线性泛函导论

xxx

2024 年 5 月 17 日

hello！LaTeX

目录

1 前言

空间解析几何是在三维欧氏空间中研究，复杂一点会涉及到仿射几何；高等代数是在有限维线性空间中研究，并通过基来研究线性空间、通过矩阵表示来研究线性映射；数学分析是在欧氏空间中研究，复杂一点会在度量空间中研究，但本科期间一般不会在拓扑空间中研究；抽象代数是通过研究空间与映射的代数结构，来研究其代数性质。这些学科虽然并没有被称为泛函分析，但都与泛函分析有莫大的关联。在泛函中我们会研究无限维空间的分析学、代数学、几何学性质，具体为有界性、连续性、完备性、稠密性、可分性、紧性、开集、闭集、基、内积表示、特征值、投影，闭图像、凸性、延拓等。本科期间的泛函分析主要为线性泛函（只研究线性算子），包括空间（对象的结构）、算子（空间的关系）、泛函（元素的定量分析）的研究。常见的空间有度量空间，赋范线性空间，内积空间，以及特别的 Banach 空间、Helbert 空间；空间算子有线性算子，较特别的为有界线性算子（与连续线性算子等价）、紧算子。常见的泛函有范数等。具有某种性质的个体事物的全体即为一个集合。而描述元素之间关系的则是这个集合的结构，具有结构的集合也被称为空间。空间之间的联系则用算子描述（全体算子也会构成一个新的空间，全体有界线性算子 $B(E,F)$，全体紧算子 $K(E,F)$），若是空间与数域的联系则用更加特殊的算子——泛函描述（空间上的全部线性泛函会构成一个新的空间，称为原空间的对偶空间 E^*）。好的算子应当反应空间的结构，故而空间与算子间有一些常见的搭配：度量空间与连续映射；线性空间与线性映射；赋范线性空间与有界线性算子；Helbert 空间与共轭算子。分析的研究工具为序列，特别的有 Cauchy 列；几何的研究工具为开球，特别的有单位球面；代数的研究工具为基、线性组合、内积表示等。由于泛函分析仍是属于分析学，故而本文的重点在于其分析学的结构，即这里不再将度量空间视为研究对象，而将其视为一种对本书都适用的度量结构。并将带有度量结构的赋范线性空间（特别的有 Banach 空间）、带有度量结构的内积空间（特别的有 Helbert 空间）视为该种结构的具体应用。文中内容基于前人的智慧整理而来。希望对于大家线性泛函的理解有帮助。

2 度量结构

定义 2.1 (度量空间)**.** *度量空间是一个含有对于所有 $x, y, z \in X$ 满足下面三个条件的函数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ 的集合*

1. *三角不等式 $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$*

2. *$d(x,y) = d(y,x)$*

3. *$d(x,y) \ge 0$ 当且仅当 $x = y$ 时，$d(x,y) = 0$*

这里的函数 $d(\cdot,\cdot)$ 被称为距离函数（度量函数）。有时我们记度量空间 X 为 (X,d)。

注 2.1. 度量空间中可以定义开集 A（如果集合 $A\subset X$ 中的点 x，存在 A 中的开球 $B(x,r):=\{z\in X|d(z,x)<r,r>0\}$，则称集合 A 为开集。），并基于开集定义闭集（如果 $A^c=\{x\in X|x\notin A,A\subset X\}$ 为开集，则称集合 A 为闭集）。

易证开球 $B(x,r):=\{z\in X|d(z,x)<r,r>0\}$、全集（$X$）为开集，并规定 $\emptyset$ 为开集。也易证闭球 $\bar{B}(x,r):=\{z\in X|d(z,x)\leq r,r>0\}$，全集（$X$），$\emptyset$ 为闭集。开集 A_α 的无穷并 $\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$ 仍为开集；开集 A_k 的有限交 $\bigcap_{k=1}^m A_k$ 仍为开集；闭集 A_k 的有限并 $\bigcup_{k=1}^m A_k$ 仍为闭集；闭集 A_α 的无穷交 $\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$ 仍为闭集。

可证 A 的内部 $\int A:=\{x\in A|存在开球B(x,r)\subset A,r>0\}$ 为开集，并将点 $x\in\int A$ 称为 A 的内点。可证 A 的闭包 $\bar{A}:=(\int(A^c))^c$ 为闭集，并且 A 为闭集当且仅当 $A=\bar{A}$。特别的，A 的闭包也可由度量空间中的序列定义：$\bar{A}:=\{x\in A|\forall(x_k)\in A,\exists x\in\bar{A},有\ \lim_{k\to\infty}d(x_k,x)=0\}$

注 2.2. 度量空间中可以定义序列 $(x_k)_{k\geq1}$，并简写为 (x_k)。基于度量函数 $d(x,y)$ 可以构造具有特殊性质的序列——*Cauchy* 列（如果 $\lim_{i,j\to\infty}d(x_i,d_j)=0$，则称该序列为 *Cauchy* 列）。不但如此，由度量函数 $d(x,y)$，还可以定义序列收敛（如果 $\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_0)=0$，则该序列有 $\lim_{k\to\infty}x_k=x_0$）。

