



UniTs - University of Trieste

Faculty of Scientific and Data Intensive Computing
Department of mathematics informatics and geosciences

Introduction to Galaxies and Astrophysics

Lecturers:
Prof. Alessandro Saro // Prof. Cebrolini Matteo

Author:
Andrea Spinelli

April 4, 2025

This document is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike \(CC BY-NC-SA\)](#) license. You may share and adapt this material, provided you give appropriate credit, do not use it for commercial purposes, and distribute your contributions under the same license.

Preface

As a student of Scientific and Data Intensive Computing, I've created these notes while attending the **Introduction to Galaxies and Astrophysics** course.

This is an optional course for the second semester of the first year my master's degree, but this course is also available for students of the Physics department, anyway, next year it will probably be removed from both curricula.

The course is held by Prof. Alessandro Saro, a researcher at the INAF Astronomical Observatory of Trieste; the lecture of the course are taken in Italian, but the notes are written in English conformly to the language of the master's degree; however, some images or text could be in Italian due to the original language of the slides.

The first part of the course will be focused on gravity and Einstein's theory of general relativity:

- Non euclidean geometry
- Tensors
- Principles and equations of Einstein
- Gravitational waves

The second part of the course will be focused on cosmology:

- Robertson-Walker metric
- Hubble law
- Friedmann equations
- Cosmological models
- Precision cosmology (hints)

Contents

| | |
|--|-----------|
| 1 Geometrie Non Euclidee | 1 |
| 1.0.1 Geometria Ellittica | 2 |
| 1.0.2 Geometria Iperbolica | 2 |
| 1.1 Curva piana | 3 |
| 1.2 Superfici | 5 |
| 1.3 Prima Forma Fondamentale | 7 |
| 1.3.1 Identità di Lagrange | 8 |
| 2 Tensori | 13 |
| 2.1 Tensori Controvarianti e Covarianti | 13 |
| 3 Lezione 3: 14/03/2025 | 16 |
| 3.1 Curvatura di una Superficie | 16 |
| 4 Lezione 18/03/2025 | 19 |
| 4.1 Derivata Covariante | 23 |
| 5 Lecture 25/03/2025 | 25 |
| 5.0.1 Trasporto parallelo e tensore di curvatura | 26 |
| 6 Lecture 28/03/2025 | 29 |
| 7 Relatività Generale | 31 |
| 8 Lecture 01/04/2025 | 33 |
| 9 Lecture: 04/04/2025 | 36 |
| 9.1 Il principio di Mach | 36 |
| 9.2 Il principio di equivalenza | 36 |
| 9.3 Il principio di covarianza generale | 36 |
| 9.4 Le equazioni di Einstein | 36 |
| 9.5 Il limite newtoniano - campo debole (weak field) | 36 |

1

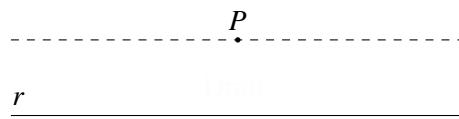
Geometrie Non Euclidee

La teoria che studieremo è una *teoria geometrica*:

I 5 postulati di Euclide:

1. Per due qualsiasi punti A e B , esiste esattamente una retta che li attraversa.
2. Una retta può essere prolungata indefinitamente in entrambe le direzioni.
3. Dato un punto O ed un raggio R , esiste esattamente un cerchio con centro in O e raggio R .
4. Tutti gli angoli retti sono congruenti.
5. Data una retta r ed un punto P fuori da essa, per il punto P passa una ed una sola retta parallela ad r (possiamo dare al termine parallelo il significato di *che incontra r solo all'infinito*, in un punto improprio).

Il quinto postulato è più complesso degli altri; i tentativi di dimostrare tale postulato a partire dagli altri postulati, considerati più evidenti, non hanno permesso di arrivare a questo, ma hanno portato, nell'800, alla nascita delle geometrie non-Euclidee (Gauss, Bolyai, Lobachevski, Klein).



Il quinto postulato si è rivelato indipendente dagli altri enunciati di Euclide, poiché è stato possibile formulare geometrie piane (in 2 dimensioni) in cui valgono tutti gli altri postulati, mentre il concetto di parallelismo assume un significato diverso:

1. Non esiste alcuna retta parallela a R passante per P → **Geometrie ellittiche piane** [S^2]
2. Esistono due o più rette parallele a R passanti per P → **Geometrie iperboliche piane** [H^2]

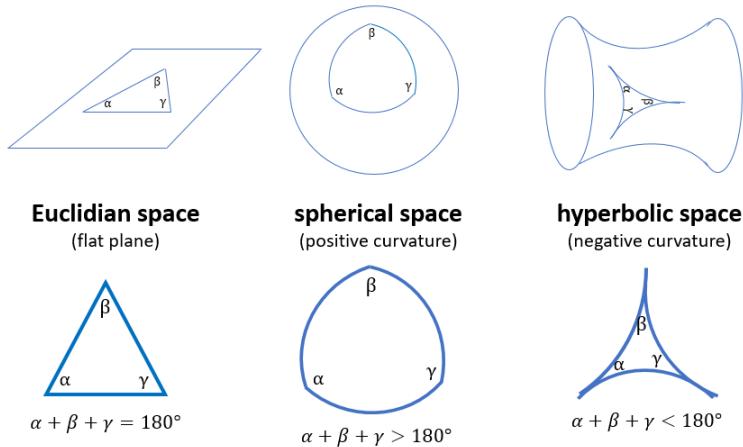


Figure 1.1: Geometrie ellittiche e iperboliche

1.0.1 Geometria Ellittica

La **geometria ellittica piana** è una forma di geometria non euclidea che rifiuta il quinto postulato di Euclide, il quale in geometria euclidea garantisce l'esistenza di una sola retta parallela passante per un dato punto. In geometria ellittica, non esistono rette parallele; invece, ogni coppia di rette si interseca eventualmente.

Un classico esempio è la geometria sferica, in cui possiamo definire come "**punto**" la coppia di punti diametralmente opposti (P, P'), e come "**retta**" un cerchio massimo passante per P e P' . Si può dimostrare che per due punti (P, P') e (Q, Q') passa esattamente una retta r . Inoltre, per un punto (T, T') esterno ad r non passa alcuna retta parallela ad r , poiché tutte le rette passanti per (T, T') intersecano r in almeno un punto.

Con la geometria analitica, Descartes ha mostrato che, identificando i punti con coppie di numeri reali e definendo la distanza tra due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) come $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, tutti i postulati di Euclide si riducono a teoremi sui numeri reali.

Definito sulla sfera un triangolo con i lati formati da archi di cerchi massimi, la somma degli angoli $\alpha + \beta + \gamma$ è sempre $> \pi$. L'area S di tale triangolo, se la sfera ha raggio R , si può esprimere come $S = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$. Quando $S \rightarrow 0$ (mantenendo R fisso), si osserva che $(\alpha + \beta + \gamma) \rightarrow \pi$. Questo significa che se il triangolo sferico è molto più piccolo del raggio R , la sua differenza da un triangolo piano tende a scomparire, avvicinandosi alla geometria euclidea.

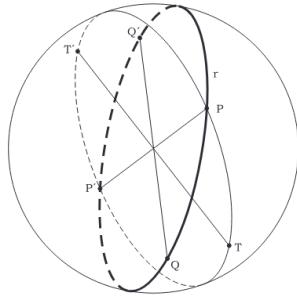


Figure 1.2: Geometria sferica

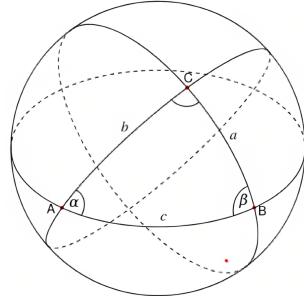


Figure 1.3: Triangolo sferico

In questo contesto, i triangoli, noti come triangoli sferici, mostrano una proprietà intrigante: la somma dei loro angoli interni supera i 180° ($\alpha + \beta + \gamma > \pi$), un fenomeno noto come eccesso sferico, con l'eccesso proporzionale all'area del triangolo.

$$S = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \quad \text{dove per } R \rightarrow \infty \quad \text{si ha} \quad \frac{S}{R^2} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \alpha + \beta + \gamma \rightarrow \pi$$

Per costruire un modello della geometria ellittica piana siamo ricorsi all'uso di una sfera (superficie bidimensionale, indicata con S^2) immersa (*embedded*) in uno spazio euclideo tridimensionale E^3 .

Notiamo che per rappresentare il 5° postulato abbiamo dovuto ricorrere ad una superficie *curva*, cioè la sfera. Questa curvatura deve essere inoltre costante in tutto il piano perché gli altri postulati descrivono lo spazio come omogeneo, e se la curvatura variasse questa proprietà verrebbe meno.

Questo ci porta a comprendere che le diverse geometrie non euclidean possano essere caratterizzate matematicamente attraverso diverse definizioni di distanza. La curvatura dello spazio diventa quindi un elemento fondamentale per distinguere tra i vari tipi di geometrie:

- Curvatura zero \rightarrow geometria euclidea
- Curvatura positiva costante \rightarrow geometria ellittica
- Curvatura negativa costante \rightarrow geometria iperbolica

1.0.2 Geometria Iperbolica

La geometria iperbolica piana è una geometria non euclidea in cui il quinto postulato di Euclide non vale, ammettendo più parallele a una retta data. I triangoli iperbolici hanno somma degli angoli inferiore a 180° ,

con “difetto” proporzionale all’area. Il piano iperbolico non può essere immerso interamente in uno spazio euclideo 3D, ma esistono modelli come il *cerchio di Klein* (1870), in cui i punti sono all’interno di una circonferenza unitaria e le rette ne sono le corde. Da un punto P passano due parallele a una retta data, e ne esistono infinite che non la intersecano.

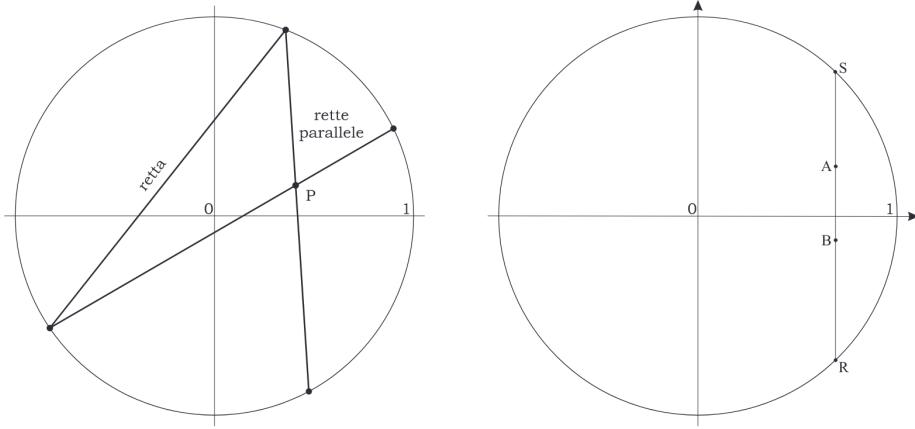


Figure 1.4: Geometria iperbolica

La distanza tra due punti A e B è

$$d(A, B) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{RA \cdot SB}{RB \cdot SA}\right),$$

che diverge se uno dei punti tende al bordo. Una rappresentazione parziale di H^2 in uno spazio euclideo 3-D E^3 è la cosiddetta **pseudosfera**, una superficie a curvatura negativa costante, in contrasto con la sfera a curvatura positiva.

1.1 Curva piana

Si può parametrizzare una curva piana nel modo seguente: $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$, dove t è un parametro, non necessariamente il tempo; il vettore tangente (velocità) è $d\bar{x}/dt$. Possiamo definire l’ascissa curvilinea $s(t)$:

$$O \equiv \bar{x}(t=0) \quad P \equiv \bar{x}(t) \quad ds = |d\bar{x}| = \left| \frac{d\bar{x}}{dt} \right| dt \quad \rightarrow \quad s(t) = \int_0^t |d\bar{x}| = \int_0^t \left| \frac{d\bar{x}}{dt} \right| dt$$

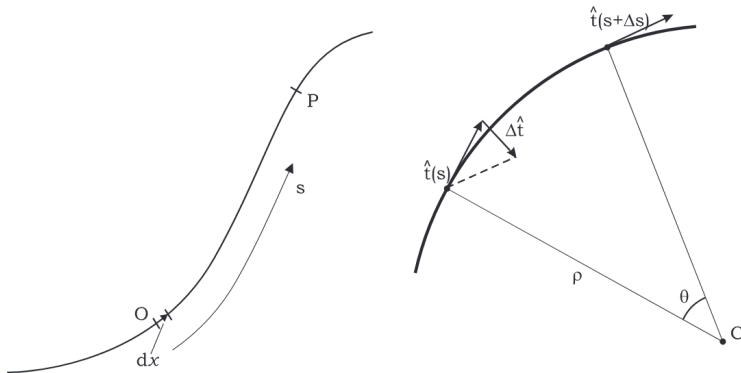


Figure 1.5: Ascissa curvilinea

Applicando la trasformata $t \rightarrow s$ notiamo che $\frac{d\bar{x}}{ds} = \dot{\bar{x}}(s)$ ha modulo 1: è il **versore tangente** $\hat{t}(s)$.

