

车载倒立摆系统控制

石景元 自动化(控制)

友情提示: 为了批改方便, 请先阅读README

1 实验目的

1. 探索车载倒立摆系统的动力学特性, 理解如何通过外力 F 控制小车和摆杆的运动状态。
2. 设计并实现基于专家控制的增量型离散PID控制器, 验证其对倒立摆系统的稳定性和性能的改善。
3. 比较专家PID控制与常规PID控制的效果, 通过仿真实现系统响应曲线的分析。

2 实验原理

2.1 系统动力学方程

车载倒立摆系统的动力学方程如下:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + m\ddot{\theta}\cos\theta - ml(\dot{\theta})^2\sin\theta = F \\ ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta - mgl\sin\theta = 0 \end{cases}$$

求解得:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{F + ml\dot{\theta}^2\sin\theta - mg\sin\theta\cos\theta}{M+m-m\cos^2\theta}; \\ \ddot{\theta} = \frac{(M+m)g\sin\theta - \cos\theta(F + ml\dot{\theta}^2\sin\theta)}{(M+m)l - ml\cos^2\theta} \end{cases}$$

取状态变量为 $X = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}]^T$, 取 $U = F$ 可以得到系统的 `mdlDerivatives` 表达式, 从而通过S-function得到系统的方程.

$$\begin{cases} \dot{x}(1) = x(2) \\ \dot{x}(2) = \frac{U + mlx(4)^2\sin x(3) - mg\sin x(3)\cos x(3)}{M+m-m\cos^2 x(3)} \\ \dot{x}(3) = x(4) \\ \dot{x}(4) = \frac{(M+m)g\sin x(3) - \cos x(3)(U + mlx(4)^2\sin x(3))}{(M+m)l - ml\cos^2 x(3)} \end{cases}$$

取系统输出为 $Y = [x, \theta]$, 在实现过程中取 $x/50$ 以便于显示

2.2 控制算法

- **PID控制**: 离散增量型PID控制公式为: $F(k) = F(k-1) + K \left[K_p \Delta\theta(k) + \frac{T}{T_i} \theta(k) + \frac{T_d}{T} (\Delta\theta(k) - \Delta\theta(k-1)) \right]$
其中 T 为采样时间, $\Delta\theta(k) = \theta(k) - \theta(k-1)$
- **专家PID控制**: 专家PID控制根据给定的规则调整PID控制的参数, 在题设中, 根据摆杆夹角 $\theta(k)$ 的范围和变化趋势, 动态调整PID增益

专家控制规则分析:

- 当 θ 超过 θ_m 时, 将 F 设置为最大, 防止系统不稳定, 使系统更快收敛
- 当 θ 超过 θ_2 时, 若系统发散, 则增大 K 加快收敛, 若系统正在收敛且刚由发散进入收敛, 则系统仍不够稳定, 增大 K , 否则 $K=1$

- 当 θ 超过 θ_1 时，若系统刚进入收敛状态，若系统稳定收敛，则设置 $K = K_s$ 。（猜测 K_s 较小以减小振荡，但是实验中取 $K_s = 1$ ），否则取 $K=1$

