



UniTs - University of Trieste

Faculty of Scientific and Data Intensive Computing
Department of mathematics informatics and geosciences

Introduction to Galaxies and Astrophysics

Lecturers:

Prof. Alexandro Saro // Prof. Cebrolini Matteo

Author:

Andrea Spinelli

March 15, 2025

This document is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) (CC BY-NC-SA) license. You may share and adapt this material, provided you give appropriate credit, do not use it for commercial purposes, and distribute your contributions under the same license.

Preface

As a student of Scientific and Data Intensive Computing, I've created these notes while attending the **Introduction to Galaxies and Astrophysics** course.

This is an optional course for the second semester of the first year my master's degree, but this course is also available for students of the Physics department, anyway, next year it will probably be removed from both curricula.

The course is held by Prof. Alexandro Saro, a researcher at the INAF Astronomical Observatory of Trieste; the lecture of the course are taken in Italian, but the notes are written in English conformly to the language of the master's degree; however, some images or text could be in Italian due to the original language of the slides.

The first part of the course will be focused on gravity and Einstein's theory of general relativity:

- Non euclidean geometry
- Tensors
- Principles and equations of Einstein
- Gravitational waves

The second part of the course will be focused on cosmology:

- Robertson-Walker metric
- Hubble law
- Friedmann equations
- Cosmological models
- Precision cosmology (hints)

Contents

1	Geometrie Non Euclidee	1
1.1	Geometria Ellittica	2
1.2	Geometria Iperbolica	3
1.3	Curva piana	3
1.4	Superfici	4
1.5	Prima Forma Fondamentale	6
1.5.1	Sfera in coordinate sferiche	6
1.5.2	Forma metrica	7
1.5.3	Identità di Lagrange	7
2	Lezione 3: 11/03/2025	10
2.1	Tensori Controvarianti e Covarianti	12
3	Lezione 3: 14/03/2025	14
3.1	Curvatura di una Superficie	14

Draft

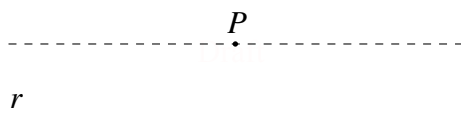
Geometrie Non Euclidee

La teoria che studieremo è una *teoria geometrica*:

I 5 postulati di Euclide:

1. Per due qualsiasi punti A e B , esiste esattamente una retta che li attraversa.
2. Una retta può essere prolungata indefinitamente in entrambe le direzioni.
3. Dato un punto O ed un raggio R , esiste esattamente un cerchio con centro in O e raggio R .
4. Tutti gli angoli retti sono congruenti.
5. Data una retta r ed un punto P fuori da essa, per il punto P passa una ed una sola retta parallela ad r (possiamo dare al termine parallelo il significato di *che incontra r solo all'infinito*, in un punto improprio).

Il quinto postulato è più complesso degli altri; i tentativi di dimostrare tale postulato a partire dagli altri postulati, considerati più evidenti, non hanno permesso di arrivare a questo, ma hanno portato, nell'800, alla nascita delle geometrie non-Euclidee (Gauss, Bolyai, Lobachevski, Klein).



Il quinto postulato si è rivelato indipendente dagli altri enunciati di Euclide, poiché è stato possibile formulare geometrie piane (in 2 dimensioni) in cui valgono tutti gli altri postulati, mentre il concetto di parallelismo assume un significato diverso:

1. Non esiste alcuna retta parallela a R passante per P → **Geometrie ellittiche piane** [S^2]
2. Esistono due o più rette parallele a R passanti per P → **Geometrie iperboliche piane** [H^2]

