verifica una fase di ***ringdown***, in cui il nuovo oggetto emette onde gravitazionali mentre si stabilizza.

Finora abbiamo potuto osservare qualche decina di fusione di buchi neri, e una sola fusione di stelle di neutroni. La fusione di stelle di neutroni, emettendo anche una controparte elettromagnetica, è stata osservata anche in altre lunghezze d'onda, come i raggi gamma e le onde radio, grazie alla sinergia tra diversi telescopi e osservatori.

Questi interferometri sono sensibili a corpi con masse di circa una decina di masse solari.

Buchi neri supermassicci (come quelli al centro di molte galassie), quando due galassie si fondono, generano onde gravitazionali a bassa frequenza, che non possono essere rilevate da interferometri come LIGO. Per questo, l'ESA e la NASA hanno in serbo un nuovo progetto, LISA (Laser Interferometer Space Antenna), che prevede il lancio di tre satelliti in formazione (triangolare, con distanza reciproca di $2.3 \cdot 10^6 km$) per rilevare onde gravitazionali a bassa frequenza.

## 8.1 Test classici

**Precessione - Perielio di Mercurio (2° ordine)**

**Gravitational Redshift**

**Deflection of light - Gravitational lensing**

**Shapiro delay**

—

## 8.2 MEtrica nel campo debole (stazionario)

Scriviamo l'eq di Einstein in forma di onda:

$$R_{\beta\delta} = -\frac{1}{2}\Box^2 h_{\beta\delta} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial t^2} - \nabla^2 h_{\beta\delta}\right)$$

Se il campo è stazionario, la derivata temporale si annulla, e quindi possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}\nabla^2 h_{\beta\delta} = \frac{8\pi G}{c^4}\left[T_{\beta\delta} - \frac{1}{2}\eta_{\beta\delta}T^\gamma_\gamma\right]$$

Dove $T_{\beta\delta}$ è il tensore energia-momento, che in questo caso è dato da:

$$\begin{cases} T^{\beta\delta}_{SILQ} = \rho_0 c^2 u^\alpha u^\beta \\ u^\alpha = (1,0,0,0) \\ T^\gamma_\gamma = \eta_{\alpha\gamma}T^{\gamma\alpha} \end{cases} \quad , \qquad T^{\beta\delta} = \begin{pmatrix} \rho_o c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque otteniamo:

$$R_{11} = \frac{1}{2}\nabla^2 h_{11} = \frac{8\pi G}{c^4}\left[\underbrace{T_{11}}_{0} - \frac{1}{2}\rho_0 c^2\right] = \frac{4\pi G}{c^2}\rho_0$$

…

$$h_{11} = h_{22} = h_{33} = \frac{2\phi}{c^2}, \quad h_{\alpha\beta} = 0 \; if \; \alpha \neq \beta$$

…

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

…

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x^\mu}{dt^2}=-\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dU^\mu}{ds} &= -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta \\
&= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left[g_{\alpha\beta,\nu}-g_{\beta\nu,\alpha}-g_{\alpha\nu,\beta}\right]U^\alpha U^\beta \\
&= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\alpha\beta,\nu}U^\alpha U^\beta-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\alpha\nu,\beta}U^\alpha U^\beta-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\beta\nu,\alpha}U^\alpha U^\beta
\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}U_\sigma}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g_{\sigma\mu}U^\mu\right)=\frac{\mathrm{d}g_{\sigma\mu}}{\mathrm{d}s}U^\mu+g_{\sigma\mu}\frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}g_{\sigma\mu}}{\mathrm{d}x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}U^\mu+g_{\sigma\mu}\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\alpha\beta,\nu}U^\alpha U^\beta-g^{\mu\nu}g_{\alpha\nu,\beta}U^\alpha U^\beta\right]$$

…

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}U_\sigma}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\sigma}U^\alpha U^\beta$$

abbiamo dunque che il quadrimomento $P_0$ si conserva:

$$P_0(P)=P_0(\theta)$$

…

$$E=P_\alpha U^\alpha, \qquad ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \qquad \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{g_{\mu\nu}}=U^\mu U^\nu$$

da cui

$$(U^0)^2=\frac{1}{g_{00}} \quad \Rightarrow \quad U^0=\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}$$

e questo era il Pound Rebka test

# 9 Cosmologia

## 9.1 Introduzione

La cosmologia (*Cosmos*: Universo, bellezza; *Logos*: studio) è la scienza che studia l'origine, l'evoluzione e la struttura dell'universo.