Poiché $|\dot{\bar{x}}(s)| = |\hat{t}(s)| = 1$, abbiamo $\hat{t} \cdot \hat{t} = 1$ e, derivando, segue che $2\hat{t} \cdot \dot{\hat{t}} = 0$, ovvero $\hat{t} \perp \dot{\hat{t}}$.

Nota : \hat{t} non è un versore!

Separiamo la derivata di $\hat{t}(s)$ in modulo e direzione. Definiamo $\kappa(s) = |\dot{\hat{t}}(s)|$ e $\hat{n}(s) = \frac{\dot{\hat{t}}(s)}{|\dot{\hat{t}}(s)|}$, così che

$$\dot{\hat{t}}(s) = \kappa(s) \hat{n}(s).$$

Geometricamente, κ è la **curvatura** e \hat{n} il **versore normale**.

Osserviamo che, se una curva è approssimabile con un arco di cerchio di raggio ρ , allora

$$|\Delta\hat{t}| = 2|\hat{t}|\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \sim \Delta\theta \quad \text{e} \quad \Delta s \simeq \rho\Delta\theta. \quad \text{Da cui} \quad \left|\frac{\Delta\hat{t}}{\Delta s}\right| \simeq \frac{1}{\rho}.$$

Nel limite infinitesimo, ciò si traduce in:

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \kappa\hat{n} = \frac{1}{\rho}\hat{n} \implies \begin{cases} \kappa : \text{curvatura}, \\ \rho : \text{raggio di curvatura}. \end{cases}$$

Misurando l'angolo θ da un riferimento fisso (ad esempio, rispetto all'asse x), si ottiene

$$\Delta s = \rho\Delta\theta = \frac{\Delta\theta}{\kappa} \quad \rightarrow \quad \kappa = \left| \frac{d\theta}{ds} \right|.$$

Finora κ è stata definita come grandezza positiva. In corrispondenza di un flesso, ciò comporta però una discontinuità nella direzione di \hat{n} . Per ovviare a questo, fissata la parametrizzazione della curva tramite s , definiamo \hat{n} come la rotazione di \hat{t} di 90° in senso positivo (coerente con il riferimento O, x_1, x_2). Allora \hat{t} rimane ortogonale a \hat{n} , e possiamo scrivere ancora

$$\dot{\hat{t}}(s) = \kappa\hat{n},$$

ma lasciando che κ possa anche assumere valori negativi. In tal modo, in un flesso \hat{n} non cambia, mentre cambia il segno di κ , permettendo di distinguere se la curvatura si "piega" a sinistra o a destra rispetto alla tangente:

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} \quad (\text{senza valore assoluto}).$$

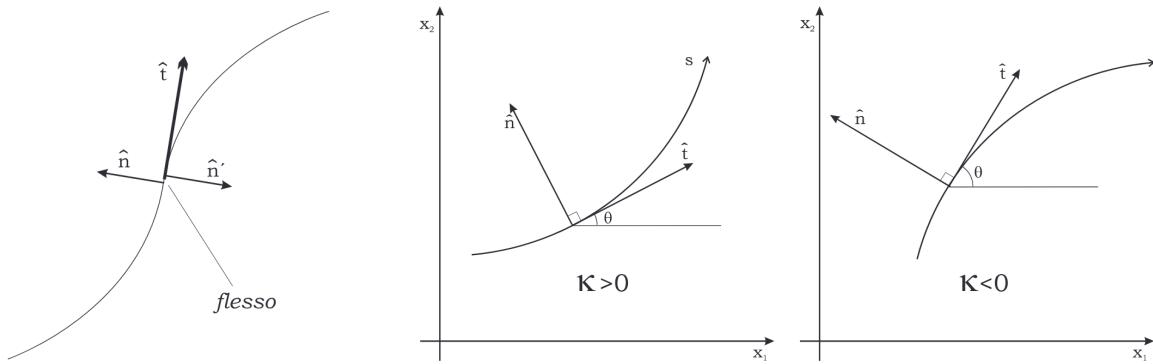


Figure 1.6: Segno del flesso

1.2 Superfici

Più che di *superficie* in senso esteso, ci interesseremo degli *elementi di superficie*, poiché vogliamo esaminare le proprietà locali. Anche in questo caso, useremo una rappresentazione parametrica.

Sia

$$\bar{x}: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

una funzione biunivoca (dunque invertibile) che descrive una superficie nello spazio euclideo tridimensionale E^3 . In coordinate:

$$\bar{x}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)).$$

Se la superficie è del tipo $z = f(x, y)$, allora la parametrizzazione diventa $\bar{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$.

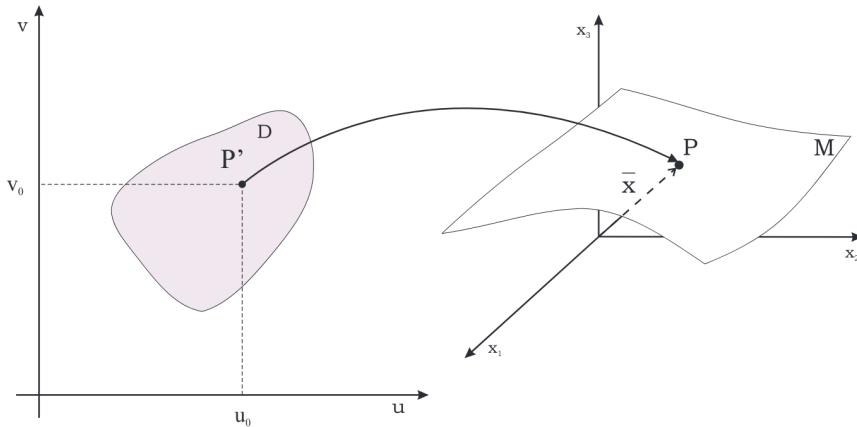


Figure 1.7: Superficie parametrica

Definizione: Superficie Regolare

Una *superficie regolare* (o *smooth*) è tale se, definendo

$$\bar{x}_u = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u} \right), \quad \bar{x}_v = \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v} \right),$$

si ha che in ogni punto del dominio (cioè ovunque in D) risulta

$$\bar{x}_u \times \bar{x}_v \neq 0.$$

Fissando $v = v_0$ e variando u nei pressi di un punto $P' \in D$ (che corrisponde al punto P sulla superficie M), si ottiene una curva su M il cui vettore tangente è \bar{x}_u . Analogamente, \bar{x}_v è tangente a un'altra curva, e i due vettori definiscono il piano tangente in P .

Un versore normale alla superficie è dato da

$$\hat{n} = \frac{\bar{x}_u \times \bar{x}_v}{|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|},$$

e i tre vettori \hat{n} , \bar{x}_u , \bar{x}_v formano un triedro locale.

Poiché la corrispondenza tra D e l'intorno di P su M è biunivoca, possiamo considerare (u, v) come un sistema di coordinate curvilinee sull'intorno di P (ad esempio, i paralleli e i meridiani su una sfera).

Se $u = u(t)$ e $v = v(t)$ descrivono una curva in D passante per $P'(u_0, v_0)$, allora

$$\bar{r}(t) = \bar{x}(u(t), v(t))$$

rappresenta la curva su M passante per $\bar{x}(u_0, v_0)$. Il vettore velocità è

$$\dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{x}_u \frac{du}{dt} + \bar{x}_v \frac{dv}{dt}.$$

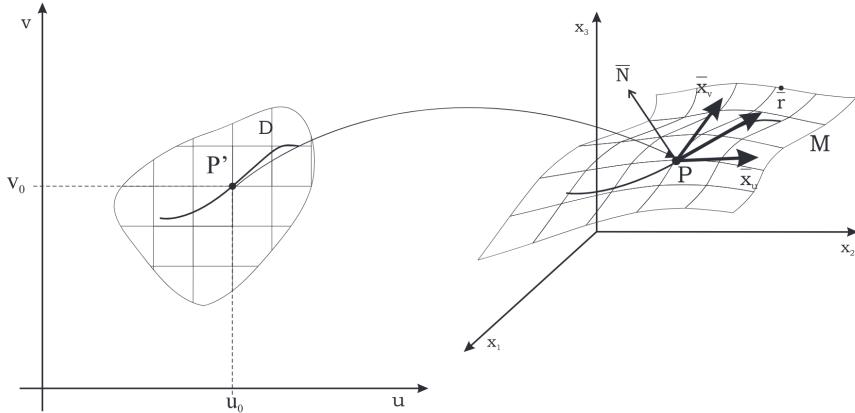


Figure 1.8: Curva su una superficie

Poiché $\dot{\bar{r}}$ è tangente alla curva e appartiene quindi al piano tangente di M in P , ogni vettore tangente a M in P si può scrivere come combinazione lineare di \bar{x}_u e \bar{x}_v . Viceversa, per ogni combinazione $\bar{v} = a\bar{x}_u + b\bar{x}_v$ esiste una corrispondente curva su M la cui velocità è esattamente \bar{v} . In tal senso, \bar{x}_u e \bar{x}_v formano una base del piano tangente.

Example: Superficie di una sfera di raggio R

Consideriamo la sfera di raggio R centrata nell'origine. La sua superficie si parametrizza come

$$\bar{x}(u, v) = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, R \sin v),$$

con $u \in [-\pi, \pi]$ e $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Calcoliamo le derivate rispetto a u e v :

$$\begin{aligned}\bar{x}_u &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = (-R \sin u \cos v, R \cos u \cos v, 0), \\ \bar{x}_v &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = (-R \cos u \sin v, -R \sin u \sin v, R \cos v).\end{aligned}$$

Consideriamo il punto $(u, v) = (0, 0)$:

$$\bar{x}_u(0, 0) = (0, R, 0), \quad \bar{x}_v(0, 0) = (0, 0, R).$$

Tali vettori definiscono il piano tangente alla sfera in quel punto.

Il versore normale alla superficie in $(0, 0)$ si ottiene con il prodotto vettoriale:

$$\hat{n} = \frac{\bar{x}_u \times \bar{x}_v}{|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|} = \frac{(-R^2, 0, 0)}{R^2} = (-1, 0, 0).$$

1.3 Prima Forma Fondamentale

In geometria differenziale, la **prima forma fondamentale** (o *forma metrica*) di una superficie definisce la sua metrica intrinseca. Grazie a essa possiamo misurare lunghezze, angoli e aree *rimanendo* sulla superficie, ossia senza far riferimento esplicito allo spazio tridimensionale in cui la superficie è immersa.

■ Definition: Prima Forma Fondamentale

Sia M una superficie regolare immersa in \mathbb{R}^3 , e sia

$$\bar{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

una parametrizzazione locale di M . La **prima forma fondamentale** in un punto $p \in M$ è il bilineare simmetrico

$$I_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R},$$

definito per ogni coppia di vettori tangenti $v, w \in T_p M$ (lo spazio tangente alla superficie M passante per p) mediante

$$I_p(v, w) = \langle d\bar{x}_p(v), d\bar{x}_p(w) \rangle,$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica il prodotto scalare euclideo in \mathbb{R}^3 . In coordinate locali (u, v) , ponendo

$$\bar{x}_u = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}, \quad \bar{x}_v = \frac{\partial \bar{x}}{\partial v},$$

l'espressione si riduce a

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

con

$$E = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u, \quad F = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v, \quad G = \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v.$$

Sia $\bar{r}(t) = \bar{x}(u(t), v(t))$, con $t \in [a, b]$, una curva su una superficie; se $s(t)$ è la relativa ascissa curvilinea, la lunghezza totale della curva risulta

$$L = s(b) = \int_a^b \frac{ds}{dt} dt = \int_a^b |\dot{\bar{r}}(t)| dt.$$

Poiché

$$\dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{x}_u \dot{u} + \bar{x}_v \dot{v} \quad (\text{dove } \dot{u} = \frac{du}{dt}, \dot{v} = \frac{dv}{dt}),$$

segue che

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = |\dot{\bar{r}}|^2 = \dot{\bar{r}} \cdot \dot{\bar{r}} = (\bar{x}_u \dot{u} + \bar{x}_v \dot{v}) \cdot (\bar{x}_u \dot{u} + \bar{x}_v \dot{v}) = \dot{u}^2 (\bar{x}_u \cdot \bar{x}_u) + 2\dot{u}\dot{v} (\bar{x}_u \cdot \bar{x}_v) + \dot{v}^2 (\bar{x}_v \cdot \bar{x}_v).$$

Introduciamo le funzioni

$$E = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u, \quad F = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v, \quad G = \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v \quad \longrightarrow \quad E = E(u, v), F = F(u, v), G = G(u, v),$$

e otteniamo

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = E \dot{u}^2 + 2F \dot{u}\dot{v} + G \dot{v}^2.$$

Pertanto, la lunghezza totale della curva è

$$L = \int_a^b \sqrt{E \dot{u}^2 + 2F \dot{u}\dot{v} + G \dot{v}^2} dt = \int_{\bar{r}} \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2},$$

che in forma differenziale si esprime come

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Questa espressione, chiamata **prima forma fondamentale**, descrive la geometria intrinseca della superficie. “Intrinseco” significa che tutte le misure (di distanze, angoli, ecc.) possono essere effettuate senza “uscire” dallo spazio bidimensionale della superficie.

