



UniTs - University of Trieste

Faculty of Scientific and Data Intensive Computing
Department of mathematics informatics and geosciences

Introduction to Galaxies and Astrophysics

Lecturers:

Prof. Alexandro Saro // Prof. Cebrolini Matteo

Author:

Andrea Spinelli

March 21, 2025

This document is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike](#) (CC BY-NC-SA) license. You may share and adapt this material, provided you give appropriate credit, do not use it for commercial purposes, and distribute your contributions under the same license.

Preface

As a student of Scientific and Data Intensive Computing, I've created these notes while attending the **Introduction to Galaxies and Astrophysics** course.

This is an optional course for the second semester of the first year my master's degree, but this course is also available for students of the Physics department, anyway, next year it will probably be removed from both curricula.

The course is held by Prof. Alexandro Saro, a researcher at the INAF Astronomical Observatory of Trieste; the lecture of the course are taken in Italian, but the notes are written in English conformly to the language of the master's degree; however, some images or text could be in Italian due to the original language of the slides.

The first part of the course will be focused on gravity and Einstein's theory of general relativity:

- Non euclidean geometry
- Tensors
- Principles and equations of Einstein
- Gravitational waves

The second part of the course will be focused on cosmology:

- Robertson-Walker metric
- Hubble law
- Friedmann equations
- Cosmological models
- Precision cosmology (hints)

Contents

1	Geometrie Non Euclidee	1
1.0.1	Geometria Ellittica	2
1.0.2	Geometria Iperbolica	3
1.1	Curva piana	3
1.2	Superfici	5
1.3	Prima Forma Fondamentale	7
1.3.1	Identità di Lagrange	9
2	Lezione 3: 11/03/2025	13
2.1	Tensori Controvarianti e Covarianti	13
3	Lezione 3: 14/03/2025	16
3.1	Curvatura di una Superficie	16
4	Lezione 18/03/2025	19
4.1	Derivata Covariante	23

Draft

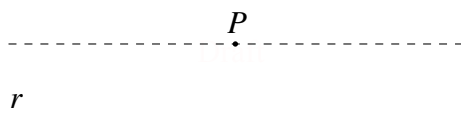
Geometrie Non Euclidee

La teoria che studieremo è una *teoria geometrica*:

I 5 postulati di Euclide:

1. Per due qualsiasi punti A e B , esiste esattamente una retta che li attraversa.
2. Una retta può essere prolungata indefinitamente in entrambe le direzioni.
3. Dato un punto O ed un raggio R , esiste esattamente un cerchio con centro in O e raggio R .
4. Tutti gli angoli retti sono congruenti.
5. Data una retta r ed un punto P fuori da essa, per il punto P passa una ed una sola retta parallela ad r (possiamo dare al termine parallelo il significato di *che incontra r solo all'infinito*, in un punto improprio).

Il quinto postulato è più complesso degli altri; i tentativi di dimostrare tale postulato a partire dagli altri postulati, considerati più evidenti, non hanno permesso di arrivare a questo, ma hanno portato, nell'800, alla nascita delle geometrie non-Euclidee (Gauss, Bolyai, Lobachevski, Klein).



Il quinto postulato si è rivelato indipendente dagli altri enunciati di Euclide, poiché è stato possibile formulare geometrie piane (in 2 dimensioni) in cui valgono tutti gli altri postulati, mentre il concetto di parallelismo assume un significato diverso:

1. Non esiste alcuna retta parallela a R passante per P → **Geometrie ellittiche piane** [S^2]
2. Esistono due o più rette parallele a R passanti per P → **Geometrie iperboliche piane** [H^2]

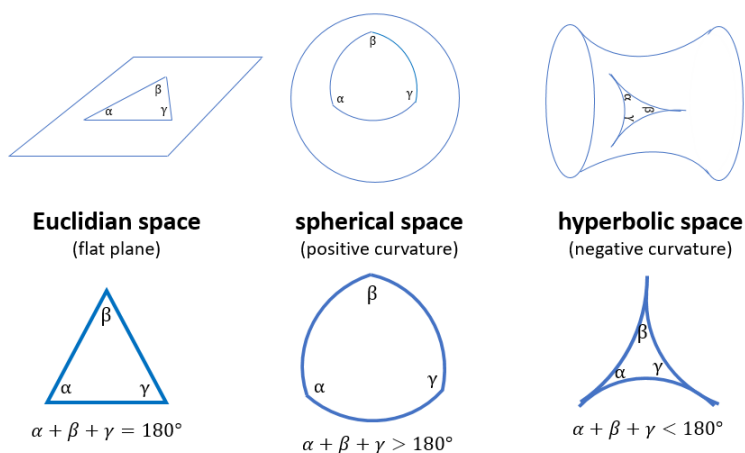


Figure 1.1: Geometrie ellittiche e iperboliche

1.0.1 Geometria Ellittica

La **geometria ellittica piana** è una forma di geometria non euclidea che rifiuta il quinto postulato di Euclide, il quale in geometria euclidea garantisce l'esistenza di una sola retta parallela passante per un dato punto. In geometria ellittica, non esistono rette parallele; invece, ogni coppia di rette si interseca eventualmente.

Un classico esempio è la geometria sferica, in cui possiamo definire come "**punto**" la coppia di punti diametralmente opposti (P, P') , e come "**retta**" un cerchio massimo passante per P e P' . Si può dimostrare che per due punti (P, P') e (Q, Q') passa esattamente una retta r . Inoltre, per un punto (T, T') esterno ad r non passa alcuna retta parallela ad r , poiché tutte le rette passanti per (T, T') intersecano r in almeno un punto.

Con la geometria analitica, Descartes ha mostrato che, identificando i punti con coppie di numeri reali e definendo la distanza tra due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) come $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, tutti i postulati di Euclide si riducono a teoremi sui numeri reali.

Definito sulla sfera un triangolo con i lati formati da archi di cerchi massimi, la somma degli angoli $\alpha + \beta + \gamma$ è sempre $> \pi$. L'area S di tale triangolo, se la sfera ha raggio R , si può esprimere come $S = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$. Quando $S \rightarrow 0$ (mantenendo R fisso), si osserva che $(\alpha + \beta + \gamma) \rightarrow \pi$. Questo significa che se il triangolo sferico è molto più piccolo del raggio R , la sua differenza da un triangolo piano tende a scomparire, avvicinandosi alla geometria euclidea.

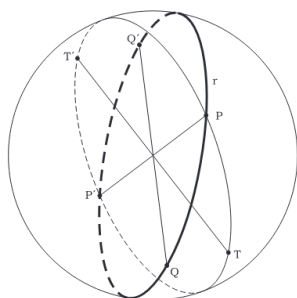


Figure 1.2: Geometria sferica

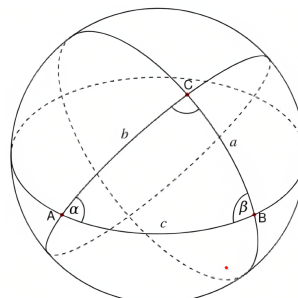


Figure 1.3: Triangolo sferico

In questo contesto, i triangoli, noti come triangoli sferici, mostrano una proprietà intrigante: la somma dei loro angoli interni supera i 180° ($\alpha + \beta + \gamma > \pi$), un fenomeno noto come eccesso sferico, con l'eccesso proporzionale all'area del triangolo.

$$S = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \quad \text{dove per } R \rightarrow \infty \quad \text{si ha} \quad \frac{S}{R^2} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \alpha + \beta + \gamma \rightarrow \pi$$

Per costruire un modello della geometria ellittica piana siamo ricorsi all'uso di una sfera (superficie bidimensionale, indicata con S^2) immersa (*embedded*) in uno spazio euclideo tridimensionale E^3 .

