



UniTs - University of Trieste

Faculty of Scientific and Data Intensive Computing
Department of mathematics informatics and geosciences

Introduction to Galaxies and Astrophysics

Lecturers:

Prof. Alexandro Saro // Prof. Cebrolini Matteo

Author:

Andrea Spinelli

March 11, 2025

This document is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) (CC BY-NC-SA) license. You may share and adapt this material, provided you give appropriate credit, do not use it for commercial purposes, and distribute your contributions under the same license.

Preface

As a student of Scientific and Data Intensive Computing, I've created these notes while attending the **Introduction to Galaxies and Astrophysics** course.

This is an optional course for the second semester of the first year my master's degree, but this course is also available for students of the Physics department, anyway, next year it will probably be removed from both curricula.

The course is held by Prof. Alexandro Saro, a researcher at the INAF Astronomical Observatory of Trieste; the lecture of the course are taken in Italian, but the notes are written in English conformly to the language of the master's degree; however, some images or text could be in Italian due to the original language of the slides.

The first part of the course will be focused on gravity and Einstein's theory of general relativity:

- Non euclidean geometry
- Tensors
- Principles and equations of Einstein
- Gravitational waves

The second part of the course will be focused on cosmology:

- Robertson-Walker metric
- Hubble law
- Friedmann equations
- Cosmological models
- Precision cosmology (hints)

Contents

1

Introduzione

La teoria che studieremo è una *teoria geometrica*:

I 5 postulati di Euclide:

1. Per due qualsiasi punti A e B , esiste esattamente una retta che li attraversa.
2. Una retta può essere prolungata indefinitamente in entrambe le direzioni.
3. Dato un punto O ed un raggio R , esiste esattamente un cerchio con centro in O e raggio R .
4. Tutti gli angoli retti sono congruenti.
5. Data una retta R ed un punto P non appartenente a R , esiste esattamente una retta passante per P che è parallela a R .

Il quinto postulato è più complesso degli altri; nel corso del tempo, i matematici hanno provato più volte a dimostrare il quinto postulato basandosi sui restanti quattro. In seguito fu scoperto che il quinto è indipendente dagli altri.

Conseguenze:

1. Non esiste alcuna retta parallela a R passante per P
→ Geometrie ellittiche piane [S^2]
2. Esistono due o più rette parallele a R passanti per P
→ Geometrie iperboliche piane [H^2]

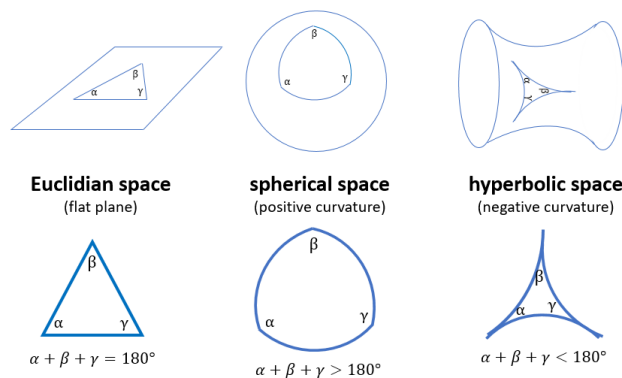


Figure 1.1: Geometrie ellittiche e iperboliche

Geometria Ellittica

La geometria ellittica piana è una forma di geometria non euclidea che rifiuta il quinto postulato di Euclide, il quale in geometria euclidea garantisce l'esistenza di una sola retta parallela passante per un dato punto. In geometria ellittica, non esistono rette parallele; invece, ogni coppia di rette si interseca eventualmente.

Un classico esempio è la geometria sferica, in cui le “rette” sono rappresentate da grandi cerchi su una sfera.