具体的控制规则

(1) 若 $|\theta(k)| \geq \theta_m$ 时，则 $F(k) = \text{sgn}(\theta)F_m$

(2) 若 $\theta_2 \leq |\theta(k)| < \theta_m$ 时，

1. 若 $\theta(k)\Delta\theta(k) > 0$ 时，则 $K = K_b$

2. 若 $\theta(k)\Delta\theta(k) < 0$ 时，

a) 若 $\Delta\theta(k)\Delta\theta(k-1) > 0$ 时，则 $K = 1$

b) 若 $\Delta\theta(k)\Delta\theta(k-1) < 0$ 时，则 $K = K_b$

(3) 若 $\theta_1 \leq |\theta(k)| < \theta_2$ 时，

1. 若 $\theta(k)\Delta\theta(k) > 0$ 时，则 $K = 1$

2. 若 $\theta(k)\Delta\theta(k) < 0$ 时，

a) 若 $\Delta\theta(k)\Delta\theta(k-1) > 0$ 时，则 $K = K_s$

b) 若 $\Delta\theta(k)\Delta\theta(k-1) < 0$ 时，则 $K = 1$

(4) 若 $|\theta(k)| < \theta_1$ 时，则 $K = 1$

- 实现细节: 上述系统均为离散系统，更新通过 `mdlUpdate` 函数的直接赋值更新实现，其中系统状态变量 $X = [F(k-1), \theta(k-2), \theta(k-1)]$ ，一步更新为 $[F(k), \theta(k-1), \theta(k)]$ ，并输出 $F(k)$ 。

2.3 实验设置

- 系统参数: 根据题设条件，系统参数如下:

参数	值	参数	值
摆杆质量 m	0.5 kg	摆杆夹角 θ	$[0, \pi] \text{rad}$
小车质量 M	1.0 kg	重力加速度 g	9.8m/s^2
摆杆质心长度 l	0.5 m	小车受水平外力 F	$[-F_m, F_m] \text{N}$

- 初始条件: 选择初始角度 $\theta(0) = \pi/4$ 进行验证，随后尝试其它角度
- 文件组织:
 - `all_in_one.slx`: 显示PID控制和专家PID控制的 θ, x, F 曲线
 - `system_transfer.m`: 系统的转移特性, 状态变量为 θ, x ，更新方式为数值积分更新
 - `pid_plain.m` `pid_expert.m`: 增量式PID/增量式专家PID控制器，状态变量为 $F(k), \theta(k-1), \theta(k-2)$ ，更新方式为离散更新

- `get_theta.m` `get_F.m` `get_system_param.m`: 设置并得到一系列参数，默认初始参数为第一问的参数

3 代码关键部分展示

3.1 System Transfer

```
% calculate derivatives
function sys = mdlDerivatives(t,x,u)
% set system params
M = 1; m = 0.5; l = 0.5; g = 9.8;
theta = x(3);
theta_dot = x(4);
F = u(1); % input F
% transfer functions
dx1 = x(2); % dx/dt
dx2 = (F + m * l * theta_dot^2 * sin(theta) - m * g * sin(theta)*cos(theta)) / (M + m - m * cos(theta)^2); % d^2x/dt^2
dx3 = x(4); % dθ/dt
dx4 = ( (M+m)*g*(sin(theta)) - cos(theta)*(F+m*l*sin(theta)*theta_dot^2) ) / ((M+m)*l - m*l*cos(theta)^2); % d^2θ/dt^2
sys = [dx1; dx2; dx3; dx4];
```

3.2 Plain PID Controller

输出函数部分和更新部分存在重合，因此不展示，通过[调试打断点发现](#)，`s-function`在每个时间步先输出后更新，在输出函数中需要输出 $F(k)$ ，需要通过计算，而不是直接输出 $x(1)$

```
% updating
function sys = mdlUpdate(t,x,u)
Kp=200;Ti=0.001;Td=10;T=0.0001;K=1;
if isnan(u(2))
    u(2) = get_theta(); % prevent input nan if system starts with pid module rather than system transfer module
end
% pid controllor
deltak = u(2) - x(3);
deltak_1 = x(3) - x(2);
F = x(1) + K*(Kp*deltak+ T/Ti *u(2)+ Td/T *(deltak - deltak_1));
F_m = get_F();
% limit F to [-Fm,Fm]
if F>F_m
    F=F_m;
elseif F<-F_m
    F=-F_m;
end
sys = [F;x(3);u(2)];
```

3.3 Expert PID Controller

输出函数部分和更新部分存在重合，因此不展示，通过[调试打断点发现](#)，`s-function`在每个时间步先输出后更新，在输出函数中需要输出 $F(k)$ ，需要通过计算，而不是直接输出 $x(1)$

```
% updating
function sys = mdlUpdate(t,x,u)
% get expert pid controller params
[Kp,Ti,Td,T,K,Ks,Kb,theta_m,theta_2,theta_1] = get_system_param();
```