Notiamo che per rappresentare il 5° postulato abbiamo dovuto ricorrere ad una superficie *curva*, cioè la sfera. Questa curvatura deve essere inoltre costante in tutto il piano perché gli altri postulati descrivono lo spazio come omogeneo, e se la curvatura variasse questa proprietà verrebbe meno.

Questo ci porta a comprendere che le diverse geometrie non euclidee possono essere caratterizzate matematicamente attraverso diverse definizioni di distanza. La curvatura dello spazio diventa quindi un elemento fondamentale per distinguere tra i vari tipi di geometrie:

- Curvatura zero \rightarrow geometria euclidea
- Curvatura positiva costante \rightarrow geometria ellittica
- Curvatura negativa costante \rightarrow geometria iperbolica

1.0.2 Geometria Iperbolica

La geometria iperbolica piana è una geometria non euclidea in cui il quinto postulato di Euclide non vale, ammettendo più parallele a una retta data. I triangoli iperbolici hanno somma degli angoli inferiore a 180° , con “difetto” proporzionale all’area. Il piano iperbolico non può essere immerso interamente in uno spazio euclideo 3D, ma esistono modelli come il *cerchio di Klein* (1870), in cui i punti sono all’interno di una circonferenza unitaria e le rette ne sono le corde. Da un punto P passano due parallele a una retta data, e ne esistono infinite che non la intersecano.

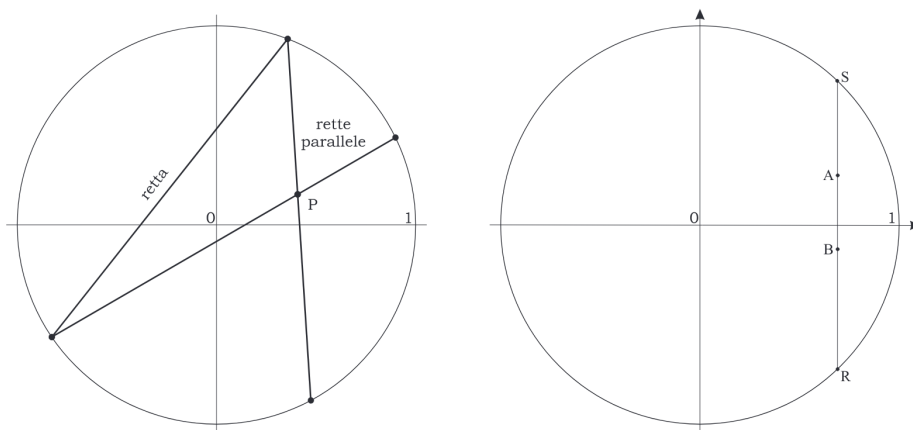


Figure 1.4: Geometria iperbolica

La distanza tra due punti A e B è

$$d(A, B) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{RA \cdot SB}{RB \cdot SA} \right),$$

che diverge se uno dei punti tende al bordo. Una rappresentazione parziale di H^2 in uno spazio euclideo 3-D E^3 è la cosiddetta *pseudosfera*, una superficie a curvatura negativa costante, in contrasto con la sfera a curvatura positiva.

1.1 Curva piana

Si può parametrizzare una curva piana nel modo seguente: $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$, dove t è un parametro, non necessariamente il tempo; il vettore tangente (velocità) è $d\bar{x}/dt$. Possiamo definire l’ascissa curvilinea $s(t)$:

$$O \equiv \bar{x}(t=0) \quad P \equiv \bar{x}(t) \quad ds = |d\bar{x}| = \left| \frac{d\bar{x}}{dt} \right| dt \quad \rightarrow \quad s(t) = \int_0^t |d\bar{x}| = \int_0^t \left| \frac{d\bar{x}}{dt} \right| dt$$

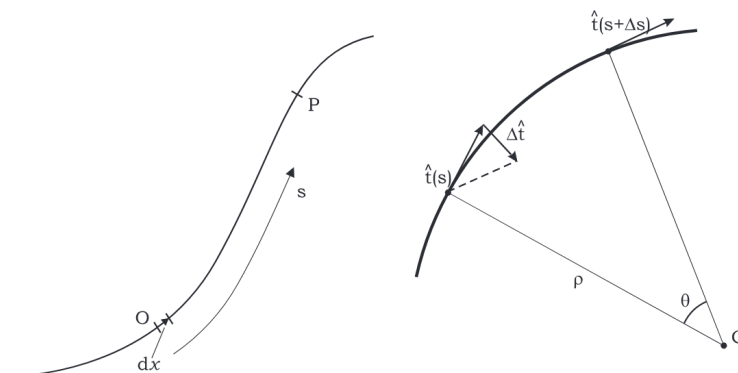


Figure 1.5: Ascissa curvilinea

Applicando la trasformata $t \rightarrow s$ notiamo che $\frac{d\hat{x}}{ds} = \dot{\hat{x}}(s)$ ha modulo 1: è il **versore tangente** $\hat{t}(s)$. Poichè $|\dot{\hat{x}}(s)| = |\dot{\hat{t}}(s)| = 1$, abbiamo $\hat{t} \cdot \dot{\hat{t}} = 0$ e, derivando, segue che $2\hat{t} \cdot \dot{\hat{t}} = 0$, ovvero $\hat{t} \perp \dot{\hat{t}}$.

Nota : $\dot{\hat{t}}$ non è un versore!

Separiamo la derivata di $\hat{t}(s)$ in modulo e direzione. Definiamo $\kappa(s) = |\dot{\hat{t}}(s)|$ e $\hat{n}(s) = \frac{\dot{\hat{t}}(s)}{|\dot{\hat{t}}(s)|}$, così che

$$\dot{\hat{t}}(s) = \kappa(s) \hat{n}(s).$$

Geometricamente, κ è la **curvatura** e \hat{n} il **versore normale**.

Osserviamo che, se una curva è approssimabile con un arco di cerchio di raggio ρ , allora

$$|\Delta \hat{t}| = 2|\hat{t}| \sin\left(\frac{\Delta \theta}{2}\right) \sim \Delta \theta \quad \text{e} \quad \Delta s \simeq \rho \Delta \theta. \quad \text{Da cui} \quad \left| \frac{\Delta \hat{t}}{\Delta s} \right| \simeq \frac{1}{\rho}.$$

Nel limite infinitesimo, ciò si traduce in:

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \kappa \hat{n} = \frac{1}{\rho} \hat{n} \implies \begin{cases} \kappa : \text{curvatura,} \\ \rho : \text{raggio di curvatura.} \end{cases}$$

Misurando l'angolo θ da un riferimento fisso (ad esempio, rispetto all'asse x), si ottiene

$$\Delta s = \rho \Delta \theta = \frac{\Delta \theta}{\kappa} \quad \rightarrow \quad \kappa = \left| \frac{d\theta}{ds} \right|.$$