注 2.3. 度量空间中可以定义完备性（如果对于该度量空间 (X,d) 中任意 *Cauchy* 列都有序列极限，且极限值在该度量空间中，即 $\lim_{(n\to\infty)}d(x_n,x_0)=0$，且 $x_0\in X$）。并且我们可以对每一个度量空间进行完备化（构造等距映射使该度量空间嵌入到一个完备的度量空间中）。完备空间的闭子空间也完备，故而 *Banach* 空间与 *Helbert* 空间的闭子空间仍是 *Banach* 空间与 *Helbert* 空间。完备的闭度量空间中，边界的并不会含有内点（*Baire categary Theorem*），该性质可以推出许多有意思的性质，例如一致有界定理（或称共鸣定理，可用来研究物理学中的共振），又例如开映射定理，又例如闭图像定理（Tx_n 若为闭的，则收敛，在证明算子连续性时有较大作用，可以省略一个步骤），*Hahn-Banach Theorem*（基于线性空间（甚至不需要范数），只要其线性函数可以被控制，则该函数可以被延拓）。

稠密性、可分性

注 2.4. 度量空间中可以定义紧性

1. 相对紧（紧性的必要条件）：对于度量空间 (X,d) 中的子集 K，如果 K 的每一个序列 $(x_k)_{k\geq1}$ 都有收敛子列 $\lim_{i\to\infty}x_{k_i}\to x$，其中 $x\in X$，（不要求子列的极限在子集 K 中），则称子集 K 是预紧的。

2. 列紧的（紧性的充分条件）：对于度量空间 (X,d) 中的子集 K，如果 K 既是预紧的，也是有界的，则子集 K 是紧的。

3. 完全有界的（紧性的必要条件）：对于度量空间 (X,d) 中的子集 K，如果存在大小大小可控的有限个开球的覆盖，即 $\forall\varepsilon>0,\exists有限多个开球B(x_i,\varepsilon),x_i\in K,i\in\{1,2,\cdots,m\},使得\bigcup_{i=1}^m B(x_i,\varepsilon)\supset K$

4. 紧的：任意开覆盖存在有限子覆盖，则为紧的。

注 2.5. 部分度量空间可以范数化的（如果一个赋范线性空间 $(E, \|\cdot\|)$ 中的范数可以诱导出对应的度量 $d(x, y) = \|x - y\|$，则称该度量空间 $(E, d(x, y) = \|x - y\|)$ 是可以范数化的。寻求这种度量空间的最好方法是直接由赋范线性空间构造度量结构，从而成为度量空间，则该度量空间（只看其度量结构，忽视其线性结构与范数结构）必然必然可以被范数化）。从度量空间的角度，这些度量空间具有了线性结构，从而可以研究其代数性质（主要是谱性质，紧算子的特征向量，特征值，特征空间等）；从赋范线性空间的角度看，这些赋范线性空间具有了分析结构（由度量结构可以研究其有界性、极限、完备性、紧性）。其中完备的赋范线性空间为 *Banach* 空间

注 2.6. 部分度量空间可以内积化的（如果一个内积空间中内积可以诱导出相应的范数，而该范数又可诱导出相应的度量函数，则称该度量空间是可以内积化的。寻求这种度量空间的最好方法是直接由内积空间构造范数结构，再构造度量结构，从而成为度量空间，则该度量空间（只看其度量结构，忽视其线性结构与内积结构）必然必然可以被内积化）。从度量空间的角度，这些度量空间具有了线性结构，从而可以研究其代数性质（主要是线性泛函的内积表示，谱性质，紧算子的特征向量，特征值，特征空间等），几何性质（投影，闭图像，闭凸集）；从赋范线性空间的角度看，这些赋范线性空间具有了分析结构（由度量结构可以研究其有界性、极限、完备性、紧性）。完备的内积空间被称为 *Helbert* 空间。

3 赋范线性空间

定义 3.1 (赋范线性空间)**.** 赋范线性空间 E 是一个定义在数域 $\mathcal{F}(=\mathbb{R}or\mathbb{C})$ 上，且含有两个算子，一个泛函的集合。其中：

1. 加法算子（$+ : V + V \to V.$ ）：V 中的加法 $+$ 是一个满足交换律与结合律并含有幺元与逆元的 *Abelian* 群。

2. 数乘算子（$p : \mathcal{F} \times V \to V$）：$V$ 中的数乘 p 是一个满足结合律与分配律的含幺结合代数。

3. 范数泛函（$\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$）：

   (a) 对于所有 $x, y \in E$ 有 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

   (b) 对于每一个 $x \in E, \alpha \in \mathcal{F}$ 有 $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

   (c) $\|x\| \geq 0$，当且仅当 $x = 0$ 时，$\|x\| = 0$

有时我们记赋范线性空间 E 为 $(E, \|\cdot\|)$，或者简写为 $n.v.s.$

注 3.1. 赋范线性空间中的两个算子可以构成线性空间，从而具有代数结构，可以研究简单的代数性质，包括?????????? 我也不知道。而其中的范数则可以诱导出相应的度量，使该赋范线性空间具有第四种结构（由度量函数给予的），从而便于研究其分析学性质，包括完备性、紧性、有界性、连续性等。其中完备的赋范线性空间为 *Banach* 空间

