

密级： ☐绝密    ☐机密    ☐秘密

学校代码： 11287

学    号： MG1808006



南京审计大学

## 硕 士 研 究 生 学 位 论 文

### 具有复杂相依结构的连续时 保险风险模型的渐近问题研究

院        系：	统计与数据科学学院
专        业：	应用经济学
研 究 方 向：	统计学
授予学位类别：	经济学硕士学位
姓        名：	王鑫之
指 导 教 师：	杨洋
答 辩 日 期：	2021 年 5 月 21 日

# **Researches on Asymptotic behavior of Continuous Time Insurance Risk Model with Complex Dependent Structure**

A Dissertation Submitted to

Nanjing Audit University

For the Academic Degree of Master of Economics

BY

Wang Xinzhi

Supervised by

Professor Yang Yang

School of Statistics and Data Science

Nanjing Audit University

May 2021

## 原创性声明

本人声明，所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的科研成果。尽我所知，除了论文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得南京审计大学或其他单位的学位或证书而使用过的材料。与我共同工作的同志对本研究所作的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名：\_\_\_\_\_ 日期：\_\_\_\_\_年\_\_\_\_月\_\_\_\_日

## 学位论文版权使用授权书

本人完全了解南京审计大学有关保留、使用学位论文的规定，有权保留学位论文并向国家有关部门或机构送交学位论文的复印件和磁盘，允许学位论文被查阅和借阅。本人授权南京审计大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、浓缩或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

（保密的学位论文在解密后适用本授权书）

学位论文作者签名：\_\_\_\_\_

日期：\_\_\_\_\_年\_\_\_\_月\_\_\_\_日

导师签名：\_\_\_\_\_

日期：\_\_\_\_\_年\_\_\_\_月\_\_\_\_日

## 摘 要

金融安全被视为国家安全的重要组成部分, 防控金融风险被列为当前金融领域的重要任务之一. 保险业作为金融市场的重要一环, 在防控金融风险, 提高金融市场稳定性方面起到了重要作用, 而保险公司的破产常常带来金融业的动荡, 因此对保险公司进行风险评估日益重要. 大量历史案例及数据表明, 保险公司的破产主要是由发生极端事件导致大额理赔引起的, 在保险精算研究中, 这类大额理赔具有重尾的特点. Embrechts等(1997)在《建模保险与金融中的极端事件》一书中提出, 在保险业, 重尾分布已经被越来越多的保险精算研究者认为是保险理赔额的标准分布. 因此建立并研究重尾保险风险模型对保险公司的风险控制具有重要意义.

保险风险模型从大类上可分为连续时模型和离散时模型, 近年来以连续时模型为主要研究方向, 因此本文主要对连续时模型进行研究与探索. 此外, 作为风险控制的重要环节, 本文从VaR和CTE 的角度对保险公司准备金进行了相关研究.

本文主要包含以下内容:

第一章主要介绍本文研究背景、保险风险领域相关概念, 阐明研究动机与目标, 回溯国内外相关研究.

第二章研究带有副理赔的风险模型. 通常一次事故会带来不止一次理赔, 且同一个事故所导致的不同理赔之间存在一定相依关系, 本章基于不同类型的相依结构及理赔分布族类进行研究探索, 得到无限时破产概率的渐近行为.

第三章研究随机利率的带有副理赔的风险模型. 现实世界中的资金流计算需要考虑时间折扣, 因此本章在第二章的基础上引入几何Lévy过程作为利率, 并加入保险公司日常运行中可能发生的随机资金流动作为扰动项. 本章基于主副理赔的不同分布族及两者的特殊相依结构, 得到有限时破产概率的渐近行为, 并用蒙特卡洛模拟验证了渐近结果的精确性.

第四章研究复合更新模型破产概率的二阶渐近结果. 本章以每次保险事故为最小单位进行研究, 考虑每次事故可能会带来不止一次理赔, 每次理赔均为重尾分布, 每次事故的损失减去与上次事故时间间隔内的保费收入为此次事故的净损失, 在此模型下本章得到破产概率的二阶渐近结果. 相比一阶渐近结果, 二阶更为精确, 本章最后进行蒙特卡洛模拟验证了这一论断.

第五章研究二维常利率风险模型. 考虑到保险公司同时经营多种保险产品, 因此在前述研究的基础上引入了二维风险模型. 本章基于两种保险产品所带来的不同的破产情形, 得到不同情形下的有限时破产概率的渐近行为.

以上章节均为对破产概率的研究, 第六章则从保险公司准备金角度进行分析.

第六章从VaR和CTE角度研究保险公司准备金. 保险公司的亏损主要来自于理赔以及投资的损失, 本章主要考虑折算后的保险公司组合损失, 并基于损失不同的分布及损失之间不同的相依结构, 得到组合损失VaR和CTE 的渐近行为. 最后再次采用蒙特卡洛模拟验证渐近结果的精确性, 并进行分布参数及相依结构的敏感性探讨.

**关键词:** 保险风险, 破产概率, 连续时风险模型, 重尾分布, 蒙特卡洛模拟, 随机过程, VaR、CTE, 准备金

## Abstract

Financial security is regarded as an integral part of national security, and the prevention and control of financial risks is listed as one of the important tasks in the current financial field. As an important part of the financial market, the insurance industry plays an important role in preventing and controlling financial risks and improving the stability of the financial market. The bankruptcy of insurance companies often brings turbulence in the financial industry. Therefore, risk assessment of insurance companies is increasingly important. A large number of historical cases and data show that the bankruptcy of insurance companies is mainly caused by extreme events that lead to large claims. In actuarial research, this type of large claims has the characteristic of heavy tails. Embrechts et al. (1997) proposed in the book “Modelling Extreme Events” that in the insurance industry, the heavy-tailed distribution has been considered by more and more insurance actuarial researchers to be the standard distribution of insurance claims. Therefore, the establishment and study of heavy-tailed insurance risk models are of great significance to the risk control of insurance companies.

Insurance risk models can be divided into continuous-time one and discrete-time one. In recent years, continuous-time models have been the main research direction. Therefore, our paper mainly considers some continuous-time models. In addition, as an important part of risk control, our paper conducts relevant research on insurance company reserves from the perspective of VaR and CTE.

This paper is organized as follows.

Chapter 1 mainly introduces the research background of our studies and related concepts in the insurance risk field, clarifies the research motives and goals, and looks back at some existing results.

Chapter 2 considers the risk model with by-claims. Usually an accident will bring more than one claim, and there are certain dependencies between different claims caused by the same accident. This chapter conducts research based on different types of dependency structures and claim distribution families, and obtains the asymptotic behavior of the infinite-time ruin probabilities.

Chapter 3 considers the risk model of stochastic return with by-claims. The calculation of capital flow in the real world needs to consider time discounts, so, based on the chapter 2, this chapter introduces the geometric Levy process as the interest rate, and adds the random capital flow that may occur in the daily operation of insurance companies as a disturbance item. Based on the different distribution families of main claims and by-claims

and the special dependence structure between them, this chapter obtains the asymptotic behavior of the finite-time ruin probabilities, and uses Monte Carlo simulation to verify the accuracy of the asymptotic result.

Chapter 4 considers the compound renewal risk model. This chapter takes each insured accident as the smallest unit to study, considering that each accident may bring more than one claim, each claim follows heavy-tailed distribution, and the loss of each accident minus the premium income during the time interval from the last accident is the net loss of this accident. This chapter obtains the second-order asymptotic result of the ruin probabilities under this model. Compared with the first-order asymptotic results, the second-order is more accurate. The Monte Carlo simulation at the end of this chapter verifies this conclusion.

Chapter 5 considers the two-dimensional constant interest rate risk model. Considering that insurance companies operate multiple insurance products at the same time, a two-dimensional risk model is introduced on the basis of the aforementioned research. Based on the different bankruptcy situations brought about by the two insurance products, this chapter obtains the asymptotic behavior of the finite-time ruin probabilities in different situations.

The above chapters are all researches on the ruin probabilities, and chapter 6 analyzes risk management from the perspective of reserves.

Chapter 6 considers insurance company reserves from the perspective of VaR and CTE. The losses of insurance companies mainly come from claims and investment losses. This chapter mainly considers the discounted portfolio losses and claims of insurance companies, and based on the different distribution of losses and the different dependency structures between them, the asymptotic behavior of VaR and CTE of total losses is obtained. Finally, Monte Carlo simulation was used to verify the accuracy of the asymptotic results, and the sensitivity of distribution parameters and dependent structures was discussed.

**abstract:** Insurance risk, ruin probabilities, continuous-time risk model, heavy-tailed distribution, Monte Carlo simulation, stochastic process, VaR, CTE, reserve

# Contents

<b>1</b>	<b>绪论</b>	<b>1</b>
1.1	研究背景	1
1.2	连续时间风险模型介绍	2
1.3	离散时间风险模型介绍	3
1.4	重尾分布族介绍	3
1.4.1	符号约定	3
1.4.2	常见重尾分布族及其性质	4
1.5	常见的相依结构介绍	6
1.6	相关研究回顾	8
1.6.1	连续时间风险模型回顾	9
1.6.2	离散时间风险模型回顾	10
1.7	本文结构	11
<b>2</b>	<b>带有相依结构的主副理赔风险模型</b>	<b>13</b>
2.1	带有相依结构的主副理赔风险模型介绍及相关文献回顾	13
2.2	不同相依结构下的破产概率一阶渐近行为	14
2.3	一些引理及主要证明	15
2.4	本章小结	17
<b>3</b>	<b>带有随机收益和扰动项的主副理赔风险模型</b>	<b>19</b>
3.1	带有随机收益和扰动项的主副理赔风险模型介绍及相关文献回顾	19
3.2	具有弱相关主副理赔的风险模型中破产概率的一阶渐近行为	20
3.3	随机加权和尾概率的渐近行为	21
3.4	一些引理及主要证明	29
3.5	理论结果的数值模拟	33
3.6	本章小结	35
<b>4</b>	<b>复合更新模型</b>	<b>36</b>
4.1	复合更新模型介绍及相关文献回顾	36
4.2	复合更新模型下的破产概率二阶渐近结果	38
4.3	一些引理及主要证明	39
4.4	理论结果的数值模拟	42
4.4.1	二阶结果精确性检验	42
4.4.2	敏感性分析	47
4.5	本章小结	48

<b>5</b>	<b>带有相依结构的二维常利率风险模型</b>	<b>50</b>
5.1	带有相依结构的二维常利率风险模型介绍及相关文献回顾 . . . .	50
5.2	不同业务线理赔具有SAI相依结构下的破产概率一阶渐近结果 . .	52
5.3	一些重要引理 . . . . .	53
5.4	主要结论的证明 . . . . .	61
5.5	本章小结 . . . . .	63
<b>6</b>	<b>重尾投资组合损失模型</b>	<b>64</b>
6.1	重尾投资组合损失模型介绍及相关文献回顾 . . . . .	64
6.2	投资组合损失的VaR和CTE的渐近行为 . . . . .	65
6.3	相依结构的一些拓展 . . . . .	66
6.4	一些引理及主要证明 . . . . .	68
6.5	理论结果的数值模拟 . . . . .	72
6.6	本章小结 . . . . .	78
<b>7</b>	<b>总结与展望</b>	<b>80</b>
<b>8</b>	<b>参考文献</b>	<b>82</b>
<b>9</b>	<b>作者在校期间论文录用情况</b>	<b>92</b>
<b>10</b>	<b>致谢</b>	<b>93</b>



# 1 绪论

## 1.1 研究背景

保险,顾名思义,保障免于风险,可以说无风险就无保险.保险起源于14世纪的意大利,最初为海上保险,以保障出海人员的人身财产安全.随着人民对于人身、财产安全意识的不断提高,保险业已经日益成为我们日常生活中的重要环节.保险公司承保,帮助客户分散风险,然而作为最大的风险集散中心,保险公司自身承担着巨大的风险.

