微分几何

xxx

2024 年 5 月 17 日

hello！LaTeX

目录

1　空间曲线

1.1　对象

曲线 C：$\vec{r}=\vec{r}(s)$，s 为弧长参数

单位切向量：$\vec{\alpha}(s)=\dot{\vec{r}}(s)$，$\dot{\vec{\alpha}}(s)\perp\vec{\alpha}(s)$；切线：$\vec{\rho}=\vec{r}(s)+\lambda\vec{\alpha}(s)$

主法向量：$\vec{\beta}(s)=\frac{\dot{\vec{\alpha}}(s)}{|\dot{\vec{\alpha}}(s)|}=\frac{\ddot{\vec{r}}}{|\ddot{\vec{r}}|}$；主法线：$\vec{\rho}=\vec{r}(s)+\beta\vec{\alpha}(s)$

副法向量：$\vec{\nu(s)}=\vec{\alpha}(s)\times\vec{\beta}(s)$；副法线：$\vec{\rho}=\vec{r}(s)+\lambda\vec{\nu}(s)$

法平面：$(\vec{\rho}-\vec{r}(s))\vec{\alpha}(s)=0$

从切平面：$(\vec{\rho}-\vec{r}(s))\vec{\beta}(s)=0$

密切平面：$(\vec{\rho}-\vec{r}(s))\vec{\nu}(s)=0$

1.2　泛函

曲率挠率得定义为

$$\begin{cases}\kappa(s)=|\ddot{\vec{r}}(s)| & \text{曲率}\\ \tau(s)=-\dot{\vec{v}}\cdot\vec{\beta}(s) & \text{挠率}\end{cases}$$

曲率挠率得一般计算方法

$$\kappa=\frac{|\vec{r'}\times\vec{r''}|}{|\vec{r'}|^3}$$

$$\tau=\frac{(\vec{r'},\vec{r''},\vec{r'''})}{|\vec{r'}\times\vec{r''}|^2}$$

1.3　标架

Frent 公式

$$\begin{pmatrix}\vec{\alpha}\\ \vec{\beta}\\ \vec{\nu}\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}0&\kappa&0\\ -\kappa&0&\tau\\ 0&-\tau&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\alpha}\\ \vec{\beta}\\ \vec{\nu}\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{cases}\dot{\vec{\alpha}}=\kappa\vec{\beta}\\ \dot{\vec{\beta}}=-\kappa\vec{\alpha}+\tau\vec{nu}\\ \dot{\vec{\nu}}=-\tau\vec{\beta}\end{cases}$$

Frent 标架 $\{\vec{r}(s);\vec{\alpha}(s),\vec{\beta}(s),\vec{\nu}(s)\}|_{s=s_0}$

2 空间曲面

2.1 测地曲率

Gauss 公式、C-M 公式（$F=M=0$）

$$\begin{cases} K = \frac{-1}{\sqrt{EG}}\{[\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}]_u + [\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}]_v\} \\ L_v = HE_v \\ N_u = HG_u \end{cases}$$

其中 $K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}, H=\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}$

测地线方程 ($F=0$)

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{(\ln E)_v}{2\sqrt{G}}\cos\theta - \frac{(\ln G)_u}{2\sqrt{E}}\sin\theta \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{E}} \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{G}} \end{cases}$$

其中 θ 为曲线与 $u-$ 曲线的夹角

联络系数：

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l})$$

3 例题

例 3.1. *1.* 求曲线 $C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2=x \end{cases}$，$z\geq 0$ 的参数方程。

2. 求该曲线在 $(0,0,1)$ 处的曲率，κ 挠率 τ，该处的 *Frent* 标架等。

3. 求该曲线在 $(0,0,1)$ 处的的副法线，法平面

解. 1. 因为 $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=(\frac{1}{2})^2$，令 $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos u, y=\frac{1}{2}\sin u, z=v$ 代入球面 $x^2+y^2+z^2=1$

得 $v=\sin\frac{u}{2}$，所以 $\vec{r}(u)=(\frac{1+\cos u}{2},\frac{\sin u}{2},\sin\frac{u}{2})$

令 $u=2t$，所以 $\vec{r}(t)=(\cot^2 t,\sin t\cos t,\sin t)\Rightarrow(0,0,1)$（其中 $t=\frac{\pi}{2}$）