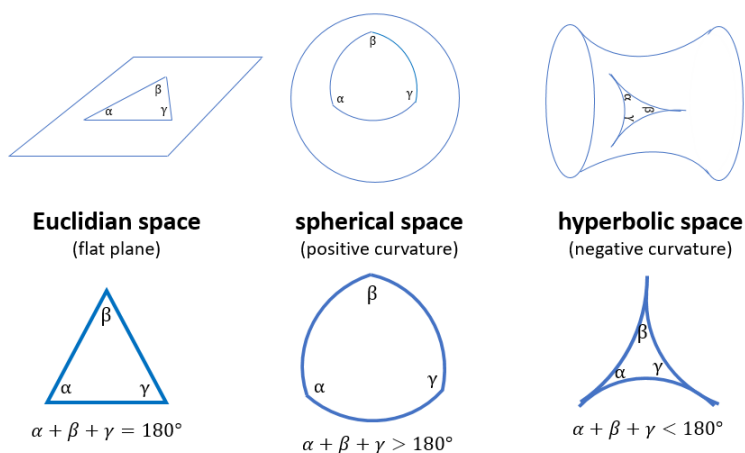


Figure 1.1: Geometrie ellittiche e iperboliche

1.1 Geometria Ellittica

La **geometria ellittica piana** è una forma di geometria non euclidea che rifiuta il quinto postulato di Euclide, il quale in geometria euclidea garantisce l'esistenza di una sola retta parallela passante per un dato punto. In geometria ellittica, non esistono rette parallele; invece, ogni coppia di rette si interseca eventualmente.

Un classico esempio è la geometria sferica, in cui possiamo definire come "**punto**" la coppia di punti diametralmente opposti (P, P') , e come "**retta**" un cerchio massimo passante per P e P' . Si può dimostrare che per due punti (P, P') e (Q, Q') passa esattamente una retta r . Inoltre, per un punto (T, T') esterno ad r non passa alcuna retta parallela ad r , poiché tutte le rette passanti per (T, T') intersecano r in almeno un punto.

Con la geometria analitica, Descartes ha mostrato che, identificando i punti con coppie di numeri reali e definendo la distanza tra due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) come $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, tutti i postulati di Euclide si riducono a teoremi sui numeri reali.

Definito sulla sfera un triangolo con i lati formati da archi di cerchi massimi, la somma degli angoli $\alpha + \beta + \gamma$ è sempre $> \pi$. L'area S di tale triangolo, se la sfera ha raggio R , si può esprimere come $S = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$. Quando $S \rightarrow 0$ (mantenendo R fisso), si osserva che $(\alpha + \beta + \gamma) \rightarrow \pi$. Questo significa che se il triangolo sferico è molto più piccolo del raggio R , la sua differenza da un triangolo piano tende a scomparire, avvicinandosi alla geometria euclidea.

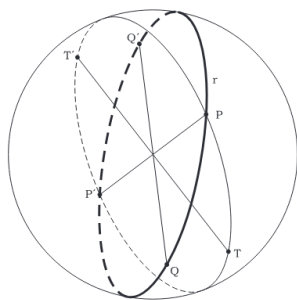


Figure 1.2: Geometria sferica

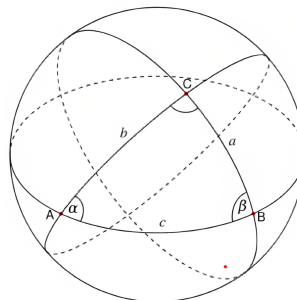


Figure 1.3: Triangolo sferico

In questo contesto, i triangoli, noti come triangoli sferici, mostrano una proprietà intrigante: la somma dei loro angoli interni supera i 180° ($\alpha + \beta + \gamma > \pi$), un fenomeno noto come eccesso sferico, con l'eccesso proporzionale all'area del triangolo.

$$S = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \quad \text{dove per } R \rightarrow \infty \quad \text{si ha} \quad \frac{S}{R^2} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \alpha + \beta + \gamma \rightarrow \pi$$

Per costruire un modello della geometria ellittica piana siamo ricorsi all'uso di una sfera (superficie bidimensionale, indicata con S^2) immersa (*embedded*) in uno spazio euclideo tridimensionale E^3 .

Notiamo che per rappresentare il 5° postulato abbiamo dovuto ricorrere ad una superficie *curva*, cioè la sfera. Questa curvatura deve essere inoltre costante in tutto il piano perché gli altri postulati descrivono lo spazio come omogeneo, e se la curvatura variasse questa proprietà verrebbe meno.

Questo ci porta a comprendere che le diverse geometrie non euclidee possono essere caratterizzate matematicamente attraverso diverse definizioni di distanza. La curvatura dello spazio diventa quindi un elemento fondamentale per distinguere tra i vari tipi di geometrie:

- Curvatura zero \rightarrow geometria euclidea
- Curvatura positiva costante \rightarrow geometria ellittica
- Curvatura negativa costante \rightarrow geometria iperbolica

1.2 Geometria Iperbolica

La geometria iperbolica piana è una geometria non euclidea in cui il quinto postulato di Euclide non vale, ammettendo più parallele a una retta data. I triangoli iperbolici hanno somma degli angoli inferiore a 180° , con “difetto” proporzionale all’area. Il piano iperbolico non può essere immerso interamente in uno spazio euclideo 3D, ma esistono modelli come il *cerchio di Klein* (1870), in cui i punti sono all’interno di una circonferenza unitaria e le rette ne sono le corde. Da un punto P passano due parallele a una retta data, e ne esistono infinite che non la intersecano.