保险公司的风险主要分为金融风险、运营风险、灾难性风险(巨灾风险)、非灾难性风险.大量保险公司破产的案例表明,保险公司破产主要原因为巨灾造成的巨额理赔.随着社会科技的飞速发展,以及环境恶化所带来的自然灾害的加剧,重大灾难有愈演愈烈的趋势,保险公司作为承保方进行赔偿责无旁贷,而难以承受的巨额理赔可能会导致其破产.例如,1992年的Andrew飓风,2001年的“911”事件,2005年的Katrina飓风,2008年的汶川地震,2011年的日本大地震,2014年的“MH370”事件等,都产生了巨大的理赔额,尤其是Andrew飓风,其带来的保险损失高达160亿美元.据瑞士再保险公司对诸如此类的重大灾难的统计显示,20世纪70年代,世界范围内年均发生38次,80年代升高至65次,90年代再次升高至128次,而2000年以来达到历史新高至135次,黑天鹅事件的频发给保险公司的安全运转造成了极大的困扰.据资料统计,自20世纪70年代以来,仅美国就有800多家财意险保险公司破产倒闭,且保险公司倒闭的代价也是巨大的,根据已破产的财意险保险公司的数据,完全弥补一家保险公司破产的后果所需要的净成本大约是该公司资产价值的100%,投保人、债权人、职工、社会福利等都要承担损失.因此,对保险公司风险理论进行研究十分重要.而如何在现实世界的复杂环境下精确的度量保险公司面临的风险是现代精算学亟待攻克的主要问题.

破产概率,指保险公司的经营盈余为负值这一事件发生的概率,是度量保险公司风险的重要指标之一.关于破产理论的研究最早源于1903年瑞典精算师Filip Lundberg的博士论文,其作为最初的原型,缺乏一定的理论基础,直到1955年,以Harald Carmér为首的瑞典学派才为Filip Lundberg的破产理论打下了坚实的数学基础,得到了著名的Carmér-Lundberg模型.对于该破产模型的研究给保险公司的安全运营提供了宝贵的指导意见.该模型较为简单基础,后续许多学者都对其进行研究与扩展,加入了许多新的假设使其越来越贴近现实.这一方面的专著可以参见Embrechts等(1997),Rolski等(1999),Asmussen和Albrecher(2010)等.

精算学所需解决的另一个问题是保险公司的准备金的计提.

VaR和CTE是较为理想的工具.VaR,即Value at Risk,首先由摩根大通公司于1993年提出,其表示在给定的置信水平下一个投资组合可能的最大亏损.因此准确评估VaR可以给准备金的计提提供重要的参考.但是VaR存在缺乏次可加

性, 对于极端事件不够敏感等缺陷, 因此Artzner 等(1999)提出了CTE这个概念. CTE, 即Conditional Tail Expectation, 是指所有大于VaR的亏损的期望值, CTE具有单调性, 正齐次性, 转移不变性和次可加性等性质, CTE的出现一定程度上弥补了VaR 对极端事件不够敏感的缺陷. 更多的关于VaR和CTE 的研究可以参见Asimit 等(2011), Joe和Li (2011), Hua和Joe (2011).

在破产理论中, 学者们发现巨额理赔的分布具有重尾的特点, 破产理论中将这种用重尾分布刻画理赔额的风险模型成为重尾风险模型. Embrechts 等(1997)指出, 在财险业中, 重尾分布已经被越来越多的精算研究者认为是合理的理赔额分布假设, 特别是次指数分布及其子分布族, 越来越多的被应用于破产理论分析中. 因此本文将基于重尾风险模型进行研究. 此外, 根据保费计算方式是否连续, 风险模型分为连续时风险模型和离散时风险模型, 下文将做具体介绍.

## 1.2 连续时间风险模型介绍

在连续时风险模型中, 保费是连续收取的. 假设保险公司的理赔额 $\{X_i, i \geq 1\}$ 是一序列的非负随机变量, 其具有共同的分布 $F$ 及有限期望 $\mu_F$ , 理赔到达时间为 $\{\tau_i, i \geq 1\}$ , 理赔到达的时间间隔为 $\{\theta_i, i \geq 1\}$ , 即第 $n$ 个理赔的到达的时刻为 $\tau_n = \sum_{k=1}^n \theta_k, n \geq 1$ , 这构成了一个更新计数过程

$$N(t) = \sup\{n \geq 1 : \tau_n \leq t\}, \quad t \geq 0. \quad (1.1)$$

$\sup \emptyset = 0$ , 记更新函数为 $\lambda(t) = E[N(t)], t \geq 0$ . 则理赔过程表示为

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i e^{-R\tau_i}, \quad t \geq 0,$$

其中 $R_t, t \geq 0$ 为Lévy过程, 表示随机利率. 若 $R_t = rt$ , 则表示常利率模型,  $R_t = 0$ , 则表示不带利率的模型. 记 $x$ 为保险公司的初始资本,  $x \geq 0$ , 记 $c > 0$  为保险费率, 则保险公司到 $t$  时刻的盈余过程为

$$U(t) = x + c \int_0^t e^{-R_s} ds - S(t).$$

在上述设定下, 有限时和无限时的破产概率分别为

$$\psi(x, t) = P\left(\inf_{0 \leq s \leq t} U(s) < 0 \mid U(0) = x\right), \quad t \geq 0$$

和

$$\psi(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(x, t) = P\left(\inf_{s \geq 0} U(s) < 0 \mid U(0) = x\right). \quad (1.2)$$

### 1.3 离散时间风险模型介绍

和连续时风险模型的区别在于, 离散时风险模型的保费收取是离散的, 也就是每隔一段时间收一次保费. 将保险公司的盈余过程分为 $n$ 期, 其中第 $i$ 期的净损失为这段时间的理赔额减去保费收入, 记为 $X_i$ , 其分布函数为 $F_i$ , 同样的考虑时间价值的折现效果, 第 $i$ 期的折现因子记为随机变量 $\Theta_i, i \geq 1$ , 且 $\Theta_i, i \geq 1$ 在0点非退化. 基于以上设定, 有其折现后的累计净损失为

$$S_n = \sum_{i=1}^n \Theta_i X_i, \quad n \geq 1$$

记其最大值为

$$M_n = \max_{1 \leq k \leq n} S_k, \quad n \geq 1.$$

同样的, 记保险公司的初始资本为 $x \geq 0$ , 则其有限时和无限时破产概率分别为

$$\Psi(x, n) = P(M_n > x), \quad n \geq 1$$

和

$$\Psi(x) = P(M_\infty > x).$$

本文主要讨论的是一般化的连续时模型, 例如带有主副理赔的, 带有投资收益的, 或者二维的连续时间风险模型。

### 1.4 重尾分布族介绍

#### 1.4.1 符号约定

为避免重复, 本节将介绍一些本文用到的记号和约定以及几类重要的常用重尾分布族, 其在本文中将多次出现. 如果没有其它特殊声明, 本文的所有的极限关系均为 $x \rightarrow \infty$ . 对于两个正函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ , 它们满足关系

$$l_1 = \liminf \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup \frac{f(x)}{g(x)} = l_2.$$

若 $l_1 = l_2 = 1$ ; 记 $f(x) \sim g(x)$ ; 若 $l_1 \geq 1$ , 记 $f(x) \gtrsim g(x)$ ; 若 $l_2 \leq 1$ 记 $f(x) \lesssim g(x)$ ; 若 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , 记 $f(x) = o(g(x))$ ; 若 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$ , 记 $f(x) = O(g(x))$ ; 若 $0 < \liminf \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$ , 记 $f(x) \asymp g(x)$ . 对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}$ , 记 $x \wedge y = \min\{x, y\}$ ,  $x \vee y = \max\{x, y\}$ .  $x$ 的正部和负部各记为 $x^+ = x \vee 0$  and  $x^- = -x \wedge 0$ . 记 $1_A$ 为集合 $A$ 的示性函数. 此外对于两个正的二元函数 $f(x, t)$ 和 $g(x, t)$ , 记 $f(x, t) \sim g(x, t)$ 对 $t \in A$ 一致成立若

$$\limsup_{t \in A} \left| \frac{f(x, t)}{g(x, t)} - 1 \right| = 0.$$

### 1.4.2 常见重尾分布族及其性质

**定义1.1.** 若服从分布 $V$ 的随机变量 $\xi$ 不存在指数阶矩, 即对于任意的 $s > 0$ , 若

$$Ee^{s\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} dV(x) = \infty,$$

则称随机变量 $\xi$ 或分布 $V$ 为重尾, 记作 $V \in \mathcal{K}$ , 否则, 则称随机变量 $\xi$ 或分布 $V$ 为轻尾.

重尾理论日益成为一个非常重要的研究内容, 它在分支过程, 排队论, 随机游动, 以及风险管理理论等领域都起到至关重要的作用.

由于重尾分布是一个较为广泛的概念, 通常在研究时会具体到其重尾分布的各类子族, 本文将多次用到这些族类, 下面作具体介绍.