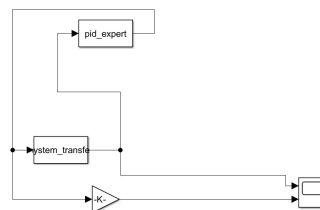
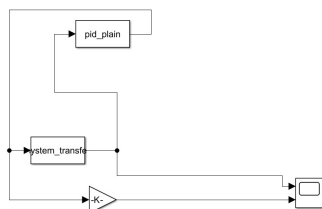
```

% prevent input nan if system starts with pid module ranther than system transfer module
if isnan(u(2))
    u(2) = get_theta();
end
deltak = u(2) - x(3);
deltak_1 = x(3) - x(2);
F_m = get_F();
% rule based pid
if abs(u(2)) >= theta_m
    F = sign(u(2))*F_m;
elseif abs(u(2)) >= theta_2
    if u(2)*deltak > 0
        K = Kb;
    elseif deltak*deltak_1 > 0
        K = 1;
    else
        K = Kb;
    end
elseif abs(u(2)) >= theta_1
    if u(2)*deltak > 0
        K = 1;
    elseif deltak*deltak_1 > 0
        K = Ks;
    else
        K = 1;
    end
else
    K=1;
end
if abs(u(2)) < theta_m
    F = x(1) + K*(Kp*deltak + T/Ti *u(2) + Td/T *(deltak - deltak_1));
end
% limit F to [-Fm,Fm]
if F>F_m
    F=F_m;
elseif F<-F_m
    F=-F_m;
end
sys = [F;x(3);u(2)];

```

3.4 框图

在系统框图中，包括了普通PID控制器(左)和专家PID控制器(右)