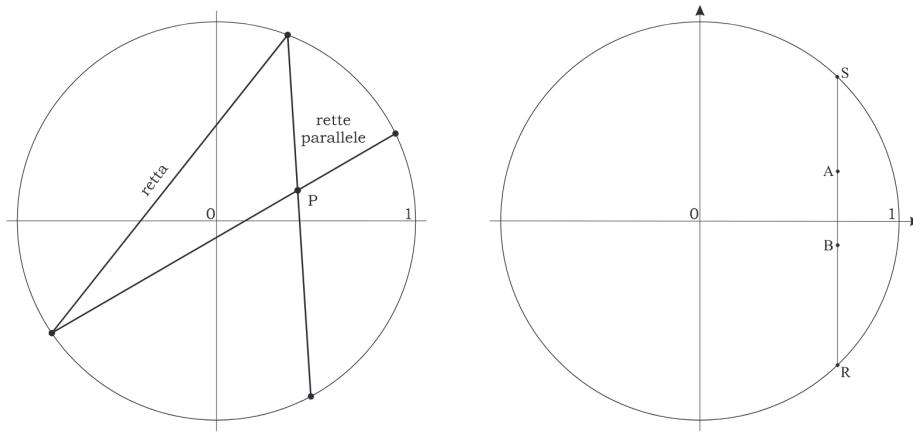


Figure 1.4: Geometria iperbolica

La distanza tra due punti A e B è

$$d(A,B) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{RA \cdot SB}{RB \cdot SA} \right),$$

che diverge se uno dei punti tende al bordo. Una rappresentazione parziale di H^2 in 3D è la *pseudosfera*, una superficie a curvatura negativa costante, in contrasto con la sfera a curvatura positiva.

1.3 Curva piana

Si può parametrizzare una curva piana nel modo seguente: $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$, dove t è un parametro, non necessariamente il tempo; il vettore tangente (velocità) è $\frac{d\bar{x}}{dt}$. Possiamo definire l’ascissa curvilinea $s(t)$:

$$O \equiv \bar{x}(t=0) \quad P \equiv \bar{x}(t) \quad ds = |d\bar{x}| = \left| \frac{d\bar{x}}{dt} \right| dt \quad \rightarrow \quad s(t) = \int_0^t |d\bar{x}| = \int_0^t \left| \frac{d\bar{x}}{dt} \right| dt$$

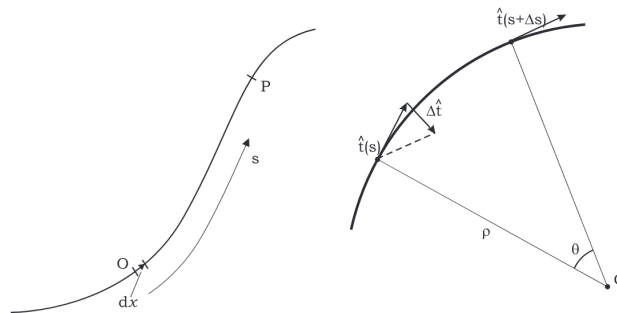


Figure 1.5: Ascissa curvilinea

Trasformando $t \rightarrow s$ si può notare che $\frac{d\bar{x}}{ds} = \hat{x}(s)$ ha modulo 1: è il versore tangente $\hat{t}(s)$.

Poichè $|\hat{x}(s)| = |\hat{t}(s)| = 1$, abbiamo $\hat{t}\hat{t} = 1$ e, derivando, segue che $2\hat{t} \cdot \dot{\hat{t}} = 0$, ovvero $\hat{t} \perp \dot{\hat{t}}$.

Nota: $\dot{\hat{t}}$ non è un versore!