注 3.2. 赋范线性空间中,基于诱导的度量结构,可以定义依范数的收敛(如果 $\lim_{k\to\infty}\|x_k-x_0\|=0$，则称序列 (x_k) 按范数收敛到 x_0)

注 3.3. *Banach* 空间中的谱（*spectrum*）

4 内积空间

定义 4.1. 内积空间内积空间 $\mathcal{H}$ 是一个定义在数域 $\mathcal{F}(=\mathbb{R}or\mathbb{C})$ 上，且含有两个算子和一个双线性函数的集合。

1. 加法算子（$+: V+V\to V.$）：V 中的加法 $+$ 是一个满足交换律与结合律并含有幺元与逆元的 *Abelian* 群。
2. 数乘算子（$p:\mathcal{F}\times V\to V$）：$V$ 中的数乘 p 是一个满足结合律与分配律的含幺结合代数。
3. 双线性函数（$(\cdot,\cdot):\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{R}$）：
   (a) 对称性：对于所有 $u,v\in\mathcal{H}$ 有 $(u,v)=(v,u)$
   (b) 正定性：$(u,u)\geq 0$，当且仅当 $u=0$ 时，$(u,u)=0$
   (c) 第一变量线性：$(\lambda_1u_1u+\lambda_2u_2,v)=\lambda_1(u_1,v)+\lambda_2(u_2,v)$，其中 $u_1,u_2\in\mathcal{H},\lambda\in\mathbb{R}$

具有对称性、正定性、线性性的双线性函数又被称为内积。有时我们记内积空间 $\mathcal{H}$ 为 $(\mathcal{H},(\cdot,\cdot))$，或者简写为 *i.p.s.*

注 4.1. 内积是 $H\times H$ 上的连续函数（$x_n\to x$，$y_n\to y$，有 $(x_n,y_n)\to(x,y)$，表明内积运算与极限运算可交换（极限存在时成立））

注 4.2. 内积空间中存在 *Cauchy-Schwarz* 不等式（$(u,v)\leq(u,u)^{\frac{1}{2}}(v,v)^{\frac{1}{2}},u,v\in H$）

注 4.3. 内积空间中可以诱导出范数（$|u|=(u,u)^{\frac{1}{2}},u\in H$，并可以由 *Cauchy-Schwarz* 不等式证明其具有范数不等式），使内积空间具有范数结构，并有平行四边形法则（$\|x+y\|^2\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$，这个等式的成立也是赋范线性空间是否可以内积化的充要条件)。内积空间可进一步由诱导出的范数诱导出度量函数（$d(u,v)=|u-v|=(u-v,u-v)^{\frac{1}{2}}$)，使内积空间具有度量结构，从而可以研究内积空间（诱导出度量结构后）的完备性，紧性，有界性等。

注 4.4. 内积空间中可以定义两个向量的夹角（$\theta = \arccos \frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|}$），并进一步研究其正交性（若 $(u,v)=0$，则称 $u \perp v$）并得到勾股定理与正交补空间

注 4.5. 内积空间是严格凸的，但不是所有的赋范空间都是严格凸的

注 4.6. 部分内积空间在诱导出相应的度量结构后，若其中任一 *Cauchy* 列均有极限，则称该内积空间为 *Helbert* 空间。*Helbert* 空间的闭子空间必为 *Helbert* 空间（由完备空间的闭子空间仍为完备空间，故而成立）。*Helbert* 空间必然是自反的（若映射 $J : E \to E^{**}, x \mapsto \xi, E \in n.v.s$，有 $J(E) = E^{**}$，则称 E 是自反的）。*Helbert* 空间中的点存在唯一正交分解。每一个可分的 *Helbert* 空间都含有一个正交基。

$\operatorname{span} A$ A 中元素的线性组合

5 其它

定义 5.1 (Hemal 基). 若含有非零元的线性子空间 X 的子集 H 满足

1. H 中的元素线性无关
2. $X = \operatorname{span}\{H\}$

则称 H 为 X 的 *Hemal* 基

定义 5.2 (代数基). 设 E 为赋范线性空间（$n.v.s$），$\{e_i\}_{i\in I} \subset E$（$I$ 不需要可数）。如果 E 中的每一个点 x 都可以使用 $\{e_i\}_{i\in I}$ 中有限的元素唯一线性组合（$x = \sum_{i\in J} x_i e_i$，$J$ 是有限集）表示，则称 $\{e_i\}_{i\in I}$ 为 E 的代数基。

定义 5.3 (正交基). H 中的一个序列 $(e_n)_{n\geq 1}$ 被称为 H 中的一个正交基，如果它满足：

1. $(e_n, e_m) = \delta_m^n$
$$\delta_m^n := \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$
2. $\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}^n\}$ 在 H 中稠密

注 5.1. 如果 $(e_n)_{n\geq 1}$ 是一个正交基，则对于每一个 $u \in H$，我们有 $u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, e_k) e_k$，也就是说 $u = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (u, e_k) e_k$，$|u|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (u, e_k)^2$