**定义1.2.** (长尾分布族) 称支撑在 $R$ 上的分布 $V$ 属于长尾分布族, 记为 $V \in \mathcal{L}$ , 如果对任意给定 $y > 0$ , 有

$$\bar{V}(x+y) \sim \bar{V}(x).$$

$\mathcal{L}$ 族一个重要的子分布族为次指数分布族( $\mathcal{S}$ ). 在破产理论中, 有许多常用的分布都属于次指数分布族, 如Pareto分布, lognormal分布, 参数在 $(0,1)$  之间的Weibull 分布等.

**定义1.3.** (次指数分布族) 称支撑在 $[0, \infty)$ 上的分布 $V$ 属于次指数分布族, 记为 $V \in \mathcal{S}$ , 如果对任意的 $n \geq 2$ , 有

$$\overline{V^{n*}}(x) \sim n\bar{V}(x).$$

其中 $V^{n*}$ 表示 $V$ 的 $n$ 重卷积.

一个重要的次指数分布族族的子组为强次指数族( $\mathcal{S}^*$ ), 其尾略重与次指数族.

**定义1.4.** (强次指数分布族) 称支撑在称支撑在 $[0, \infty)$ 上的分布 $V$ 属于强次指数分布族, 记为 $V \in \mathcal{S}^*$ , 如果有

$$\int_0^x \bar{V}(y) \bar{V}(x-y) dy \sim 2\mu \bar{V}(x).$$

其中 $\mu$ 为期望. 更多的关于 $\mathcal{S}^*$ 的介绍可以参见Foss 等(2011).

**定义1.5.** (局部长尾分布族) 对任意的 $t \in (0, \infty]$ , 我们记 $\Delta(t) = (0, t]$ ,  $x + \Delta(t) = (x, x+t]$ , 进一步的, 对支撑在 $\mathbb{R}$ 上的分布 $V$ , 我们记

$$V(x + \Delta(t)) = V(x, x+t] = V(x+t) - V(x).$$

根据定义, 对任意 $t > 0$ , 支撑在 $\mathbb{R}$ 的分布 $V$ 属于局部长尾分布族, 记为 $\mathcal{L}_{\Delta(t)}$ , 如果 $x \rightarrow \infty$ 时, 有

$$V(x+y+\Delta(t)) \sim V(x+\Delta(t))$$

在  $y \in [0, 1]$  上一致成立, 因此, 这也在  $y$  的任意有限区间一致成立. 进一步的, 一个支撑在  $\mathbb{R}$  上的分布  $V$  是局部长尾的, 记作  $V \in \mathcal{L}_{loc}$ , 如果  $V \in \mathcal{L}_{\Delta(t)}$  对于所有的  $t \in (0, \infty)$  成立.

这个局部长尾族类首先是由 Asmussen 等(2003)提出来的. 最近, Lin (2012a, 2012b) 进一步的提出了下面的二阶次指数分布.

**定义1.6.** (二阶次指数分布族) 一个支撑在  $\mathbb{R}_+$  上且期望为  $\mu_V$  的分布  $V$ , 属于二阶次指数分布族, 记作  $V \in \mathcal{S}_2$ , 如果  $V \in \mathcal{L}_{loc}$  且

$$\overline{V^{2*}}(x) - 2\overline{V}(x) \sim 2\mu_V V(x, x+1].$$

二阶次指数分布  $\mathcal{S}_2$  包含许多经典的重尾分布, 例如参数大于1的Pareto分布, lognormal分布, 参数在(0,1)之间的Weibull分布. 上述重尾分布族类的包含关系为

$$\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{L}_{loc} \subset \mathcal{L}, \mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}.$$

Feller (1969) 引入了一个与  $\mathcal{L}$  族互不包含的分布族, 称为控制变换尾分布族( $\mathcal{D}$ ).

**定义1.7.** (控制变换尾分布族) 称一个支撑在  $R$  上的分布  $V$  属于控制变换尾分布族, 记作  $V \in \mathcal{D}$ , 如果对于任意给定的  $y \in (0, 1)$ , 有

$$\overline{V}(xy) = O(1)\overline{V}(x).$$

Cline和Samorodnitsky (1994) 引入了一个重要的  $\mathcal{L} \cap \mathcal{D}$  族的子集, 称为一致变换尾分布族( $\mathcal{C}$ ).

**定义1.8.** (一致变换尾分布族) 称一个支撑在  $R$  上的分布  $V$  属于一致变换尾分布族, 记作  $V \in \mathcal{C}$ , 如果对于任意给定的  $y \in (0, 1)$ , 有

$$\lim_{y \uparrow 1} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{V}(xy)}{\overline{V}(x)} = 1.$$

人们早期对于重尾分布的研究主要集中于更为特殊的正则变换尾分布族  $\mathcal{R}_{-\alpha}$  和广义正则变换尾分布族  $\text{ERV}(-\alpha, -\beta)$ , 二者皆为  $\mathcal{C}$  族的重要子族.

**定义1.9.** (正则变换尾分布族) 称一个支撑在  $R$  上的分布  $V$  属于正则变换尾分布族, 记作  $V \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ , 如果对于任意给定的  $y > 0$ , 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{V}(xy)}{\overline{V}(x)} = y^{-\alpha}, \quad \alpha \geq 0.$$

**定义1.10.** (广义正则变换尾分布族) 称一个支撑在  $R$  上的分布  $V$  属于广义正则变换尾分布族, 记作  $V \in \text{ERV}(-\alpha, -\beta)$ , 如果对于任意给定的  $y > 0$ , 有

$$y^{-\beta} \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{V}(xy)}{\overline{V}(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{V}(xy)}{\overline{V}(x)} \leq y^{-\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq \beta < \infty.$$

若  $V \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ ,  $\alpha \geq 0$ , 则当  $x \rightarrow \infty$ , 有

$$\bar{V}(x) \sim x^{-\alpha} l(x),$$

其中,  $l(x)$  为慢变函数.

**定义1.11.** (慢变函数) 称非负函数  $l(x)$  是慢变函数, 如果对任意的  $y > 0$ , 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{l(xy)}{l(x)} = 1.$$

**定义1.12.** (快变分布族) 称一个支撑在  $R$  上的分布  $V$  属于快变分布族, 记作  $V \in \mathcal{R}_{-\infty}$ , 如果对于任意给定的  $y > 1$ , 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{V}(xy)}{\bar{V}(x)} = 0.$$

更多的关于快变分布族的内容可以参考 *de Haan (1970)* 等.

上述重尾分布族之间具有如下关系

$$\mathcal{R} \subset \text{ERV} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L}.$$

*Matuszewska* 指数常用在重尾分布相关研究中, 分布  $V$  的上和下 *Matuszewska* 指数分别为

$$J_V^+ = - \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\log \bar{V}_*(y)}{\log y}, \quad J_V^- = - \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\log \bar{V}^*(y)}{\log y} \quad (1.3)$$

其中

$$\bar{V}_*(y) = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{V}(xy)}{\bar{V}(x)}, \quad \bar{V}^*(y) = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{V}(xy)}{\bar{V}(x)}.$$

## 1.5 常见的相依结构介绍

经典的风险模型假设理赔额及时间间隔均为独立的, 然而实际情况是复杂的, 完全独立的假设往往过于理想化, 于是越来越多的破产理论学者提出了若干相依结构去更好的对实际理赔情况进行建模, 下面将介绍一些常见的相依结构.

**定义1.13.** (渐近相依) 称两个随机变量  $\xi_1$  和  $\xi_2$  渐近相依 (*Asymptotical dependence, AD*), 如果有正的尾相依系数

$$\kappa = \lim_{x \rightarrow \infty} P(\xi_1 > x | \xi_2 > x). \quad (1.4)$$

渐近相依意味着与一个变量较大相比, 两个变量同时变大的可能性不可忽略. 更多关于渐近相依的介绍可以参见 *McNeil 等 (2015)*.

**定义1.14.** (二元正则变换) 称支撑在 $[0, \infty)$ 的随机变量 $\xi_1, \xi_2$ 有二元正则变换尾(*bivariate regularly varying, BRV*), 若存在一个属于正则变换尾分布族的分布 $V$  和一个非退化的极限测度 $\nu$ , 使得以下收敛成立

$$\frac{1}{\bar{V}(x)} P\left(\frac{(\xi_1, \xi_2)}{x} \in \cdot\right) \xrightarrow{v} \nu(\cdot) \quad x \in [0, \infty] \setminus \{0\}.$$

假设 $V \in \mathcal{R}_{-\alpha}, \alpha > 0$ , 则记 $(\xi_1, \xi_2) \in \text{BRV}_{-\alpha}(\nu, V)$ . 根据假设, 对于一对随机变量 $(\xi_1, \xi_2) \in \text{BRV}_{-\alpha}(\nu, V)$ , 如果 $\nu(\mathbf{1}, \infty] > 0$ , 则它的边际尾分布满足

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\xi_1 > x)}{\bar{V}(x)} = \nu((1, 0), \infty] > 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\xi_2 > x)}{\bar{V}(x)} = \nu((0, 1), \infty] > 0,$$

并且有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\xi_1 > x, \xi_2 > x)}{\bar{V}(x)} = \nu(\mathbf{1}, \infty] > 0,$$

这意味着(1.4)中的 $\kappa = \frac{\nu(\mathbf{1}, \infty]}{\nu((0, 1), \infty]} > 0$ , 也就是说 $\xi_1$  和 $\xi_2$ 是渐近相依的. 如果 $\kappa = 0$ , 则 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 渐近独立. 由此相依结构, 我们很自然的拓展到准渐近独立.

**定义1.15.** (准渐近独立) 称随机变量 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 是准渐近独立(*quasi-asymptotical independence*)的, 如果有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\xi_1 > x, \xi_2 > x)}{P(\xi_1 > x) + P(\xi_2 > x)} = 0.$$

该相依结构由 *Resnick (1987)* 提出.

**定义1.16.** (强渐近独立) 称两个随机变量 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 强渐近独立, 如果存在 $\rho > 0$ 使得

$$P(\xi_1 > x_1, \xi_2 > x_2) \sim \rho P(\xi_1 > x_1)P(\xi_2 > x_2), \quad (x_1, x_2) \rightarrow (\infty, \infty).$$

下面介绍一种称为负相依的相依结构, 为渐近独立的特殊情况, 主要用来刻画时间间隔的相依关系.