Chiamati $\kappa(s) = |\dot{\hat{t}}(s)|$ e $\hat{n}(s) = \frac{\dot{\hat{t}}(s)}{|\dot{\hat{t}}(s)|}$, segue che $\dot{\hat{t}}(s) = \kappa(s)\hat{n}(s)$.

$$\Delta\hat{t} = \hat{t}(s + \Delta s) - \hat{t}(s) \quad |\Delta\hat{t}| = 2|\hat{t}| \sin \frac{\Delta\theta}{2} \sim \Delta\theta \quad \Delta s \simeq \Delta\theta \quad \left| \frac{\Delta\hat{t}}{\Delta s} \right| \simeq \frac{\Delta\theta}{\rho\Delta\theta} = \frac{1}{\rho}$$

Quindi

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \kappa\hat{n} = \frac{1}{\rho}\hat{n} \quad \begin{cases} \kappa : \text{curvatura} \\ \rho : \text{raggio di curvatura} \end{cases}$$

Misurando θ rispetto ad una distanza fissata (ad esempio l'asse x):

$$\Delta s = \rho\Delta\theta = \frac{\Delta\theta}{k} \quad \rightarrow \quad \kappa = \left| \frac{d\theta}{ds} \right|$$

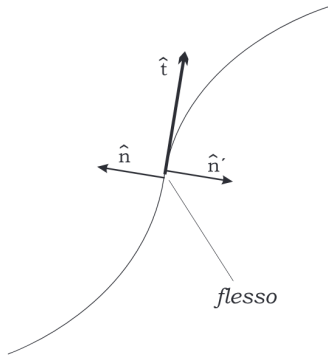


Figure 1.6: Curva con flesso

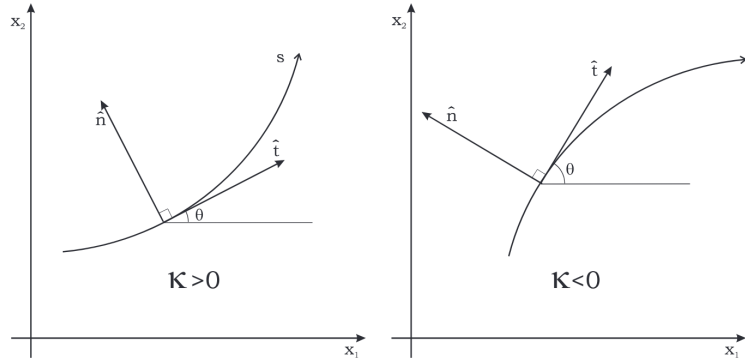


Figure 1.7: Segno del flesso

Abbiamo definito κ come > 0 . Così facendo, però, in un flesso ho una discontinuità in \hat{n} . Per evitare questo, definita una s sulla curva, resta definito anche \hat{t} e posso definire \hat{n} come rotazione di \hat{t} di 90° in senso positivo (coerente con O, x_1, x_2). Poichè $\hat{t} \perp \dot{\hat{t}}$ abbiamo ancora $\dot{\hat{t}} = \kappa\hat{n}$, ma ora possiamo avere anche $\kappa < 0$. A seconda del segno la curva sta a sinistra o a destra di \hat{t} , nel flesso \hat{n} non cambia ma κ cambia segno e ora risulta:

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$$

(e non in valore assoluto).

1.4 Superfici

L'altra volta abbiamo visto come poter usare le coordinate curvilinee per descrivere tre geometrie. Abbiamo visto poi come

Ora iniziamo a ragionare con le superfici.

Supponiamo di avere un dominio $D \in \mathbb{R}^2$ e di voler mappare D in un sistema a 3 dimensioni:

$$\bar{x}(u, v) = (x_1, x_2, x_3) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$$

Calcoliamo il gradiente di \bar{x} rispetto a u e v :

$$\begin{cases} \bar{x}_u = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u} \right) \\ \bar{x}_v = \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v} \right) \end{cases}$$

Il versore normale alla superficie è dato da:

$$\hat{n} = \frac{\bar{x}_u \times \bar{x}_v}{|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|}$$

Si dice che la superficie M è regolare (smooth) se il versore normale è ben definito e non nullo, ovvero \bar{x}_u e \bar{x}_v non sono paralleli:

$$\bar{x}_u \times \bar{x}_v \neq 0$$

Superficie di una sfera di raggio R

Consideriamo una sfera di raggio R centrata nell'origine. La superficie della sfera è data da:

$$\bar{x}(u, v) = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, R \sin v)$$

dove $u \in [-\pi, \pi]$, $v \in [-\pi/2, \pi/2]$

Calcoliamo il gradiente di \bar{x} rispetto a u e v :

$$\begin{cases} \bar{x}_u = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = (-R \sin u \cos v, R \cos u \cos v, 0) \\ \bar{x}_v = \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = (-R \cos u \sin v, -R \sin u \sin v, R \cos v) \end{cases}$$

Andiamo ad analizzare il punto $(u, v) = (0, 0)$:

$$\begin{cases} \bar{x}_u = (0, R, 0) \\ \bar{x}_v = (0, 0, R) \end{cases}$$

Questi due vettori individuano la superficie tangente alla sfera nel punto $(0, 0)$.