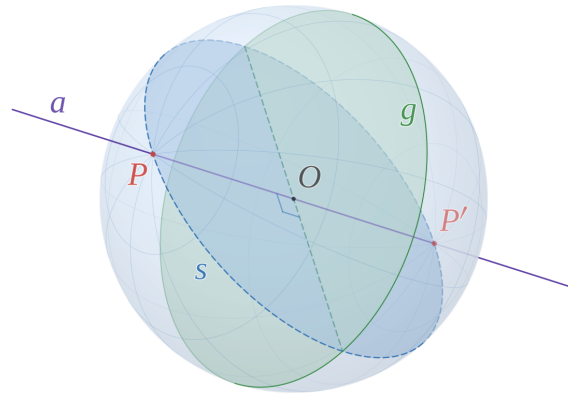


Figure 1.2: Geometria sferica

In questo contesto, i triangoli, noti come triangoli sferici, mostrano una proprietà intrigante: la somma dei loro angoli interni supera i 180° (un fenomeno noto come eccesso sferico), con l'eccesso proporzionale all'area del triangolo.

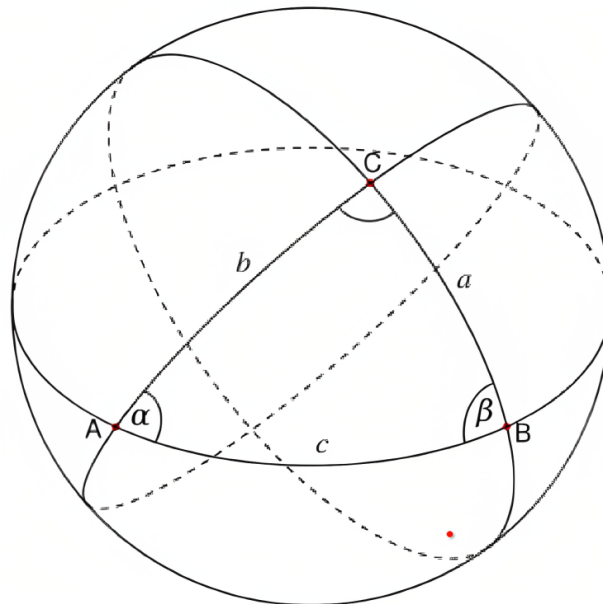


Figure 1.3: Triangolo sferico

Geometria Iperbolica

La geometria iperbolica piana è una forma di geometria non euclidea che rifiuta il quinto postulato di Euclide, il quale in geometria euclidea garantisce l'esistenza di una sola retta parallela passante per un dato punto. In geometria iperbolica, esistono molteplici rette parallele, e la somma degli angoli in un triangolo è sempre inferiore a 180° .

In questo contesto, i triangoli, noti come triangoli iperbolici, mostrano una proprietà intrigante: la somma dei loro angoli interni è inferiore a 180° , con il difetto proporzionale all'area del triangolo.

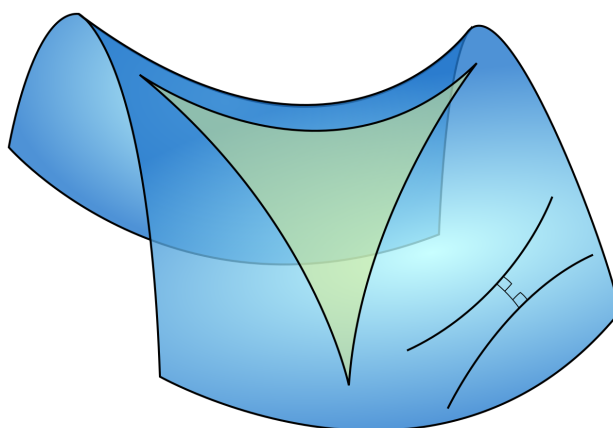


Figure 1.4: Triangolo iperbolico

Curva piana

Ascissa curvilinea

...