Le prime teorie cosmologiche risalgono a circa 2500 anni fa, quando i filosofi greci iniziarono a riflettere sulla natura dell'universo.

Nel Rinascimento, Copernico rivoluzionò il pensiero cosmologico proponendo un modello eliocentrico, in cui il Sole occupa la posizione centrale invece della Terra. Keplero, analizzando con precisione le orbite planetarie, introdusse le leggi ellittiche del moto celeste, contribuendo a dare forma al nuovo paradigma. Galileo Galilei, con le sue osservazioni dettagliate tramite il telescopio, fornì evidenze empiriche a supporto di queste teorie, ribaltando definitivamente il vecchio modello geocentrico.

**Observation**: ***Paradosso di Olber***

**Paradosso di Olber**: Se l'universo fosse infinito, statico e omogeneo, ogni linea di vista dovrebbe colpire una stella, rendendo il cielo completamente luminoso.

$$f = \frac{L}{4\pi d^2} \qquad dJ = \frac{L}{4\pi d^2} n r^2 dr$$

Universo infinito:

$$J = \int_{r=0}^{\infty} \frac{L}{4\pi d^2} n r^2 dr = \infty$$

Tuttavia, il cielo notturno è scuro. Questo paradosso suggerisce due possibili conclusioni:

1. l'universo non è infinito
2. l'universo non è statico

I primi studi sulle distanze nell'universo hanno segnato una svolta nell'astronomia. Una delle tecniche adottate è la ***parallasse***, ovvero il cambiamento apparente della posizione di una stella rispetto allo sfondo, osservato quando la Terra si muove lungo la sua orbita. Questa tecnica ha permesso di determinare le distanze assolute delle stelle, aprendo la strada a una comprensione più profonda della struttura galattica.

William Herschel, attraverso osservazioni sistematiche, ha contribuito a delineare un quadro tridimensionale della Via Lattea. Utilizzando sia la distribuzione che l'intensità luminosa delle stelle, Herschel ha avanzato ipotesi sulla forma ed estensione della nostra galassia, gettando le basi per le future ricerche in cosmologia.

All'inizio del '900 ci stavano due teorie cosmologiche in competizione: Curtis sosteneva che la Via Lattea fosse una galassia isolata (e dunque coincidente con l'universo), mentre Shapley credeva che fosse solo una delle tante galassie nell'universo.

**TODO:** collegamento tra i due paragrafi

Il redshift indica lo spostamento verso il rosso delle linee spettrali, simile all'effetto Doppler: quando una sorgente luminosa si allontana dall'osservatore, la lunghezza d'onda aumenta, spostando lo spettro verso il rosso. In cosmologia, questo fenomeno è interpretato come l'effetto dell'espansione dell'universo.

Nel 1929, Edwin Hubble scoprì che la velocità di allontanamento delle galassie è proporzionale alla loro distanza dalla Terra, formulando la legge di Hubble:

$$v = H_0 d$$

dove $v$ è la velocità di recessione, $H_0$ è la costante di Hubble e $d$ è la distanza. Questa scoperta ha fornito una prova fondamentale dell'espansione dell'universo e ha portato alla formulazione del modello cosmologico attuale.

Le moderne teorie cosmologiche si basano su due assunzioni fondamentali: l'**omogeneità** e l'**isotropia** dell'universo su larga scala. L'omogeneità implica che la distribuzione della materia e dell'energia sia la stessa in ogni regione sufficientemente ampia dell'universo, mentre l'isotropia significa che l'universo appare uguale in tutte le direzioni. Queste ipotesi, note come *Principio Cosmologico*, sono supportate dalle osservazioni e semplificano notevolmente la descrizione matematica dell'universo.

Si assume che l'universo sia spazialmente omogeneo e isotropo (su larga scala), il che implica che le leggi fisiche siano le stesse ovunque e in tutte le direzioni.