Finora κ è stata definita come grandezza positiva. In corrispondenza di un flesso, ciò comporta però una discontinuità nella direzione di \hat{n} . Per ovviare a questo, fissata la parametrizzazione della curva tramite s , definiamo \hat{n} come la rotazione di \hat{t} di 90° in senso positivo (coerente con il riferimento O, x_1, x_2). Allora $\dot{\hat{t}}$ rimane ortogonale a \hat{t} , e possiamo scrivere ancora

$$\dot{\hat{t}}(s) = \kappa \hat{n},$$

ma lasciando che κ possa anche assumere valori negativi. In tal modo, in un flesso \hat{n} non cambia, mentre cambia il segno di κ , permettendo di distinguere se la curvatura si “piega” a sinistra o a destra rispetto alla tangente:

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} \quad (\text{senza valore assoluto}).$$

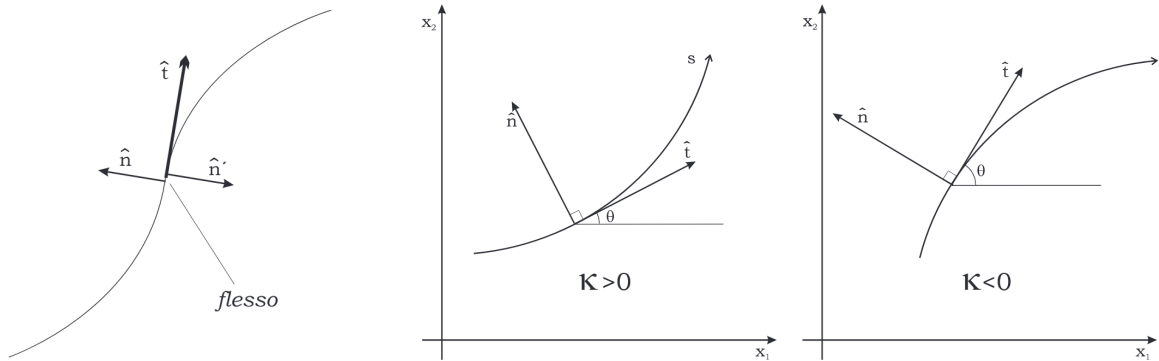


Figure 1.6: Segno del flesso

1.2 Superfici

Più che di *superfici* in senso esteso, ci interesseremo degli *elementi di superficie*, poiché vogliamo esaminare le proprietà locali. Anche in questo caso, useremo una rappresentazione parametrica.

Sia

$$\bar{x}: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

una funzione biunivoca (dunque invertibile) che descrive una superficie nello spazio euclideo tridimensionale E^3 . In coordinate:

$$\bar{x}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)).$$

Se la superficie è del tipo $z = f(x, y)$, allora la parametrizzazione diventa $\bar{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$.

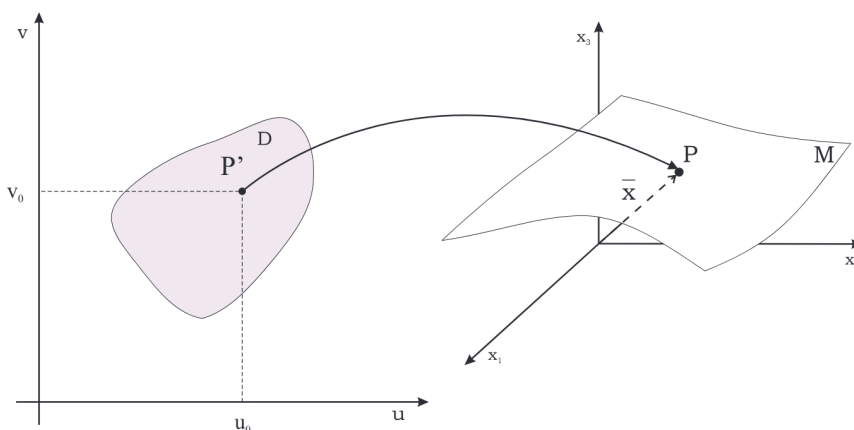


Figure 1.7: Superficie parametrica

Definition: *Superficie Regolare*

Una **superficie regolare** (o *smooth*) è tale se, definendo

$$\bar{x}_u = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u} \right), \quad \bar{x}_v = \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v} \right),$$

si ha che in ogni punto del dominio (cioè ovunque in D) risulta

$$\bar{x}_u \times \bar{x}_v \neq 0.$$

Fissando $v = v_0$ e variando u nei pressi di un punto $P' \in D$ (che corrisponde al punto P sulla superficie M), si ottiene una curva su M il cui vettore tangente è \bar{x}_u . Analogamente, \bar{x}_v è tangente a un'altra curva, e i due vettori definiscono il piano tangente in P .

Un versore normale alla superficie è dato da

$$\hat{n} = \frac{\bar{x}_u \times \bar{x}_v}{|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|},$$

e i tre vettori $\hat{n}, \bar{x}_u, \bar{x}_v$ formano un triedro locale.

Poiché la corrispondenza tra D e l'intorno di P su M è biunivoca, possiamo considerare (u, v) come un sistema di coordinate curvilinee sull'intorno di P (ad esempio, i paralleli e i meridiani su una sfera).

Se $u = u(t)$ e $v = v(t)$ descrivono una curva in D passante per $P'(u_0, v_0)$, allora

$$\bar{r}(t) = \bar{x}(u(t), v(t))$$

rappresenta la curva su M passante per $\bar{x}(u_0, v_0)$. Il vettore velocità è

$$\dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{x}_u \frac{du}{dt} + \bar{x}_v \frac{dv}{dt}.$$

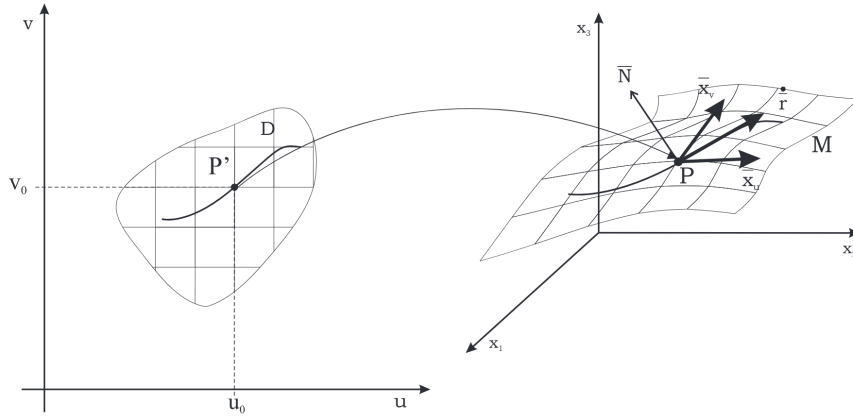


Figure 1.8: Curva su una superficie

Poiché $\dot{\bar{r}}$ è tangente alla curva e appartiene quindi al piano tangente di M , ogni vettore tangente a M in P si può scrivere come combinazione lineare di \bar{x}_u e \bar{x}_v . Viceversa, per ogni combinazione $\bar{v} = a\bar{x}_u + b\bar{x}_v$ esiste una corrispondente curva su M la cui velocità è esattamente \bar{v} . In tal senso, \bar{x}_u e \bar{x}_v formano una base del piano tangente.