Il versore normale alla superficie è dato da:

$$\hat{n} = \frac{\bar{x}_u \times \bar{x}_v}{|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|} = \frac{(-R^2, 0, 0)}{R^2} = (-1, 0, 0)$$

1.5 Prima Forma Fondamentale

In geometria differenziale, la *Prima Forma Fondamentale* fornisce la metrica intrinseca di una superficie. Essa permette di calcolare lunghezze, angoli e aree sulla superficie, misurando come essa si deforma nelle diverse direzioni. Consideriamo una superficie liscia parametrizzata da $\bar{x}(u, v)$, dove u e v sono le coordinate locali. I vettori tangenti alla superficie sono definiti da:

$$\bar{x}_u = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}, \quad \bar{x}_v = \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}.$$

I coefficienti della prima forma sono:

$$E = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u, \quad F = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v, \quad G = \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v.$$

Un elemento di spostamento infinitesimale sulla superficie si esprime come combinazione lineare dei vettori tangenti. Espandendo il quadrato dello spostamento, otteniamo:

$$u^2 \underbrace{(\bar{x}_u \cdot \bar{x}_u)}_E + 2uv \underbrace{(\bar{x}_u \cdot \bar{x}_v)}_F + v^2 \underbrace{(\bar{x}_v \cdot \bar{x}_v)}_G,$$

da cui il quadrato dell'elemento di lunghezza diventa

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2.$$

Se una curva sulla superficie è parametrizzata da un parametro t , con $u = u(t)$ e $v = v(t)$, allora derivando si ottiene:

$$\frac{ds^2}{dt^2} = Eu^2 + 2Fuv + Gv^2.$$

Pertanto, la lunghezza L della curva, per t compreso tra a e b , si calcola come:

$$L = \int_a^b \frac{ds}{dt} dt = \int_a^b \sqrt{Eu^2 + 2Fuv + Gv^2} dt.$$

In alternativa, esprimendo direttamente la lunghezza lungo la curva \bar{r} sulla superficie, si ha:

$$L = \int_{\bar{r}} ds = \int_{\bar{r}} \sqrt{Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2}.$$

Questa formulazione riassume le proprietà geometriche intrinseche della superficie, permettendo di misurare le distanze in maniera indipendente dallo spazio ambiente.

1.5.1 Sfera in coordinate sferiche

Consideriamo una sfera di raggio R centrata nell'origine. La superficie della sfera è data da:

$$\bar{x}(u, v) = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, R \sin v) \xrightarrow{\text{derive}} \begin{cases} \bar{x}_u = (-R \sin u \cos v, R \cos u \cos v, 0) \\ \bar{x}_v = (-R \cos u \sin v, -R \sin u \sin v, R \cos v) \end{cases}$$

dove $u \in [-\pi, \pi]$, $v \in [-\pi/2, \pi/2]$

Calcoliamo i coefficienti della prima forma fondamentale:

$$\begin{cases} E = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u = R^2 \sin^2 v \cos^2 u + R^2 \sin^2 v \sin^2 u = R^2 \sin^2 v \\ F = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v = R^2 \sin v \cos v \cos u \cos u + R^2 \sin v \cos v \sin u \sin u = 0 \\ G = \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v = R^2 \cos^2 v \end{cases}$$

Quindi, la prima forma fondamentale è:

$$ds^2 = R^2 \sin^2 v du^2 + R^2 \cos^2 v dv^2$$

1.5.2 Forma metrica

La forma metrica è una generalizzazione della prima forma fondamentale, che permette di calcolare la lunghezza di curve e la misura di angoli su una superficie. La forma metrica è definita come:

$$g = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$$

dove E , F e G sono i coefficienti della prima forma fondamentale. La forma metrica è una forma bilineare simmetrica, che può essere rappresentata da una matrice:

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}_{\text{Forma metrica}} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

1.5.3 Identità di Lagrange

L'identità di Lagrange è una relazione che lega la forma metrica e la prima forma fondamentale di una superficie.

$$\bar{x}_u \times \bar{x}_v \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{N} = \frac{\bar{x}_u \times \bar{x}_v}{|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|}$$

L'identità di Lagrange afferma che:

$$|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|^2 = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Dimostrazione