**Observation**: ***Legge di Hubble e Big Bang***

La legge di Hubble afferma che la velocità di recessione delle galassie è proporzionale alla loro distanza dalla Terra. Questa scoperta ha portato alla formulazione del modello del Big Bang, che descrive l'universo come in espansione a partire da uno stato iniziale estremamente denso e caldo.

Prove dell'isotropia dell'universo:

- simmetria a 100 mpc della struttura dell'universo - Il fondo cosmico a microonde, che segue uno spettro di corpo nero con una temperatura di circa 2.725 K, conferma l'omogeneità e l'isotropia dell'universo su larga scala.

—

Abbiamo prove evidenti (dalle osservazioni) che l'universo non è sempre stato come lo vediamo oggi. Inizialmente questo era infatti ***opaco***, meentre ora è ***trasparente***. Questo significa che l'universo ha subito un'evoluzione nel tempo, passando da uno stato iniziale in cui la materia era concentrata e calda a uno stato attuale in cui è più dispersa e fredda.

—

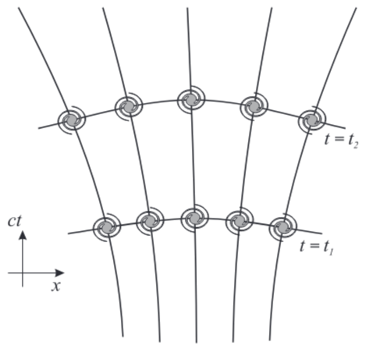
## 9.2 Principio Cosmologico

Se vogliamo applicare la Relatività Generale (intesa come la miglior teoria disponibile per descrivere il moto dei corpi per effetto della distribuzione di materia) allo studio del cosmo, dovremo aspettarci che, in generale, la geometria dello spazio tempo non sia statica, ma dipenda dal tempo. Questo è anche suggerito dall'evidenza osservativa di un moto generale di allontanamento delle galassie da noi (legge di Hubble).

L'espansione dell'universo appare abbastanza regolare. Vi sono, a causa della presenza di disomogeneità (come gruppi, ammassi di galassie), delle perturbazioni nei moti delle galassie indotti dall'azione gravitazionale di queste disomogeneità. Ma questi moti sono relativamente "piccoli", con velocità dell'ordine di $100 \div 1000 km/s$, rispetto alle velocità di allontanamento (*recessione*) da noi delle galassie che, nelle survey ottiche, arrivano anche a frazioni significative della velocità della luce. Inoltre questi moti sono generalmente non sistmatici.

"*Ad ogni epoca fissata l'universo appare lo stesso in ogni punto, a parte le irregolarità locali*"

Immaginiamo di riempire fittamente questo spazio "smussato" e omogeneo di osservatori, ognuno con orologio e regoli, ognuno in quiete rispetto al moto medio della materia circostante. Le linee di universo (cioè le geodetiche) di questi osservatori non si intersecano, eccetto possibilmente in un punto singolare nel passato e, forse, nel futuro. C'è una sola geodetica che passa per un punto dello spazio-tempo, e quindi la materia possiede, in ogni punto, una ben definita velocità. Questo substrato "smussato" si comporta come un fluido perfetto. La regolarità del moto degli osservatori (postulato di Weyl) permette di definire, per ogni valore del tempo cosmico, una sezione spaziale $t = cost$ dello spazio-tempo. Queste sezioni spaziali sono perpendicolari alle geodetiche descritte dagli osservatori (vedi più avanti).




…

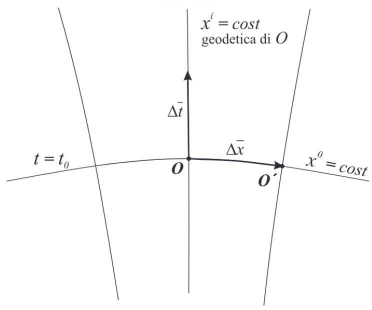
$$\Delta\bar{x} \cdot \Delta\bar{t} = 0 = g_{0i}\Delta t^0 \Delta x^i \qquad \forall \Delta t^0,\ \forall \Delta x^i \qquad \Rightarrow \qquad g_{0i} = 0$$

La metrica sarà del tipo:

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{ij}dx^i dx^j \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

Se noi prendiamo uno di questi osservatori comoventi, avremo che le sue coordinate spaziali sono costanti

Ciò non vuol dire c he la distanza relativa di questi osservatori non cambia, ma che la loro distanza relativa cambia in modo isotropo con l'espansione dell'universo.