2. 点 $(0,0,1)$ 处对应 $t=\frac{\pi}{2}$ 故

$$\vec{r}'(t)=(2\cos t\cdot(-\sin t),\cos^2 t-\sin^2 t,\cos t)=\vec{r}'(t)=(-\sin 2t,\cos 2t,\cos t)$$

$$\vec{r}''(t)=(-2\cos 2t,-2\sin 2t,-\sin t)$$

$$\vec{r}'''(t)=(4\sin 2t,-4\cos 2t,-\cos t)$$

则

$$\vec{r}'(\frac{\pi}{2})=(0,-1,0)$$

$$\vec{r}''(\frac{\pi}{2})=(2,0,-1)$$

$$\vec{r}'''(\frac{\pi}{2})=(0,4,0)$$

$$|\vec{r}'(\frac{\pi}{2})\times\vec{r}''(\frac{\pi}{2})|=\sqrt{5}$$

$$|\vec{r}'(\frac{\pi}{2})|^3=1$$

故曲线 C 在 $(0,0,1)$ 处的曲率，挠率为：

$$\kappa|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}|_{t=\frac{\pi}{2}}=\sqrt{5}$$

$$\tau|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{(\vec{r}'(t),\vec{r}''(t),\vec{r}'''(t))}{|\vec{r}(t)\times\vec{r}''(t)|^2}|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{0}{5}=0$$

$$\vec{\alpha}(\frac{\pi}{2})=\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}|_{t=\frac{\pi}{2}}=(0,-1,0)$$

$$\vec{\nu}(\frac{\pi}{2})=\frac{\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}|_{t=\frac{\pi}{2}}=(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}})$$

$$\vec{\beta}(\frac{\pi}{2})=\vec{\nu}(\frac{\pi}{2})\times\vec{\alpha}(\frac{\pi}{2})=(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{-1}{\sqrt{5}})$$

故曲线 C 在点 $(0,0,1)$ 处的 Frent 标架为 $(\vec{r}(0),\vec{\alpha}(\frac{\pi}{2}),\vec{\beta}(\frac{\pi}{2}),\vec{\nu}(\frac{\pi}{2}))$，其中 $\vec{r}(0)=(0,0,1)$

3. 过点 $(0,0,1)$ 的副法线：$\vec{\rho}=(0,0,1)+(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}})\lambda,\lambda\in\mathbb{R}$

即

$$\begin{cases}x=\lambda\\ y=0\\ z=1+2\lambda\end{cases}=\begin{cases}y=0\\ z=1+2x\end{cases},\lambda\in\mathbb{R}$$

过点 $(0,0,1)$ 的切线：$\vec{\rho}=(0,0,1)+(0,-1,0)\lambda,\lambda\in\mathbb{R}$

过点 $(0,0,1)$ 的法平面：$(\vec{\rho}-(0,0,1))\cdot(0,-1,0)=0$，不妨设 $\vec{\rho}=(x,y,z)$，则法平面化简为 $y=0$

过点 $(0,0,1)$ 的切平面：$(\vec{\rho}-(0,0,1))\cdot(2,0,-1)=0$

过点 $(0,0,1)$ 的密切平面：$(\vec{\rho}-(0,0,1))\cdot(1,0,2)=0$

□

例 3.2. *1. 求在 XOY 平面中，悬链线 $y=\cosh z$ 绕 z 轴旋转一周后得到的悬链面参数方程（注：双曲余弦函数 $\cosh x\triangleq\frac{\exp^x+\exp^{-x}}{2}$）；*

2. 求悬链面的第一、二基本形式；

3. 求悬链面的主曲率、单位主方向、Gauss 曲率、平均曲率；

4. 求悬链面上测地线方程（可含积分表达），并写出两条具体不平行的测地线；

5. 悬链面与平面能否建立等距变换，为什么？

解. 1. $\vec{r}(u,v)=(u,\cosh u\cos v,\cosh u\sin v),u\in\mathbb{R},v\in[0,2\pi)$

2. $I=\cosh^2 u(du^2+dv^2)$，$II=-du^2+dv^2$

3. 令

$$\left|\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}-k\begin{pmatrix}\cosh^2 u&0\\0&\cosh^2 u\end{pmatrix}\right|=0$$

$k_1=\frac{1}{\cosh^2 u},k_2=\frac{1}{\cosh^2 u}$，$K=k_1\cdot k_2=\frac{-1}{\cosh^4 u}$，$H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)=0$