Iniziamo considerando il prodotto vettoriale tra \bar{x}_u e \bar{x}_v :

$$\bar{x}_u \times \bar{x}_v = |\bar{x}_u| |\bar{x}_v| \cos \theta$$

dove θ è l'angolo tra \bar{x}_u e \bar{x}_v . Elevando al quadrato, otteniamo:

$$|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|^2 = (|\bar{x}_u|^2 |\bar{x}_v|^2 \sin^2 \theta) = |\bar{x}_u|^2 |\bar{x}_v|^2 (1 - \cos^2 \theta) = \underbrace{|\bar{x}_u|^2}_E \cdot \underbrace{|\bar{x}_v|^2}_G - \underbrace{(\bar{x}_u \cdot \bar{x}_v)^2}_{F^2}$$

Ricordando che $|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|^2 = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, otteniamo l'identità di Lagrange:

$$\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = EG - F^2$$

...

Draft

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

$$g_{i,j} = \bar{x}_i \cdot \bar{x}_j$$

$$\vec{v} = \sum_i v^i \bar{x}_i$$

$$\vec{w} = \sum_j w^j \bar{x}_j =$$

forma matriciale tensore metrico

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j$$

Draft

Lezione 3: 11/03/2025

La scorsa lezione abbiamo definito il tensore metrico:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

Possiamo definire ora la matrice inversa g^{ij} tale che il prodotto $g_{ij} \cdot g^{ij}$ sia la matrice identità.

$$g_{ij} \cdot g^{jk} = \int_j^k (?)$$

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g}$$

dove g è il determinante della matrice g_{ij} : $g = \det g_{ij} = |\bar{x}_1 \times \bar{x}_2|$.

Supponiamo di voler mappare lo spostamento $\Delta\Omega = \Delta u^1 \Delta u^2$ di un punto P da un sistema a due dimensioni (u^1, u^2) ad uno a 3 dimensioni (x_1, x_2, x_3) mediante la nostra trasformazione \bar{X} :

$$\begin{cases} \Delta x_1 = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^1} \Delta u^1 \\ \Delta x_2 = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^2} \Delta u^2 \end{cases}$$

$$\Delta A = |\Delta x_1| \cdot |\Delta x_2| \cdot \sin \theta = \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^1} \Delta u^1 \right| \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^2} \Delta u^2 \right| \sin \theta = |\bar{x}_1| |\Delta u^1| |\bar{x}_2| |\Delta u^2| \sin \theta = |\bar{x}_1 \times \bar{x}_2| \Delta u^1 \Delta u^2$$

Dunque otteniamo:

$$A = \iint_{\Omega} \sqrt{g} du^1 du^2$$

Spazi Riemanniani e Pseudo-Riemanniani

Gli **Spazi Riemanniani** sono spazi in cui la metrica è definita positiva:

$$ds^2 > 0$$

Gli **Spazi Pseudo-Riemanniani** sono spazi in cui la metrica è definita negativa:

$$ds^2 \begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix} 0$$

? Example: Sfera

La sfera è uno spazio Riemanniano:

$$\begin{cases} ds^2 = R^2 \cos^2 v du^2 + R^2 dv^2 \\ -\pi < u < \pi \\ -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Otteniamo la matrice:

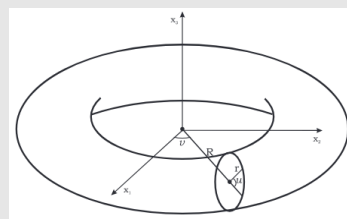
$$g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 v & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \Rightarrow g = R^4 \cos^2 v, \quad \sqrt{g} = R^2 \cos v$$

? Example: Toro

Consideriamo un esempio più complesso, il toro:

$$\bar{x}(u, v) = [R + r \cos u] \cos v, [R + r \cos v] \sin u, r \sin v,$$

$$\begin{cases} 0 < v < 2\pi \\ 0 < u < 2\pi \\ 0 < r < r \end{cases}$$



Otteniamo:

$$A = \int_{\Omega} \sqrt{g} du dv = \boxed{4\pi^2 R r}$$

2.1 Tensori Controvarianti e Covarianti

Tensori Controvarianti

$$u^i = (i = 1, \dots, n) \Rightarrow u'^j = (j = 1, \dots, n)$$

Regola di trasformazione:

$$du'^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u'^j}{\partial u^i} du^i$$

Otteniamo il **tensore controvariante**:

$$V^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u'^j}{\partial u^i} V^i$$