**定义1.17.** (负相依) 称一序列的随机变量 $\{\xi_i; i \in \mathbb{N}\}$  是上负相依(*upper negatively dependent, UND*)的, 如果对于每一个 $n \geq 1$ 和 $x_1, \dots, x_n$ , 有

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n (\xi_i > x_i)\right) \leq \prod_{i=1}^n P(\xi_i > x_i).$$

称一序列的随机变量 $\{\xi_i; i \in \mathbb{N}\}$  是下负相依(*lower negatively dependent, LND*)的, 如果

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n (\xi_i \leq x_i)\right) \leq \prod_{i=1}^n P(\xi_i \leq x_i).$$

称 $\{\xi_i; i \in \mathbb{N}\}$  是负相依(*negatively dependent, ND*)的, 如果上负相依和下负相依均满足. 更多关于负相依的概念参见 *Alam和Saxena (1981)* and *Joag-Dev和Proschan (1983)*等.

上述介绍的为若干类相依结构, 特别的, 保险风险或者金融风险可以通过copula函数来构造相依结构. 在介绍copula之前我们先引入Sklar定理.

**定义1.18.** (*Sklar定理*) 一个随机向量 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)$ 的多元累积分布函数

$$V(x_1, \dots, x_d) = P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_d \leq x_d)$$

可以用边际来分布 $V_i(x_i) = P(\xi_i \leq x_i)$ 和一个copula  $C$ 来表示:

$$V(x_1, \dots, x_d) = C(V_1(x_1), \dots, V_d(x_d)).$$

下面我们通过copula函数构造一些具体的相依结构, 这些copula结构常用于建模保险风险或金融风险.

**定义1.19.** (*二元FGM copula*) 称随机变量 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 服从二元FGM copula, 如果其分布 $u$ 和 $v$ 满足

$$C(u, v) = uv(1 + \alpha(1 - u)(1 - v)), \quad \alpha \in [-1, 1].$$

**定义1.20.** (*二元Clayton copula*) 称随机变量 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 服从二元Clayton copula, 如果其分布 $u$ 和 $v$ 满足

$$C(u, v) = \left( (u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1) \vee 0 \right)^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha \in [-1, 0) \cup (0, \infty).$$

**定义1.21.** (*二元Frank copula*) 称随机变量 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 服从二元Frank copula, 如果其分布 $u$ 和 $v$ 满足

$$C(u, v) = -\frac{1}{\alpha} \log \left( 1 + \frac{(e^{-\alpha u} - 1)(e^{-\alpha v} - 1)}{e^{-\alpha} - 1} \right), \quad \alpha \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

以上介绍了FGM, Clayton, Frank copula均为渐近独立的相依结构, 下面再介绍一种常用的渐近相依结构下的copula.

**定义1.22.** (*二元Gumbel copula*) 称随机变量 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 服从二元Gumbel copula, 如果其分布 $u$ 和 $v$ 满足

$$C(u, v) = \exp \left\{ - \left( (-\log(u))^\alpha + (-\log(v))^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}, \quad \alpha \in [1, \infty).$$

## 1.6 相关研究回顾

本文主要研究的连续时间风险模型的破产概率, 所以在这一小节的文献回顾以连续时间风险模型为主, 离散时间风险模型为辅.



### 1.6.1 连续时间风险模型回顾

经典的连续时间风险模型主要考虑理赔之间互相独立, 如Tang (2004) 基于以上条件考虑了一致变换尾分布 $\mathcal{C}$ 族下更新风险模型的有限时破产概率.

**命题1.1.** 设理赔 $\{X_i, i \geq 1\}$ 是一序列独立同分布非负随机变量, 分布为 $F \in \mathcal{C}$ , 时间间隔 $\{\theta_i, i \geq 1\}$ 是一序列在0点非退化的独立同分布非负随机变量,  $\{X_i, i \geq 1\}$ 和 $\{\theta_i, i \geq 1\}$ 相互独立. 更新计数过程为 $N(t)$  (参见(1.1)), 期望为 $\lambda(t) = EN(t)$ , 保费收入率为 $c$ . 若满足安全负载条件 $\mu = cE\theta_1 - EX_1 > 0$ ,  $F \in \mathcal{C}$ , 且有 $E\theta_1^p < \infty$ 对 $p > J_F^+ + 1$ 成立( $J_F^+$ 参见(1.3)), 则对 $t \in \Lambda$  有如下结论成立,

$$\psi(x; t) \sim \frac{1}{\mu} \int_x^{x+\mu\lambda(t)} \bar{F}(u) du.$$

Leipus和Šiaulys (2007)进一步考虑了次指数 $\mathcal{S}$ 族下的复合泊松模型的有限时破产概率.

**命题1.2.** 设理赔 $\{X_i, i \geq 1\}$ 是一序列独立同分布非负随机变量, 分布为 $F \in \mathcal{S}$ ,  $b = EX < \infty$ . 时间间隔 $\{\theta_i, i \geq 1\}$ 是一序列在0点非退化的独立同分布非负随机变量,  $\{X_i, i \geq 1\}$ 和 $\{\theta_i, i \geq 1\}$ 相互独立 $E\theta = \frac{1}{\lambda}$ , 二阶矩 $E\theta^2 < \infty$ . 保费收入率为 $c$ .  $Q(u) = -\log \bar{F}(u)$  是 $F$ 的风险函数, 设存在一个非负函数 $q$ 使得

$$Q(u) = \int_0^u q(v) dv, \quad \text{且} \quad \limsup_{u \rightarrow \infty} uq(u)/Q(u) =: r < \frac{1}{2},$$

且

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} uq(u) \geq \max \left\{ 1, \frac{1}{1-r} \right\}.$$

则有如下结论

$$\psi(x; t) \sim \frac{1}{\mu} \int_x^{x+\mu\lambda t} \bar{F}(u) du$$

在 $t \in [f(x), \gamma x]$ 上一致成立, 其中 $f(x)$ 是任意无限递增的函数,  $\gamma > 0$ 是任意正常数,  $\mu = c/\lambda - b$ .

Leipus和Šiaulys (2009)弱化了Leipus和Šiaulys (2007)的一些条件考虑了强次指数 $\mathcal{S}^*$ 族下的复合泊松模型的有限时破产概率.

**命题1.3.** 设理赔 $\{X_i, i \geq 1\}$ 是一序列独立同分布非负随机变量, 分布为 $F \in \mathcal{S}^*$ ,  $b = EX < \infty$ . 时间间隔 $\{\theta_i, i \geq 1\}$ 是一序列在0点非退化的独立同分布非负随机变量,  $\{X_i, i \geq 1\}$ 和 $\{\theta_i, i \geq 1\}$ 相互独立 $E\theta = \frac{1}{\lambda}$ . 更新计数过程为 $\Theta t = \sup\{n \geq 1 : \theta_1 + \dots + \theta_n \leq y\}$ . 保费收入率为 $c$ . 安全负载条件 $\mu = cE\theta_1 - EX_1 > 0$ . 假设对任意的 $\delta > 0$ , 存在 $\varepsilon > 0$  使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k > (1+\delta)\lambda t} P\{\Theta(t) = k\} (1+\varepsilon)^k = 0.$$

则有如下结论

$$\psi(x; t) \sim \frac{1}{\mu} \int_x^{x+\mu\lambda t} \bar{F}(u) du$$

在  $t \in [f(x), \infty]$  上一致成立. 其中  $f(x)$  是任意无限递增的函数,  $\mu = c/\lambda - b$ .

上述研究均不考虑利率和投资收益, Wang 等(2018) 进一步考虑了带有投资收益且含有布朗扰动的更新风险模型的有限时破产概率.

**命题1.4.** 设理赔  $\{X_i, i \geq 1\}$  是一序列的非负独立的随机变量, 分布为  $F$ , 事故到达时间间隔  $\{\theta_i, i \geq 1\}$  是一序列非负独立同分布的随机变量, 独立于  $\{X_i, i \geq 1\}$ . 事故到达时间  $\tau_i$  组成了更新计数过程  $N(t) = \sup\{i \geq 0 : \tau_i \leq t\}$ , 其期望为  $\lambda(t) = E(N(t))$ . 扰动项  $\{B(t); t \geq 0\}$  为标准布朗运动,  $\delta$  为波动因子. 投资组合的价格过程为几何 Lévy 过程  $\{e^{R_t}, t \geq 0\}$ , 其中  $\{R_t, t \geq 0\}$  为非负 Lévy 过程. 设  $F \in \mathcal{S}$ , 则对任意给定的  $t > 0$ , 有如下结论成立,

$$\psi(x, t) \sim \int_{0-}^t P(X_1 e^{-R_s} > x) d\lambda(s).$$

### 1.6.2 离散时间风险模型回顾

早期关于离散时间风险模型的研究主要考虑保险净损失是独立同分布的随机变量序列, 如 Resnick 和 Willehens (1991).

**命题1.5.** 设保险净损失  $\{X_i, i \geq 1\}$  是一序列独立同分布的随机变量, 分布为  $F$ , 折现因子  $\{\theta_i, i \geq 1\}$  是任意相依的随机变量序列, 且两个序列之间相互独立. 若  $F \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ ,  $\{\theta_i, i \geq 1\}$  非负, 且符合一定的矩条件, 则有如下结论

$$\Psi(x) \sim \bar{F}(x) \sum_{i=1}^{\infty} E\theta_i^{\alpha}.$$

Tang 和 Tsitsiashvili (2003) 在折现因子为  $\Theta_i = \prod_{j=1}^i Y_j, i \geq 1$  的结构下得到了有限时破产概率的渐近结果, 其中  $\{Y_i, i \geq 1\}$  为一列独立同分布的随机变量.

**命题1.6.** 假设  $\{X_i, i \geq 1\}$  是一列独立同分布的实质值随机变量, 有共同的分布  $F$ ;  $\{Y_i, i \geq 1\}$  是另一列独立同分布非负随机变量且与  $\{X_i, i \geq 1\}$  相互独立. 若  $F \in \mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ , 且对某个常数  $p > J_F^+$  有  $EY_1^p < \infty$ , 则对每个固定的  $n \geq 1$  有

$$P(M_n > x) \sim \sum_{i=1}^n P\left(X_i \prod_{j=1}^i Y_j > x\right).$$

相比于上述独立情形, 保险净损失之间存在相依关系更易于刻画现实情况, Chen 和 Yuen (2009) 考虑了保险净损失  $\{X_i, i \geq 1\}$  两两 QAI 且具有一致变换尾或广义正则变换尾的时的破产概率.