❓ Example: Superficie di una sfera di raggio R

Consideriamo la sfera di raggio R centrata nell'origine. La sua superficie si parametrizza come

$$\bar{x}(u, v) = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, R \sin v),$$

con $u \in [-\pi, \pi]$ e $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Calcoliamo le derivate rispetto a u e v :

$$\begin{aligned} \bar{x}_u &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = (-R \sin u \cos v, R \cos u \cos v, 0), \\ \bar{x}_v &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = (-R \cos u \sin v, -R \sin u \sin v, R \cos v). \end{aligned}$$

Consideriamo il punto $(u, v) = (0, 0)$:

$$\bar{x}_u(0, 0) = (0, R, 0), \quad \bar{x}_v(0, 0) = (0, 0, R).$$

Tali vettori definiscono il piano tangente alla sfera in quel punto.

Il versore normale alla superficie in $(0, 0)$ si ottiene con il prodotto vettoriale:

$$\hat{n} = \frac{\bar{x}_u \times \bar{x}_v}{|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|} = \frac{(-R^2, 0, 0)}{R^2} = (-1, 0, 0).$$

1.3 Prima Forma Fondamentale

In geometria differenziale, la **prima forma fondamentale** (o *forma metrica*) di una superficie definisce la sua metrica intrinseca. Grazie a essa possiamo misurare lunghezze, angoli e aree *rimanendo* sulla superficie, ossia senza far riferimento esplicito allo spazio tridimensionale in cui la superficie è immersa.

Definition: Prima Forma Fondamentale

Sia M una superficie regolare immersa in \mathbb{R}^3 , e sia

$$\bar{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

una parametrizzazione locale di M . La **prima forma fondamentale** in un punto $p \in M$ è il bilineare simmetrico

$$I_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R},$$

definito per ogni coppia di vettori tangenti $v, w \in T_p M$ (lo spazio tangente alla superficie M passante per p) mediante

$$I_p(v, w) = \langle d\bar{x}_p(v), d\bar{x}_p(w) \rangle,$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica il prodotto scalare euclideo in \mathbb{R}^3 . In coordinate locali (u, v) , ponendo

$$\bar{x}_u = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}, \quad \bar{x}_v = \frac{\partial \bar{x}}{\partial v},$$

l'espressione si riduce a

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2,$$

con

$$E = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u, \quad F = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v, \quad G = \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v.$$

Sia $\bar{r}(t) = \bar{x}(u(t), v(t))$, con $t \in [a, b]$, una curva su una superficie; se $s(t)$ è la relativa ascissa curvilinea, la lunghezza totale della curva risulta

$$L = s(b) = \int_a^b \frac{ds}{dt} dt = \int_a^b |\dot{\bar{r}}(t)| dt.$$

Poiché

$$\dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{x}_u \dot{u} + \bar{x}_v \dot{v} \quad (\text{dove } \dot{u} = \frac{du}{dt}, \dot{v} = \frac{dv}{dt}),$$

segue che

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = |\dot{\bar{r}}|^2 = \dot{\bar{r}} \cdot \dot{\bar{r}} = (\bar{x}_u \dot{u} + \bar{x}_v \dot{v}) \cdot (\bar{x}_u \dot{u} + \bar{x}_v \dot{v}) = \dot{u}^2 (\bar{x}_u \cdot \bar{x}_u) + 2\dot{u}\dot{v} (\bar{x}_u \cdot \bar{x}_v) + \dot{v}^2 (\bar{x}_v \cdot \bar{x}_v).$$

Introduciamo le funzioni

$$E = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u, \quad F = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v, \quad G = \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v \quad \longrightarrow \quad E = E(u, v), \quad F = F(u, v), \quad G = G(u, v),$$

e otteniamo

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2.$$

Pertanto, la lunghezza totale della curva è

$$L = \int_a^b \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt = \int_{\bar{\gamma}} \sqrt{Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2},$$

che in forma differenziale si esprime come

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2.$$

Questa espressione, chiamata **prima forma fondamentale**, descrive la geometria intrinseca della superficie. “Intrinseco” significa che tutte le misure (di distanze, angoli, ecc.) possono essere effettuate senza “uscire” dallo spazio bidimensionale della superficie.

Poiché esiste una corrispondenza biunivoca tra $D \subset \mathbb{R}^2$ e la porzione di superficie M , le linee $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$ formano sulla superficie una *griglia* di coordinate curvilinee, mentre $E(u, v)$, $F(u, v)$ e $G(u, v)$ sono interpretate come *funzioni* definite su M . In questo modo, ipotetici “abitanti” bidimensionali potrebbero compiere misurazioni di distanze *sulla superficie* per determinare la forma di E , F e G , giungendo così a una descrizione completa della metrica locale.

❓ Example: Il piano

Consideriamo il piano in E^3 descritto da $\bar{x}(u, v) = (u, v, 0)$, con coordinate cartesiane $x = u$ e $y = v$. Allora

$$\bar{x}_u = (1, 0, 0), \quad \bar{x}_v = (0, 1, 0),$$

e i coefficienti della prima forma fondamentale sono

$$E = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u = 1, \quad F = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v = 0, \quad G = \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v = 1.$$

Quindi,

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

che corrisponde al classico *teorema di Pitagora* in forma differenziale. La lunghezza di una curva $y = f(x)$, parametrizzata da $x = t$ e $y = f(t)$, è

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

❓ Example: Sfera in coordinate sferiche

Consideriamo una sfera di raggio R centrata nell'origine. La superficie della sfera è data da:

$$\bar{x}(u, v) = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, R \sin v) \xrightarrow{\text{derive}} \begin{cases} \bar{x}_u = (-R \sin u \cos v, R \cos u \cos v, 0) \\ \bar{x}_v = (-R \cos u \sin v, -R \sin u \sin v, R \cos v) \end{cases}$$

dove $u \in [-\pi, \pi]$, $v \in [-\pi/2, \pi/2]$

Calcoliamo i coefficienti della prima forma fondamentale:

$$\begin{cases} E = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u = R^2 \cos^2 v \sin^2 u + R^2 \cos^2 v \cos^2 u & = R^2 \cos^2 v \\ G = \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v = R^2 \sin^2 v \cos^2 u + R^2 \sin^2 v \sin^2 u + R^2 \cos^2 v & = R^2 \\ F = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v = R^2 v \cos v \cos u \sin \sin u - R^2 \cos v \cos u \sin \sin u & = 0 \end{cases}$$

Quindi, la prima forma fondamentale è:

$$ds^2 = R^2 \cos^2 v du^2 + R^2 dv^2$$

1.3.1 Identità di Lagrange

L'identità di Lagrange è una relazione che lega la forma metrica e la prima forma fondamentale di una superficie.

Se $\begin{cases} \bar{v} = a\bar{x}_u + b\bar{x}_v \\ \bar{\omega} = c\bar{x}_u + d\bar{x}_v \end{cases}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sono due vettori tangenti alla superficie M , allora:

$$\bar{v} \cdot \bar{\omega} = (a\bar{x}_u + b\bar{x}_v) \cdot (c\bar{x}_u + d\bar{x}_v) = acE + (ad + bc)F + bdG$$

che si può riscrivere nella forma matriciale:

$$(a \quad b) \underbrace{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}_{\text{Forma metrica}} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

nella quale compare la matrice della prima forma fondamentale (forma metrica).

Quindi la conoscenza della prima forma fondamentale permette di calcolare prodotti scalari su M , e quindi non solo lunghezze ma anche angoli.