Poiché esiste una corrispondenza biunivoca tra $D \subset \mathbb{R}^2$ e la porzione di superficie M , le linee $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$ formano sulla superficie una *griglia* di coordinate curvilinee, mentre $E(u, v)$, $F(u, v)$ e $G(u, v)$ sono interpretate come *funzioni* definite su M . In questo modo, ipotetici “abitanti” bidimensionali potrebbero compiere misurazioni di distanze *sulla superficie* per determinare la forma di E , F e G , giungendo così a una descrizione completa della metrica locale.

Example: Il piano

Consideriamo il piano in E^3 descritto da $\bar{x}(u, v) = (u, v, 0)$, con coordinate cartesiane $x = u$ e $y = v$. Allora

$$\bar{x}_u = (1, 0, 0), \quad \bar{x}_v = (0, 1, 0),$$

e i coefficienti della prima forma fondamentale sono

$$E = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u = 1, \quad F = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v = 0, \quad G = \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v = 1.$$

Quindi,

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

che corrisponde al classico *teorema di Pitagora* in forma differenziale. La lunghezza di una curva $y = f(x)$, parametrizzata da $x = t$ e $y = f(t)$, è

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Example: Sfera in coordinate sferiche

Consideriamo una sfera di raggio R centrata nell’origine. La superficie della sfera è data da:

$$\bar{x}(u, v) = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, R \sin v) \xrightarrow{\text{derive}} \begin{cases} \bar{x}_u = (-R \sin u \cos v, R \cos u \cos v, 0) \\ \bar{x}_v = (-R \cos u \sin v, -R \sin u \sin v, R \cos v) \end{cases}$$

dove $u \in [-\pi, \pi]$, $v \in [-\pi/2, \pi/2]$

Calcoliamo i coefficienti della prima forma fondamentale:

$$\begin{cases} E = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u = R^2 \cos^2 v \sin^2 u + R^2 \cos^2 v \cos^2 u & = R^2 \cos^2 v \\ G = \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v = R^2 \sin^2 v \cos^2 u + R^2 \sin^2 v \sin^2 u + R^2 \cos^2 v & = R^2 \\ F = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v = R^2 v \cos v \cos u \sin v \sin u - R^2 v \cos v \cos u \sin v \sin u & = 0 \end{cases}$$

Quindi, la prima forma fondamentale è:

$$ds^2 = R^2 \cos^2 v du^2 + R^2 dv^2$$

1.3.1 Identità di Lagrange

L’identità di Lagrange è una relazione che lega la forma metrica e la prima forma fondamentale di una superficie.

Se $\begin{cases} \bar{v} = a\bar{x}_u + b\bar{x}_v \\ \bar{w} = c\bar{x}_u + d\bar{x}_v \end{cases}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sono due vettori tangenti alla superficie M , allora:

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = (a\bar{x}_u + b\bar{x}_v) \cdot (c\bar{x}_u + d\bar{x}_v) = acE + (ad + bc)F + bdG$$

che si può riscrivere nella forma matriciale:

$$(a \ b) \underbrace{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}_{\text{Forma metrica}} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

nella quale la compare la matrice della prima forma fondamentale (forma metrica).

Quindi la conoscenza della prima forma fondamentale permette di calcolare prodotti scalari su M , e quindi non solo lunghezze ma anche angoli.

Ricordiamo che, essendo $\bar{x}_u \times \bar{x}_v$ perpendicolare al piano tangente alla superficie, il versore normale $\hat{N} = \frac{\bar{x}_u \times \bar{x}_v}{|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|}$ è perpendicolare alla superficie.

Teorema 1.1. Identità di Lagrange

La quantità $|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|^2$ è uguale al determinante della matrice della prima forma fondamentale:

$$|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|^2 = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Dimostrazione:

Ricordiamo che:
$$\begin{cases} |\bar{x}_u \times \bar{x}_v| &= |\bar{x}_u| |\bar{x}_v| \sin \theta \\ \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v &= |\bar{x}_u| |\bar{x}_v| \cos \theta \end{cases}$$
 dove θ è l'angolo tra \bar{x}_u e \bar{x}_v .

Elevando al quadrato, otteniamo:

$$|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|^2 = (|\bar{x}_u|^2 |\bar{x}_v|^2 \sin^2 \theta) = |\bar{x}_u|^2 |\bar{x}_v|^2 (1 - \cos^2 \theta) = \underbrace{|\bar{x}_u|^2}_{E} \cdot \underbrace{|\bar{x}_v|^2}_{G} - \underbrace{(\bar{x}_u \cdot \bar{x}_v)^2}_{F^2}$$

Ricordando che $|\bar{x}_u \times \bar{x}_v|^2 = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, otteniamo l'identità di Lagrange:

$$\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = EG - F^2$$

C.V.D.

Dalla condizione che la superficie sia regolare, segue che $EG - F^2 \neq 0$

A questo punto facciamo un cambiamento nella simbologia usata; come vedremo questo porterà ad una notevole semplificazione delle formule.

Chiamiamo: $g_{11} \equiv E$, $g_{12} = g_{21} \equiv F$, $g_{22} \equiv g$, $\bar{x}_1 \equiv \bar{x}_u$, $\bar{x}_2 \equiv \bar{x}_v$

E scriviamo $u^1 \equiv u$, $u^2 = v$ (dove gli apici 1 e 2 sono indici alti e non esponenti).⁹

Allora avremo $g_{ij} = \bar{x}_i \cdot \bar{x}_j$ ($i, j = 1, 2$) e la matrice della forma metrica sarà:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che $g_{ij} = g_{ij}(u, v) = g_{ij}(u^1, u^2)$

detto $g = \det(g_{ij}) = EG - F^2$, allora (dall'identità di Lagrange) $|\bar{x}_1 \times \bar{x}_2|^2 = g$.

Nella nuova notazione la prima forma fondamentale diventa:

$$ds^2 = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1 du^2 + g_{22}(du^2)^2 = g_{ij}du^i du^j$$

Tip: Notazione di Einstein

Nella *notazione di Einstein*, quando un indice compare una volta in alto e una in basso, si intende una somma su tutti i valori possibili di tale indice. Per esempio, $g_{ij} du^i du^j$ significa $\sum_{i,j} g_{ij} du^i du^j$.

Abbiamo usato la relazione $2g_{12} = g_{12} + g_{21}$ poiché la forma metrica è simmetrica, ossia $g_{ij} = g_{ji}$.

Un vettore tangente alla superficie M nel punto P può essere scritto come

$$\bar{v} = a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2,$$

oppure, in forma esplicita,

$$\bar{v} = v^1 \bar{x}_1 + v^2 \bar{x}_2 = \sum_i v^i \bar{x}_i,$$

dove l'indice i è una variabile indicizzata (è intercambiabile con altre lettere).

Se consideriamo due vettori tangentini $\bar{v} = \sum_i v^i \bar{x}_i$ e $\bar{w} = \sum_j w^j \bar{x}_j$, entrambi definiti in P , il loro prodotto scalare risulta:

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = \sum_{i,j} (v^i \bar{x}_i \cdot w^j \bar{x}_j) = \sum_{i,j} v^i w^j (\bar{x}_i \cdot \bar{x}_j) = \sum_{i,j} g_{ij} v^i w^j.$$

I vettori \bar{v} e \bar{w} sono ortogonali se e solo se $\sum_{i,j} g_{ij} v^i w^j = 0$

Definiamo ora g^{ij} come gli elementi della matrice inversa di g_{ij} , in modo tale che:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ovvero, in forma compatta,

$$\sum_j g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k,$$

dove δ_i^k è la **delta di Kronecker** (matrice identità), definita da: $\delta_i^k = \begin{cases} 1, & \text{se } i = k, \\ 0, & \text{se } i \neq k. \end{cases}$

Utilizzando la formula per l'inversa di una matrice 2×2 , otteniamo:

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g},$$

dove $g = \det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$.

Osserviamo ora come la prima forma fondamentale consenta non solo di determinare distanze e angoli, ma anche di calcolare le aree.

Sia $x : D \rightarrow E^3$ una superficie e sia $\Omega \subset D$ una regione del dominio in cui x è biunivoca. Per calcolare l'area di $x(\Omega)$ suddividiamo Ω in piccoli rettangoli, tracciando linee parallele agli assi delle coordinate u^1 e u^2 .

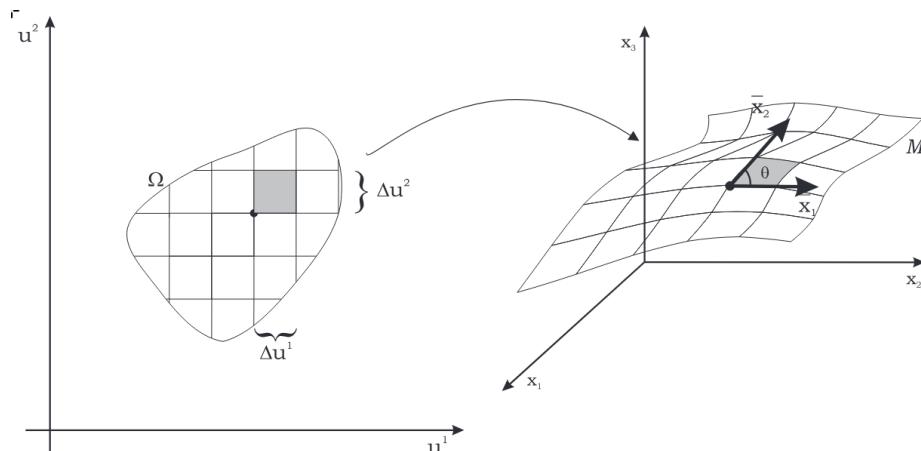


Figure 1.9: Area di una superficie

Ad una piccola areola di Ω con lati Δu^1 e Δu^2 corrisponde, approssimativamente, un pezzo di superficie a forma di parallelogramma, i cui lati sono paralleli ai vettori \bar{x}_1 e \bar{x}_2 . Le lunghezze dei lati sono rispettivamente

$$\Delta l_1 \simeq |\bar{x}_1| \Delta u^1, \quad \Delta l_2 \simeq |\bar{x}_2| \Delta u^2.$$

Ricordiamo che, per definizione, $|\bar{x}_1| = \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^1} \right|$, per cui

$$\Delta \bar{x}_1 = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^1} \Delta u^1.$$

L'area dell'areola è data da

$$\Delta A = |\bar{x}_1| \Delta u^1 \cdot |\bar{x}_2| \Delta u^2 \sin \theta = \underbrace{|\bar{x}_1 \times \bar{x}_2| \Delta u^1 \Delta u^2}_{\text{identità di Lagrange}} = \sqrt{g} \Delta u^1 \Delta u^2$$

dove θ è l'angolo tra \bar{x}_1 e \bar{x}_2 e $g = \det(g_{ij})$.

Passando al limite in cui $\Delta u^1, \Delta u^2 \rightarrow 0$ e sommando su tutte le areole, l'area di $x(\Omega)$ è data da:

$$A = \iint_{\Omega} \sqrt{g} du^1 du^2.$$

Osserviamo che, in due dimensioni, la misura di un insieme coincide con l'area; in spazi di dimensione n , l'integrale di \sqrt{g} fornisce rispettivamente un volume n -dimensionale. Questo procedimento vale per spazi (o *manifolds*) **Riemanniani**, in cui $ds^2 > 0$. Negli spazi **pseudo-Riemanniani** (ad esempio, lo *spazio-tempo di Minkowski* nella Relatività Speciale) alcuni elementi del tensore metrico possono essere negativi; in tali casi, poiché il determinante g può risultare negativo, si usa in generale $\sqrt{|g|}$.