**命题1.7.** 假设 $\{X_i, i \geq 1\}$ 是 $n$ 个两两 $QAI$ 的随机变量, 分布分别为 $F_i \in \mathcal{C}$ ,  $\{\theta_i, i \geq 1\}$ 是一序列非负随机变量, 独立于 $\{X_i, i \geq 1\}$ . 若存在某个 $p > J_{F_1}^+ \vee \cdots \vee J_{F_n}^+$ , 使得对所有的 $1 \leq i \leq n$ 有 $E\theta_i^p < \infty$ , 则有如下结论

$$\Psi(x, n) \sim \sum_{i=1}^n P(\theta_i X_i > x).$$

进一步的, 若 $\{X_i, i \geq 1\}$ 有共同的分布 $F \in \text{ERV}(-\alpha, -\beta)$ ,  $1 < \alpha < \beta < \infty$ , 且有以下任一条件成立

- 对 $0 < \beta < 1$ , 存在 $0 < \epsilon < \alpha$ 使得 $\beta + \epsilon < 1$ ,  $\sum_{i=1}^{\infty} E\theta_i^{\alpha-\epsilon} < \infty$  且  $\sum_{i=1}^{\infty} E\theta_i^{\beta+\epsilon} < \infty$ .
- 对 $\beta > 1$ , 存在 $0 < \epsilon < \alpha$ 使得 $\sum_{i=1}^{\infty} E(\theta_i^{\alpha-\epsilon})^{1/(\beta+\epsilon)} < \infty$  且  $\sum_{i=1}^{\infty} E(\theta_i^{\beta+\epsilon})^{1/(\beta+\epsilon)} < \infty$ .

则有如下结论成立

$$\Psi(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} P(\theta_i X_i > x).$$

Chen (2011)考虑了保险风险和折现因子为FGM相依结构时的有限时破拆概率的渐近行为.

**命题1.8.** 假设 $\{(X_i, Y_i), i \geq 1\}$ 是一列独立同分布的随机向量,  $X$ 和 $Y$ 服从二元FGM分布. 假设 $X$ 的分布 $F \in \mathcal{S}$ ,  $Y$ 为非负随机变量, 分布为 $G$ . 若存在函数 $b(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 满足(1) $b(x) \uparrow \infty$ ; (2) $b(x)/x \downarrow 0$ ; (3) $\bar{G}(b(x)) = o(P(XY > x))$ ; (4) $\bar{F}(x - b(x)) \sim \bar{F}(x)$ , 则对任意固定的 $n \geq 1$ , 有

$$P(M_n > x) \sim P(S_n > x) \sim \sum_{i=1}^n P\left(X_i \prod_{j=1}^i Y_j > x\right).$$

以上是对连续时间和离散时间破产概率模型的简要回顾, 更多文献回顾将在各个章节中展开叙述.

## 1.7 本文结构

本文将对具有相依结构的连续时风险模型进行研究, 在几类重尾分布的理赔额或其他损失的情况下研究破产概率以及保险准备金的渐近行为, 共由以下五个部分组成.

第二章研究带有副理赔的风险模型. 通常一次事故会带来不止一次理赔, 且同一个事故所导致的不同理赔之间存在一定相依关系, 本章基于不同类型的相依结构及理赔分布族类进行研究探索. 考虑 $\{(X_i, Y_i), i \geq 1\}$ 为一序列的独立同分布(独立同分布)的主副理赔,  $\{\theta_i, i \geq 1\}$ 为主理赔发生时刻之间的

时间时间间隔, 分别假设 $\{\theta_i, i \geq 1\}$ 为一序列的非负的LND和ND的随机变量, 其期望为 $\lambda^{-1}$ . 在 $\{\theta_i, i \geq 1\}$ 的两种相依结构下, 本章分别得到 $X$ 和 $Y$ 之间QAI,  $(X, Y) \in \text{BRV}_{-\alpha}(\nu, H)$ ,  $X$ 和 $Y$ 任意相依这三种条件下的无限时破产概率渐近估计.

第三章研究随机利率的带有副理赔的风险模型. 现实世界中的资金流计算需要考虑时间折扣, 因此本章在第二章的基础上引入几何Lévy过程作为利率, 并加入保险公司日常运行中可能发生的随机资金流动作为扰动项. 考虑 $\{(X_i, Y_i), i \geq 1\}$ 为一序列的独立同分布的主副理赔,  $\{\theta_i, i \geq 1\}$ 为主理赔发生时时刻之间的时间时间间隔, 假设 $\{\theta_i, i \geq 1\}$ 之间独立同分布, 本章得到 $X$ 和 $Y$ 满足一种特殊的渐近独立条件下的有限时破产概率的渐近行为, 并用蒙特卡洛模拟验证了渐近结果的精确性.

第四章研究复合更新模型破产概率的二阶渐近行为. 本章考虑每次事故会带来不止一次理赔, 每次理赔均为重尾分布, 每次事故的损失减去与上次事故时间间隔内的保费收入为此次事故的净损失. 考虑第 $i$ 次事故带来的理赔为 $\{X_k^{(i)}, k \geq 1\}$ , 每次事故之间的时间间隔为 $\{\theta_i, i \geq 1\}$ . 假设 $\{X_k^{(i)}, k \geq 1\}$ ,  $\{\theta_i, i \geq 1\}$ 为均一序列独立同分布的非负随机变量, 本章得到破产概率的二阶渐近行为. 相比一阶渐近结果, 二阶更为精确, 本章最后进行蒙特卡洛模拟验证了这一论断.

第五章研究二维常利率风险模型. 考虑到保险公司同时经营多种保险产品, 因此在前述研究的基础上引入了二维风险模型. 由于存在两种保险产品, 本章将破产情形分为三种情况分别进行研究. 考虑 $\{X_i, i \geq 1\}$ 和 $\{Y_i, i \geq 1\}$ 分别为产品1和产品2的理赔,  $\{(X_i, Y_i), i \geq 1\}$ 是一序列的独立同分布的随机变量,  $\{\theta_i^{(1)}, i \geq 1\}$ 和 $\{\theta_i^{(2)}, i \geq 1\}$ 分别为两种产品的理赔到达时间间隔,  $\theta_1^{(1)}$ 和 $\theta_1^{(2)}$ 之间相互独立,  $(\theta_1^{(1)}, \theta_1^{(2)})$ 和 $\{(\theta_i^{(1)}, \theta_i^{(2)}), i \geq 2\}$ 之间相互独立. 在 $X$ 和 $Y$ 之间SAI的情况下, 本章得到三种情形的破产概率渐近行为.

以上章节均为对破产概率的研究, 第六章则从保险公司准备金角度进行分析.

第六章从VaR和CTE角度研究保险公司准备金. 保险公司的亏损主要来自于理赔以及投资的损失, 本章主要考虑折算后的保险公司组合损失, 并基于损失不同的分布及损失之间不同的相依结构, 得到组合损失VaR和CTE的渐近行为. 考虑 $\{X_i, i \geq 1\}$ 为一序列的理赔或投资损失,  $\{\Theta_i, i \geq 1\}$ 为每次损失的折现因子, 则其组合损失为 $S_n = \sum_{i=1}^n \Theta_i X_i$ . 首先假设 $\{\Theta_i, i \geq 1\}$ 为一序列非负的在零点非退化的任意相依的随机变量, 本章分别得到当 $\{X_i, i \geq 1\}$ 任意相依、两两QAI、独立同分布三种情况下的 $\text{VaR}_q(S_n)$ 和 $\text{CTE}_q(S_n)$ 的渐近估计. 然后, 假设 $(X_1, \dots, X_n, \Theta_1, \dots, \Theta_n)$ 服从 $2n$ 维的Sarmanov分布, 分别得到 $\text{VaR}_q(S_n)$ 和 $\text{CTE}_q(S_n)$ 的渐近估计. 最后再次采用蒙特卡洛模拟验证渐近结果的精确性, 并进行分布参数及相依结构的敏感性探讨.

## 2 带有相依结构的主副理赔风险模型

### 2.1 带有相依结构的主副理赔风险模型介绍及相关文献回顾

本章考虑一个连续时无利率的风险模型, 每次事故会带来两种理赔: 其一是事故发生时立即发生的理赔, 称为主理赔, 其二是间隔一段时间才发生的理赔, 称为副理赔. 则保险公司盈余过程为

$$U(t) = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i - \sum_{i=1}^{\infty} Y_i 1_{\{\tau_i + D_i \leq t\}}, \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

在式(2.1)中,  $x \geq 0$  为保险公司的初始资本,  $c \geq 0$  为固定的保费收入率;  $X_i$  表示发生在  $\tau_i$  时刻的第  $i$  个主理赔, 计数过程  $N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{\tau_k \leq t\}}$  表示  $t \geq 0$  时刻之前主理赔发生的次数;  $Y_i$  是相对于第  $i$  个主理赔的副理赔,  $D_i$  表示在事故发生时刻  $\tau_i$  之后的一个不确定的时间延迟. 在这样的设定下, 有限时和无限时的破产概率可以分别表示为

$$\psi(x, t) = P \left( \inf_{0 \leq s \leq t} U(s) < 0 \mid U(0) = x \right), \quad t \geq 0, \quad (2.2)$$

和

$$\psi(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(x, t) = P \left( \inf_{s \geq 0} U(s) < 0 \mid U(0) = x \right). \quad (2.3)$$

这样一个副理赔模型首先由Yuen 等(2005)在保险中进行研究并应用. 比如一艘货轮在海上沉没, 则首先会带来一个巨额的关于货轮已经货物的理赔, 若有人员伤亡, 则可能进一步的带来一些人员伤亡理赔, 这便是一个简单的副理赔模型的应用.

我们关心的是有限时和无限时破产概率的渐近行为, 由于除了在理想分布假设下的少数情况外, 破产概率  $\psi(x, t)$  和  $\psi(x)$  的精确表达式很难得到. 因此主流研究集中在刻画它们的渐近行为. 一些早期的工作主要集中于轻尾的, 并且理赔之间相互独立的情况, 也就是  $\{X_i, i \geq 1\}$  和  $\{Y_i, i \geq 1\}$  均为一序列的独立同分布的轻尾的非负随机变量, 并且它们之间也互相独立; 可以参见Yuen 和Guo (2001), Xiao和Guo (2007), Wu和Li (2012) 等.