— [formalmente]

Se consideriamo infatti uno di questi osservatori O in quiete rispetto al moto medio locale della materia, la sua geodetica sarà per lui definita dalle condizioni xi = cost (i = 1, 2, 3) ; se consideriamo un osservatore vicino, che si trovi sulla stessa superficie t = t0 = cost, cioè x0 = cost, di O, il vettore ∆x che unisce l'evento O all'evento 0' sarà perpendicolare al vettore ∆t parallelo alla geodetica per O ed alla quadrivelocità di componenti (1, 0, 0, 0). Se fosse ∆t · ∆x 6 = 0 gli eventi O ed O' non sarebbero più contemporanei, perchè ∆x avrebbe una componente non nulla lungo l'asse dei tempi di O.

Questo ci permette di semplificare la scelta della metrica per l'osservatore O, che sarà in generale:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$$

…

Consideriamo un osservatore co-movente O. Le sue coordinate spaziali saranno xi = cost, per cui dxi = 0; l'intervallo ds2 tra due eventi successivi lungo la linea d'universo di O sarà quindi ds2 = g00(dx0)2, ma questo è anche uguale, per definizione, a c2dτ 2 con τ tempo proprio associato ad O:

$$c^2 d\tau^2 = g_{00}(dx^0)^2$$

Lo spazio è omogeneo, e questa relazione deve valere per qualunque osservatore, quali che siano le sue coordinate $x^i$, per cui $g_{00}$ deve dipendere solo da $x^0$. Possiamo quindi definire una nuova scala di tempo cosmico tale che:

$$c\mathrm{d}t = \sqrt{g_{00}}dx^0$$

che coinciderà con il tempo proprio degli osservatori co-moventi e scriverò, usando t per indicare il tempo proprio:

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 + g_{ij}dx^i dx^j$$

Un sistema di riferimento in cui sia $g_{00} \equiv 1$ e $g_{0i} \equiv 0$ è detto *sincrono*. In questo caso le linee d'universo $x^i = cost$ sono linee geodetiche. Infatti il quadrivettore tangente alla linea d'universo $u^\alpha \equiv \mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}s$ ha le componenti uguali a $(1,0,0,0)$ e soddisfa automaticamente l'equazione delle geodetiche, perchè:

$$\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}u^\beta u^\gamma \approxeq \Gamma^\alpha_{00}$$

ma essendo $g_{00} = 1$, e $g_{0i} = 0$, abbiamo:

$$\Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{\sigma 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma}\right) = 0$$

**TODO:** missimg something

### 9.2.1 Metrica di Robertson-Walker

Usiamo anzitutto il fatto di avere una simmetria sferica dovuta all'isotropia scegliendo un sistema di coordinate sferico, che riflette questa simmetria. Restiamo, per ora, nello spazio euclideo e definiamo:

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases}$$

Definita in questo modo la superficie sferica è immediato ricavare il tensore metrico:

$$\begin{aligned} \bar{x}_R &= (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \\ \bar{x}_\theta &= (R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, -R\sin\theta) \\ \bar{x}_\varphi &= (-R\sin\theta\sin\varphi, R\sin\theta\cos\varphi, 0) \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad {}^3g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

da cui:

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}R^2 + R^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) = \mathrm{d}R^2 + R^2\mathrm{d}\Omega^2$$

Per $R = cost$ sarà $dl^2 = R^2\mathrm{d}\Omega^2$, con ${}^2g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$. Ricordiamo che l'area della superficie si può ottenere dalla relazione:

$$dA = \sqrt{{}^2g}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

da cui l'area della sfera è:

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 4\pi R^2$$

Questa relazione si può generalizzare alle tre dimensioni ottenendo in questo caso un volume:

$$dV = \sqrt{{}^3 g}\, \mathrm{d}R \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = R^2 \sin\theta \mathrm{d}R \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$$

da cui otteniamo:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

**TODO:** missing something

# 10 Cosmologia

La cosmologia (*Cosmos*: Universo, bellezza; *Logos*: studio) è la branca della fisica e dell'astronomia che indaga l'origine, l'evoluzione, la struttura su larga scala e il destino ultimo dell'Universo. Sebbene le prime riflessioni sulla natura del cosmo risalgano ai filosofi greci, la cosmologia moderna affonda le sue radici nella rivoluzione scientifica del Rinascimento. Figure come Copernico, con il suo modello eliocentrico, Keplero, che descrisse le orbite ellittiche dei pianeti, e Galileo Galilei, le cui osservazioni telescopiche fornirono prove cruciali, scardinarono la visione geocentrica millenaria, aprendo la via a una nuova comprensione del nostro posto nell'Universo.

## 10.1 Introduzione Storica e Concettuale

Comprendere la vastità dell'Universo e la nostra posizione al suo interno divenne la sfida successiva. Tecniche come la **parallasse** stellare – il cambiamento apparente della posizione di una stella vicina rispetto allo sfondo lontano dovuto al moto orbitale della Terra – permisero le prime misure dirette di distanza, rivelando le immense scale del cosmo. Astronomi come William Herschel tentarono di mappare la struttura tridimensionale della Via Lattea basandosi sulla distribuzione e luminosità delle stelle.

Tuttavia, all'inizio del XX secolo, la natura stessa delle "nebulose" spiraliformi osservate era oggetto di un acceso dibattito (il "Great Debate"): erano parte della nostra Galassia, rendendola di fatto l'intero Universo conosciuto (posizione sostenuta da Heber Curtis), o erano esse stesse "universi-isola", galassie distinte e lontane simili alla nostra (come proposto da Harlow Shapley)?

Questa domanda fondamentale si intrecciava con un antico enigma noto come **Paradosso di Olbers**:

**Observation**: ***Paradosso di Olber***

Perché il cielo notturno è buio, se l'Universo fosse infinito, eterno e uniformemente pieno di stelle? In tale scenario, ogni linea di vista dovrebbe intercettare la superficie di una stella, rendendo la volta celeste abbagliante.

$$f = \frac{L}{4\pi d^2} \qquad \text{Flusso da una stella a distanza } d$$

$$dJ = \frac{L}{4\pi d^2} n(4\pi d^2 dr) = Lndr \qquad \text{Contributo da un guscio sferico}$$

Integrando su un universo infinito:

$$J = \int_{r=0}^{\infty} Lndr = \infty$$

L'oscurità del cielo suggerisce che almeno una delle ipotesi (infinito, eterno, statico, omogeneo) debba essere errata. Le possibili soluzioni includono:

1. L'universo ha un'età finita (la luce dalle stelle più lontane non ci ha ancora raggiunto).
2. L'universo è in espansione (la luce delle galassie lontane perde energia).

La chiave per risolvere il dibattito sulla natura delle nebulose e per gettare nuova luce sul paradosso di Olbers giunse dalle misure di velocità e distanza delle galassie. Già si osservava che molte nebulose mostravano uno spostamento sistematico delle loro linee spettrali verso il rosso (**redshift**), interpretabile come un allontanamento dovuto all'effetto Doppler. Fu Edwin Hubble, nel 1929, a stabilire la relazione cruciale: misurando le distanze di varie galassie (usando stelle Cefeidi come riferimento) e correlandole con i loro redshift, scoprì la **Legge di Hubble**:

$$v = H_0 d$$

dove $v$ è la velocità di recessione, $d$ la distanza e $H_0$ è la **costante di Hubble**. Questa legge fornì la prova definitiva che le nebulose erano altre galassie esterne alla nostra e, soprattutto, che l'Universo è in **espansione**.

L'espansione cosmica è il pilastro del modello cosmologico standard attuale, il **Big Bang**. Estrpolando l'espansione indietro nel tempo, si deduce che l'universo dovesse trovarsi in uno stato iniziale estremamente denso e caldo, dal quale si è espanso e raffreddato fino allo stato attuale. Questo scenario fornisce un quadro coerente per spiegare sia la legge di Hubble sia il paradosso di Olbers.