Example: Sfera

La sfera è uno spazio Riemanniano:

$$ds^2 = R^2 \cos^2 v du^2 + R^2 dv^2 \quad \begin{cases} -\pi < u < \pi \\ -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Otteniamo la matrice:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 v & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \Rightarrow g = R^4 \cos^2 v, \quad \sqrt{g} = R^2 \cos v$$

Calcoliamo l'area:

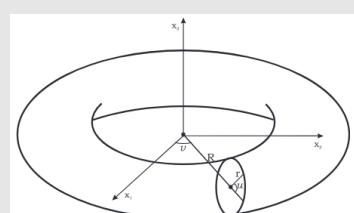
$$A = \iint_{\Omega} \sqrt{g} du dv = \int_{-\pi}^{\pi} du \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos v dv = \boxed{4\pi R^2}$$

Example: Toro

Consideriamo un esempio più complesso, il toro:

$$\bar{x}(u, v) = [R + r \cos u] \cos v, [R + r \cos u] \sin v, r \sin u,$$

$$\begin{cases} 0 < v < 2\pi \\ 0 < u < 2\pi \\ 0 < r < R \end{cases}$$



Calcoliamo la prima forma fondamentale:

$$\begin{cases} E = R^2 + r^2 \cos^2 u \\ F = 0 \\ G = r^2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{g} = \sqrt{EG - F^2} = r(R + r \cos u)$$

Calcoliamo l'area:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} r(R + r \cos u) du \right] dv = 2\pi r \left[\int_0^{2\pi} R du + \int_0^{2\pi} r \cos u du \right] = \\ &= 2\pi r \left[2\pi R + r \int_0^{2\pi} \cos u du \right] = \boxed{4\pi^2 Rr} \end{aligned}$$

2

Tensori

Avremo a che fare con grandezze *tensoriali*, grandezze e cui proprietà sono legate al modo di trasformarsi cambiando sistema di riferimento.

2.1 Tensori Controvarianti e Covarianti

Tensori Controvarianti

Passando da un sistema generico di dimensione n ad un altro $u^i = (i = 1, \dots, n) \rightarrow u'^j = (j = 1, \dots, n)$ abbiamo visto che vale la regola di trasformazione:

$$du'^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u'^j}{\partial u^i} du^i$$

Ogni grandezza V^j che si trasforma con la regola:

$$V'^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u'^j}{\partial u^i} V^i \quad \xrightarrow{\text{notazione di Einstein}} \quad V'^j = \frac{\partial u'^j}{\partial u^i} V^i$$

è un **tenso contovariante**, quindi anche du^i (o u^i) è un tensore contovariante. Un vettore è un tensore di **ordine** o (**rango**) 1. Una grandezza scalare, invece, il cui valore non muta in un dato punto anche se cambia il sistema di coordinate, è un tensore di ordine 0.

Tensori Covarianti

Consideriamo ora un campo scalare $\Phi(u^i) = \Phi(u'^j)$. Ad esempio un campo che definisce la temperatura in un punto dello spazio, per la quale, indipendentemente dal sistema di riferimento u^i o u'^j , il valore della temperatura è sempre lo stesso.

La relazione che sussiste tra il gradiente di Φ in un sistema di riferimento e quello in un altro è:

$$\partial \Phi'_j = \frac{\partial \Phi}{\partial u'^j} = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} = \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} \frac{\partial \Phi}{\partial u^i} = \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} \partial \Phi_i = W$$

Ogni grandezza W_j che si trasforma con la regola:

$$W_j = \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} W_i \quad \xrightarrow{\text{notazione di Einstein}} \quad W_j = \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} W_i$$

è un **tenso covariante**.

Abbiamo visto la grandezza $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$, che indica la lunghezza, al quadrato, di un segmento infinitesimo, e quindi non dipende dal sistema di riferimento usato (è uno scalare). In due sistemi diversi sarà quindi:

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j = g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u'^l} du'^l \frac{\partial u^j}{\partial u'^k} du'^k = g'_{lk} du'^l du'^k$$

poichè

$$g'_{lk} = \frac{\partial u^i}{\partial u'^l} \frac{\partial u^j}{\partial u'^k} g_{ij} \quad \rightarrow \quad \text{"covariante"}$$

abbiamo quindi:

$$g'^{lk} = \frac{\partial u'^l}{\partial u^i} \frac{\partial u'^k}{\partial u^j} g^{ij} \rightarrow \text{"controvariante"}$$

Cioè g_{ij} è un tensore covariante di rango 2, mentre g^{ij} è un tensore controvariante di rango 2.

Se un tensore ha sia indici covarianti che controvarianti, come abbiamo visto in $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$ allora si dice **misto**. In tal caso è necessario applicare una trasformazione controvariante per gli indici controvarianti e una covariante per gli indici covarianti:

$$V_l'^k = \frac{\partial u'^k}{\partial u^j} \frac{\partial u^i}{\partial u'^l} V_i^j$$

⌚ **Observation: Tensori e indici**

Un tensore ha **rango n** se ha n indici, sia covarianti che controvarianti.

Nota: Non tutti gli oggetti che hanno indici sono tensori

Consideriamo un tensore covariante D_i e un tensore metrico g_{ij} :

$$D_i = g_{ij} C^j$$

$$D_i D^i = g_{ij} C^j D^i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} D_i = g_{ij} C^j \\ C^j = D^j \end{cases} \quad \rightarrow \quad D_i = g_{ij} D^j$$

$$\vec{v} = v^i \bar{x}_i$$

$$v_m = \vec{v}^i \cdot \bar{x}_k = v \bar{x}_i \bar{x}_k = v^i g_{ik}$$

Consideriamo un vettore A :

...

3

Lezione 3: 14/03/2025

Abbiamo visto che un tensore controvariante è un tensore che passa da un sistema di riferimento normale ad uno "prime", con una trasformazione del tipo:

$$V'^j = V^i \cdot \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}$$

Mentre un tensore covariante è un tensore che passa da un sistema di riferimento "prime" ad uno normale, con una trasformazione del tipo:

$$V'_j = V_i \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}$$

Abbiamo visto anche il concetto di curvatura partendo dalla derivata del versore tangente ad una curva, partendo da questo, definiamo la curvatura rispetto ad una superficie.

3.1 Curvatura di una Superficie

L'estensione della curvatura a una superficie si basa sulla scelta di un punto P e del versore normale \hat{n} in P . Il vettore tangente \bar{v} in P e quello normale \hat{n} individuano un piano che interseca la superficie, generando una curva la cui **curvatura** in P è espressa da:

$$k = \pm \frac{1}{R}$$

Il segno dipende dal lato su cui giace il centro di curvatura C rispetto a \hat{n} . La convenzione sul segno non altera la sostanza del concetto di curvatura.

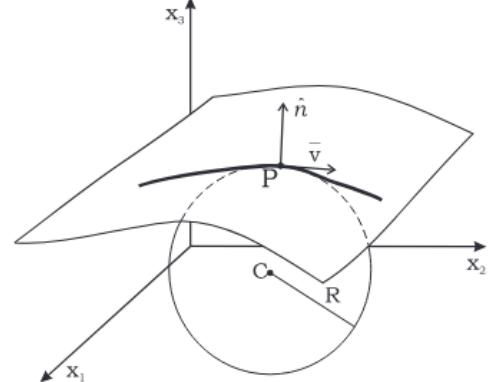


Figure 3.1: Curvatura di una Superficie

In un cilindro si individuano due direzioni ortogonali, dove si ottengono i valori estremo di k (chiamati k_1 e k_2), detti curvature principali. In generale, ciò vale per qualunque superficie regolare. Definiamo la curvatura di Gauss K come il prodotto $k_1 \cdot k_2$, evidenziando che K non dipende dalla convenzione scelta per il segno di k .

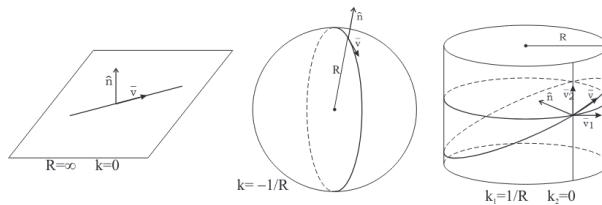


Figure 3.2: Curvatura di un piano, di una sfera e di un cilindro

Una curva è **geodetica** quando la sua lunghezza è stazionaria per piccole variazioni agli estremi.

Immaginate di avere un elastico teso tra due punti: se lo perturbate, le perfurbazioni si annullano agli estremi.

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(U^i) = \vec{r}(U^i(t))$$

Observation: Geodetica

Anche i tragitti più lunghi che collegano due punti formano delle geodetiche, non solo i tragitti più brevi.

Se ricordiamo che $ds^2 = g_{jk}du^jdu^k$, espresse le u^i in forma parametrica tramite il parametro t (che non sarà necessariamente il tempo) avremo:

$$g_{jk}\frac{du^j}{dt}\frac{du^k}{dt}dt^2 = (g_{jk}\dot{u}^j\dot{u}^k)dt^2$$

Detta $L(u^i, \dot{u}^i, t) = \sqrt{g_{jk}\dot{u}^j\dot{u}^k} = \sqrt{F}$, (con le $g_{jk} = g_{jk}(u^i)$ e $\dot{u}^i = \frac{du^i}{dt}$) la lunghezza di una curva tra P_1 e P_2 sarà:

$$S = \int_{P_1}^{P_2} L dt = \int_{P_1}^{P_2} ds$$

Per trovare la condizione che S sia stazionario si usano le **equazioni di Eulero-Lagrange**:

$$\frac{dL}{du^i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i} \right) \Rightarrow \frac{dL}{du^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i} \right) = 0$$

Risolviamo l'equazione di Eulero Lagrange per u^i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{jk}\dot{u}^j\dot{u}^k}{\partial u^i} &= \frac{\partial g_{js}}{\partial u^i}u^j\dot{u}^k + \frac{\partial \dot{u}^j}{\partial u^i}g_{jk}u^k + \frac{\partial u^k}{\partial u^i}g_{jk}\dot{u}^j \\ \frac{\partial \sqrt{F}}{\partial u^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \sqrt{F}}{\partial \dot{u}^i} \right) &= \frac{1}{2\sqrt{F}}\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\dot{u}^j\dot{u}^k - \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2\sqrt{F}}\frac{\partial(g_{jk}\dot{u}^j\dot{u}^k)}{\partial \dot{u}^i} \right] = 0 \end{aligned}$$

Poichè $\frac{\partial g_{jk}\dot{u}^j\dot{u}^k}{\partial \dot{u}^i} = g_{ik}\dot{u}^k + g_{ij}\dot{u}^j$ riscriviamo:

$$\frac{1}{2\sqrt{F}}\frac{\partial g_{jk}}{\partial \dot{u}^i}\dot{u}^j\dot{u}^k - \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2\sqrt{F}}\underbrace{(g_{ik}\dot{u}^k + g_{ij}\dot{u}^j)}_{= 2g_{ji}\dot{u}^j} \right] = 0$$

ma $g_{ik}\dot{u}^k + g_{ij}\dot{u}^j = 2g_{ji}\dot{u}^j$ per la simmetria di g_{ij} e per il fatto che k e j sono indici muti (sommati) e si possono scambiare; avremo quindi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{F}}\frac{\partial g_{jk}}{\partial \dot{u}^i}\dot{u}^j\dot{u}^k - \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\sqrt{F}}g_{ji}\dot{u}^j \right] &= 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{F}}\frac{\partial g_{jk}}{\partial \dot{u}^i}\dot{u}^j\dot{u}^k - \left\{ \underbrace{-\frac{1}{2F^{3/2}}\frac{dF}{dt}g_{ji}\dot{u}^j}_{= 0} + \frac{1}{\sqrt{F}} \left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial u^i}\dot{u}^i\dot{u}^j + g_{ji}\ddot{u}^j \right) \right\} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{ji}}{\partial \dot{u}^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial \dot{u}^j} \right] \dot{u}^j \dot{u}^l = \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^l} \dot{u}^l \dot{u}^j = \frac{\partial g_{li}}{\partial u^j} \dot{u}^j \dot{u}^l$$

$$g_{ji} \ddot{u}^j + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k} \dot{u}^k \dot{u}^j + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} \dot{u}^k \dot{u}^j - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^j \dot{u}^k \right] = g_{ji} \ddot{u}^j + \left[\partial g_{ji} \partial u^l \dot{u}^l \dot{u}^j - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^j \dot{u}^k \right] = 0$$

...

$$\frac{1}{2} g_{il} \left[\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} \right]$$

Dove Γ_{jk}^l è detto **connessione affine**, o **simbolo di Christoffel di 2° tipo**.

...

Arriviamo finalmente all'**equazione delle geodetiche**:

$$\frac{d^2 u^l}{ds^2} + \Gamma_{jk}^l \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0$$

4

Lezione 18/03/2025

Esempio: *il piano in coordinate cartesiani*

Nel caso del piano, le coordinate cartesiane sono (x, y) e la metrica è data da:

$$u, v \rightarrow x, y \Rightarrow g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j = \sum_{ij} g_{ij} du^i du^j = du^2 + dv^2$$

Esempio: *il piano in coordinate polari*

Nel caso del piano in coordinate polari, le coordinate sono (r, θ) e la metrica è data da:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}.$$

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{ir} \left(\frac{\partial g_{jr}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^r} \right) \quad \text{ricordiamo la simmetria su } j \text{ e } k$$

- Se $i = r = 1$:

$$\Gamma_{jk}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{j1}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{k1}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^1} \right) \quad \text{perchè } g^{12} = 0$$

- Se $j = k = 2$:

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(-\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right) = -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\partial r^2}{\partial r} = -r$$

- Se $i = r = 2$:

$$\Gamma_{jk}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{j2}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{k2}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^2} \right) \quad \text{perchè } g^{21} = 0$$

- Se $j = 1, k = 2$:

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 0 = 0$$

Si ottiene quindi:

$$\boxed{\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0}$$

Otteniamo quindi il sistema:

$$\frac{d^2r}{ds^2} - r \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = 0 \quad (\text{I})$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{ds} \right) \left(\frac{d\theta}{ds} \right) = 0 \quad (\text{II})$$

...