显然, 建模总的盈余过程需要处理极端风险, 这种风险来自于边际尾分布以及尾相关性. 在过去的几十年里, 越来越多学者都在研究重尾理赔以及它们之间的相依结构. Tang (2004), Leipus和Šiaulys (2007, 2009), Yang 等(2011), Wang 等(2012), Yang 等(2018) 研究了一些独立的或者相依的风险模型, 但是并未包含副理赔. Li (2013) 研究了相依结构的副理赔模型, 模型中包含正利率, 其主副理赔具有广义变换尾, 且两者之间具有QAI的相依结构. Fu和Li (2016) 进一步的推广了Li (2013) 的结果, 他们允许保险公司将其盈余投入到由无风险和由风险产品构成的投资组合中. 最近, Li (2017) 研究了一种无利率的副理赔模型, 其假设每对主副理赔具有渐近独立的相依结构或者具有BRV的尾.

在本章中, 我们继续考虑上面的副理赔模型(2.1). 具体来说, 我们设定  $\{(X_i, Y_i); i \in \mathbb{N}\}$  是一序列的非负的独立同分布的随机变量, 主、副理赔均为  $(X, Y)$ , 其边际分布分别为  $F, G$ , 期望存在且分别为  $\mu_F, \mu_G$ . 假设计数过程并不一定是更新过程,  $\{N(t); t \geq 0\}$  由同分布的非负的时间间隔  $\{\theta_i = \tau_i - \tau_{i-1}; i \in \mathbb{N}\}$  形成, 其期望存在, 为  $\lambda(t) = EN(t)$ . 延迟时间  $\{D_i; i \in \mathbb{N}\}$  是一序列的非负(在零点非退化)的随机变量. 此外, 我们假设,  $\{(X_i, Y_i); i \in \mathbb{N}\}$  和  $\{N(t); t \geq 0\}$  互相独立.

受到Li (2017)的启发, 我们的目标是推导在一些相依的主副理赔风险模型下的有限时和无限时的破产概率的渐近行为. 我们对Li (2017)的模型进行了一些有意义的调整和扩展使其更实用. 首先, 我们允许时间间隔  $\{\theta_i; i \in \mathbb{N}\}$  之间存在一些特定的相依结构, 也就是说  $\{N(t); t \geq 0\}$  并不需要是更新计数过程. 其次, 在研究无限时破产概率时, 我们对分布  $F$  和  $G$  都进行了拓展, 我们允许它们具有一致变换尾分布, 在这情况下设定主理赔  $X$  和副理赔  $Y$  之间是渐近独立的. 我们还补充了一些主副理赔分布的其他情形, 并且当  $X$  控制  $Y$  时, 允许  $X$  和  $Y$  之间任意相依.

下面我们将给出主要结果和证明.

## 2.2 不同相依结构下的破产概率一阶渐近行为

在这节中, 我们首先对风险模型(2.1)进行一些假设. 本章通篇假设  $\{(X_i, Y_i); i \in \mathbb{N}\}$  是一序列的独立同分布的随机变量, 它们有相同的随机向量  $(X, Y)$ , 其边际分布分别为  $F$  和  $G$ , 均支撑在  $\mathbb{R}_+$  上, 且期望存在, 分别为  $\mu_F$  和  $\mu_G$ ; 假设  $\{\theta_i; i \in \mathbb{N}\}$  是一序列的非负的LND(定义见第一章)的随机变量, 其期望存在, 为  $\lambda^{-1}$ ,  $\{\theta_i; i \in \mathbb{N}\}$  独立于  $\{(X_i, Y_i); i \in \mathbb{N}\}$ ; 假设  $\{D_i; i \in \mathbb{N}\}$  是一序列的非负上有界的随机变量, 也就是说, 存在一个正常数  $M$  使得对于所有的  $i \in \mathbb{N}$ , 有  $D_i \leq M$ . 此外, 像往常一样, 在无利率的风险模型中, 我们需要一个安全载荷条件:

$$\rho := \frac{\lambda(\mu_F + \mu_G)}{c} < 1. \quad (2.4)$$

我们认为  $D_i$  具有上界是合理的, 因为赔款需要在保险责任终止其之前进行理赔, 此外, 安全载荷条件(2.4)排除了  $\psi(x) \equiv 1$  的没有研究意义的情况.

下面是我们第一个主要结论, 主要是研究  $X$  和  $Y$  具有QAI(弱相关)、BRV(强相关)、任意相依这三种相依条件下的无限时破产概率的渐近行为.

**定理2.1.** 考虑副理赔风险模型(2.1).

(i) 假设  $X$  和  $Y$  之间相依结构为QAI. 如果  $F \in \mathcal{C}, G \in \mathcal{C}$ , 则有

$$\psi(x) \sim \frac{\lambda}{c(1-\rho)} \int_x^\infty (\bar{F}(u) + \bar{G}(u)) du. \quad (2.5)$$

(ii) 如果  $(X, Y) \in \text{BRV}_{-\alpha}(\nu, H)$ ,  $\alpha > 1$  且  $\nu(1, \infty] > 0$ , 则有

$$\psi(x) \sim \frac{\lambda \nu(A)}{c(1-\rho)} \int_x^\infty \bar{H}(u) du, \quad (2.6)$$

其中  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x + y > 1\}$ .

(iii) 假设  $X$  和  $Y$  任意相依. 如果  $F \in \mathcal{C}$ ,  $\bar{G}(x) = o(\bar{F}(x))$ , 则有

$$\psi(x) \sim \frac{\lambda}{c(1-\rho)} \int_x^\infty \bar{F}(u) du. \quad (2.7)$$

我们的第二个结论主要关心有限时破产概率的渐近行为. 和 Li (2017) 的定理 2 相比, 我们允许  $N(t)$  是一个准更新过程, 其具有具有 ND 相依结构的同分布的时间间隔  $\{\theta_i; i \in \mathbb{N}\}$  构成, 然而, Li (2017) 要求  $\{N(t); t \geq 0\}$  是一个 Poisson 过程.

**定理 2.2.** 在定理 2.1 的条件下, 假设  $\{\theta_i; i \in \mathbb{N}\}$  是一序列的具有 ND 相依结构的同分布的非负随机变量. 则对于每一个  $t > 0$ , 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x, xt)}{\psi(x)} = 1 - (1 + c(1-\rho)t)^{-\gamma+1} \quad (2.8)$$

成立, 若满足以下任一条件:

- (i)  $X$  和  $Y$  之间 QAI, 且  $F \in \mathcal{R}_{-\alpha}, G \in \mathcal{R}_{-\beta}, \alpha \wedge \beta > 1$ . 在这种情况下,  $\gamma = \alpha \wedge \beta$ ;
- (ii)  $(X, Y) \in \text{BRV}_{-\alpha}(\nu, H)$ ,  $\alpha > 1$ . 在这种情况下,  $\gamma = \alpha$ ;
- (iii)  $X$  和  $Y$  任意相依,  $F \in \mathcal{R}_{-\alpha}, \alpha > 1$ , 且  $\bar{G}(x) = o(\bar{F}(x))$ . 在这种情况下,  $\gamma = \alpha$ .

## 2.3 一些引理及主要证明

在证明两个主要结论之前, 我们首先引用一系列的引理. 考虑一个非标准的风险模型

$$U^*(t) = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i, \quad t \geq 0, \quad (2.9)$$

其中  $\{Z_i = X_i + Y_i; i \in \mathbb{N}\}$  是一序列的独立同分布的非负随机变量, 有着共同的随机变量  $Z$ . 和 (3.2), (4.1) 一样, 定义风险模型 (2.9) 的有限时和无限时的破产概率模型, 其中  $U(\cdot)$  被替换为  $U^*(\cdot)$ , 有限时和无限时破产概率分别记为  $\psi^*(x, t)$  和  $\psi^*(x)$ , 下面第一个引理来自于 Yang 等 (2011) 中定理 2.1 和注 2.2 的结合.

**引理 2.1.** 考虑一个非标准的更新模型 (2.9), 其中, 理赔  $\{Z_i; i \in \mathbb{N}\}$  为一序列的独立同分布的非负随机变量, 其有着共同的分布  $F_Z$ , 期望存在为  $EZ$ ; 时间间隔  $\{\theta_i; i \in \mathbb{N}\}$  是一序列的非负的满足 LND 相依结构的同分布随机变量, 期望存

在, 为  $E\theta_1 = \lambda^{-1}$ ;  $\{Z_i; i \in \mathbb{N}\}$  和  $\{\theta_i; i \in \mathbb{N}\}$  相互独立. 如果  $F_Z \in \mathcal{C}$ , 并且(2.4)成立, 则对于任意的使得  $\lambda(T) = EN(T) > 0$  的  $T$ , 有

$$\psi^*(x, t) \sim \frac{1}{\mu} \int_x^{x+\mu\lambda(t)} \overline{F_Z}(u) du \quad (2.10)$$

对所有的  $t \in [T, \infty)$  一致成立, 其中  $\mu = c\lambda^{-1} - EZ$ .

注:在引理2.1中, (2.10)的一致性意味着

$$\psi^*(x) \sim \frac{1}{\mu} \int_x^\infty \overline{F_Z}(u) du. \quad (2.11)$$

第二个引理来自于Yang 等(2018).

**引理2.2.** 设  $(X, Y)$  是一个随机向量, 其边际分布为  $F$  和  $G$ , 均支撑在  $\mathbb{R}_+$ . 如果  $F \in \mathcal{C}$ , 且  $\overline{G}(x) = o(\overline{F}(x))$ , 则有

$$P(X + Y > x) \sim \overline{F}(x).$$

第三个引理给出了具有ND相依结构的随机变量的基本更新定理, 其来自于Wang和Cheng (2011)的定理1.2.

**引理2.3.** 设  $\{\theta_i; i \in \mathbb{N}\}$  是一序列非负的具有ND相依结构的同分布随机变量, 其期望为  $E\theta_1 = \lambda^{-1}$ , 这构成了一个准更新过程  $N(t)$ , 其期望函数为  $\lambda(t) = EN(t)$ . 则有,  $\lambda(t) \sim \lambda t, t \rightarrow \infty$ .

正如Tang (2004)指出, 很容易就能得出, 在引理2.1的条件下, 通过引理2.3, 将  $\lambda(t)$  替换成  $\lambda t$  则可以得出式(2.10)成立, 但是  $t$  的一致性的范围就变小了.