由

$$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_i\\\beta_i\end{pmatrix}=k_i\begin{pmatrix}\cosh^2 u&0\\0&\cosh^2 u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_i\\\beta_i\end{pmatrix},(i=1,2)$$

得

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\\beta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\Longrightarrow\vec{e_1}=\frac{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right|}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\cosh u}\end{pmatrix}=\frac{\vec{r_v}}{\cosh u}=(0,-\sin v,\cos v)$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow \vec{e_2}=\frac{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\cosh u}\\0\end{pmatrix}=\frac{\vec{r_u}}{\cosh u}=(\frac{1}{\cosh u},\tanh u\cos v,\tanh u\sin v)$$

$$|\vec{r_v}|^2=\vec{r_v}\cdot\vec{r_v}=G=\cosh^2 u$$

$$\vec{r_v}=(0,\cosh u(-\sin v),\cosh u(-\cos v))$$

4.

5. 不能。因为悬链面的 Gauss 曲率 $K<0$，而平面的 Gauss 曲率 $\equiv 0$，由 Gauss 绝妙定理，不可能建立等距变换

□

例 3.3. 是否存在光滑曲面，使得它的第一、二基本形式分别为下面两个二次型

$$I=(u^2+1)du^2=u^2dv^2, II=\frac{du^2+u^2dv^2}{\sqrt{u^2+1}}$$

若不存在该曲面，请说明理由；若存在，也请说明理由，并写出曲面的一个参数方程。

解. 存在。$E=u^2+1,F=0,G=u^2,L=\frac{1}{\sqrt{u^2+1}},M=0,N=\frac{u^2}{\sqrt{u^2+1}}$

验证 Gauss 公式

$$K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\{(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}})_u+(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}})_v\}$$

其中，$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$

左式：

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{\frac{u^2}{u^2+1}}{u^2(u^2+1)}$$

右式：

$$-\frac{1}{\sqrt{EG}}\{(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}})_u+(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}})_v\}=-\frac{1}{u\sqrt{u^2+1}}(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}})_u=\frac{1}{(u^2+1)^2}$$

所以 Gauss 公式成立

再验证 C-M 公式

$$L_v=HE_v,N_u=HG_u,H=\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}$$

所以 C-M 公式也成立

综上，由曲面基本定理，满足需求的曲面存在。 □

例 3.4. 证明光滑曲面 $\vec{r}=\vec{r}(u^1,u^2)$ 满足下面两个恒等式：

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k}=-g^{im}g^{jn}\frac{\partial g_{mn}}{\partial u^k},i,j,k=1,2$$

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k}=-g^{mi}\Gamma^i_{mk}-g^{mj}\Gamma^j_{mk},i,j,k=1,2$$

$$\frac{\partial\ln\sqrt{g}}{\partial u^k}=\sum_{i=1}^{2}\Gamma^i_{ik}=\Gamma^1_{1k}+\Gamma^2_{2k}$$

其中：$g=g_{11}g_{22}-g_{12}^2$，g_{ij} 为曲面第一基本量，g^{ij} 表示 g_{ij} 的逆和矩阵，Γ^k_{ij} 为联络系数，定义见试题公式（C)。上述写法采用了 *Einstein* 记号。

证明. 1. 左式：

$$asd$$

右式：

$$asd$$

2. 左式：

$$=-g^{im}g^{in}\frac{\partial g_{mn}}{\partial u^k}$$

右式：

$$\begin{aligned}&=-g^{mj}[\frac{1}{2}g^{il}(\frac{\partial g_{ml}}{\partial u^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^m}-\frac{\partial g_{mk}}{\partial u^l})]-g^{li}[\frac{1}{2}g^{jm}(\frac{\partial g_{ml}}{\partial u^k}+\frac{\partial g_{km}}{\partial u^l}-\frac{\partial g_{lk}}{\partial u^m})]\\&=-g^{mj}g^{il}\frac{\partial g_{ml}}{\partial u^k}\\&=-g^{nj}g^{im}\frac{\partial g_{nm}}{\partial u^k}\end{aligned}$$