...

In un intorno infinitesimo di un punto è sempre possibile scegliere un sistema di coordinate in cui la matrice dei componenti metrici $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ed in cui le derivate parziali $g_{ij,k}$ sono nulle. Tale sistema viene definito *localmente euclideo*.

Per capire come ciò sia possibile, ricordiamo che la trasformazione della metrifica da g_{ij} a g'_{kl} è:

$$g'_{kl} = \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij}.$$

Espandiamo g'_{kl} attorno al punto x_0 :

$$g'_{kl}(x) = g'_{kl}(x_0) + g'_{kl,m}(x_0)(x^m - x_0^m) + \frac{1}{2}g'_{kl,mn}(x_0)(x^m - x_0^m)(x^n - x_0^n) + \dots,$$

dove

$$\begin{aligned} g'_{kl}(x_0) &= \left[\frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij} \right]_{x_0}, \\ g'_{kl,m}(x_0) &= \left[\frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij,m} \right]_{x_0} + \left[\frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^m \partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij} \right]_{x_0} + \left[\frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^m \partial u'^l} g_{ij} \right]_{x_0}. \end{aligned}$$

Per la simmetria tra gli indici i e j e tra k e l , possiamo riscrivere:

$$g'_{kl,m}(x_0) = \left[\frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij,m} \right]_{x_0} + \left[2 \frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^m \partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij} \right]_{x_0}.$$

Analogamente, per le derivate seconde si ha:

$$g'_{kl,mn}(x_0) = \left[\frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij,mn} \right]_{x_0} + \left[2 \frac{\partial^3 u^i}{\partial u'^m \partial u'^n \partial u'^k} \frac{\partial u^j}{\partial u'^l} g_{ij} \right]_{x_0} + \text{derivate prime, seconde e terze},$$

Supponendo di voler, tramite un'opportuna trasformazione di coordinate, portare g'_{kl} in una forma voluta in un intorno di x_0 , dobbiamo specificare nella trasformazione le seguenti quantità:

| Derivatives | 2-D | 3-D | 4-D | N-D |
|---|-----|-----|-----|---------------------------|
| $\left(\frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \right)_{x_0}$ | 4 | 9 | 16 | N^2 |
| $\left(\frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^m \partial u'^k} \right)_{x_0}$ | 6 | 18 | 40 | $\frac{N^2(N+1)}{2}$ |
| $\left(\frac{\partial^3 u^i}{\partial u'^m \partial u'^n \partial u'^k} \right)_{x_0}$ | 8 | 30 | 80 | $\frac{N^2(N+1)(N+2)}{6}$ |

D'altro canto, il numero dei valori e delle derivate indipendenti del tensore metrico risulta:

| | 2-D | 3-D | 4-D | N-D |
|-------------------|-----|-----|-----|-------------------------------------|
| $g'_{kl}(x_0)$ | 3 | 6 | 10 | $\frac{N(N+1)}{2}$ |
| $g'_{kl,m}(x_0)$ | 6 | 18 | 40 | $\frac{N^2(N+1)}{2}$ |
| $g'_{kl,mn}(x_0)$ | 9 | 36 | 100 | $\left[\frac{N(N+1)}{2} \right]^2$ |

Dalle considerazioni precedenti possiamo trarre le seguenti conclusioni per le dimensioni 2, 3 e 4:

- **2-D:** Se si fissano i valori di $g'_{kl}(x_0)$ si hanno 3 equazioni per 4 coefficienti, lasciando un grado di libertà (la rotazione degli assi attorno a x_0). Se si impone $g'_{kl,m}(x_0) \equiv 0$, si dispongono di 6 equazioni per 6 parametri, dunque la condizione è realizzabile. Tuttavia, se si volesse anche annullare $g'_{kl,mn}(x_0)$, si avrebbero 9 equazioni per 8 parametri: il sistema risulta troppo vincolato e non ammette soluzioni, quindi le derivate seconde non possono essere annullate localmente.

- **3–D:** Per fissare $g'_{kl}(x_0)$ ci sono 6 equazioni e 9 parametri, con 3 gradi di libertà associati alla rotazione dello spazio (ad es. gli angoli di Eulero). Si può porre $g'_{kl,m}(x_0) = 0$ (18 equazioni per 18 incognite), ma non $g'_{kl,mn}(x_0) = 0$ (36 equazioni per 30 incognite).
- **4–D (Spazio di Minkowski):** Per imporre $g'_{kl}(x_0)$ si hanno 10 equazioni e 16 parametri, con 6 gradi di libertà (3 rotazioni più 3 trasformazioni di Lorentz). È possibile forzare $g'_{kl,m}(x_0) = 0$ (40 equazioni per 40 incognite), ma non $g'_{kl,mn}(x_0) = 0$ (100 equazioni per 80 incognite).

Poiché in un punto si può sempre imporre $g_{ij} = \delta_{ij}$ e $g_{ij,k} = 0$, la curvatura deve necessariamente dipendere dalle derivate seconde di g_{ij} . La forma di dipendenza più semplice, plausibilmente, è quella lineare. Prima di indagare se esista un'espressione di questo tipo, occorre affrontare un'altra questione.

4.1 Derivata Covariante

Abbiamo visto che la derivata (o gradiente) di un campo scalare φ , ossia $\frac{\partial \varphi}{\partial u^i}$, è un vettore covariante. Potrebbe sembrare naturale derivare allo stesso modo un campo vettoriale $A_i(u^k)$, ottenendo un tensore di rango due; tuttavia, ciò non avviene. In generale, il differenziale

$$dA_i \quad (\text{ingrediente essenziale nel rapporto incrementale})$$

non si comporta come un tensore. Infatti, dalla legge di trasformazione

$$A_i = \frac{\partial u'^k}{\partial u^i} A'_k$$

discende che

$$dA_i = \frac{\partial u'^k}{\partial u^i} dA'_k + A'_k d\left(\frac{\partial u'^k}{\partial u^i}\right) = \frac{\partial u'^k}{\partial u^i} dA'_k + \frac{\partial^2 u'^k}{\partial u^i \partial u^l} A'_k du^l.$$

Osserviamo che dA_i è un vettore solo se $\frac{\partial^2 u'^k}{\partial u^i \partial u^l} = 0$, ossia se le nuove coordinate u'^i sono funzioni lineari delle u^i (ad esempio, quando si passa da un sistema di coordinate rettilinee a un altro rettilineo).

Perché dA_i non è un vettore? Perché la differenza

$$dA_i = A_i(u^i + du^i) - A_i(u^i)$$

riguarda due vettori applicati in punti diversi (anche se infinitamente vicini). In un sistema di coordinate generico, i coefficienti di trasformazione variano da punto a punto, quindi tali vettori non si trasformano nello stesso modo. Perché la differenza di due vettori sia a sua volta un tensore, i due vettori devono essere *confrontati nello stesso punto*. Se ambedue si trovano nello stesso punto, allora subiscono la stessa trasformazione, e anche la loro differenza si comporta come un tensore. Ne segue che, per definire una derivata che si comporti da tensore, abbiamo bisogno di una *derivata covariante*.

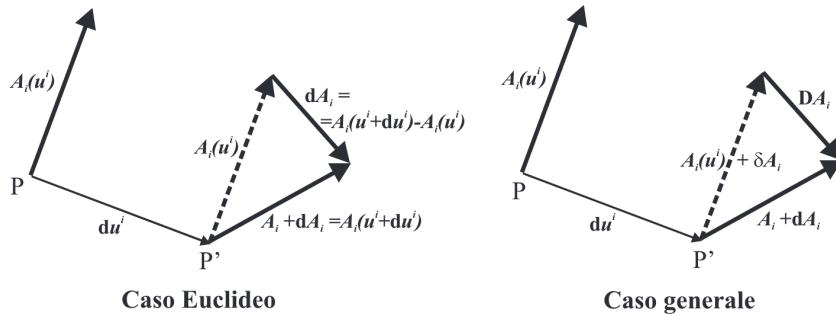


Figure 4.1: Derivata covariante

In uno spazio euclideo, per derivare un vettore $A_i(u^i)$ si procede *spostando parallelamente* $A_i(u^i)$ fino a farne coincidere il punto di applicazione con quello di $A_i(u^i + du^i)$, senza modificarne modulo né direzione. Nel nuovo punto P' , si calcola la differenza e si prende il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{du^i \rightarrow 0} \frac{A_i(u^i + du^i) - A_i(u^i)}{du^i}.$$

Come riprodurre un processo analogo in uno spazio non euclideo? Definiamo il *trasporto parallelo* da u^i a $u^i + du^i$ come quello spostamento che produce una variazione δA_i tale che, passando a un sistema localmente euclideo (il che, localmente, è sempre possibile), tale variazione risulti nulla: $\delta A_i = 0$. Pertanto, in P' , abbiamo $A_i + dA_i \equiv A_i(u^i + du^i)$ e $A_i + \delta A_i$, corrispondente al trasporto parallelo di $A_i(u^i)$ da P a P' . La differenza

$$DA_i = (A_i + dA_i) - (A_i + \delta A_i) = dA_i - \delta A_i$$

è un vettore, perché è la differenza di due vettori applicati allo stesso punto. Questo DA_i , chiamato **Diferenziale Assoluto**, ci consente di definire il nuovo tipo di derivata che si comporta come un tensore, la *derivata covariante*.

...

...

5

Lecture 25/03/2025

La derivata covariante di un tensore si può ricavare considerando questo come il prodotto di due vettori e richiedendo che essa soddisfi la regola di *Leibniz* per la derivazione di un prodotto. Allora, se $T_{ik} \equiv A_i B_k$, si ha che:

$$\begin{aligned} T_{ik;l} &= B_k A_{i;l} + A_i B_{k;l} \\ &= B_k \left(\frac{\partial A_i}{\partial u^l} - \Gamma_{il}^m A_m \right) + A_i \left(\frac{\partial B_k}{\partial u^l} - \Gamma_{kl}^m B_m \right) \\ &= B_k \frac{\partial A_i}{\partial u^l} + A_i \frac{\partial B_k}{\partial u^l} - \Gamma_{il}^m A_m B_k - \Gamma_{kl}^m A_i B_m \\ &= \frac{\partial T_{ik}}{\partial u^l} - \Gamma_{il}^m T_{mk} - \Gamma_{kl}^m T_{im} \end{aligned}$$

Questa relazione vale in generale. Osserviamo ora l'espressione:

$$A_{i;l} = (g_{ik} A^k)_{;l} = g_{ik;l} A^k + g_{ik} A_{;l}^k$$

Ma $A_{i;k}$ è un tensore, e posso usare il tensore metrico per scriverlo come $A_{i;k} = g_{ik} A^k_{;l}$; se confrontiamo con l'espressione scritta sopra vediamo che $g_{ik;l} = 0$. Usiamo ora la relazione per la derivata covariante di un tensore per scrivere esplicitamente questo risultato:

$$g_{ik;l} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} - \Gamma_{il}^m g_{mk} - \Gamma_{kl}^m g_{im} = 0 \quad (\text{I})$$

Facciamo ora, in questa relazione, una rotazione in senso antiorario degli indici i, k e l ; otteniamo:

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} - \Gamma_{ki}^m g_{ml} - \Gamma_{li}^m g_{km} = 0 \quad (\text{II})$$

Ed ancora una rotazione degli indici:

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial u^k} - \Gamma_{lk}^m g_{mi} - \Gamma_{ik}^m g_{lm} = 0 \quad (\text{III})$$

Se facciamo ora (I) + (III) - (II) otteniamo, sfruttando la simmetria degli indici bassi di Γ_{il}^m e g_{ik} :

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} - \Gamma_{il}^m g_{mk} - \Gamma_{kl}^m g_{im} - \Gamma_{lk}^m g_{mi} - \Gamma_{ik}^m g_{lm} + \Gamma_{ki}^m g_{ml} + \Gamma_{li}^m g_{km} = 0$$

E semplificando:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} - 2\Gamma_{kl}^m g_{im} = 0$$

Moltiplicando ora quest'ultima relazione per $\frac{1}{2} g^{ij}$ otteniamo:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} \right) = \Gamma_{kl}^m g_{im} g^{ij} = \Gamma_{kl}^m \delta_m^j = \Gamma_{kl}^j$$

Ritroviamo quindi la relazione che definisce la connessione affine, e con ciò abbiamo verificato l'assunzione $\Delta_{il}^m \equiv \Gamma_{il}^m$.