L'altra volta abbiamo visto come poter usare le coordinate curvilinee per descrivere tre geometrie. Abbiamo visto poi come
Ora iniziamo a ragionare con le superfici.
Supponiamo di avere un dominio $D \in \mathbb{R}^2$ e di voler mappare D in un sistema a 3 dimensioni:

$$\bar{x}(u, v) = (x_1, x_2, x_3) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$$

Calcoliamo il gradiente di \bar{x} rispetto a u e v :

$$\begin{cases} \bar{x}_u = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u} \right) \\ \bar{x}_v = \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v} \right) \end{cases}$$

Il versore normale alla superficie è dato da:

$$\hat{n} = \frac{\bar{x}_u \times \bar{x}_v}{|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|}$$

Si dice che la superficie M è regolare (smooth) se il versore normale è ben definito e non nullo, ovvero \bar{x}_u e \bar{x}_v non sono paralleli:

$$\bar{x}_u \times \bar{x}_v \neq 0$$

Superficie di una sfera di raggio R

Consideriamo una sfera di raggio R centrata nell'origine. La superficie della sfera è data da:

$$\bar{x}(u, v) = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, R \sin v)$$

dove $u \in [-\pi, \pi]$, $v \in [-\pi/2, \pi/2]$

Calcoliamo il gradiente di \bar{x} rispetto a u e v :

$$\begin{cases} \bar{x}_u = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = (-R \sin u \cos v, R \cos u \cos v, 0) \\ \bar{x}_v = \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = (-R \cos u \sin v, -R \sin u \sin v, R \cos v) \end{cases}$$

Andiamo ad analizzare il punto $(u, v) = (0, 0)$:

$$\begin{cases} \bar{x}_u = (0, R, 0) \\ \bar{x}_v = (0, 0, R) \end{cases}$$

Questi due vettori individuano la superficie tangente alla sfera nel punto $(0, 0)$.

Il versore normale alla superficie è dato da:

$$\hat{n} = \frac{\bar{x}_u \times \bar{x}_v}{|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|} = \frac{(-R^2, 0, 0)}{R^2} = (-1, 0, 0)$$

1.1 Prima Forma Fondamentale

In geometria differenziale, la *Prima Forma Fondamentale* fornisce la metrica intrinseca di una superficie. Essa permette di calcolare lunghezze, angoli e aree sulla superficie, misurando come essa si deforma nelle diverse direzioni. Consideriamo una superficie liscia parametrizzata da $\bar{x}(u, v)$, dove u e v sono le coordinate locali. I vettori tangenti alla superficie sono definiti da:

$$\bar{x}_u = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}, \quad \bar{x}_v = \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}.$$

I coefficienti della prima forma sono:

$$E = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u, \quad F = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v, \quad G = \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v.$$

Un elemento di spostamento infinitesimale sulla superficie si esprime come combinazione lineare dei vettori tangenti. Espandendo il quadrato dello spostamento, otteniamo:

$$u^2 \underbrace{(\bar{x}_u \cdot \bar{x}_u)}_E + 2uv \underbrace{(\bar{x}_u \cdot \bar{x}_v)}_F + v^2 \underbrace{(\bar{x}_v \cdot \bar{x}_v)}_G,$$

da cui il quadrato dell'elemento di lunghezza diventa

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Se una curva sulla superficie è parametrizzata da un parametro t , con $u = u(t)$ e $v = v(t)$, allora derivando si ottiene:

$$\frac{ds^2}{dt^2} = E u'^2 + 2F u'v' + G v'^2.$$

Pertanto, la lunghezza L della curva, per t compreso tra a e b , si calcola come:

$$L = \int_a^b \frac{ds}{dt} dt = \int_a^b \sqrt{E u'^2 + 2F u'v' + G v'^2} dt.$$

In alternativa, esprimendo direttamente la lunghezza lungo la curva \bar{r} sulla superficie, si ha:

$$L = \int_{\bar{r}} ds = \int_{\bar{r}} \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}.$$

Questa formulazione riassume le proprietà geometriche intrinseche della superficie, permettendo di misurare le distanze in maniera indipendente dallo spazio ambiente.