Ricordiamo che, essendo $\bar{x}_u \times \bar{x}_v$ perpendicolare al piano tangente alla superficie, il versore normale $\hat{N} = \frac{\bar{x}_u \times \bar{x}_v}{|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|}$ è perpendicolare alla superficie.

Teorema 1.1. Identità di Lagrange

La quantità $|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|^2$ è uguale al determinante della matrice della prima forma fondamentale:

$$|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|^2 = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Dimostrazione:

Ricordiamo che: $\begin{cases} |\bar{x}_u \times \bar{x}_v| = |\bar{x}_u||\bar{x}_v| \sin \theta \\ \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v = |\bar{x}_u||\bar{x}_v| \cos \theta \end{cases}$ dove θ è l'angolo tra \bar{x}_u e \bar{x}_v .

Elevando al quadrato, otteniamo:

$$|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|^2 = (|\bar{x}_u|^2 |\bar{x}_v|^2 \sin^2 \theta) = |\bar{x}_u|^2 |\bar{x}_v|^2 (1 - \cos^2 \theta) = \underbrace{|\bar{x}_u|^2}_E \cdot \underbrace{|\bar{x}_v|^2}_G - \underbrace{(\bar{x}_u \cdot \bar{x}_v)^2}_{F^2}$$

Ricordando che $|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|^2 = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, otteniamo l'identità di Lagrange:

$$\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = EG - F^2$$

C.V.D.

Dalla condizione che la superficie sia regolare, segue che $EG - F^2 \neq 0$

A questo punto facciamo un cambiamento nella simbologia usata; come vedremo questo porterà ad una notevole semplificazione delle formule.

Chiamiamo: $g_{11} \equiv E$, $g_{12} = g_{21} \equiv F$, $g_{22} \equiv G$, $\bar{x}_1 \equiv \bar{x}_u$, $\bar{x}_2 \equiv \bar{x}_v$

E scriviamo $u^1 \equiv u, \quad u^2 \equiv v$ (dove gli apici 1 e 2 sono indici alti e non esponenti).⁹

Allora avremo $g_{ij} = \bar{x}_i \cdot \bar{x}_j$ ($i, j = 1, 2$) e la matrice della forma metrica sarà:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che $g_{ij} = g_{ij}(u, v) = g_{ij}(u^1, u^2)$

detto $g = \det(g_{ij}) = EG - F^2$, allora (dall'identità di Lagrange) $|\bar{x}_1 \times \bar{x}_2|^2 = g$.

Nella nuova notazione la prima forma fondamentale diventa:

$$ds^2 = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}(du^2)^2 = g_{ij}du^idu^j$$

💡 Tip: Notazione di Einstein

Nella *notazione di Einstein*, quando un indice compare una volta in alto e una in basso, si sottointende una somma su tutti i valori possibili di tale indice. Per esempio, $g_{ij}du^idu^j$ significa $\sum_{i,j} g_{ij}du^idu^j$.

Abbiamo usato la relazione $2g_{12} = g_{12} + g_{21}$ poiché la forma metrica è simmetrica, ossia $g_{ij} = g_{ji}$.

Un vettore tangente alla superficie M nel punto P può essere scritto come

$$\bar{v} = a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2,$$

oppure, in forma esplicita,

$$\bar{v} = v^1\bar{x}_1 + v^2\bar{x}_2 = \sum_i v^i\bar{x}_i,$$

dove l'indice i è una variabile indicizzata (è intercambiabile con altre lettere).

Se consideriamo due vettori tangenti $\bar{v} = \sum_i v^i\bar{x}_i$ e $\bar{w} = \sum_j w^j\bar{x}_j$, entrambi definiti in P , il loro prodotto scalare risulta:

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = \sum_{i,j} (v^i\bar{x}_i \cdot w^j\bar{x}_j) = \sum_{i,j} v^i w^j (\bar{x}_i \cdot \bar{x}_j) = \sum_{i,j} g_{ij} v^i w^j.$$

I vettori \bar{v} e \bar{w} sono ortogonali se e solo se $\sum_{i,j} g_{ij} v^i w^j = 0$

Definiamo ora g^{ij} come gli elementi della matrice inversa di g_{ij} , in modo tale che:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ovvero, in forma compatta,

$$\sum_j g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k,$$

dove δ_i^k è la **delta di Kronecker** (matrice identità), definita da: $\delta_i^k = \begin{cases} 1, & \text{se } i = k, \\ 0, & \text{se } i \neq k. \end{cases}$

Utilizzando la formula per l'inversa di una matrice 2×2 , otteniamo:

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g},$$

dove $g = \det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$.

Osserviamo ora come la prima forma fondamentale consenta non solo di determinare distanze e angoli, ma anche di calcolare le aree.

Sia $x : D \rightarrow E^3$ una superficie e sia $\Omega \subset D$ una regione del dominio in cui x è biunivoca. Per calcolare l'area di $x(\Omega)$ suddividiamo Ω in piccoli rettangoli, tracciando linee parallele agli assi delle coordinate u^1 e u^2 .

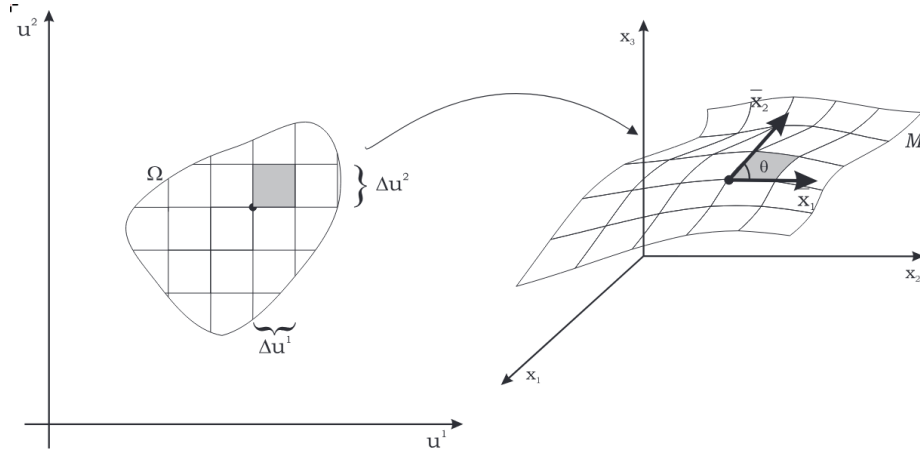


Figure 1.9: Area di una superficie

Ad una piccola areola di Ω con lati Δu^1 e Δu^2 corrisponde, approssimativamente, un pezzo di superficie a forma di parallelogramma, i cui lati sono paralleli ai vettori \bar{x}_1 e \bar{x}_2 . Le lunghezze dei lati sono rispettivamente

$$\Delta l_1 \simeq |\bar{x}_1| \Delta u^1, \quad \Delta l_2 \simeq |\bar{x}_2| \Delta u^2.$$

Ricordiamo che, per definizione, $|\bar{x}_1| = \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^1} \right|$, per cui

$$\Delta \bar{x}_1 = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^1} \Delta u^1.$$

L'area dell'areola è data da

$$\Delta A = |\bar{x}_1| \Delta u^1 \cdot |\bar{x}_2| \Delta u^2 \sin \theta = |\bar{x}_1 \times \bar{x}_2| \Delta u^1 \Delta u^2 = \sqrt{g} \Delta u^1 \Delta u^2,$$

dove θ è l'angolo tra \bar{x}_1 e \bar{x}_2 e $g = \det(g_{ij})$.