**引理2.4.** 此外, 在引理2.1的条件下, 如果  $\{\theta_i; i \in \mathbb{N}\}$  是一序列的非负的ND的同分布的随机变量, 期望存在为  $E\theta_1 = \lambda^{-1}$ , 则有

$$\psi^*(x, t) \sim \frac{1}{\mu} \int_x^{x+\mu\lambda t} \overline{F_Z}(u) du$$

对所有的  $t \in [f(x), \infty)$  一致成立, 其中  $f(x)$  是一个任意无限递增的函数, 且  $\mu = c\lambda^{-1} - EZ$ .

现在我们开始证明两个主要结论.

**定理2.1 证明.** 我们首先考虑  $Z = X+Y$  的尾概率. 在情形(i)中, 由于  $X$  和  $Y$  是QAI的, 且  $F \in \mathcal{C}, G \in \mathcal{C}$ , 通过使用Chen和Yuen (2009)的定理3.1, 得

$$P(Z > x) \sim \overline{F}(x) + \overline{G}(x), \quad (2.12)$$

这意味着  $F_Z \in \mathcal{C}$ . 在情形(ii)中, 通过  $(X, Y) \in \text{BRV}_{-\alpha}(\nu, H)$ , 得

$$P(Z > x) = P\left(\frac{(X, Y)}{x} \in A\right) \sim \nu(A)\overline{H}(x), \quad (2.13)$$



这意味着  $F_Z \in \mathcal{R}_{-\alpha} \subset \mathcal{C}$ . 在情形(iii)中, 引用引理2.2得

$$P(Z > x) \sim \overline{F}(x), \quad (2.14)$$

这也证明了  $F_Z \in \mathcal{C}$ . 通过上述三个式子, 结合(2.11), 得

$$\begin{aligned} \psi^*(x) &\sim \frac{\lambda}{c(1-\rho)} \int_x^\infty \overline{F_Z}(u) du \\ &\sim \begin{cases} \frac{\lambda}{c(1-\rho)} \int_x^\infty (\overline{F}(u) + \overline{G}(u)) du, & \text{情形(i)} \\ \frac{\lambda\nu(A)}{c(1-\rho)} \int_x^\infty \overline{H}(u) du, & \text{情形(ii)} \\ \frac{\lambda}{c(1-\rho)} \int_x^\infty \overline{F}(u) du. & \text{情形(iii)} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.15)$$

由(2.16)第一个等式得, 对于任意给定的  $y > 0$ , 有  $\psi^*(x+y) \sim \psi^*(x)$ , 这是由于  $F_Z \in \mathcal{C} \subset \mathcal{L}$ . 然后我们可以使用和Li (2017)一样的方法去证明

$$\psi(x) \sim \psi^*(x). \quad (2.16)$$

因此, 结合(2.15)和(2.16), 我们得到了所希望的(2.5)–(2.7).  $\square$

**定理2.2 证明.** 在定理2.2的条件下, 通过(2.12)–(2.14)我们得到在定理2.2中,  $F_Z \in \mathcal{R}_{-\gamma}$ ,  $\gamma > 1$ . 通过引理2.4 得, 对每一个  $t > 0$ ,

$$\psi^*(x, xt) \sim \frac{\lambda}{c(1-\rho)} \int_x^{x(1+c(1-\rho)t)} \overline{F_Z}(u) du,$$

由此以及(2.15), 根据Karamata定理我们推导出

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi^*(x, xt)}{\psi^*(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_x^{x(1+c(1-\rho)t)} \overline{F_Z}(u) du}{\int_x^\infty \overline{F_Z}(u) du} \\ &= 1 - (1 + c(1-\rho)t)^{-\gamma+1}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

和(2.16)类似, Li (2017)证明了

$$\psi(x, xt) \sim \psi^*(x, xt). \quad (2.18)$$

由此, 结合(2.16)–(2.18), 我们得到了(2.8). 至此, 本章结论证明结束.  $\square$

## 2.4 本章小结

本章估计了具有相依结构的连续时风险模型的破产概率. 模型假定一次事故会带来一次立即发生的主理赔和一次延迟一段时间发生的副理赔, 并对主理赔发生的时间间隔的相依关系做了下负相依和负相依两种假设. 在时间间隔的两种假设下, 根据主副理赔的不同分布以及它们之间不同的相依结构得到有限时和无限时的破产概率渐近估计. 分别假设了主副理赔相依结构为准渐近独立, 具有二元

正则变换尾, 以及任意相依这三种情况, 允许主副理赔属于正则变换尾分布族或者一直变换尾分布族, 且考虑到了主索赔较大可以忽略副理赔的情况.

本章的主要贡献在于提供了充分灵活的模型. 以往的研究往往假设时间间隔为独立同分布的随机变量, 且主副理赔通常不会考虑任意相依的情况. 本章提出了充分多的情形, 且同时得到了有限时和无限时的破产概率渐近估计, 推广了原有的研究结果.

### 3 带有随机收益和扰动项的主副理赔风险模型

#### 3.1 带有随机收益和扰动项的主副理赔风险模型介绍及相关文献回顾

本章考虑一个带有主理赔和副理赔的更新风险模型, 对于每个正整数 $i$ , 第 $i$ 个主理赔为 $X_i$ , 其发生时刻为 $\tau_i$ , 且伴随着一个副理赔 $Y_i$ , 其发生时刻为 $\tau_i + D_i$ , 其中 $D_i$ 为一个不确定的延迟时间. 设 $\{(X_i, Y_i), i \geq 1\}$ 是一序列的独立同分布的非负随机向量, 且具有相同的随机向量 $(X, Y)$ , 边际分布分别为 $F$ 和 $G$ . 主理赔发生时间 $\{\tau_i, i \geq 1\}$ 形成了一个更新计数过程

$$N(t) = \sup\{n \geq 0 : \tau_n \leq t\}, \quad t \geq 0,$$

且期望函数存在, 为 $\lambda(t) = E[N(t)]$ , 将时间间隔记为 $\theta_i = \tau_i - \tau_{i-1}, i \geq 1, \tau_0 = 0$ , 其为独立同分布的非负随机向量. 随机延迟时间 $\{D_i, i \geq 1\}$ 为一序列的同分布非负(在零点可能退化)随机变量具有相同的分布 $H$ . 保险公司可以将其盈余投入到一个无风险的市场中. 投资组合的价格过程被描述为几何Lévy过程 $\{e^{R_t}, t \geq 0\}$ . 这里的 $\{R_t, t \geq 0\}$ 为一个非负Lévy过程, 同时也表示一个随机的累计投资回报收益过程, 其起点为0, 且具有独立平稳增量. 更多关于Lévy过程的讨论可以参见Applebaum (2004), Cont和Tankov (2004), Sato (1999). 则带有随机投资回报的折现盈余过程可以被定义为

$$\begin{aligned} U(t) = & x + \int_0^t c(s)e^{-R_s}ds - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i e^{-R_{\tau_i}} - \sum_{i=1}^{\infty} Y_i e^{-R_{\tau_i + D_i}} 1_{\{\tau_i + D_i \leq t\}} \\ & + \delta \int_0^t e^{-\tilde{R}_s} B(ds), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中 $1_A$ 表示集合 $A$ 的示性函数,  $x \geq 0$ 为保险公司的初始资本,  $c(t) \geq 0$ 是 $t$ 时刻的保费收入密度函数,  $\delta \geq 0$ 是波动因子,  $\tilde{R}_t, t \geq 0$ , 是另一个非负Lévy过程表示随机利息过程, 最后一项为飘逸项, 其中 $B(t), t \geq 0$ 是一个标准布朗运动. 假设 $\{(X_i, Y_i), i \geq 1\}, \{\theta_i, i \geq 1\}, \{D_i, i \geq 1\}, \{R_t, t \geq 0\}, \{\tilde{R}_t, t \geq 0\}$ 以及 $\{B(t), t \geq 0\}$ 之间都相互独立, 但是每一对 $(X_i, Y_i)$ 之间存在一些相依结构. 此外, 假设保费密度函数 $c(t)$ 是有界的, 也就是 $0 \leq c(t) \leq c_0, c_0 > 0, t \geq 0$ . 对于任意固定的时间 $t \geq 0$ , 风险模型(3.1)的有限时破产概率模型为

$$\psi(x; t) = P\left(\inf_{0 \leq s \leq t} U(s) < 0 \mid U(0) = x\right), \quad (3.2)$$

因此其对应的无限时破产概率为 $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(x; t) = \psi(x)$ .

风险模型(3.1)首先由Yuen 等(2005)进行研究, 其假设 $N(t)$ 为Poisson过程并且理赔具有轻尾分布, 在此基础上通过鞅方法建立了不带飘逸项和投资(也就

是 $\delta = 0, R_t = 0$ 的 $\psi(x)$ 的精确结果. 在理赔具有重尾分布的假设下, Li (2013)研究了带有两个确定性线性函数的保费收入过程和随机累计收益率过程的模型, 也就是 $c(t) = c, R_t = rt$ , 其费率为常数 $c > 0$ , 利率为常数 $r > 0$ ; Li (2017a) 考虑了 $c(t) = c, R_t = 0$ 的情况; 这两篇文章都推导了 $\psi(x)$ 的渐近结果. 一些相依结构和随机收益的拓展可以参见Fu 等(2015), Fu和Li (2016), Gao 等(2019)和Yang 等(2019), 这些文章研究了 $\psi(x; t)$  和 $\psi(x)$ 的渐近结果. 上述工作都建立在极端重尾的理赔下, 比如说正则变换尾和一致变换尾. 最近, 通过研究独立同分布下的次指数分布的随机加权求和的尾渐近行为, Yang 和Li (2019) 建立了在模型(3.1) 下的有限时破产概率 $\psi(x; t)$ 的渐近结果, 其具有适度重尾(次指数)理赔但是 $c(t) = c, R_t = rt, \delta = 0$ .

在本章重我们在更一般的模型(3.1)下继续研究有限时破产概率的渐近行为, 其具有次指数理赔, 无风险的投资以及扰动项, 主副理赔具有一定的相依结构. 我们的结果也验证了(3.1) 的有限时破产概率的渐近结果对布朗飘逸项不敏感, 这和不带有副理赔时的结果是一致的, 参见Li (2017b)和Wang 等(2018).

### 3.2 具有弱相关主副理赔的风险模型中破产概率的一阶渐近行为

在给出主要结论前, 本节先提出两个假设. 我们的结论建立在以下假设上, 主要是用来刻画随机变量间的若相依结构.