Per descrivere matematicamente un universo in espansione, la cosmologia moderna adotta il **Principio Cosmologico**: su scale sufficientemente grandi (tipicamente > 100 Mpc), l'Universo è **omogeneo** (uguale in ogni punto) e **isotropo** (uguale in ogni direzione). Sebbene l'universo appaia chiaramente disomogeneo su piccola scala (pianeti, stelle, galassie), queste assunzioni sono ben supportate dalle osservazioni su larga scala, come la distribuzione degli ammassi di galassie e, in modo spettacolare, dalla **Radiazione Cosmica di Fondo** (CMB). Quest'ultima, un residuo dell'universo primordiale caldo, permea tutto lo spazio con uno spettro di corpo nero quasi perfetto (T ≈ 2.725 K) e mostra un'isotropia eccezionale, confermando le ipotesi del Principio Cosmologico.

Infine, numerose prove osservative indicano che l'universo *evolve* nel tempo. Ad esempio, l'universo primordiale era **opaco** alla radiazione, mentre oggi è largamente **trasparente**. Questo cambiamento di stato, insieme all'espansione e al raffreddamento testimoniati dalla CMB e dalla legge di Hubble, sottolinea la natura dinamica del cosmo che andremo a studiare nei prossimi capitoli.

…

## 10.2 La metrica di Robertson e Walker

Usiamo anzitutto il fatto di avere una simmetria sferica dovuta all'isotropia scegliendo un sistema di coordinate sferico, che riflette questa simmetria. Restiamo, per ora, nello spazio euclideo e definiamo:

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases}$$

…

$$ds^2 = c^2dt^2 + a(t)^2 g_{ij} sx^i sx^j$$

dove la dipendenza dal tempo è tutta nella funzione a(t) detta fattore di scala, ed i gij non dipendono dal tempo.

Il rapporto $a(t_1)/a(t_0)$ rappresenta l'ingrandimento al tempo $t_1$, rispetto al ltempo $t_0$, di una lunghezza misurata lungo le due superfici $t = t_1$ e $t = t_0$.

…

$$d\ell^2 = R^2 d\Omega^2 \quad \Rightarrow \quad d\ell^2 = \underbrace{g(r')}_{r^2} d\Omega^2$$

**Observation**:

$g_{r\theta}$ e $g_{r\phi}$ sono nulle

…

$$t = t_0 \quad \Rightarrow a(t_0) = cost$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} a^2 f(r) & & \\ & a^2r^2 & \\ & & a^2r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2 f(r)} & & \\ & \frac{1}{a^2r^2} & \\ & & \frac{1}{a^2r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix} \qquad g = a^6 f(r) r^4 \sin^2\theta$$

Poichè siamo in uno spazio omogeneo, abbiamo che in ogni punto in cui $t = t_0$ la curvatura è costante.

Vogliamo imporre la condizione che lo spazio sia omogeneo; questo significa che anche la curvatura dello spazio sarà costante ovunque. Ho una sola funzione da definire, $f(r)$, per cui mi basta una sola condizione, cioè che lo scalare di Ricci della sezione spaziale a tempo cosmico costante, 3R, sia costante.

Ricordiamo che:

$$^3R = g^{\alpha\beta}\, {}^3R_{\alpha\beta}, \quad e$$

abbiamo messo l'apice $^3$ davanti a $R$ per indicare che ci riferiamo alla parte spaziale, non allo spazio-tempo completo.