1.1.1 Sfera in coordinate sferiche

Consideriamo una sfera di raggio R centrata nell'origine. La superficie della sfera è data da:

$$\bar{x}(u, v) = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, R \sin v) \xrightarrow{\text{derive}} \begin{cases} \bar{x}_u = (-R \sin u \cos v, R \cos u \cos v, 0) \\ \bar{x}_v = (-R \cos u \sin v, -R \sin u \sin v, R \cos v) \end{cases}$$

dove $u \in [-\pi, \pi]$, $v \in [-\pi/2, \pi/2]$

Calcoliamo i coefficienti della prima forma fondamentale:

$$\begin{cases} E = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u = R^2 \sin^2 v \cos^2 u + R^2 \sin^2 v \sin^2 u = R^2 \sin^2 v \\ F = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v = R^2 \sin v \cos v \cos u \cos u + R^2 \sin v \cos v \sin u \sin u = 0 \\ G = \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v = R^2 \cos^2 v \end{cases}$$

Quindi, la prima forma fondamentale è:

$$ds^2 = R^2 \sin^2 v du^2 + R^2 \cos^2 v dv^2$$

1.1.2 Forma metrica

La forma metrica è una generalizzazione della prima forma fondamentale, che permette di calcolare la lunghezza di curve e la misura di angoli su una superficie. La forma metrica è definita come:

$$g = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

dove E , F e G sono i coefficienti della prima forma fondamentale. La forma metrica è una forma bilineare simmetrica, che può essere rappresentata da una matrice:

$$(a \ b) \underbrace{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}_{\text{Forma metrica}} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

1.1.3 Identità di Lagrange

L'identità di Lagrange è una relazione che lega la forma metrica e la prima forma fondamentale di una superficie.

$$\bar{x}_u \times \bar{x}_v \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{N} = \frac{\bar{x}_u \times \bar{x}_v}{|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|}$$

L'identità di Lagrange afferma che:

$$|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|^2 = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Dimostrazione

Iniziamo considerando il prodotto vettoriale tra \bar{x}_u e \bar{x}_v :

$$\bar{x}_u \times \bar{x}_v = |\bar{x}_u| |\bar{x}_v| \cos \theta$$

dove θ è l'angolo tra \bar{x}_u e \bar{x}_v . Elevando al quadrato, otteniamo:

$$|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|^2 = (|\bar{x}_u|^2 |\bar{x}_v|^2 \sin^2 \theta) = |\bar{x}_u|^2 |\bar{x}_v|^2 (1 - \cos^2 \theta) = \underbrace{|\bar{x}_u|^2}_E \cdot \underbrace{|\bar{x}_v|^2}_G - \underbrace{(\bar{x}_u \cdot \bar{x}_v)^2}_{F^2}$$

Ricordando che $|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|^2 = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, otteniamo l'identità di Lagrange:

$$\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = EG - F^2$$

...

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

$$g_{i,j} = \bar{x}_i \cdot \bar{x}_j$$

$$\vec{v} = \sum_i v^i \bar{x}_i$$

$$\vec{w} = \sum_j w^j \bar{x}_j =$$

forma matriciale tensore metrico

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j$$

Lezione 3: 11/03/2025

La scorsa lezione abbiamo definito il tensore metrico:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

Possiamo definire ora la matrice inversa g^{ij} tale che il prodotto $g_{ij} \cdot g^{ij}$ sia la matrice identità.

$$g_{ij} \cdot g^{jk} = \int_j^k (?)$$

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g}$$

dove g è il determinante della matrice g_{ij} : $g = \det g_{ij} = |\bar{x}_1 \times \bar{x}_2|$.

Supponiamo di voler mappare lo spostamento $\Delta\Omega = \Delta u^1 \Delta u^2$ di un punto P da un sistema a due dimensioni (u^1, u^2) ad uno a 3 dimensioni (x_1, x_2, x_3) mediante la nostra trasformazione \bar{X} :

$$\begin{cases} \Delta x_1 = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^1} \Delta u^1 \\ \Delta x_2 = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^2} \Delta u^2 \end{cases}$$

$$\Delta A = |\Delta x_1| \cdot |\Delta x_2| \cdot \sin \theta = \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^1} \Delta u^1 \right| \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^2} \Delta u^2 \right| \sin \theta = |\bar{x}_1| \Delta u^1 |\bar{x}_2| \Delta u^2 \sin \theta = |\bar{x}_1 \times \bar{x}_2| \Delta u^1 \Delta u^2$$