定理 5.1 (Cauchy-Schwarz 不等式). 对于内积空间 H 中任意两个元素 u, v 有：

$$(u,v) \leq (u,u)^{\frac{1}{2}} (v,v)^{\frac{1}{2}}$$

定理 5.2 (平行四边形法则). 对于内积空间 H 中任意两个元素 a, b 有:

$$|\frac{a+b}{2}|^2 + |\frac{a-b}{2}|^2 = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$$

其中 $|\cdot|$ 为内积诱导出的范数 $|u| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$

定理 5.3 (Holder 不等式). 设 $f \in L^p$，$g \in L^{p'}, p \in [1, \infty]$，则 $f \cdot g \in L^1$ 且

$$\int |f \cdot g| dx \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

定理 5.4 (Minkowski 不等式). 如果 $f, g \in L^p, p \in [1, \infty]$，则

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

定理 5.5 (有界线性算子). *1.* 有界线性算可以在两个赋范线性空间中定义。

2. 有界线性算子与连续线性算子等价。

定理 5.6 (紧算子). *1.* 紧算子可以在两个 $Banach$ 空间上定义。但较为出色的结论是在 $Helbert$ 空间中得到的

2. 紧算子是有界线性算子，它最接近于有限维空间上的线性算子。

3. 在 $Helbert$ 空间中（可以定义伴随算子）: 紧算子的伴随算子 K^* 仍是紧算子（$if\ K \in \mathcal{K}(H), then\ K^* \in \mathcal{K}(H)$）。

4. 在 $Helbert$ 空间中: 紧算子空间 $\mathcal{K}(H)$ 是有界线性算子空间 $\mathcal{L}(H)$ 的闭线性子空间。

定义 5.4 (谱理论). *1.* 预解集 $\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{R} : (T - \lambda I) : E \to E \text{是双射}\}$

2. 谱 $\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$

3. 所有本征值构成的集合 $EV(T) := \{\lambda : N(T - \lambda I) \neq \{0\}\}$，并将 λ 称为 T 的本征值。且有 $EV(T) \subset \sigma(T)$ 注意本征值不能取 0

4. 零空间 $N(T - \lambda I) \neq \{0\}$，也是本征值 $\lambda \in EV(T)$ 对应的本征空间，并将向量 $u \in N(T - \lambda I) \setminus \{0\}$ 称为 λ 的本征向量。

5. 特征向量

引理 5.7.

注 5.2. 共轭空间与对偶空间是一致的，但伴随算子与之是不同的

注 5.3. 双线性函数

注 5.4. 基、可分性

注 5.5. 紧算子

注 5.6. 特征向量

6 例子

例 6.1 (开集). *1.* 有限维数组空间 $\mathbb{R}^n$

2. 离散度量空间 (A,d)，其中 $d(x,y)=1or0$ 当且仅当 $x=y$ 时，$d(x,y)=0$。它的每一个子空间既是开集也是闭集

3. 赋范线性空间的有限维线性子空间是闭集，但其无限维线性子空间不一定为闭集

4. 有界线性算子空间 $T(L^1(\mathbb{R}))$

例 6.2 (数域 $\mathbb{R}$ 的向量空间（$v.s.$）). *1.* $X=\{p(t):t\in\mathbb{R}\text{的多项式}\}$

2. $C[a,b]=\{f(t):t\in[a,b]\text{的连续函数}\}$

3. $\mathbb{R}^n$（有限维数组空间）

4. $X=\{(x_1,x_2,\cdots):x_i\in\mathbb{R},i\in\mathbb{N}^+\}$（实值序列构成的空间）

例 6.3 (赋范线性空间). *1.* $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_K)$，其中 $\|\cdot\|_K:=\|x\|_K=\inf\{\lambda>0:x\in\lambda K\},K$是 0 的领域（$0\in\int K,K=-K$）且是凸的、有界的闭集

2. $(C[a,b],\|\cdot\|_\infty)$，其中 $\|\cdot\|_\infty:=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$，则 $(C[a,b],\|\cdot\|_\infty)$ 为 *Banach* 空间

3. $(C[a,b],\|\cdot\|_1)$，其中 $\|\cdot\|_1:=\int_a^b|f(x)|dx$，则 $(C[a,b],\|\cdot\|_1)$ 为不完备的赋范线性空间（$n.v.s.$）

4. $(C(\bar{\Omega}),\|\cdot\|_\infty)$，其中 $C(\bar{\Omega}):=\{\text{一致连续函数}f:\Omega\to\mathbb{R}|\Omega\subset\mathbb{R}^n\text{为开的有界集}\},\|\cdot\|_\infty:=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$

5. $(C(\bar{\Omega}),\|\cdot\|_1)$，其中 $C(\bar{\Omega}):=\{\text{一致连续函数}f:\Omega\to\mathbb{R}|\Omega\subset\mathbb{R}^n\text{为开的有界集}\},\|\cdot\|_1:=\int_a^b|f(x)|dx$