Consideriamo ora il *prodotto scalare* $A_i B^i$; essendo una quantità scalare essa non cambia per trasporto parallelo ($\delta(A_i B^i) = 0$), da cui:

$$\begin{aligned} B^i \delta A_i + A_i \delta B^i &= 0 \quad \rightarrow \quad A_i \delta B^i = -B^i \delta A_i \\ A_i \delta B^i &= -B^i \Gamma_{il}^m A_m du^l \end{aligned}$$

Essendo i ed m indici muti sommati, li scambio tra loro:

$$A_i \delta B^i = -B_m \Gamma_{ml}^i A_i du^l$$

ed essendo A_i un vettore generico, dovrà essere:

$$\delta B^i = -\Gamma_{ml}^i B^m du^l$$

da cui la relazione che esprime la derivata covariante per un vettore controvariante:

$$\frac{DB^i}{du^l} = \frac{\partial B^i}{\partial u^l} - \Gamma_{ml}^i B^m$$

La regola generale per la derivazione covariante di un tensore di rango arbitrario consiste nel farne la derivata parziale e poi di aggiungere un termine del tipo $+\Gamma$ per ogni indice controvariante ed un termine del tipo $-\Gamma$ per ogni indice covariante.

5.0.1 Trasporto parallelo e tensore di curvatura

Sia $u^i = u^i(s)$ l'equazione parametrica di una curva, con s ascissa curvilinea misurata a partire da un certo punto sulla curva. Sappiamo che du^i è un vettore (dalla definizione di vettore controvariante), ds è uno scalare, e $du^i/ds \equiv v^i$ è quindi un vettore. In particolare, v^i è il versore tangente alla curva.

💡 Tip: Verifica di un versore

Per verificare che v^i è un versore, vediamo quanto vale il suo modulo eseguendo il prodotto scalare $v_i v^i$:

$$v_i v^i = g_{ij} v^i v^j = g_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \equiv 1 \quad \text{da} \quad ds^2 = g_{ij} du^i du^j$$

Se fossi in uno spazio Euclideo, per definire una geodetica come un segmento di linea retta, direi che il versore tangente non cambia con s :

$$\frac{dv^i}{ds} = 0$$

Se ora voglio generalizzare questa relazione ad uno spazio qualsiasi, a 2 o più dimensioni, devo usare non la derivata normale, ma quella covariante:

$$\frac{Dv^i}{ds} = 0$$

Esplicitando i termini

$$\frac{Dv^i}{ds} = \frac{dv^i}{du^l} \frac{du^l}{ds} = \frac{du^l}{ds} \left(\frac{\partial v^i}{\partial u^l} + \Gamma_{ml}^i v^m \right) = 0$$

Cioè:

$$\frac{dv^i}{du^l} \frac{du^l}{ds} + \Gamma_{ml}^i v^m \frac{du^l}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv^i}{ds} + \Gamma_{ml}^i v^m v^l = 0$$

da cui, ricordando che $du^i/ds = v^i$, abbiamo:

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{ml}^i \frac{du^m}{ds} \frac{du^l}{ds} = 0$$

Ritroviamo cioè la nostra equazione della geodetica (anche a riprova del fatto che, passando dal caso Euclideo a quello generale, si devono sostituire le derivate "normali" con quelle covarianti).

Vediamo che lungo la geodetica $Dv^i = 0$, cioè $dv^i = \delta v^i$: il versore v^i , trasportato parallelamente da un punto u^i sulla geodetica, a un punto $u^i + du^i$ sulla stessa geodetica, coincide con il vettore $v^i + dv^i$, tangente alla geodetica in $u^i + du^i$.

Consideriamo ora un vettore A_i che viene trasportato parallelamente lungo la stessa geodetica. L'angolo che esso forma con v^i , versore tangente, sarà dato dal prodotto scalare $A_i v^i$. Ma uno scalare non cambia per trasporto parallelo, per cui lungo la geodetica l'angolo tra A_i e v^i rimane costante: **un vettore trasportato parallelamente lungo una geodetica forma sempre lo stesso angolo con la tangente alla curva.**

Immaginiamo ora di trasportare parallelamente un vettore \bar{v}_0 lungo un triangolo formato da pezzi di geodetica. Se siamo in uno spazio Euclideo (ad esempio su un piano) il vettore \bar{v}_f che ottengo dopo aver chiuso il cammino coinciderà con \bar{v}_0 .

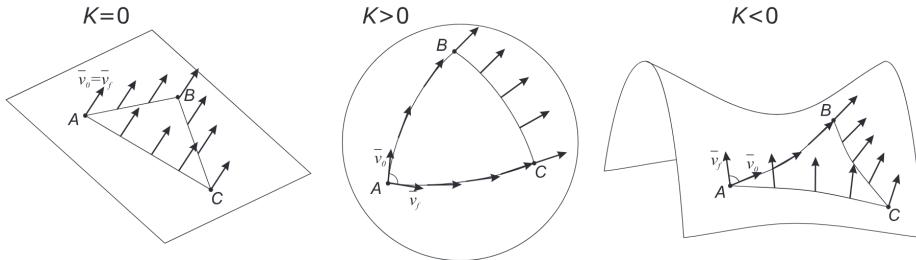


Figure 5.1: Trasporto di un vettore lungo un triangolo nelle varie geometrie.

La stessa cosa non accade lungo un triangolo sferico: il vettore appare ruotato di un angolo che ha lo stesso verso di rotazione del verso in cui ho percorso il triangolo sferico. L'opposto accade per un triangolo iperbolico ($K < 0$).

Possiamo vedere la cosa anche in un altro modo: immaginiamo di andare da un punto A ad un punto B sia direttamente che passando per un punto C, sempre lungo archi di geodetica.

Nello spazio Euclideo il risultato del trasporto parallelo lungo i due percorsi è il medesimo, ma la stessa cosa non accade sulle superfici curve (quanto qui detto per un triangolo formato da archi di geodetica vale per un percorso generico, che si può pensare come costituito da un gran numero di archetti di geodetica). Il risultato è che, a meno di non essere in uno spazio Euclideo, **non esiste un modo naturale e non ambiguo per muovere un vettore da un punto ad un altro**; possiamo trasportarlo parallelamente, ma il risultato dipende dal cammino, e non c'è una scelta naturale per questo. Quindi **posso confrontare due vettori solamente se sono applicati allo stesso punto**. Ad esempio, due particelle che passano una accanto all'altra hanno una velocità relativa ben definita (e minore di c , con c velocità della luce), ma due particelle in differenti punti di uno spazio generico non hanno una velocità relativa ben definita.

Vediamo di quantificare quanto detto sopra in modo qualitativo. Muovendosi lungo un cammino chiuso formato da archi di geodetica, un vettore A_k trasportato parallelamente subirà, tornando al punto di partenza, una variazione

$$\Delta A_k = \oint \delta A_k = \oint \Gamma_{km}^i A_i du^m$$

Per risolvere l'integrale usiamo il Teorema di Stokes:

Teorema 5.1. Teorema di Stokes:

La circuitazione di una curvatura C_1 in un campo vettoriale A è data dall'integrale del rotore di A lungo il perimetro della curva chiusa C :

$$\oint_{C_1} A \cdot d\ell = \int_S \nabla \times A \cdot dS$$

Applicando il teorema di Stokes all'integrale precedente otteniamo:

$$\oint A_i du^i = \frac{1}{2} \int_{Superficie} \left(\frac{\partial A_m}{\partial u^l} - \frac{\partial A_l}{\partial u^m} \right) df^{lm}$$

dove df^{lm} è un tensore che corrisponde alla proiezione dell'elemento di area della superficie sui piani coordinati. Nel nostro caso $A_m du^m \rightarrow \Gamma_{km}^i A_i du^m$, per cui:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} \int_{Superficie} \left[\frac{\partial(\Gamma_{km}^i A_i)}{\partial u^l} - \frac{\partial(\Gamma_{kl}^i A_i)}{\partial u^m} \right] df^{lm}$$

Se supponiamo che la superficie delimitata dalla curva chiusa sia infinitesima (una superficie finita si può scomporre in elementi infinitesimi), l'integrando sarà costante, a meno di infinitesimi di ordine superiore, e potremo scrivere:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\Gamma_{km}^i)}{\partial u^l} A_i - \frac{\partial(\Gamma_{kl}^i)}{\partial u^m} A_i + \Gamma_{km}^i \frac{\partial A_i}{\partial u^l} - \Gamma_{kl}^i \frac{\partial A_i}{\partial u^m} \right] \Delta f^{lm}$$

Siccome A_i viene spostato parallelamente sulla curva:

$$\frac{\partial A_i}{\partial u^l} = \frac{\delta A_i}{\partial u^l} = \Gamma_{il}^n A_n$$

Allora:

** here missing something **

$$\begin{aligned} \Delta A_k &= \frac{1}{2} \Delta f^{lm} \left[\frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial u^l} A_i - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial u^m} A_i + \Gamma_{km}^i \Gamma_{il}^n A_n - \Gamma_{kl}^i \Gamma_{im}^n A_n \right] = \\ &= \frac{1}{2} A_i \Delta f^{lm} \left[\frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial u^m} + \Gamma_{km}^n \Gamma_{nl}^i - \Gamma_{kl}^n \Gamma_{nm}^i \right] \end{aligned}$$

dove il secondo passaggio, in cui si è esplicitato A_i , è stato ottenuto scambiando tra loro gli indici muti i ed n nei termini con i prodotti delle connessioni affini. La quantità in parentesi graffa è un tensore, poiché lo sono A_i , Δf^{lm} e ΔA_k (differenza di due vettori applicati allo stesso punto). Ad essa si da il nome di **tensori di Riemann - Christoffel o tensori di curvatura**:

$$R_{klm}^i = \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial u^m} + \Gamma_{km}^n \Gamma_{nl}^i - \Gamma_{kl}^n \Gamma_{nm}^i$$

Nota bene: talvolta lo si trova definito con i segni scambiati

Se in un punto, o una zona di spazio, $R_{klm}^i = 0$, allora $\Delta A_k = 0$: il trasporto parallelo lungo una curva chiusa lascia il vettore inalterato, e la zona di spazio si dice **piatta**.

Questo accade in uno spazio Euclideo, come anche in qualunque (zona di) spazio in cui g_{ij} sia costante, poiché le connessioni affini sono nulle e così pure il tensore di curvatura; e poiché un tensore uguale a zero in un sistema di coordinate rimane nullo in qualunque sistema di coordinate, allora $R_{klm}^i = 0$ in qualunque sistema di riferimento. Se invece $R_{klm}^i \neq 0$ il trasporto parallelo dipende dal percorso, e lo spazio (o la zona di spazio) si dice, per contrasto, curvo (da qui in nome di tensore di curvatura).

6

Lecture 28/03/2025

Proprietà di un tensore di curvatura

Si può dimostrare che R_{klm}^i è l'unico tensore che può essere costruita dal tensore metrico e dalle sue derivate prime e seconde, e che è lineare nelle derivate seconde (e anche quadratico nelle derivate prime). Del tensore metrico si può scrivere la forma totalmente covariante $R_{jklm} = g_{ji}R_{klm}^i$.

...

$$R_{klm;j}^i + R_{kmj;l}^i + R_{kjl;m}^i = 0$$

Questa è detta ***identità di Bianchi***. Ricordiamo che, anche se l'abbiamo ricavata nel sistema localmente euclideo, essendo una relazione tensoriale, essa vale in tutti i sistemi di riferimento.

Possiamo anche abbassare l'indice controvariante con il tensore metrico e otteniamo:

$$R_{ijkl;m} + R_{ijml;k} + R_{ijlk;m} = 0$$

Il tensore di Riemann presenta delle proprietà, vediamole nella versione completamente covariante $R_{jklm} = g_{ji}R_{klm}^i$:

- **Simmetria:**

$$R_{jklm} = R_{lmjk}$$

- **Antisimmetria:**

$$R_{jklm} = -R_{kilm} = -R_{jkml} = R_{kjml}$$

- **Ciclicità:**

$$R_{jklm} + R_{klmj} + R_{lmjk} = 0$$

Dal tensore di Riemann, per contrazione, si può ricavare un tensore di rango 2, il tensore di Ricci, definito come:

$$R_{km} = R_{kim}^i$$

Il tensore di Ricci è simmetrico:

$$R_{mk} = R_{mik}^i = g^{ir}R_{rmik} = g^{ir}R_{ikrm} = R_{krm}^r = R_{km}$$

Esso è l'unico tensore simmetrico di rango 2 che si può ottenere da R_{klm}^i . Dal tensore di Ricci si ricava lo ***scalare di Ricci o scalare di curvatura***:

$$R = g^{km}R_{km}$$

Esso è il solo scalare che si può ottenere da R_{klm}^i .