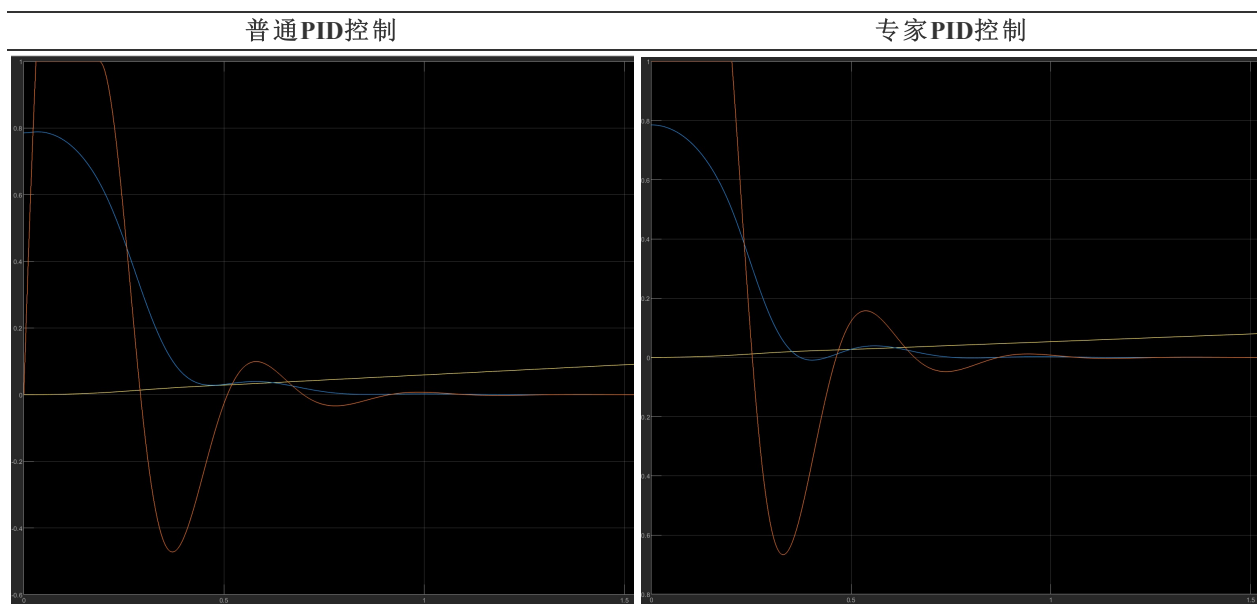


4 仿真实验

4.1 初始值 $\theta(0) = \pi/4$

以下两图分别是 `pid_plain` (不限幅和限幅)和 `pid_expert` 的曲线图，其中：

- 曲线含义：红线为 F/F_m ，蓝线为 θ ，黄线为 $x/50$ ，其中 $F_m = 25$
- 专家PID控制中， $\theta_1 = 0.1, \theta_2 = 0.3, \theta_m = 0.5, K_s = 1, K_b = 1.3$
- 仿真时长为2.5s,图中一个格子代表0.5s



实验结果分析

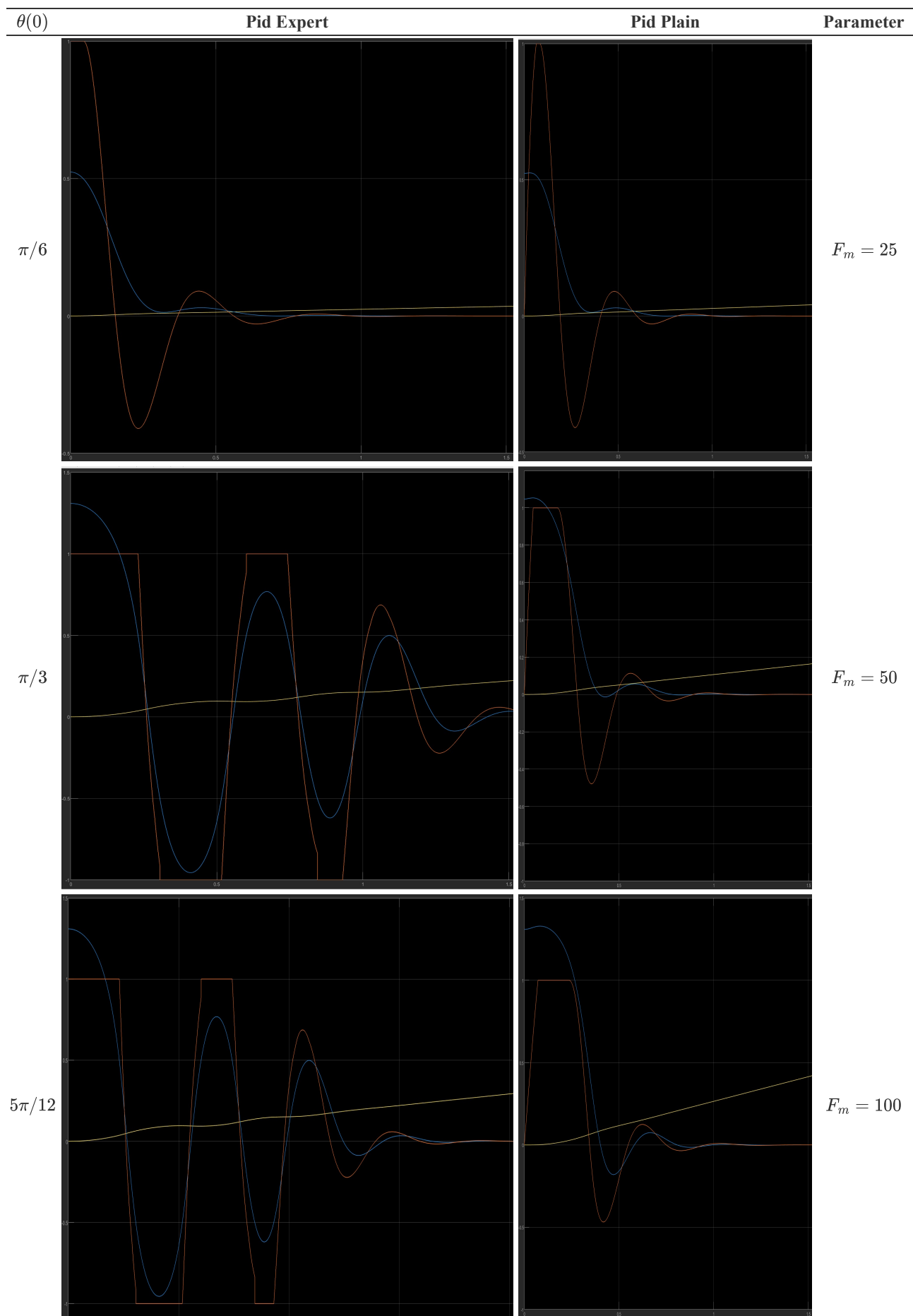
1. 相同点：普通PID控制和专家PID控制均能在短时间内收敛到稳定值，此时 θ, F 收敛到0，小车以匀速运行， x 线性增长，两种控制系统振荡较小
2. 区别：
 - θ 变化：
 - 对于专家PID，在规则(1)的作用下， F 直接到达了 F_m ， θ 直接开始减小，可能也因此影响后续出现了轻微的超调；而普通PID的 θ 有先上升后下降的过程
 - 分析知，系统没有进入过其它状态
 - F 变化：
 - 专家PID中， F 在规则(1)的作用下直接到达了 F_m ，相对也更快收敛
3. 原因分析：专家PID控制中，初始条件下， $\theta > \theta_m$ ，因此此时 $F = F_m$ ，系统更快收敛，从而 F 和 θ 都更快收敛