6. $(C^k(\bar{\Omega}),\|\cdot\|_{1,\infty})$，其中 $C^k(\bar{\Omega}):=\{f\in C(\bar{\Omega})|\text{对于}|\alpha|\leq k\text{的数组}\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\text{有}D^\alpha f\in C(\bar{\Omega}),\text{其中}\alpha_i\geq 0,|\alpha|=\sum_{i=1}^n\alpha_i,D^\alpha f(x)=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1{}^{|\alpha_1|}\cdots\partial x_n{}^{|\alpha_n|}}\}$，$\|\cdot\|_{1,\infty}:=\|f\|_{1,\infty}=\sup_{x\in\Omega}|f(x)|+\sum_{k=1}^n\sup_{x\in\Omega}|\partial_k f(x)|,f\in C^1(\bar{\Omega}),\partial_k f(x)=\frac{\partial}{\partial x_k}f(x)$

7. $(C^k(\bar{\Omega}),\|\cdot\|_{1,1})$，其中 $C^k(\bar{\Omega}):=\{f\in C(\bar{\Omega})|\text{对于}|\alpha|\leq k\text{的数组}\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\text{有}D^\alpha f\in C(\bar{\Omega}),\text{其中}\alpha_i\geq 0,|\alpha|=\sum_{i=1}^n\alpha_i,D^\alpha f(x)=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1{}^{|\alpha_1|}\cdots\partial x_n{}^{|\alpha_n|}}\}$，$\|\cdot\|_{1,1}:=\|f\|_{1,1}=\int_\Omega|f|+\sum_{k=1}^n\int_\Omega|\partial_k f|,f\in C^1(\bar{\Omega}),\partial_k f=\frac{\partial}{\partial x_k}f$

例 6.4 (Banach 空间). *1.* $L^p[a,b]$ 证明需要用到 *Holder* 不等式与 *Minkowski* 不等式

2. $l^p(p\geq 1)$

例 6.5 (内积空间). *1.* $\mathbb{R}^n := \{(x^1, \cdots, x^n)^t : x^k \in \mathbb{R}, 1 \le k \le n\}$，其中内积 $(x, y) = x^t A y, x, y \in \mathbb{R}^n, A \in \mathcal{M}_n$

2. $l^2 := \{x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots) : x_i \in \mathbb{R}, \|x\|_2 = (\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2)^{\frac{1}{2}}\}$，其中内积 $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots), y = (y_1, \cdots, y_n, \cdots) \in l^2$

3. $L^2(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f在\Omega上是平方可积函数, \int_\Omega f^2(x)dx < \infty\}$,其中内积 $(u, v)_{L^2} = \int_\Omega u(x)v(x)dx$

4. $L_g^2(\Omega) := \{u : u是可测函数且\int_\Omega u^2 g < \infty\}$,其中内积 $(u, v)_g = \int_\Omega u(x)v(x)g(x)dx, g \in C(\Omega), g \ge 0, \int_\Omega g > 0$

5. 乘积空间 $H_1 \times H_2 := \{x_1 \oplus x_2 : x_i \in H_i, i = 1, 2\}$，其中内积 $(x_1 \oplus x_2, y_1 \oplus y_2)_{H_1 \times H_2} := (x_1, y_1)_{H_1} + (x_2, y_2)_{H_2}$

6. $C_c^1(\Omega)$，其中内积为 $(f, g)_{H_0^1} := \int_\Omega f(x)g(x)dx + \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega \partial_k f(x) \partial_k g(x) dx$

例 6.6 (Helbert 空间). *1.* $\mathbb{R}^n := \{(x^1, \cdots, x^n)^t : x^k \in \mathbb{R}, 1 \le k \le n\}$，其中内积 $(x, y) = x^t A y, x, y \in \mathbb{R}^n, A \in \mathcal{M}_n$

2. $l^2 := \{x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots) : x_i \in \mathbb{R}, \|x\|_2 = (\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2)^{\frac{1}{2}}\}$，其中内积 $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots), y = (y_1, \cdots, y_n, \cdots) \in l^2$

3. $L^2(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f在\Omega上是平方可积函数, \int_\Omega f^2(x)dx < \infty\}$,其中内积 $(u, v)_{L^2} = \int_\Omega u(x)v(x)dx$

4. $H_0^1(\Omega)$，其中内积 $(u, v)_{H_0^1} = \lim_{i \to \infty} (f^i, g^i)_{H_0^1}$，$H_0^1(\Omega)$ 是 $C_c^1(\Omega)$ 的完备化

例 6.7 (函数空间). *1.* $C_c(\Omega) := \{f \in C(\bar{\Omega}) : \sup f \subset \Omega是紧的\}$

2. $C_c^k(\Omega) := C_c(\Omega) \cap C^k(\bar{\Omega})$

3. $C_c^\infty(\Omega) := C_c(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega})$
且有 $C_c^\infty(\Omega) \subset C_c^k(\Omega) \subset C_c(\Omega) \subset L^2(\Omega)$，可证 $L^2(\Omega)$ 是紧的

7 大定理

定理 7.1 (闭凸集上的投影定理). 设 $K \subset H$ 是一个非空闭凸集，则对于任意一个 $f \in H$，都存在唯一一个点 $u \in K$，使得

$$|f - u| = \min_{v \in K} |f - v| = d(K, f)$$

此外，它的一个突出特征是：

$$u \in K and (f - u, v - u) \le 0, \forall v \in K$$

证明. 不失一般性，我们假设 $f \in K$，$(v_n)_{n\geq 1}$ 是 K 中的序列。且有 $\lim_{n\to\infty} |f - v_n| = d(K, f) =: d = \lim_{n\to\infty} d_n$，其中 $d_n = |f - v_n|$ □