Le proprietà sopra evidenziate del tensore di Riemann fanno sì che, in N dimensioni, il numero delle sue componenti indipendenti sia:

$$\mathcal{N} = \frac{N^2(N^2 - 1)}{12}$$

In particolare:

$$R_{11} = R'_{1l1} = g^{11}R_{1111} + g^{11}R_{1121} + g^{21}R_{2111} + g^{22}R_{2121} = g^{22}R_{1212}$$

$$R_{12} = R_{21} = \dots = -g^{21}R_{1212}$$

$$R_{22} = \dots = g^{11}R_{1212}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} R &= g^{11}g^{22}R_{1212} - 2g^{12}g^{21}R_{2121} + g^{22}g^{11}R_{1212} \\ &= 2R_{1221}(g^{11}g^{22} - g^{12}g^{21}) \\ &= 2R_{1221} \det g^{ij} \end{aligned}$$

- Per $N = 1, \mathcal{N} = 0$ ed $R_{1111} \equiv 0$ sempre: una curva ha sempre curvatura (intrinseca) nulla, non ho informazioni su come la curva è "embedded" in uno spazio a 2 o più dimensioni.
- Per $N = 2, \mathcal{N} = 1$. C'è un'unica componente indipendente, ad esempio R_{1212} .
- Per $N = 3, \mathcal{N} = 6$. tante quante sono le componenti del tensore di Ricci (simmetrico). Quindi per $N = 3$ basta conoscere R_{km} per descrivere la curvatura dello spazio.
- Per $N = 4, \mathcal{N} = 20$, mentre R_{km} ha 10 componenti soltanto. È necessario ricorrere al tensore R^i_{klm} completo (a parte situazioni di particolare simmetria, e vedremo che così sarà nel caso dell'universo isotropo ed omogeneo).

Dall'identità di Bianchi, nella forma covariante, sfruttando le proprietà di antisimmetria del tensore di Riemann, si ha:

$$\begin{aligned} R_{iklm;j} - R_{kimj;l} - R_{iklj;m} &= 0 \\ g^{km}R^l_{klm;j} - g^{il}R^m_{imj;l} - g^{km}R^l_{klj;m} &= 0 \end{aligned}$$

cioè:

$$g^{km}R_{km;j} - g^{il}R_{ij;l} - g^{km}R_{kj;m} = 0$$

da cui:

$$R_{;j} - R^l_{j;l} - R^m_{j;m} = R_{;j} - 2R^l_{j;l} = 0$$

dalla quale si ha:

$$R^l_{j;l} = \frac{1}{2}R_{;j} = \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial u^j}$$

dove l'ultimo passaggio è dovuto al fatto che R è uno scalare, non dipende quindi dal sistema di riferimento usato, e la sua derivata covariante coincide con la semplice derivata parziale. La quantità $R^l_{j;l}$ rappresenta la divergenza (covariante) del tensore di Ricci. Consideriamo ora il tensore misto:

$$R^l_j - \frac{1}{2}\delta^l_j R$$

La sua divergenza sarà (per la regola della derivazione di un prodotto ed essendo $\delta^l_{j;l} = 04$):

...

$$g_{il}R^l_j - \frac{1}{2}g_{il}\delta^l_j R = R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R \equiv G_{ij}$$

dove G_{ij} è detto **tensore di Einstein**. Questo tensore ha importantissime proprietà: è simmetrico, ha divergenza nulla e, derivando dal tensore di Riemann, contiene termini lineari nelle derivate seconde della metrica e quadratici nelle sue derivate prime.

7

Relatività Generale

...

L'equazione delle geodetiche è sempre:

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0$$

se la metrica è data da $\eta_{\alpha\beta}$, allora i $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ osno nulli e resta $d^2x^\alpha/ds^2 = 0$, cioè $x^\alpha = a^\alpha \cdot s + b^\alpha$, ovvero:

$$\begin{cases} ct = a^0 \cdot s + b^0 \\ \bar{x} = \bar{a} \cdot s + \bar{b} \end{cases}$$

e la traiettoria è una retta percorsa di moto rettilineo uniforme.

Tensore energia-impulso

Vogliamo ora descrivere le proprietà gravitazionali di un fluido

Consideriamo un fluido in cui l'unica forza presente è quella gravitazionale. Chiamiamo tale fluido "polvere" (dust).

Le due quantità che ci interessano sono densità e velocità.

Il tensore più semplice che possiamo pensare che descriva tali quantità è il **tensore energia-impulso**:

$$T^{\alpha\beta} = \rho_0 c^2 u^\alpha u^\beta$$

Nel dettaglio abbiamo:

$$T^{00} = \rho_0 c^2 \gamma^2 = \gamma^2 \rho_0 c^2 = \rho c^2 \quad \text{posto } \rho = \gamma^2 \rho_0$$

Per interpretare questo risultato ricordiamo che la massa è $m = \gamma m_0$ (con m_0 massa a riposo) e che un elemento di volume in moto appare contratto di un fattore $1/\gamma$, per cui la densità cresce di un ulteriore fattore γ .

Perciò, se la densità propria è ρ_0 , un osservatore rispetto al quale il fluido ha velocità \bar{v} misurerà una densità $\gamma^2 \rho_0$.

T^{00} misura quindi la densità di massa-energia (qui l'unico contributo all'energia viene dal moto della materia).

Le componenti di $T^{\alpha\beta}$ sono:

$$T^{\alpha\beta} = \rho c^2 \cdot \begin{matrix} 1 & v_x/c & v_y/c & v_z/c \\ v_x/c & v_x^2/c^2 & v_x v_y/c^2 & v_x v_z/c^2 \\ v_y/c & v_x v_y/c^2 & v_y^2/c^2 & v_y v_z/c^2 \\ v_z/c & v_x v_z/c^2 & v_y v_z/c^2 & v_z^2/c^2 \end{matrix}$$

Vediamo come le equazioni del moto possono essere ricavate in modo sintetico come $\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$

- Per $\alpha = 0$ si ha $\partial_\beta T^{0\beta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial T^{0\beta}}{\partial x^\beta} = 0$, che scritta per esteso:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial(\rho c^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho cv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho cv_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho cv_z)}{\partial z} = 0$$

che si può semplificare in:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0$$

(dove \bar{v} è la velocità totale) cioè l'equazione di continuità per un fluido, che esprime la conservazione della massa-energia.

- Per $\alpha = 1, 2, 3$ si ha:

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial(\rho cv_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho cv_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho cv_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho cv_x v_z)}{\partial z} = 0 & (\alpha = 1) \\ \frac{1}{c} \frac{\partial(\rho cv_y)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho cv_y v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho cv_y v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho cv_y v_z)}{\partial z} = 0 & (\alpha = 2) \\ \frac{1}{c} \frac{\partial(\rho cv_z)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho cv_z v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho cv_z v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho cv_z v_z)}{\partial z} = 0 & (\alpha = 3) \end{cases}$$

moltipichiamo le tre equazioni per i versori $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ e sommiamo membro a membro:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z \bar{v}) = 0$$

che, sviluppando e usando poi l'equazione di continuità, si riduce a:

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) \right] + \rho v_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \rho v_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = 0$$

cioè:

$$\underbrace{\rho \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} \right]}_{(I)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\rho \frac{d \bar{v}}{dt}}_{(II)} = 0$$

Questa relazione, tipica della fluidodinamica, rappresenta l'equazione del moto per un fluido senza pressione, viscosità e forze esterne.

...

8

Lecture 01/04/2025

...

In un **sistema inerziale localmente in quiete (SILQ)** rispetto al fluido, nel quale quindi $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$, $T^{\alpha\beta}$ ha la forma particolarmente semplice:

$$T_{SILQ}^{\alpha\beta} = \rho_0 c^2 u^\alpha u^\beta = \begin{pmatrix} \rho_0 c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Veniamo adesso a considerare il caso in cui le particelle interagiscono nel modo più semplice, cioè attraverso urti dovuti all'agitazione termica: è presente una pressione del fluido. Assumiamo che non vi sia trasporto di energia per conduzione o irraggiamento e non vi sia viscosità. Il fluido così definito è detto perfetto

...

$$T_{SILQ}^{\alpha\beta} = \rho_0 c^2 u^\alpha u^\beta = \rho_0 c^2 \begin{pmatrix} 1 & \langle v_x \rangle / c & \langle v_y \rangle / c & \langle v_z \rangle / c \\ \langle v_x^2 \rangle / c^2 & \langle v_x v_y \rangle / c^2 & \langle v_x v_z \rangle / c^2 \\ \langle v_y^2 \rangle / c^2 & \langle v_y v_z \rangle / c^2 & \langle v_z^2 \rangle / c^2 \end{pmatrix} = \rho_0 c^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

...

$$T_{SILQ}^{\alpha\beta} = (p + \rho c^2) u^\alpha u^\beta - p \eta^{\alpha\beta}$$

...

Example: Conservazione dell'entropia per particella

Vediamo ora di ricavare, come detto poco sopra, una relazione scalare dalla $\partial_\beta T^{\alpha\beta}$; per fare questo la moltiplicheremo per u_α .

Partiamo dal fatto che, come abbiamo già visto, $u^\alpha u_\alpha = 1$. Sarà quindi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (u^\alpha u_\alpha) &= u^\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} + u_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \\ &= \eta^{\alpha\gamma} u_\gamma \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} + u_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \\ &= u_\gamma \frac{\partial u^\gamma}{\partial x^\beta} + u_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \\ &= 2u_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} = 0 \end{aligned}$$

da cui $\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} = 0$ (abbiamo sfruttato il fatto che α e γ sono indici muti). Se riprendiamo l'equazione che esprime la divergenza di $T^{\alpha\beta}$ e la moltiplichiamo per u_α otteniamo:

$$u_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} [(p + \rho c^2) u^\alpha u^\beta] - \frac{\partial p}{\partial x^\beta} \eta^{\alpha\beta} u_\alpha = 0$$

e, sviluppando la derivata del primo termine, abbiamo:

$$u_\alpha \left\{ u^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} [(p + \rho c^2) u^\beta] + (p + \rho c^2) u^\beta \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \right\} - \partial p \partial x^\beta u^\beta = 0$$

Se ricordiamo che $u^\alpha u_\alpha = 1$ e che $\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} = 0$ possiamo scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} [(p + \rho c^2) u^\beta] - u^\beta \frac{\partial p}{\partial x^\beta} = 0$$

$$(p + \rho c^2) \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta} + u^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} (p + \rho c^2) - u^\beta \frac{\partial p}{\partial x^\beta} = 0$$

Dalla conservazione del numero di particelle abbiamo

$$\frac{\partial (n u^\beta)}{\partial x^\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad n \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta} + u^\beta \frac{\partial n}{\partial x^\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta} = - \frac{u^\beta}{n} \frac{\partial n}{\partial x^\beta}$$

Sostituendo quest'ultimo risultato nella precedente relazione e raccogliendo u^β abbiamo:

$$u^\beta \left\{ \frac{\partial (p + \rho c^2)}{\partial x^\beta} - \frac{p + \rho c^2}{n} \frac{\partial n}{\partial x^\beta} - \frac{\partial p}{\partial x^\beta} \right\} = 0$$

...

Ricordiamo ora il primo principio della termodinamica: $dU = dQ + dL$; se introduciamo l'entropia S possiamo scrivere: $TdS = dU + pdV$, dove l'energia interna è $U = \rho c^2$. Se lo riscrivo riferendomi ad una particella, avrò $Td\sigma = d\left(\frac{\rho c^2}{n}\right) + pd(d\frac{1}{n})$, con σ entropia per particella. Sviluppando i differenziali si ha:

$$Td\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial x^\beta} dx^\beta = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\rho c^2}{n} \right) dx^\beta + p \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{1}{n} \right) dx^\beta \quad / \cdot \frac{1}{ds}$$

Se ricordiamo che $\frac{dx^\beta}{ds} \equiv u^\beta$ e confrontiamo questa relazione con la precedente, otteniamo:

$$u^\beta \frac{\partial \sigma}{\partial x^\beta} = 0$$

che, sviluppando, diventa:

$$\gamma \frac{1}{c} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \gamma \frac{v_x}{c} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \gamma \frac{v_y}{c} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \gamma \frac{v_z}{c} \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \sigma = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{d\sigma}{dt}}_{\text{conservazione dell'entropia per particella}} = 0$$

Si ha come risultato che, nel sistema in cui il fluido è in quiete, l'entropia per particella (o, se preferiamo, l'entropia per un certo numero N di particelle contenute in un volume cubico V di spigolo L , che può variare mantenendo però sempre al suo interno lo stesso numero di particelle) è costante. Questo è legato al fatto che, nel fluido ideale, non c'è scambio di energia per conduzione (o irraggiamento), né vi è dissipazione. Dal 1° principio della termodinamica, nel sistema che segue il fluido, $dQ = dU + pdV$ e $U = \rho c^2 \cdot V$, per cui:

$$dQ = \rho c^2 dV + Vd(\rho c^2) + pdV = (p + \rho c^2)dV + Vd(\rho c^2) = Tds$$

Poiché $dQ = 0 \rightarrow ds = 0$

Se scriviamo $p = w\rho c^2$ (con w costante, anche se, più in generale, potrà dipendere dalla temperatura $w = w(T)$),

$$(1+w)\rho c^2 dV = -V d(\rho c^2)$$

e se $w = \text{cost}$, ho $d\rho/\rho = -(1+w)dV/V$, cioè $\rho V^{1+w} = \text{cost}$.