Tensori Covarianti

Consideriamo ora un campo scalare Φ :

$$\partial \Phi_{,j} = \frac{\partial \Phi}{\partial u'^j} = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} = \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} \frac{\partial \Phi}{\partial u^i} = \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} \partial \Phi_{,i} = W$$

Otteniamo il **tensore covariante**:

$$W_{ij} = \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} W_i$$

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j = g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u'^l} du'^l \frac{\partial u^j}{\partial u'^k} du'^k = g'_{lk} du'^l du'^k$$

$$g'_{lk} = \frac{\partial u^i}{\partial u'^l} \frac{\partial u^j}{\partial u'^k} g_{ij} \rightarrow \text{”covariante”}$$

$$g'^{lk} = \frac{\partial u'^l}{\partial u^i} \frac{\partial u'^k}{\partial u^j} g^{ij} \rightarrow \text{”controvariante”}$$

Se un tensore ha sia indici covarianti che controvarianti, allora si dice **misto**. In tal caso è necessario applicare una trasformazione controvariante per gli indici controvarianti e una covariante per gli indici covarianti:

$$V_l'^k = \frac{\partial u'^k}{\partial u^j} \frac{\partial u^i}{\partial u'^l} V_i^j$$

👁 Observation: Tensori e indici

Un tensore ha **rango** n se ha n indici, sia covarianti che controvarianti.

Nota: *Non tutti gli oggetti che hanno indici sono tensori*

Consideriamo un tensore covariante D_i e un tensore metrico g_{ij} :

$$D_i = g_{ij}C^j$$

$$D_i D^i = g_{ij} C^j D^i \Rightarrow \begin{cases} D_i = g_{ij} C^j \\ C^j = D^j \end{cases} \rightarrow D_i = g_{ij} D^j$$

$$\vec{v} = v^i \bar{x}_i$$

$$v_m = \vec{v} \cdot \bar{x}_k = v \bar{x}_i \bar{x}_k = v^i g_{ik}$$

Consideriamo un vettore A :

...

Draft

Lezione 3: 14/03/2025

Abbiamo visto che un tensore controvariante è un tensore che passa da un sistema di riferimento normale ad uno "prime", con una trasformazione del tipo:

$$V'^j = V^i \cdot \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}$$

Mentre un tensore covariante è un tensore che passa da un sistema di riferimento "prime" ad uno normale, con una trasformazione del tipo:

$$V'_j = V_i \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}$$

Abbiamo visto anche il concetto di curvatura partendo dalla derivata del versore tangente ad una curva, partendo da questo, definiamo la curvatura rispetto ad una superficie.

3.1 Curvatura di una Superficie

L'estensione della curvatura a una superficie si basa sulla scelta di un punto P e del versore normale \hat{n} in P . Il vettore tangente \bar{v} in P e quello normale \hat{n} individuano un piano che interseca la superficie, generando una curva la cui **curvatura** in P è espressa da:

$$k = \pm \frac{1}{R}$$

Il segno dipende dal lato su cui giace il centro di curvatura C rispetto a \hat{n} . La convenzione sul segno non altera la sostanza del concetto di curvatura.

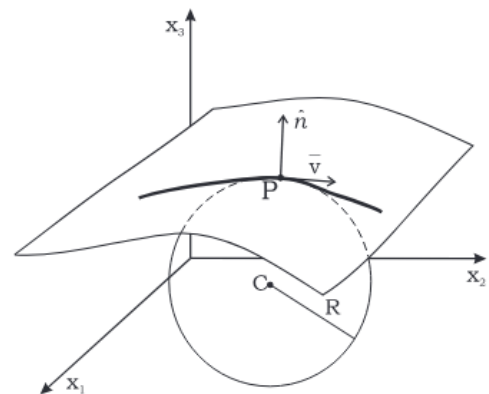


Figure 3.1: Curvatura di una Superficie

In un cilindro si individuano due direzioni ortogonali, dove si ottengono i valori estremo di k (chiamati k_1 e k_2), detti curvatures principali. In generale, ciò vale per qualunque superficie regolare. Definiamo la curvatura di Gauss K come il prodotto $k_1 \cdot k_2$, evidenziando che K non dipende dalla convenzione scelta per il segno di k .

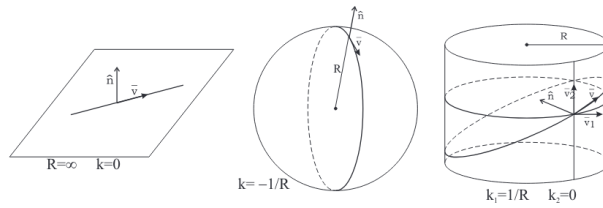


Figure 3.2: Curvatura di un piano, di una sfera e di un cilindro

Una curva è **geodetica** quando la sua lunghezza è stazionaria per piccole variazioni agli estremi. Immaginate di avere un elastico teso tra due punti: se lo perturbate, le perturbazioni si annullano agli estremi.