注 7.1. 并将 $P_K f = u \in K, s.t. |u - f| = d(K, f)$ 记为 f 在闭凸集 $K \subset H$ 上的投影

注 7.2. 度量投影算子 P_k 是一个压缩算子（若对于任意 $x, y \in H$，有 $|P_K x - P_K y| \leq |x - y|$，则算子 P_K 称为压缩算子）。对于特殊的闭凸集，则有更加优良性质。例如闭的线性子空间 $M \subset H$ 作为投影的闭凸集，则有 $(f - P_M f, v) = 0$（这与一般的闭凸子集只有 $(f - u, v - u) \leq 0$ 是不同的）。并将闭线性子空间上的投影 $P_M f$ 称为 $f \in H$ 在 M 上的正交投影，并可证明投影算子 P_M 是线性的。

定理 7.2 (Riesz-Frechet 表示定理). *对于任意给定的泛函 $\Phi \in H^*$，都存在唯一一个 $u \in H$，使得对于每一个 $v \in H$，有 $\Phi(v) = \langle \Phi, v\rangle_{H^*,H} = (u, v)$。此外，$\|\Phi\|_{H^*} = |u|_H = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}$*

注 7.3. *Riesz-Frechet* 表示定理是使用内积表示泛函，这种表示方式可以从线性代数中可见一斑，在处理线性映射时，使用矩阵表示线性映射是一个非常出色的方法（与代数表示论有关）。而泛函的本质是映射，那我们是否也可以这样处理了（上面的矩阵表示在有限维线性映射的情况下当然没有问题，但这里的泛函是无限维的）*Riesz* 则给出了肯定的答案。

定理 7.3 (Lax-Milgram 定理). *若 Helbert 空间 $(H, (\cdot, \cdot))$ 上的一个双线性形式 $a(\cdot, \cdot)$ ($a : H \times H \to \mathbb{R}$) 是连续的（存在一个常数 C，使得对于所有 $u, v \in H$，有 $|a(u, v)| \leq C|u||v|$）、强制的（存在一个常数 α，使得对于每一个 $v \in H$，有 $a(v, v) \geq \alpha|v|^2$）的双线性形式，则对于任意一个 $\Phi \in H^*$，存在唯一一个 $u \in H$，使得对于每一个 $v \in H$ 有：*

$$a(u, v) = \langle \Phi, v\rangle$$

此外，如果 $a(\cdot, \cdot)$ 是对称的，则它的一个突出特征是：

$$u \in H and \frac{1}{2} a(u, u) - \langle \Phi, u\rangle = \min_{v\in H}\{\frac{1}{2} a(u, u) - \langle \Phi, v\rangle\}$$

定理 7.4 (弱解的存在性). *1. Dirichlet 问题总是存在一个弱解。*

2. 如果 $f \in C^2(\bar{\Omega})$ 是该问题的一系列解，则 u 必然是一个弱解。

定理 7.5 (Fredholm 择一定理). *1. 零空间 $N(I - K)$ 是有限维*

2. 值域 $R(I - K)$ 是闭集，更准确地说 $R(I - K) = N(I - K^*)^\perp$

3. 零空间 $N(I - K) = \{0\}$ 当且仅当 $R(I - K) = H$

4. $\dim N(I - K) = \dim N(I - K^*)$

注 7.4. 该定理在 *Banach* 空间与 *Helbert* 空间中都成立

注 7.5. 其与特征值、特征向量有关

定理 7.6 (Baire 纲定理)**.** 设序列 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 是由完备度量空间 X 上的闭子空间组成。若

$$intX_n = \emptyset, n \geq 1$$

则

$$int(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n) = \emptyset$$

注 7.6. *1.* 如果 $intA = \emptyset$，则称集合 A 是无处稠密的

2. 如果对于 $n \geq 1$，有 O_n 是开集，$\overline{O_n} = X$，则 $\overline{\cap_{n=1}^{\infty} O_n} = X$（$X$ 不一定是开集）

3. 如果 $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$，则一定存在一个 n_0 使得 $intX_{n_0} \neq \emptyset$

4. 稀疏（$intX = \emptyset$），稠密（$\overline{O} = X$）。稀疏的并，稠密的交，仍能保持其固有的性质，反之具有该性质，则组成该集合的子集也有相关的性质。

定理 7.7 (Banach-Steinhaus 一致有界原则)**.** 设 $(T_i)_{i\in I}$ 为 *Banach* 空间 E, F 之间的一族（不要求可数）连续线性算子，如果

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\| < \infty, x \in E$$

则

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$$

等价于存在一个常数 c，有

$$\|T_i x\| \leq c\|x\|, x \in E, i \in I$$

注 7.7. 这个定理告诉我们可以由逐点估计获得全局估计。

注 7.8. 设 $(T_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(E, F)$ 为 *Banach* 空间 E, F 之间的一族连续线性算子，如果对于每一个 $x \in E$，有 $T_n x$ 收敛到 Tx，则

1. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$

2. $T \in \mathcal{L}(E, F)$

3. $\|T\| \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \|T_n\|$

定理 7.8 (开映射定理)**.** 设 $T \in \mathcal{L}(E, F)$ 为 *Banach* 空间 E, F 之间的满射，则存在一个常量 c，使得

$$T(B_E(o, 1)) \supset B_F(o, c)$$

注 7.9. *1.* 如果我们另外假设 T 是单射，则 T^{-1} 是连续的，因此 T 是同胚的。

2. 设 U 为开集，$y_0 \in T(U)$，则存在 $B(x_0, r) \subset U$ 满足 $Tx_0 = y_0, r > 0$。则 $T(U) \supset T(x_0) + T(B(o, r)) \supset y_0 + B(o, c) = B(y_0, c)$，这意味着 $T(U)$ 是开集。也就是说映射 T 将开集映为开集。反之，如果线性映射 $T : E \to F$ 将开集映为开集，则 T 必然为满射。

3. 显然，双射 T 将开集映为开集，当且仅当双射 T 将闭集映为闭集。然而，如果映射 $T \in \mathcal{L}(E, F)$ 是满射但不是单射，则 T 不一定能将闭集映为闭集。

定理 7.9 (闭图像定理)**.** 设 T 为 *Banach* 空间 E, F 之间的线性算子，若算子 T 的图像

$$G(T) := \{(x, Tx) \in E \times F : x \in E\}$$

在 $E \times F$ 上是闭集，则 T 是连续算子。

注 7.10. 任意连续映射的图像都是闭集

注 7.11. $E \times F$ 上的范数定义为

$$\|(x, y)\|_{E\times F} = \|x\|_E + \|y\|_F, (x, y) \in E \times F$$

并可以验证得知 $E \times F$ 为 *Banach* 空间。

引理 7.10 (Zorn 引理)**.** 若一个偏序集 $(A, \leq)$ 的任意全序子集 S 在 A 中都有上界，即

$$\exists a \in A, \forall x \in S, x \leq a$$

则 A 有极大元

注 7.12. 这个引理中的偏序集条件不能减弱为拟序集。*Zorn* 引理也可以简化为每个归纳的非空有序集都有一个最大元素。

注 7.13. *Zorn* 引理是集合论中的著名公理，它和选择公理（设 $T = \{A_i, i \in I\}$ 为一族非空集合，I 是自然数的某有限子集，那么存在映射 $\varphi : T \to \bigcup_{i\in I} A_i, A_i \mapsto \varphi(A_i) \in A_i$，函数 φ 被称为选择函数。）以及良序公理（任何集合上都可以定义一个良序，借助良序公理可以将数学归纳法推广到任意良序集上去，得到超限数学归纳法）是等价的。

定理 7.11 (Hahn-Banach 延拓定理)**.** 线性空间 E 上的次线性泛函 $p : E \to \mathbb{R}$

1. 次可加性：对任意 $x, y \in E$，有 $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

2. 齐次性：对任意 $x \in E, \lambda > 0$，有 $p(\lambda x) = \lambda p(x)$

线性空间的线性子空间 $G \subset E$ 上的线性泛函 $g : G \to \mathbb{R}$

1. 可加性：对任意 $x, y \in E$，有 $g(x+y) = g(x) + g(y)$

2. 齐次性：对任意 $x \in E, \lambda > 0$，有 $g(\lambda x) = \lambda g(x)$

其中

$$g(x) \le p(x), x \in G$$

若线性泛函 $f : E \to \mathbb{R}$ 有：

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \le p(x) & x \in G \\ f(x) \le p(x) & x \in E \setminus G \end{cases}$$

则称泛函 f 为泛函 g 在 E 上的延拓。

证明. □

注 7.14. *Hahn-Banach* 延拓定理还具有几何形式。设 $A, B \subset E$ 是非空凸集，且满足 $A \cap B = \emptyset$。若这两个非空凸集中有一个是开集，则存在一个闭的超平面分割 A 与 B。

注 7.15. 该定理有代数与几何两种形式，几何形式中涉及了超平面，在最优化与机器学习中有较为重要的应用

注 7.16. 在有限维中，构建线性泛函是一件极为平常之事（可以找到合适的基），但在无限维上这并不直观。于是一个曲线的方法便有了，即在无限维空间中找一个有限维子空间，由之前讨论知道，肯定可以构建线性泛函，如果可以将该泛函延拓到整个空间不就可以了吗。为了更加普遍的情况，这里的有限维子空间改为在任意子空间上的线性泛函都可以延拓到整个空间中，从而在无限维空间中构造合适的线性泛函。

8 例题

命题 8.1 (HW1-2)**.** 设 $X = \{x = (x_1, x_2, \cdots) | x_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \cdots\}$ 是一个无限维序列空间，对于 $x = (x_n)_{n\ge1}, y = (y_n)_{n\ge1}$，我们定义：

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$$

证明 d 是一个距离函数。

证明. □

命题 8.2 (HW1-7)**.** 设 (X, d) 是一个完备的度量空间，并设 $K \subset X$ 是相对紧的，证明 K 是可分的。

证明. □

命题 8.3 (HW1-8)**.** 将赋范线性空间 $(E, \|\cdot\|)$ 上的单位球定义为 $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$，证明：