Incontreremo tre casi interessanti in cosmologia:

1. Per un gas non-relativistico $p \ll \rho_0 c^2$ ($\rho \approx \rho_0$) per cui $w \approx 0$ e quindi $\rho_0 V \approx \text{cost}$. Detto L lo spigolo di un volume cubico $V = L^3$, abbiamo $\rho \propto 1/L^3$
2. Per un gas di fotoni $\rho_{\text{rad}} \propto aT^4$ e $p = \frac{1}{3}\rho c^2$; $w = \frac{1}{3}$:

$$T^4 V^{4/3} = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad T \cdot V^{1/3} = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad V \propto L^3 \quad \Rightarrow \quad T \propto \frac{1}{L}$$

$$\rho_{\text{rad}} V^{4/3} = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad V \propto L^3 \quad \Rightarrow \quad V^{4/3} \approx L^4 \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{rad}} \approx \frac{1}{L^4}$$

3. Se $p = -\rho c^2$ ($w = -1$) $\leftarrow \rho V^0 = \text{cost}$, cioè ρ non dipende da V e da L e rimane costante se V varia.

Possiamo riscrivere il primo principio in un'altra forma utile, ponendo $V \propto L^3$:

$$\left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) dC + V d\rho = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \cdot 3L^2 dL + L^3 d\rho = 0$$

da cui:

$$3 \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \frac{dL}{L} + d\rho = 0$$

e, tenendo conto di una dipendenza di L dal tempo:

$$3 \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \frac{dL}{dt} + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Abbiamo scritto $\partial_\alpha T^{\beta\alpha} = 0$ nello spazio di Minkowski; se però $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ non sono tutti nulli, ed in generale sarà così, al posto della derivata parziale semplice si deve utilizzare la derivata covariante:

$$T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$$

che esprime le leggi di conservazione in un sistema di riferimento generico.

9

Lecture: 04/04/2025

9.1 Il principio di Mach

...

9.2 Il principio di equivalenza

L'esperienza che corpi diversi cadono (in assenza di resistenza dell'aria) allo stesso modo per effetto della gravità ha portato a concludere, con grande precisione, che massa inerziale m_{in} e massa gravitazionale m_{grav} sono tra loro proporzionali (e in pratica uguali, facendo rientrare entro la costante di gravitazione G la costante di proporzionalità). Einstein assunse che, per definizione, $m_{in} \equiv m_{grav}$. Questo porta al famoso esperimento pensato dell'*'ascensore di Einstein'*: se un osservatore, dotato di strumenti scientifici, è rinchiuso in un ascensore e non può quindi vedere cosa accade attorno a lui, non sarà in grado di distinguere, dai suoi esperimenti di meccanica, tra le due situazioni:

- è fermo in un campo gravitazionale con accelerazione di gravità \bar{g} .
- è nello spazio vuoto, e l'ascensore è accelerato verso l'alto con accelerazione costante \bar{g} .

Analogamente, poiché tutto casca allo stesso modo in un campo gravitazionale, l'osservatore non sarà in grado di distinguere tra le situazioni di:

- moto rettilineo uniforme nel vuoto
- moto accelerato (caduta libera) in un campo gravitazionale.

Questo ci permette di dire quali sono i sistemi localmente inerziali: quelli in caduta libera. Quindi in un sistema in caduta libera valgono localmente (e al prim'ordine in $g_{\alpha\beta}$) le leggi della Relatività Ristretta. Il Principio di Equivalenza richiede che tutte le leggi della fisica (non solamente quelle della Meccanica) siano le stesse sia in un sistema localmente inerziale, sia nella Relatività Ristretta. Il fatto che gli effetti della gravitazione scompaiano in un sistema in caduta libera, fa sì che i fenomeni che vi avvengono sono completamente indipendenti dalla presenza di masse vicine. Secondo il punto di vista di Mach, invece, una grossa massa vicina dovrebbe introdurre una anisotropia della massa inerziale. Effetti dovuti al Sole o alla nostra Galassia sono stati ricercati, ma non trovati entro $\Delta m/m \sim 10^{-20}$, per cui il principio di equivalenza sembra favorito rispetto alle ipotesi di Mach (che quindi non sono completamente coerenti con la Relatività Generale, a parte l'ispirazione fornita ad Einstein)

9.3 Il principio di covarianza generale

...

9.4 Le equazioni di Einstein

...

9.5 Il limite newtoniano - campo debole (weak field)

Scritte le equazioni di Einstein, occorre verificare che, nel limite di validità della fisica classica, esse si riducono alla legge di Newton; dobbiamo anche vedere quanto vale la costante κ che compare nelle equazioni.

Supponiamo che il campo sia stazionario (cioè la sua derivata temporale sia nulla), che le velocità delle particelle siano piccole ($v \ll c$) e che, a grandi distanze dalle masse che generano il campo, il tensore metrico sia asintoticamente piatto: $g_{\alpha\beta} \rightarrow \eta_{\alpha\beta}$. Supponiamo inoltre che il campo sia debole: cioè che gli scostamenti dalla metrica $\eta_{\alpha\beta}$ siano piccoli:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad \text{con } |h| \ll 1$$

Poiché $v/c \ll 1$ sarà:

$$\begin{aligned} \frac{dx^0}{ds} &= \frac{cdt}{cd\tau} = \frac{dt}{d\tau} \\ \frac{dx^i}{ds} &= \frac{d\bar{x}^i}{cd\tau} = \frac{1}{c} \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{v^i}{c} \frac{dt}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau} \equiv \frac{dx^0}{ds} \end{aligned}$$

L'equazione delle geodetiche sarà, come al solito,

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0$$

ma, per α fissato, nella somma sugli indici β e γ , i termini in cui compaiono i dx^i/ds sono trascurabili rispetto al termine con dx^0/ds , per cui possiamo scrivere:

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{00}^\alpha \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 = \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{00}^\alpha \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \simeq 0$$

Con l'assunzione che $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ ($h \ll 1$) vediamo come calcolare $g^{\alpha\beta}$. Sappiamo che, per definizione, $g_{\alpha\delta} g^{\delta\beta} \equiv \delta_\alpha^\beta$ e che $\eta_{\alpha\delta} \eta^{\alpha\beta} \equiv \delta_\delta^\beta$.

Definiamo la quantità $h^{\gamma\delta} \equiv \eta^{\gamma\alpha} \eta^{\beta\delta} h_{\alpha\beta}$. Mostriamo che:

$$(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})(\eta^{\alpha\beta - h^{\alpha\beta}}) = \delta_\alpha^\delta$$

Sviluppando il termine a sinistra, e trascurando i termini del secondo ordine in h ,

$$\begin{aligned} (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})(\eta^{\alpha\beta - h^{\alpha\beta}}) &= \eta_{\alpha\beta} \eta^{\beta\delta} - \eta_{\alpha\beta} h^{\beta\delta} + h_{\alpha\beta} \eta^{\beta\delta} - h_{\alpha\beta} h^{\beta\delta} = \\ &= \delta_\alpha^\delta - \eta_{\alpha\beta} \eta^{\beta\sigma} \eta^{\delta\tau} h_{\sigma\tau} + h_{\alpha\beta} \eta^{\beta\delta} = \delta_\alpha^\delta \end{aligned}$$

Infatti $\eta_{\alpha\beta} \eta^{\beta\sigma} \equiv \delta_\alpha^\sigma$, $\delta_\alpha^\sigma h_{\sigma\tau} = h_{\alpha\tau}$, e $\eta^{\delta\tau} h_{\alpha\tau} \equiv h_\alpha^\beta \eta^{\delta\beta}$, poiché τ è un indice muto e posso chiamarlo β . Vedo quindi che $\eta^{\beta\delta} - h^{\beta\delta} = g^{\beta\delta}$.

Calcoliamo Γ_{00}^α (ricordiamo che la stazionarietà implica che le derivate rispetto a x^0 sono nulle):

$$\Gamma_{00}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{0\gamma}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\gamma}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\gamma} \right) = \frac{1}{2} (\eta^{\alpha\gamma} - h^{\alpha\gamma}) \left(-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\gamma} \right) \simeq -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\gamma} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\gamma}$$

Al primo ordin in h , quindi:

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} \simeq -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\gamma} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\gamma} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2$$

- Se $\alpha = 0$, ottengo:

$$\frac{d^2x^0}{ds^2} = -\frac{1}{2} \eta^{00} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dx^0}{ds} = \frac{dt}{d\tau} = \text{costante}$$

- Se $\alpha = i$, ottengo:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{d^2x^i}{c^2 d\tau^2} = \frac{1}{c^2} \frac{dt}{d\tau} \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{dt}{d\tau} \frac{dx^i}{dt} \right] = \frac{1}{c^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{d^2x^i}{dt^2}$$

Per cui,

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{d^2x^i}{dt^2} \simeq \frac{1}{2} \eta^{i\gamma} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\gamma} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \quad (\eta^{i\gamma}) = -1 \text{ per } \gamma = i$$

cioè:

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2x^i}{dt^2} \simeq -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \quad \text{vettorialmente:} \quad \frac{1}{c^2} \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} \simeq -\frac{1}{2} \bar{\nabla} h_{00}$$

Ma secondo la gravità newtoniana, indicando con Φ il potenziale gravitazionale, abbiamo:

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = -\bar{\nabla}\Phi$$

e, confrontando i due risultati, otteniamo:

$$-\bar{\nabla}\Phi \simeq -\frac{c^2}{2} \bar{\nabla} h_{00} \quad \rightarrow \quad h_{00} \simeq \frac{2\Phi}{c^2} + \text{cost.}$$

Ma, se a grandi distanze dalle masse sorgenti del campo, $\Phi \rightarrow 0$ e $h_{00} \rightarrow 0$, pure perchè assumiamo che $g_{\alpha\beta} \rightarrow \eta_{\alpha\beta}$, segue che $\text{cost.} = 0$, cioè:

$$h_{00} \simeq \frac{2\Phi}{c^2} \quad \rightarrow \quad g_{00} \simeq 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$$

L'ipotesi di campo debole, $|h| \ll 1$, implica quindi che sia $2\Phi/c^2 \ll 1$.

Nel caso di una massa M in cui la densità è distribuita con simmetria sferica, il potenziale esterno è dato da $\Phi = -GM/r$ secondo Newton. L'ipotesi che il campo sia debole implica quindi che $|2\Phi/c^2| \ll 1$, cioè:

$$\frac{2GM}{rc^2} \ll 1$$

Per un buco nero o un corpo generico sferico, $R_S \equiv 2GM/c^2$ è il cosiddetto ***raggio di Schwarzschild***, corrispondente, per un buco nero non rotante ed elettricamente neutro, all'***orizzonte degli eventi***, la zona dalla quale nulla può uscire (prescindendo da effetti quantistici di evaporazione). In questo caso vedo che la condizione di campo debole è che

$$\frac{R_S}{r} \ll 1 \quad \rightarrow \quad r \gg R_S$$

Per il nostro sole, $R_S \sim 3\text{km}$.

Vediamo ora, con le stesse assunzioni fatte sopra, che le equazioni di Einstein si riducono all'equazione di Poisson $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho_0$ e determiniamo la costante κ . Il tensore di curvatura è:

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \frac{\partial\Gamma_{\beta\delta}^\alpha}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial x^\delta} + \Gamma_{\beta\delta}^\sigma \Gamma_{\sigma\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \Gamma_{\sigma\delta}^\alpha \simeq \frac{\partial\Gamma_{\beta\delta}^\alpha}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial x^\delta} \quad (\text{gli altri termini sono } O(h^2))$$

I simboli di Christoffel sono:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left(\frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\sigma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\sigma} \right) \simeq \frac{1}{2} \eta^{\alpha\sigma} \left(\frac{\partial h_{\beta\sigma}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial h_{\gamma\sigma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial x^\sigma} \right) \quad (\text{allo } O(h))$$

Il tensore di Ricci si ottiene da $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ contraendo il primo e il terzo indice:

$$\begin{aligned} R_{\beta\delta} &= R_{\beta(\gamma=\alpha)\delta}^\alpha = \frac{\partial\Gamma_{\beta\delta}^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial x^\delta} = \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\alpha\sigma} \dots \end{aligned}$$