4.2 不同初始夹角下的专家PID控制效果

经计算得，当初始角度大于 0.33π 时， $F_m = 25$ 无法满足要求，发现调整 F_m 后，系统在2s内完成收敛，为便于分析，不再调整专家控制PID的其它参数。

可以看出，在图中，当出现 $\theta_2 \leq |\theta(k)| < \theta_m$ 且 $\theta(k)\Delta\theta(k) > 0$ 时， $K = K_b$ 从而使得 F 整体快速增长， θ 更快收敛

说明：同一个 $\theta(0)$ 展示了两张图片，则第一张图片是pid_expert方法，第二张是pid_plain方法：



实验结果分析:

- 当 $\theta(0) = \pi/3, \pi/6$ 时,专家控制中系统 F 和 θ 在规则(1)的作用下收敛均较快

- 当 $\theta(0) = 5\pi/12$ 时，专家控制系统 F 和 θ 振荡严重，收敛速度慢，分析原因可能是一开始设置 $F = F_m$ ，系统获得了一个较大的角速度，使得超调难以抑制，该情况下专家控制系统的参数相对来说较难调整
- 说明事实上**专家控制PID**系统并不能完全优于普通PID控制，要根据特定的场景指定规则，因此可以发现实际上专家PID控制仅在特定场景下会表现出较好的性能，而在**规则不优的情况下甚至可能劣于普通PID控制**，因此需要应对特定的场景制定特定的规则

5 总结

在本实验中，我们验证了专家PID控制和常规PID控制在车载倒立摆系统控制中的作用，并验证了专家PID控制在不同初始角下对系统的控制作用。在实验中，专家PID和常规PID控制都表现出了良好的效果。

- **专家PID控制**针对不同角度和角速度调整增益，显著提升了系统的适应性，并且通过优化参数，可以实现对不同初始状态的更好控制。相较于**常规PID**，收敛更快、振荡更小、更加灵活，因此更加适合一些复杂非线性系统
- **专家PID控制**中的规则往往仅对特定的场景具有适应性，若场景不同，专家PID控制甚至可能劣于普通PID控制