1. （*Riesz* 引理）如果 $E_0 \subset E$ 是一个闭子空间，且 $E_0 \neq E$，则对于任意的 $0 < \epsilon < 1$，存在一个点 $x_0 \in E$，有 $\|x_0\| = 1$，并且对于每一个 $x \in E_0$，有 $\|x_0 - x\| > \epsilon$
2. 如果 $dimE = n$，证明 E 拓扑同构于 $\mathbb{R}^n$，即存在一个双线性映射 $f : E \to \mathbb{R}^n$ 使得 f 与 f^{-1} 都是连续函数。
3. 使用 *Riesz* 引理证明 B_E 是紧的，当且仅当 E 是有限维的。

证明. □

命题 8.4 (HW2-3)**.** 设 E 是一个赋范线性空间，$f : E \to \mathbb{R}$ 是一个（*does not vanish identically*）线性函数，设 $\alpha\mathbb{R}$，证明 f 连续当且仅当 $H = [f = \alpha]$ 是闭集（$[f = \alpha] = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$）

证明. □

命题 8.5 (HW2-8)**.** *[Hilbert 空间上 Hahn-Banach 延拓定理的几何形式]* 设 H 是一个 *Helbert* 空间，$A, B \subset H$ 是非空凸子集。如果 A 是紧的，B 是闭的，且 $A \cap B = \emptyset$，证明存在一个闭的超平面将 A 和 B 强制分割，也就是说存在一个闭的超平面 $M_{u,\alpha}$

$$M_{u,\alpha} = \{v \in H : (u, v) = \alpha\}$$

对于一些 $u \in H \setminus \{0\}, \alpha \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$，使得

$$(u, \alpha) > \alpha + \varepsilon, (u, b) < \alpha - \varepsilon, \forall a \in A, b \in B$$

提示：$A - B : \{a - b : a \in A, b \in B\}$

证明. □

命题 8.6 (HW3-7)**.** 设 H 是一个 *Helbert* 空间，若 $T \in \mathcal{L}(H)$ 是一个自伴随算子，证明下述命题等价：

1. $(Tu, u) \leq |Tu|^2, \forall u \in H$
2. $(0, 1) \in \rho(T)$

提示：使用 $U = 2T - I$

证明. 1. set $U := 2T - I \Rightarrow U \in \mathcal{L}(H), U = U^*$（$U$ 是有界线性泛函，也是自伴随算子）

$(Uu, Uu) = 4(Tu, Tu) - 4(Tu, u) + (u, u) \Rightarrow (Uu, Uu) - (u, u) = 4(Tu, Tu) - 4(Tu, u)$that is to say $|Uu|^2 \geq |u|^2, \forall u \in H$

2. $2(T-\lambda I)u=2v \Rightarrow (2T-I-(2\lambda-1)I)u=2v \Rightarrow (U-(2\lambda-1)I)u=2v$ that is to say $\lambda\in\rho(T)$iff$(2\lambda-1)\in\rho(T)$，$i.e.(-1,1)\in\rho(T)$

3. $\forall f\in N(U),\forall y\in R(U),y=Ux,x\in H,(f,y)=(f,Ux)=(Uf,x)=(0,x)=0\Rightarrow f\in R(U)^T\Rightarrow N(U)\subseteq R(U)^T$

   $\forall f\in R(U)^T,(f,Ux)=0,(Uf,x)=0,\Rightarrow Uf=0\Rightarrow f\in N(T)\Rightarrow R(U)^T\subseteq N(0)$

   $N(U)=R(U)^T$

4. $\lambda\in\rho(U)\Leftrightarrow\frac{1}{\lambda}\in\rho(U^{-1})$

   By Thm3.10$m=\inf_{|u|=1}(U^{-1}u,u),M=\sup_{|u|=1}(U^{-1}u,u),n,M\subseteq\sigma(U^{-1})\subset[-1,1],-1\leq\frac{(U^{-1}u,u)}{|u|^2}\leq 1\Rightarrow|(U^{-1}u,u)|\leq|u|$

   $(U^{-1}(u+v),(u+v))-(U^{-1}(u-v),(u-v))=4(U^{-1}u,v)\Rightarrow 4|(U^{-1}u,u)|\leq|(U^{-1}(u+v),(u+v))|+|(U^{-1}(u-v),(u-v))|\leq|u+v|^2+|u-v|^2=2(|u|^2+|v|^2)$

   set $U^{-1}u=v\Rightarrow|U^{-1}u|^2\leq|u|^2\Leftrightarrow(-1,1)\subset\rho(U)$

$\square$

命题 8.7 (HW3-8). *[Hilbert 空间上 Banach-Alaoglu 定理的几何形式]* 证明 *Helbert* 空间中的（闭的）单位球 B_H 是 *sequentially weak-compact*（对于每一个序列 $(x_n)_{n\geq 1}\subset B_H$，其存在一个子序列 $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ 弱收敛到 B_H 中一点）

证明. $\square$

命题 8.8 (HW4-4). 设 E 是 *Banach* 空间，并设 $T:E\to E^*$ 是一个线性算子，且有

$$\langle Tx,x\rangle\geq 0,\forall x\in E$$

证明 T 是一个有界算子。

证明. $\square$