Passando al limite in cui $\Delta u^1, \Delta u^2 \rightarrow 0$ e sommando su tutte le areole, l'area di $x(\Omega)$ è data da:

$$A = \int_{\Omega} \sqrt{g} du^1 du^2.$$

Osserviamo che, in due dimensioni, la misura di un insieme coincide con l'area; in spazi di dimensione n , l'integrale di \sqrt{g} fornisce rispettivamente un volume n -dimensionale. Questo procedimento vale per spazi (o *manifolds*) **Riemanniani**, in cui $ds^2 > 0$. Negli spazi **pseudo-Riemanniani** (ad esempio, lo *spazio-tempo di Minkowski* nella Relatività Speciale) alcuni elementi del tensore metrico possono essere negativi; in tali casi, poiché il determinante g può risultare negativo, si usa in generale $\sqrt{|g|}$.

? Example: Sfera

La sfera è uno spazio Riemanniano:

$$ds^2 = R^2 \cos^2 v du^2 + R^2 dv^2 \quad \begin{cases} -\pi < u < \pi \\ -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Otteniamo la matrice:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 v & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \Rightarrow g = R^4 \cos^2 v, \quad \sqrt{g} = R^2 \cos v$$

Calcoliamo l'area:

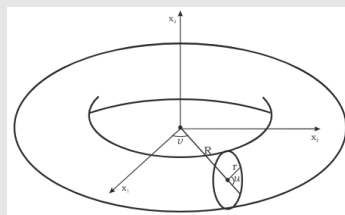
$$A = \iint_{\Omega} \sqrt{g} du dv = \int_{-\pi}^{\pi} du \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos v dv = \boxed{4\pi R^2}$$

? Example: Toro

Consideriamo un esempio più complesso, il toro:

$$\bar{x}(u, v) = [R + r \cos u] \cos v, [R + r \cos u] \sin v, r \sin u,$$

$$\begin{cases} 0 < v < 2\pi \\ 0 < u < 2\pi \\ 0 < r < r \end{cases}$$



Otteniamo:

$$A = \iint_{\Omega} \sqrt{g} du dv = \boxed{4\pi^2 Rr}$$

Lezione 3: 11/03/2025

2.1 Tensori Controvarianti e Covarianti

Tensori Controvarianti

$$u^i = (i = 1, \dots, n) \Rightarrow u'^j = (j = 1, \dots, n)$$

Regola di trasformazione:

$$du'^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u'^j}{\partial u^i} du^i$$

Otteniamo il **tensore controvariante**:

$$V^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u'^j}{\partial u^i} V^i$$

Tensori Covarianti

Consideriamo ora un campo scalare Φ :

$$\partial\Phi_{,j} = \frac{\partial\Phi}{\partial u'^j} = \sum_i \frac{\partial\Phi}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} = \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} \frac{\partial\Phi}{\partial u^i} = \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} \partial\Phi_{,i} = W$$

Otteniamo il **tensore covariante**:

$$W_{ij} = \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} W_i$$

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j = g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u'^l} du'^l \frac{\partial u^j}{\partial u'^k} du'^k = g'_{lk} du'^l du'^k$$

$$g'_{lk} = \frac{\partial u^i}{\partial u'^l} \frac{\partial u^j}{\partial u'^k} g_{ij} \rightarrow \text{”covariante”}$$

$$g'^{lk} = \frac{\partial u'^l}{\partial u^i} \frac{\partial u'^k}{\partial u^j} g^{ij} \rightarrow \text{”controvariante”}$$

Se un tensore ha sia indici covarianti che controvarianti, allora si dice **misto**. In tal caso è necessario applicare una trasformazione controvariante per gli indici controvarianti e una covariante per gli indici covarianti:

$$V_l'^k = \frac{\partial u'^k}{\partial u^j} \frac{\partial u^i}{\partial u'^l} V_i^j$$

👁 **Observation:** *Tensori e indici*

Un tensore ha **rango** n se ha n indici, sia covarianti che controvarianti.

Nota: *Non tutti gli oggetti che hanno indici sono tensori*

Draft

Consideriamo un tensore covariante D_i e un tensore metrico g_{ij} :

$$D_i = g_{ij}C^j$$

$$D_i D^i = g_{ij} C^j D^i \Rightarrow \begin{cases} D_i = g_{ij} C^j \\ C^j = D^j \end{cases} \rightarrow D_i = g_{ij} D^j$$

$$\vec{v} = v^i \bar{x}_i$$

$$v_m = \vec{v} \cdot \bar{x}_k = v \bar{x}_i \bar{x}_k = v^i g_{ik}$$

Consideriamo un vettore A :

...

Draft

Lezione 3: 14/03/2025

Abbiamo visto che un tensore controvariante è un tensore che passa da un sistema di riferimento normale ad uno "prime", con una trasformazione del tipo:

$$V'^j = V^i \cdot \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}$$

Mentre un tensore covariante è un tensore che passa da un sistema di riferimento "prime" ad uno normale, con una trasformazione del tipo:

$$V'_j = V_i \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}$$

Abbiamo visto anche il concetto di curvatura partendo dalla derivata del versore tangente ad una curva, partendo da questo, definiamo la curvatura rispetto ad una superficie.

3.1 Curvatura di una Superficie

L'estensione della curvatura a una superficie si basa sulla scelta di un punto P e del versore normale \hat{n} in P . Il vettore tangente \bar{v} in P e quello normale \hat{n} individuano un piano che interseca la superficie, generando una curva la cui **curvatura** in P è espressa da:

$$k = \pm \frac{1}{R}$$

Il segno dipende dal lato su cui giace il centro di curvatura C rispetto a \hat{n} . La convenzione sul segno non altera la sostanza del concetto di curvatura.

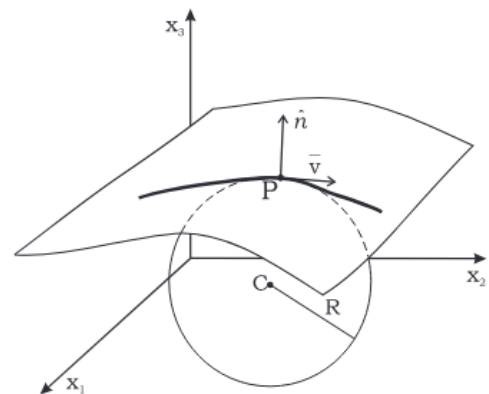


Figure 3.1: Curvatura di una Superficie

In un cilindro si individuano due direzioni ortogonali, dove si ottengono i valori estremo di k (chiamati k_1 e k_2), detti curvature principali. In generale, ciò vale per qualunque superficie regolare. Definiamo la curvatura di Gauss K come il prodotto $k_1 \cdot k_2$, evidenziando che K non dipende dalla convenzione scelta per il segno di k .

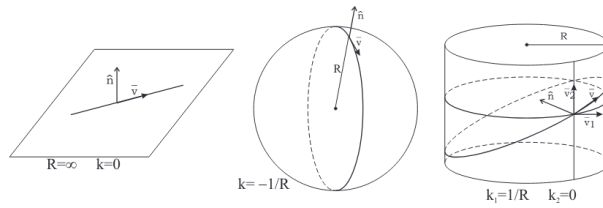


Figure 3.2: Curvatura di un piano, di una sfera e di un cilindro

Una curva è **geodetica** quando la sua lunghezza è stazionaria per piccole variazioni agli estremi. Immaginate di avere un elastico teso tra due punti: se lo perturbate, le perturbazioni si annullano agli estremi.