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(U^i) = \vec{r}(U^i(t))$$

👁 Observation: Geodetica

Anche i tragitti più lunghi che collegano due punti formano delle geodetiche, non solo i tragitti più brevi.

Se ricordiamo che $ds^2 = g_{jk} du^j du^k$, espresse le u^i in forma parametrica tramite il parametro t (che non sarà necessariamente il tempo) avremo:

$$g_{jk} \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt} dt^2 = (g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k) dt^2$$

Detta $L(u^i, \dot{u}^i, t) = \sqrt{g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k} = \sqrt{F}$, (con le $g_{jk} = g_{jk}(u^i)$ e $\dot{u}^i = \frac{du^i}{dt}$) la lunghezza di una curva tra P_1 e P_2 sarà:

$$S = \int_{P_1}^{P_2} L dt = \int_{P_1}^{P_2} ds$$

Per trovare la condizione che S sia stazionario si usano le **equazioni di Eulero-Lagrange**:

$$\frac{dL}{du^i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i} \right) \Rightarrow \frac{dL}{du^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i} \right) = 0$$

Risolviamo l'equazione di Eulero Lagrange per u^i :

$$\frac{\partial g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k}{\partial u^i} = \frac{\partial g_{js}}{\partial u^i} u^j \dot{u}^k + \frac{\partial \dot{u}^j}{\partial u^i} g_{jk} \dot{u}^k + \frac{\partial \dot{u}^k}{\partial u^i} g_{jk} \dot{u}^j$$

$$\frac{\partial \sqrt{F}}{\partial u^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \sqrt{F}}{\partial \dot{u}^i} \right) = \frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^j \dot{u}^k - \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{\partial (g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k)}{\partial \dot{u}^i} \right] = 0$$

Poichè $\frac{\partial g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k}{\partial \dot{u}^i} = g_{ik} \dot{u}^k + g_{ij} \dot{u}^j$ riscriviamo:

$$\frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{\partial g_{jk}}{\partial \dot{u}^i} \dot{u}^j \dot{u}^k - \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2\sqrt{F}} \underbrace{(g_{ik} \dot{u}^k + g_{ij} \dot{u}^j)}_{= 2g_{ji} \dot{u}^j} \right] = 0$$

ma $g_{ik} \dot{u}^k + g_{ij} \dot{u}^j = 2g_{ji} \dot{u}^j$ per la simmetria di g_{ij} e per il fatto che k e j sono indici muti (sommati) e si possono scambiare; avremo quindi:

$$\frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{\partial g_{jk}}{\partial \dot{u}^i} \dot{u}^j \dot{u}^k - \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\sqrt{F}} g_{ji} \dot{u}^j \right] = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{\partial g_{jk}}{\partial \dot{u}^i} \dot{u}^j \dot{u}^k - \left\{ \underbrace{-\frac{1}{2F^{3/2}} \frac{dF}{dt} g_{ji} \dot{u}^j}_{=0} + \frac{1}{\sqrt{F}} \left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial u^l} \dot{u}^l \dot{u}^j + g_{ji} \ddot{u}^j \right) \right\} = 0$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{ji}}{\partial \dot{u}^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial \dot{u}^j} \right] \dot{u}^j \dot{u}^l = \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^l} \dot{u}^l \dot{u}^j = \frac{\partial g_{li}}{\partial u^j} \dot{u}^j \dot{u}^l$$

$$g_{ji} \ddot{u}^j + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k} \dot{u}^k \dot{u}^j + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} \dot{u}^k \dot{u}^j - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^j \dot{u}^k \right] = g_{ji} \ddot{u}^j + \left[\partial g_{ji} \partial u^l \dot{u}^l \dot{u}^j - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^j \dot{u}^k \right] = 0$$

...

$$\frac{1}{2} g^{il} \left[\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} \right]$$

Dove Γ_{jk}^l è detto *connessione affine*, o *simbolo di Christoffel di 2° tipo*.

...

Arriviamo finalmente all'**equazione delle geodetiche**:

$$\boxed{\frac{d^2 u^l}{ds^2} + \Gamma_{jk}^l \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0}$$