Si inizia come sempre dalle connessioni affini (simboli di Kristoffel); ce ne sono 18 indipendenti; di queste solo 7 sono diverse da zero:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{r}{f} \quad \Gamma^1_{33} = \frac{r\sin^2\theta}{f} \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} \quad \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Poichè $^3R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}$, abbiamo:

$$^3R_{11} = \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} \qquad ^3R_{22} = 1 - \frac{1}{f} + \frac{1}{2}\frac{r}{f^2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} \qquad ^3R_{33} = \sin^2\theta\cdot{}^3R_{22}$$

da cui, imponendo $^3R = costante = K$:

$$^3R = g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}$$

$$^3R = K = \frac{2}{a^2r^2}\left[1 - \frac{1}{f} + \frac{r}{f^2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right] = \frac{2}{a^2r^2}\left[1 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r}{f}\right)\right] = \frac{2}{a^2r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\left(1 - \frac{1}{f}\right)\right]$$

da cui:

$$\mathrm{d}\left[r\left(1-\frac{1}{f}\right)\right] = \frac{Ka^2r^2}{2}\mathrm{d}r$$

Integrando otteniamo:

$$r\left(1-\frac{1}{f}\right) = \frac{Ka^2r^3}{6} + A \qquad \Rightarrow \qquad f(r) = \frac{1}{1 + \frac{Ka^2r^2}{6} - \frac{A}{r}}$$

Ma, se $r \to 0$, la metrica sarà quella euclidea, per cui $f(r) \equiv 1$; ne segue che $A = 0$ eccetto

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{Ka^2(t)r^2}{6}} + r^2\mathrm{d}\Omega\right]$$

Osserviamo però che, come avevamo detto, la dipendenza dal tempo della parte spaziale si esplica attraverso la $a^2(t)$ davanti alla parentesi quadra, ed il termine all'interno di questa non dipende dal tempo. Questo significa che $Ka^2$ è funzione di $r$. Sarà allora $K = K(t)$.

Definiamo un cambiamento di scala in $r$ tale che $\frac{Ka2r2}{6}k\tilde{r}^2$, dove $k = 0$ se $K = 0$, altrmenti $k$ ha lo stesso segno di $K$, ma modulo 1.

$$k = \begin{cases} 0 & if\ K = 0 \\ sign(K) & if\ K \neq 0 \end{cases}$$

Abbiamo quindi:

$$r^2 = \frac{6k}{Ka^2}\tilde{r}^2 \qquad \Rightarrow \qquad r = \tilde{r}\sqrt{\frac{6k}{Ka^2}} \quad \mathrm{d}r = \sqrt{\frac{6k}{Ka^2}}\mathrm{d}\tilde{r}$$

e quindi:

$$\mathrm{d}t^2 = \tilde{a}^2(t)\left[\frac{6k}{K(t)a^2(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}\tilde{r}^2}{1-k\tilde{r}^2} + \frac{6k}{K(t)a^2(t)}\tilde{r}^2\mathrm{d}\Omega^2\right] = \frac{6k}{K(t)}\left[\frac{\mathrm{d}\tilde{r}^2}{1-k\tilde{r}^2} + \tilde{r}^2\mathrm{d}\Omega^2\right]$$

Se vogliamo che $dt^2 = \tilde{a}^2(t)[...]$, definiamo $\frac{6k}{K(t)} = \tilde{a}^2(t)$, da cui:

$$dt^2 = \tilde{a}^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}\tilde{r}^2}{1-k\tilde{r}^2} + \tilde{r}^2\mathrm{d}\Omega^2\right]$$

in cui $K(t) = {}^3R(t) \equiv \frac{6k}{\tilde{a}^2(t)}$.

## 10.3 Topologia dell'Universo

Vediamo ora in dettaglio le proprietà topologiche dei modelli cosmologici corrispondenti ai tre casi k = 0, +1, -1.

1. **Caso** $k = 0$ (universo piatto):

   In questo caso l'universo è omogeneo e isotropo, ma non ha curvatura. La geometria è euclidea e le linee di universo sono rette. La topologia è quella di uno spazio euclideo tridimensionale, quindi l'universo è infinito e non ha bordi.

   $$\mathbb{E}^3 \rightarrow \text{"}spazio\ piatto\text{"} \quad 0 < r < \infty \quad \rightarrow \quad \text{"}spazio\ infinito\text{"}$$

2. **Caso** $k = +1$ (universo chiuso):