由此证明第二个结论成立。

3. 左式：

$$asd$$

右式：

$$asd$$

由此证明第三个结论成立。

□

例 3.5. 设曲面 $S:\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ 存在半测地坐标网，使得 $I=du^2+G(u,v)dv^2$，其中：函数 $G(0,v)=1,G_u(0,v)=0$。求证：

$$G(u,v)=1-K(0,v)u^2+o(u^2)$$

其中：函数 $K(0,v)$ 表示曲面 S 在 $(0,v)$ 处的 $Gauss$ 曲率。

证明. 在半侧地坐标网下：

$$E=1,F=0,G=G(u,v)$$

所以

$$\begin{aligned}
K(u,v)&=\frac{-1}{\sqrt{EG}}\{[\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}]_u+[\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}]_v\}\\
&=\frac{-1}{\sqrt{G}}\cdot(\sqrt{G}_{uu})\\
&=\frac{-1}{\sqrt{G}}[\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})G^{-\frac{3}{2}}G_u^2+\frac{1}{2}G^{-\frac{1}{2}}G_{uu}]\\
&=\frac{1}{4}G^{-2}-\frac{1}{2}G^{-1}G_{uu}
\end{aligned}$$

从而 $K(0,v)=\frac{1}{4}\frac{G_u(0,v)}{G^2(0,v)}-\frac{1}{2}\frac{G_{uu}(0,v)}{G(0,v)}$

$$\begin{aligned}
K(0,v)&=\frac{1}{4}\frac{G_u(0,v)}{G^2(0,v)}-\frac{1}{2}\frac{G_{uu}(0,v)}{G(0,v)}\\
&=-\frac{1}{2}G_{uu}(0,v)
\end{aligned}$$

由于函数 $G(u,v)$ 光滑，它在 $(0,v)$ 处的 Taylor 展开式为

$$\begin{aligned}
G(u,v)&=G(0,v)+G_u(0,v)u+\frac{G_{uu}(0,v)}{2!}u^2+o(u^2)\\
&=1+0+\frac{1}{2}(-2)K(0,v)u^2+o(u^2)\\
&=1-K(0,v)u^2+o(u^2)
\end{aligned}$$

□

例 3.6. 设曲面上曲线 L 的切向量与曲面的一个主方向夹角为 θ，证明：

$$\int_0^{2\pi}k_n(\theta)d\theta=2\pi H$$

其中 H 为曲面的平均曲率，k_n 为曲线 L 的法曲率

证明. 由 Euler 公式

$$k_n(\theta) = k_1\cos^2(\theta) + k_2\sin^2(\theta)$$

其中 θ 为 L 的切向量与 $\vec{e_1}$ 的夹角

所以

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} k_n(\theta)d\theta &= \int_0^{2\pi} [k_1\cos^2(\theta) + k_2(1-\cos^2)(\theta)] \\
&= \int_0^{2\pi} [k_1\frac{1+\cos 2\theta}{2} + k_2 - k_2\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}]d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} k_2 d\theta + \frac{k_1-k_2}{2}\int_0^{2\pi}(1+cos2\theta)d\theta \\
&= k_2\cdot 2\pi + \frac{k_1-k_2}{2}[2\pi + \frac{1}{2}\sin 2\theta|_0^{2\pi}] \\
&= 2k_2\pi + \pi(k_1-k_2) \\
&= 2\pi\cdot\frac{k_1+k_2}{2} \\
&= 2\pi H
\end{aligned}$$

□

例 3.7. 试证曲面 $z = xf(\frac{y}{x})$ 的所有切平面都通过一个定点

证明. 取曲面 $z = xf(\frac{y}{x})$ 上任一点 $P(x_0, y_0, z_0)$（满足 $z_0 = x_0 f(\frac{y_0}{x_0})$）

则

$$\vec{n_p} = (f(\frac{y_0}{x_0}) + x\cdot f'(\frac{y_0}{x_0})(-\frac{y_0}{x_0^2}), x_0 f'(\frac{y_0}{x_0})(\frac{1}{x_0}), -1)$$

故过点 P 的切平面

$$[f(\frac{y_0}{x_0}) - \frac{y_0}{x_0}f'(\frac{y_0}{x_0})](x-x_0) + f'(\frac{y_0}{x_0})\cdot(y-y_0) - (z-z_0) = 0$$

整理

$$[f\cdot\frac{y_0}{x_0}f']x - x_0 f + y_0 f' + f'y - f'y_0 - z + z_0 = 0$$

即

$$[f(\frac{y_0}{x_0}) - \frac{y_0}{x_0}f'(\frac{y_0}{x_0})]x + f'(\frac{y_0}{x_0})y - z = 0$$

显然所有切平面通过定点 $(0,0,0)$ □