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(U^i) = \vec{r}(U^i(t))$$

👁 Observation: Geodetica

Anche i tragitti più lunghi che collegano due punti formano delle geodetiche, non solo i tragitti più brevi.

Se ricordiamo che $ds^2 = g_{jk} du^j du^k$, espresse le u^i in forma parametrica tramite il parametro t (che non sarà necessariamente il tempo) avremo:

$$g_{jk} \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt} dt^2 = (g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k) dt^2$$

Detta $L(u^i, \dot{u}^i, t) = \sqrt{g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k} = \sqrt{F}$, (con le $g_{jk} = g_{jk}(u^i)$ e $\dot{u}^i = \frac{du^i}{dt}$) la lunghezza di una curva tra P_1 e P_2 sarà:

$$S = \int_{P_1}^{P_2} L dt = \int_{P_1}^{P_2} ds$$

Per trovare la condizione che S sia stazionario si usano le **equazioni di Eulero-Lagrange**:

$$\frac{dL}{du^i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i} \right) \Rightarrow \frac{dL}{du^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i} \right) = 0$$

Risolviamo l'equazione di Eulero Lagrange per u^i :

$$\frac{\partial g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k}{\partial u^i} = \frac{\partial g_{js}}{\partial u^i} u^j \dot{u}^k + \frac{\partial \dot{u}^j}{\partial u^i} g_{jk} \dot{u}^k + \frac{\partial \dot{u}^k}{\partial u^i} g_{jk} \dot{u}^j$$

$$\frac{\partial \sqrt{F}}{\partial u^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \sqrt{F}}{\partial \dot{u}^i} \right) = \frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^j \dot{u}^k - \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{\partial (g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k)}{\partial \dot{u}^i} \right] = 0$$

Poichè $\frac{\partial g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k}{\partial \dot{u}^i} = g_{ik} \dot{u}^k + g_{ij} \dot{u}^j$ riscriviamo:

$$\frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{\partial g_{jk}}{\partial \dot{u}^i} \dot{u}^j \dot{u}^k - \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2\sqrt{F}} \underbrace{(g_{ik} \dot{u}^k + g_{ij} \dot{u}^j)}_{= 2g_{ji} \dot{u}^j} \right] = 0$$

ma $g_{ik} \dot{u}^k + g_{ij} \dot{u}^j = 2g_{ji} \dot{u}^j$ per la simmetria di g_{ij} e per il fatto che k e j sono indici muti (sommati) e si possono scambiare; avremo quindi:

$$\frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{\partial g_{jk}}{\partial \dot{u}^i} \dot{u}^j \dot{u}^k - \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\sqrt{F}} g_{ji} \dot{u}^j \right] = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{\partial g_{jk}}{\partial \dot{u}^i} \dot{u}^j \dot{u}^k - \left\{ \underbrace{-\frac{1}{2F^{3/2}} \frac{dF}{dt} g_{ji} \dot{u}^j}_{=0} + \frac{1}{\sqrt{F}} \left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial u^l} \dot{u}^l \dot{u}^j + g_{ji} \ddot{u}^j \right) \right\} = 0$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{ji}}{\partial \dot{u}^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial \dot{u}^j} \right] \dot{u}^j \dot{u}^l = \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^l} \dot{u}^l \dot{u}^j = \frac{\partial g_{li}}{\partial u^j} \dot{u}^j \dot{u}^l$$

$$g_{ji} \ddot{u}^j + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k} \dot{u}^k \dot{u}^j + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} \dot{u}^k \dot{u}^j - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^j \dot{u}^k \right] = g_{ji} \ddot{u}^j + \left[\partial g_{ji} \partial u^l \dot{u}^l \dot{u}^j - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^j \dot{u}^k \right] = 0$$

...

$$\frac{1}{2} g^{il} \left[\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} \right]$$

Dove Γ_{jk}^l è detto *connessione affine*, o *simbolo di Christoffel di 2° tipo*.

...

Arriviamo finalmente all'**equazione delle geodetiche**:

$$\boxed{\frac{d^2 u^l}{ds^2} + \Gamma_{jk}^l \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0}$$

Lezione 18/03/2025

Esempio: il piano in coordinate cartesiani

Nel caso del piano, le coordinate cartesiane sono (x, y) e la metrica è data da:

$$u, v \rightarrow x, y \Rightarrow g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j = \sum_{ij} g_{ij} du^i du^j = du^2 + dv^2$$

Esempio: il piano in coordinate polari

Nel caso del piano in coordinate polari, le coordinate sono (r, θ) e la metrica è data da:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}.$$

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{ir} \left(\frac{\partial g_{jr}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^r} \right) \quad \text{ricordiamo la simmetria su } j \text{ e } k$$

- Se $i = r = 1$:

$$\Gamma_{jk}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{j1}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{k1}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^1} \right) \quad \text{perchè } g^{12} = 0$$

- Se $j = k = 2$:

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(-\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right) = -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\partial r^2}{\partial r} = -r$$

- Se $i = r = 2$:

$$\Gamma_{jk}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{j2}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{k2}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^2} \right) \quad \text{perchè } g^{21} = 0$$

- Se $j = 1, k = 2$:

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 0 = 0$$

Si ottiene quindi:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0$$

Otteniamo quindi il sistema:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} - r \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = 0 \quad (\text{I})$$

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{ds} \right) \left(\frac{d\theta}{ds} \right) = 0 \quad (\text{II})$$

...

Draft

In un intorno infinitesimo di un punto è sempre possibile scegliere un sistema di coordinate in cui la matrice dei componenti metrici $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ed in cui le derivate parziali $g_{ij,k}$ sono nulle. Tale sistema viene definito *localmente euclideo*.

Per capire come ciò sia possibile, ricordiamo che la trasformazione della metrica da g_{ij} a g'_{kl} è:

$$g'_{kl} = \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij}.$$

Espandiamo g'_{kl} attorno al punto x_0 :

$$g'_{kl}(x) = g'_{kl}(x_0) + g'_{kl,m}(x_0) (x^m - x_0^m) + \frac{1}{2} g'_{kl,mn}(x_0) (x^m - x_0^m)(x^n - x_0^n) + \dots,$$

dove

$$g'_{kl}(x_0) = \left[\frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij} \right]_{x_0},$$

$$g'_{kl,m}(x_0) = \left[\frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij,m} \right]_{x_0} + \left[\frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^m \partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij} \right]_{x_0} + \left[\frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^m \partial u'^l} g_{ij} \right]_{x_0}.$$

Per la simmetria tra gli indici i e j e tra k e l , possiamo riscrivere:

$$g'_{kl,m}(x_0) = \left[\frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij,m} \right]_{x_0} + \left[2 \frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^m \partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij} \right]_{x_0}.$$

Analogamente, per le derivate seconde si ha:

$$g'_{kl,mn}(x_0) = \left[\frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij,mn} \right]_{x_0} + \left[2 \frac{\partial^3 u^i}{\partial u'^m \partial u'^n \partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij} \right]_{x_0} + \text{derivate prime, seconde e terze},$$