   Per $\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\varphi = 0$ abbiamo $\mathrm{d}\ell = a(t)\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}}$ per cui $|r| < 1$ e la metrica diverge se $r \rightarrow 1$. Possiamo eliminare tale divergenza scegliendo una nuova coordinata $\chi$ al posto di $r$, tale che $r = \sin\chi$ così che:

   $$\mathrm{d}r = \cos\chi\mathrm{d}\chi = \sqrt{1-\sin^2\chi}\mathrm{d}\chi = \sqrt{1-r^2}\mathrm{d}\chi$$

   $$\mathrm{d}\ell^2 = a^2(t)\left[\frac{\cancel{(1-r^2)}\mathrm{d}\chi^2}{\cancel{1-r^2}} + \sin^2\chi\mathrm{d}\Omega^2\right] = a^2(t)\left[\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi\mathrm{d}\Omega^2\right]$$

   Con $0 \leq \chi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

   Confonrtiamo tale topologia con la sfera in 2-D in $\mathbb{E}^3$. Sarà $\chi = s/a$; $s = a\chi$, $a\sin\chi = x$:

   $$\mathrm{d}t^2 = a^2\mathrm{d}\chi^2 + x^2\mathrm{d}\varphi^2 = a(\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi\mathrm{d}\varphi^2)$$

Inoltre, detto $u = x/a$, $u = \sin\chi$, $\mathrm{d}u?\cos\chi\mathrm{d}\chi = \sqrt{1-\sin^2\chi}\mathrm{d}\chi = \sqrt{1-u^2}\mathrm{d}\chi$ e la metrica diventa:

$$\mathrm{d}t^2 = a^2\left[\frac{\mathrm{d}u^2}{1-u^2} + u^2\mathrm{d}\varphi^2\right]$$

Vedo che la coordinata r in Robertson-Walker con $k = +1$ corrisponde a $x/a$ nel caso 2-D della sfera; $\chi$ varia tra 0 e $\pi$.

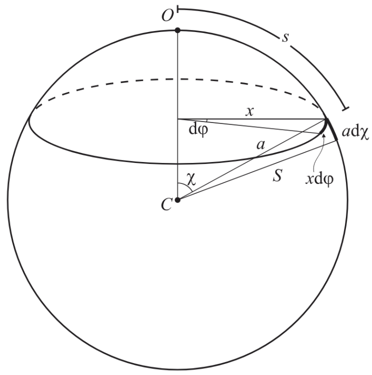



**Figure 10.1:** Universo chiuso

Consideriamo ora una ipersfera: una sfera 3-D in $\mathbb{E}^4$; L'equazione della sfera, estendendo il teorema di pitagora e ricordando che la quarta dimensione sarà in qualche modo perpendicolare alle altre tre, sarà:



$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = a^2 \qquad a = cost = \text{raggio della sfera}$$

Sia $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ (sfera 2-D per cui $u = cost$) così che $a^2 = r^2 + u^2 = cost$. Differenziando otteniamo:

$$2r\mathrm{d}r + 2u\mathrm{d}u = 0 \qquad \Rightarrow \qquad r\mathrm{d}r = -u\mathrm{d}u$$
$$\mathrm{d}u^2 = \frac{r2\mathrm{d}r^2}{u^2} = \frac{r^2\mathrm{d}r^2}{a^2 - r^2}$$

Questo per garantire che lo spostamento d$u$ sia sulla ipersfera in $\mathbb{E}^4$; Il $\mathrm{d}\ell^2$ in $\mathbb{E}^4$ sarà:

$$\mathrm{d}\ell^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}u^2$$

In coordinate polari abbiamo:

$$\mathrm{d}\ell^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2 + \mathrm{d}u^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2 + \frac{r^2\mathrm{d}r^2}{a^2 - r^2} = \mathrm{d}r^2\left[1 + \frac{r^2}{a^2 - r^2}\right] + r^2\mathrm{d}\Omega^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - r^2/a^2} + r^2\mathrm{d}\Omega^2$$

Posto $\tilde{r} = r/a$ abbiamo che ($\mathrm{d}r = a\mathrm{d}\tilde{r}$):

…

# Formulario

**Prima Forma Fondamentale**

- Forma quadratica:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

- Forma metrica:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

**Simboli di Christoffel**

- Prima Specie:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\right)$$

- Seconda Specie:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l}\right)$$

**Equazione delle geodetiche**

$$\frac{d^2u^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds} = 0$$