Dunque otteniamo:

$$A = \iint_{\Omega} \sqrt{g} du^1 du^2$$

Spazi Riemanniani e Pseudo-Riemanniani

Gli **Spazi Riemanniani** sono spazi in cui la metrica è definita positiva:

$$ds^2 > 0$$

Gli **Spazi Pseudo-Riemanniani** sono spazi in cui la metrica è definita negativa:

$$ds^2 \begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix} 0$$

? Example: Sfera

La sfera è uno spazio Riemanniano:

$$\begin{cases} ds^2 = R^2 \cos^2 v du^2 + R^2 dv^2 \\ -\pi < u < \pi \\ -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Otteniamo la matrice:

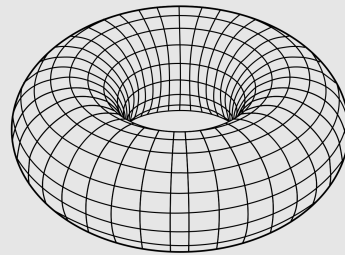
$$g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 v & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \Rightarrow g = R^4 \cos^2 v, \quad \sqrt{g} = R^2 \cos v$$

? Example: Toro

Consideriamo un esempio più complesso, il toro:

$$\bar{x}(u, v) = [R + r \cos u] \cos v, [R + r \cos v] \sin u, r \sin v,$$

$$\begin{cases} 0 < v < 2\pi \\ 0 < u < 2\pi \\ 0 < r < r \end{cases}$$



Otteniamo:

$$A = \iint_{\Omega} \sqrt{g} du dv = \boxed{4\pi^2 R r}$$

2.1 Tensori Controvarianti e Covarianti

Tensori Controvarianti

$$u^i = (i = 1, \dots, n) \Rightarrow u'^j = (j = 1, \dots, n)$$

Regola di trasformazione:

$$du'^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u'^j}{\partial u^i} du^i$$

Otteniamo il **tensore controvariante**:

$$V^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u'^j}{\partial u^i} V^i$$

Tensori Covarianti

Consideriamo ora un campo scalare Φ :

$$\partial \Phi_{,j} = \frac{\partial \Phi}{\partial u'^j} = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} = \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} \frac{\partial \Phi}{\partial u^i} = \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} \partial \Phi_{,i} = W$$

Otteniamo il **tensore covariante**:

$$W_{ij} = \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} W_i$$

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j = g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u'^l} du'^l \frac{\partial u^j}{\partial u'^k} du'^k = g'_{lk} du'^l du'^k$$

$$g'_{lk} = \frac{\partial u^i}{\partial u'^l} \frac{\partial u^j}{\partial u'^k} g_{ij} \rightarrow \text{”covariante”}$$

$$g'^{lk} = \frac{\partial u'^l}{\partial u^i} \frac{\partial u'^k}{\partial u^j} g^{ij} \rightarrow \text{”controvariante”}$$

Se un tensore ha sia indici covarianti che controvarianti, allora si dice **misto**. In tal caso è necessario applicare una trasformazione controvariante per gli indici controvarianti e una covariante per gli indici covarianti:

$$V_l'^k = \frac{\partial u'^k}{\partial u^j} \frac{\partial u^i}{\partial u'^l} V_i^j$$

👁 Observation: Tensori e indici

Un tensore ha **rango** n se ha n indici, sia covarianti che controvarianti.

Nota: *Non tutti gli oggetti che hanno indici sono tensori*

Consideriamo un tensore covariante D_i e un tensore metrico g_{ij} :

$$D_i = g_{ij}C^j$$

$$D_i D^i = g_{ij}C^j D^i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} D_i = g_{ij}C^j \\ C^j = D^j \end{cases} \quad \rightarrow \quad D_i = g_{ij}D^j$$

$$\vec{v} = v^i \bar{x}_i$$

$$v_m = \vec{v}^j \cdot \bar{x}_k = v \bar{x}_j \bar{x}_k = v^j g_{jk}$$

Consideriamo un vettore A :