Supponendo di voler, tramite un'opportuna trasformazione di coordinate, portare g'_{kl} in una forma voluta in un intorno di x_0 , dobbiamo specificare nella trasformazione le seguenti quantità:

Derivatives	2-D	3-D	4-D	N-D
$\left(\frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \right)_{x_0}$	4	9	16	N^2
$\left(\frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^m \partial u'^k} \right)_{x_0}$	6	18	40	$\frac{N^2(N+1)}{2}$
$\left(\frac{\partial^3 u^i}{\partial u'^m \partial u'^n \partial u'^k} \right)_{x_0}$	8	30	80	$\frac{N^2(N+1)(N+2)}{6}$

D'altro canto, il numero dei valori e delle derivate indipendenti del tensore metrico risulta:

	2-D	3-D	4-D	N-D
$g'_{kl}(x_0)$	3	6	10	$\frac{N(N+1)}{2}$
$g'_{kl,m}(x_0)$	6	18	40	$\frac{N^2(N+1)}{2}$
$g'_{kl,mn}(x_0)$	9	36	100	$\left[\frac{N(N+1)}{2} \right]^2$

Dalle considerazioni precedenti possiamo trarre le seguenti conclusioni per le dimensioni 2, 3 e 4:

- **2–D:** Se si fissano i valori di $g'_{kl}(x_0)$ si hanno 3 equazioni per 4 coefficienti, lasciando un grado di libertà (la rotazione degli assi attorno a x_0). Se si impone $g'_{kl,m}(x_0) \equiv 0$, si dispongono di 6 equazioni per 6 parametri, dunque la condizione è realizzabile. Tuttavia, se si volesse anche annullare $g'_{kl,mn}(x_0)$, si avrebbero 9 equazioni per 8 parametri: il sistema risulta troppo vincolato e non ammette soluzioni, quindi le derivate seconde non possono essere annullate localmente.
- **3–D:** Per fissare $g'_{kl}(x_0)$ ci sono 6 equazioni e 9 parametri, con 3 gradi di libertà associati alla rotazione dello spazio (ad es. gli angoli di Eulero). Si può porre $g'_{kl,m}(x_0) = 0$ (18 equazioni per 18 incognite), ma non $g'_{kl,mn}(x_0) = 0$ (36 equazioni per 30 incognite).
- **4–D (Spazio di Minkowski):** Per imporre $g'_{kl}(x_0)$ si hanno 10 equazioni e 16 parametri, con 6 gradi di libertà (3 rotazioni più 3 trasformazioni di Lorentz). È possibile forzare $g'_{kl,m}(x_0) = 0$ (40 equazioni per 40 incognite), ma non $g'_{kl,mn}(x_0) = 0$ (100 equazioni per 80 incognite).

Poiché in un punto si può sempre imporre $g_{ij} = \delta_{ij}$ e $g_{ij,k} = 0$, la curvatura deve necessariamente dipendere dalle derivate seconde di g_{ij} . La forma di dipendenza più semplice, plausibilmente, è quella lineare. Prima di indagare se esista un'espressione di questo tipo, occorre affrontare un'altra questione.

4.1 Derivata Covariante

Abbiamo visto che la derivata (o gradiente) di un campo scalare ϕ , ossia $\frac{\partial \phi}{\partial u^i}$, è un vettore covariante. Potrebbe sembrare naturale derivare allo stesso modo un campo vettoriale $A_i(u^k)$, ottenendo un tensore di rango due; tuttavia, ciò non avviene. In generale, il differenziale

$$dA_i \quad (\text{ingrediente essenziale nel rapporto incrementale})$$

non si comporta come un tensore. Infatti, dalla legge di trasformazione

$$A_i = \frac{\partial u'^k}{\partial u^i} A'_k$$

discende che

$$dA_i = \frac{\partial u'^k}{\partial u^i} dA'_k + A'_k d\left(\frac{\partial u'^k}{\partial u^i}\right) = \frac{\partial u'^k}{\partial u^i} dA'_k + \frac{\partial^2 u'^k}{\partial u^i \partial u^l} A'_k du^l.$$

Osserviamo che dA_i è un vettore solo se $\frac{\partial^2 u'^k}{\partial u^i \partial u^l} = 0$, ossia se le nuove coordinate u'^i sono funzioni lineari delle u^i (ad esempio, quando si passa da un sistema di coordinate rettilinee a un altro rettilineo).

Perché dA_i non è un vettore? Perché la differenza

$$dA_i = A_i(u^i + du^i) - A_i(u^i)$$

riguarda due vettori applicati in punti diversi (anche se infinitamente vicini). In un sistema di coordinate generico, i coefficienti di trasformazione variano da punto a punto, quindi tali vettori non si trasformano nello stesso modo. Perché la differenza di due vettori sia a sua volta un tensore, i due vettori devono essere *confrontati nello stesso punto*. Se ambedue si trovano nello stesso punto, allora subiscono la stessa trasformazione, e anche la loro differenza si comporta come un tensore. Ne segue che, per definire una derivata che si comporti da tensore, abbiamo bisogno di una *derivata covariante*.

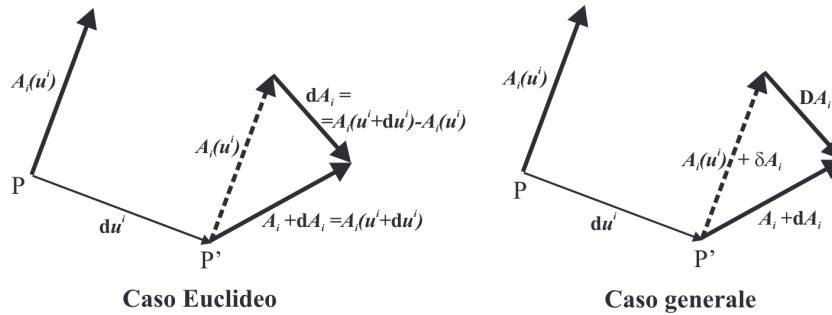


Figure 4.1: Derivata covariante

In uno spazio euclideo, per derivare un vettore $A_i(u^i)$ si procede *spostando parallelamente* $A_i(u^i)$ fino a farne coincidere il punto di applicazione con quello di $A_i(u^i + du^i)$, senza modificarne modulo né direzione. Nel nuovo punto P' , si calcola la differenza e si prende il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{du^i \rightarrow 0} \frac{A_i(u^i + du^i) - A_i(u^i)}{du^i}.$$

Come riprodurre un processo analogo in uno spazio non euclideo? Definiamo il *trasporto parallelo* da u^i a $u^i + du^i$ come quello spostamento che produce una variazione δA_i tale che, passando a un

sistema localmente euclideo (il che, localmente, è sempre possibile), tale variazione risulti nulla: $\delta A_i = 0$. Pertanto, in P' , abbiamo $A_i + dA_i \equiv A_i(u^i + du^i)$ e $A_i + \delta A_i$, corrispondente al trasporto parallelo di $A_i(u^i)$ da P a P' . La differenza

$$DA_i = (A_i + dA_i) - (A_i + \delta A_i) = dA_i - \delta A_i$$

è un vettore, perché è la differenza di due vettori applicati allo stesso punto. Questo DA_i , chiamato ***Differenziale Assoluto***, ci consente di definire il nuovo tipo di derivata che si comporta come un tensore, la ***derivata covariante***.

...

Draft