**假设3.1.** 假设对于所有的 $1 \leq i \neq j \leq n$ , 实值随机变量 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 满足

$$\lim_{x_i \wedge x_j \rightarrow \infty} P(|\xi_i| > x_i | \xi_j > x_j) = 0$$

这个概念和渐近独立相关, 参见Maulik和Resnick (2004), 以上假设这意味着 $\xi_i$ 和 $\xi_j$ 之间即不是过于负相依也不是过于正相依.

**假设3.2.** 假设对实值随机变量 $\xi_1, \dots, \xi_n$ , 存在两个正常数 $x_0$ 和 $M$ , 使得

$$P(|\xi_i| > x_i | \xi_j = x_j \text{ with } j \in J) \leq MP(\xi_i > x_i)$$

对所有的 $i = 1, \dots, n, \emptyset \neq J \subset \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$ 成立, 其中 $x_i \wedge x_j \geq x_0, j \in J$ .

当 $x_j$ 不是 $\xi_j$ 的可能的取值时, 也就是对于一些包含 $x_j$ 的开集有 $P(\xi_j \in \Delta) = 0$ , 则此时的3.2中的条件概率假设被认为是0. 该相依结构由Geluk和Tang (2009) 首先提出, 其和Lehmann (1966)提出的负(或者正)回归相依有关. 正如Geluk和Tang (2009)指出, 如果随机变量 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 服从一个 $n$ 维Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM)联合分布

$$F(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n V_k(x_k) \left( 1 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \gamma_{ij} \bar{V}_i(x_i) \bar{V}_j(x_j) \right), \quad (3.3)$$

其中 $\gamma_{ij}$ 为实值数字使得 $F(x_1, \dots, x_n)$ 是一个适当的 $n$ 维分布,  $V_1, \dots, V_n$ 是绝对连续的边缘分布满足 $V_k(-x) = o(\overline{V_k}(x))$ ,  $k = 1, \dots, n$ , 则假设3.1 和3.2 都被满足. 此外, 假设3.2可以推出假设3.1.

现在我们给出主要结果, 其中假设当 $\xi_1 = X$ ,  $\xi_2 = Y$ ,  $n = 2$ 时, 有假设3.2成立, 且随机延迟时间 $D_i, i \geq 1$ 任意相依.

**定理3.1.** 考虑风险模型(3.1), 其中随机变量 $(X, Y)$ 满足假设3.2,  $F \in \mathcal{S}$ . 设 $T > 0$ 为任意给定时刻使得 $P(\tau_1 \leq T) > 0$ .

(1) 如果 $G \in \mathcal{S}$ ,  $\overline{G}(x) \asymp \overline{F}(x)$ , 则有

$$\psi(x; T) \sim \int_{0-}^T P(Xe^{-Rs} > x) \lambda(ds) + \int_{0-}^T P(Ye^{-Rs} > x) (\lambda * H)(ds), \quad (3.4)$$

其中 $(\lambda * H)(s) = \int_{0-}^s H(s-t) \lambda(dt)$ .

(2) 如果 $\overline{G}(x) = o(\overline{F}(x))$ , 则有

$$\psi(x; T) \sim \int_{0-}^T P(Xe^{-Rs} > x) \lambda(ds). \quad (3.5)$$

我们认为3.1中 $(X, Y)$ 满足3.2的条件可以被简化为

$$\begin{cases} P(|X| > x | Y = y) \leq M \overline{F}(x) \\ P(|Y| > x | X = y) \leq M \overline{G}(x) \end{cases},$$

其中 $x \wedge y \geq x_0$ ,  $M > 0$ ,  $x_0 > 0$ . 下面的推论为定理3.1的简明版本.

**推论3.1.** 在定理3.1的条件下, 假设 $F \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ , 更新过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为齐次Poisson过程, 其强度为 $\lambda > 0$ , 且延迟时间的分布 $H$ 为指数分布, 其强度为 $\lambda_H > 0$ . 设 $T > 0$ 为任意给定时刻使得 $P(\tau_1 \leq T) > 0$ .

(1) 如果 $G \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ ,  $\overline{G}(x) \asymp \overline{F}(x)$ , 则有

$$\psi(x; T) \sim \lambda \left( \frac{e^{T\phi(\alpha)} - 1}{\phi(\alpha)} \overline{F}(x) + \frac{e^{T(\phi(\alpha) - \lambda_H)} - 1}{\lambda_H - \phi(\alpha)} \overline{G}(x) \right), \quad (3.6)$$

其中 $\phi(z) = \log E[e^{-zR_1}]$ .

(2) 如果 $\overline{G}(x) = o(\overline{F}(x))$ , 则有

$$\psi(x; T) \sim \frac{\lambda(e^{T\phi(\alpha)} - 1)}{\phi(\alpha)} \overline{F}(x).$$

### 3.3 随机加权和尾概率的渐近行为

在本节中, 我们研究由具有相依结构的次指数随机变量形成的有限随机加权和的尾渐近行为, 其在证明主要结论的过程中起到了重要作用. 在给出结论前, 我们首先介绍一系列的引理. 设 $(\xi_1^*, \dots, \xi_n^*)$ 为具有独立分量的随机向量, 且具有和 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 相同的边缘分布.

**引理3.1.** (1) 若  $V_1 \in \mathcal{S}$ ,  $V_2 \in \mathcal{L}$ ,  $\overline{V}_1(x) \asymp \overline{V}_2(x)$ , 则  $V_1 * V_2 \in \mathcal{S}$ .  
 (2) 若  $V_1 \in \mathcal{S}$ ,  $\overline{V}_2(x) = o(\overline{V}_1(x))$ , 则  $V_1 * V_2 \in \mathcal{S}$ ,  $\overline{V}_1 * \overline{V}_2(x) \sim \overline{V}_1(x)$ .  
 (3) 设  $(\xi_1, \xi_2)$  是一个实值随机向量具有边缘分布  $V_1$  和  $V_2$ , 且满足假设3.2. 若  $\overline{V}_1 \in \mathcal{S}$ ,  $\overline{V}_2(x) = o(\overline{V}_1(x))$ , 则  $F_{\xi_1+\xi_2} \in \mathcal{S}$ ,

$$P(\xi_1 + \xi_2 > x) \sim \overline{V}_1(x). \quad (3.7)$$

证明. (1) 由  $V_1 \in \mathcal{S} \subset \mathcal{L}$  和  $V_2 \in \mathcal{L}$  得, 对于任意给定的  $y > 0$ , 有,

$$\frac{\overline{V}_1(x-y) + \overline{V}_2(x-y)}{\overline{V}_1(x) + \overline{V}_2(x)} \leq \frac{\overline{V}_1(x-y)}{\overline{V}_1(x)} \vee \frac{\overline{V}_2(x-y)}{\overline{V}_2(x)} \rightarrow 1.$$

进一步由  $\overline{V}_1(x) \asymp \overline{V}_2(x)$  和 Foss 等(2010)的推论3.16得,  $V_1 * V_2 \in \mathcal{S}$ .

本引理第二部分来自于 Foss 等(2010)的推论3.18.

(3) 显然有  $F_{\xi_1+\xi_2} \in \mathcal{S}$  若(3.7)成立. 由  $V_1 \in \mathcal{S} \subset \mathcal{L}$  得, 存在一个函数  $h(x) \uparrow \infty$ , 使得  $h(x) = o(x)$  和

$$\overline{V}_1(x + yh(x)) \sim \overline{V}_1(x) \quad (3.8)$$

对于任意给定得  $y \in \mathbb{R}$  成立.

一方面, 对于足够大的  $x$ , 根据  $\xi_2$  属于  $(-\infty, h(x)]$ ,  $(h(x), x-h(x)]$  和  $(x-h(x), \infty)$ , 我们将尾概率  $P(\xi_1 + \xi_2 > x)$  分成三个部分, 分别记为  $I_1$ ,  $I_2$  和  $I_3$ . 显然, 由(3.8)和  $\overline{V}_2(x) = o(\overline{V}_1(x))$  可得

$$I_1 \leq \overline{V}_1(x - h(x)) \sim \overline{V}_1(x), \quad (3.9)$$

和

$$I_3 \leq \overline{V}_2(x - h(x)) = o(\overline{V}_1(x)). \quad (3.10)$$

至于  $I_2$ , 由假设3.2得, 对于足够大的  $x$ ,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{h(x)}^{x-h(x)} P(\xi_1 > x-u | \xi_2 = u) V_2(du) \\ &\leq MP(\xi_1^\perp + \xi_2^\perp > x, h(x) < \xi_2^\perp \leq x-h(x)) \\ &= M \left( P(\xi_1^\perp + \xi_2^\perp > x) - P(\xi_1^\perp + \xi_2^\perp > x, \xi_2^\perp \leq h(x)) \right. \\ &\quad \left. - P(\xi_1^\perp + \xi_2^\perp > x, \xi_2^\perp > x-h(x)) \right) \\ &=: M(I_{21} - I_{22} - I_{23}). \end{aligned}$$

显然, 由本引理第二部分可得  $I_{21} \sim \overline{V}_1(x)$ , 且类似于(3.10)可得,  $I_{23} = o(\overline{V}_1(x))$ . 根据控制收敛定理以及  $V_1 \in \mathcal{S} \subset \mathcal{L}$  得  $I_{22} \sim \overline{V}_1(x)$ . 因此有,

$$I_2 = o(\overline{V}_1(x)). \quad (3.11)$$

结合(3.9)–(3.11), 我们得到了上界

$$P(\xi_1 + \xi_2 > x) \lesssim \overline{V}_1(x).$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
 P(\xi_1 + \xi_2 > x) &\geq P(\xi_1 + \xi_2 > x, \xi_2 \geq -h(x)) \\
 &\geq P(\xi_1 > x + h(x), \xi_2 \geq -h(x)) \\
 &= P(\xi_1 > x + h(x)) - P(\xi_1 > x + h(x), \xi_2 < -h(x)) \\
 &=: J_1 - J_2.
 \end{aligned}$$

显然  $J_1 \sim \overline{V}_1(x)$ , 再进一步由假设3.2和(3.8)得,

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \int_{x+h(x)}^{\infty} P(\xi_2 < -h(x) | \xi_1 = u) V_1(du) \\
 &\leq MP(\xi_2 > h(x)) \overline{V}_1(x + h(x)) \\
 &= o(\overline{V}_1(x)).
 \end{aligned}$$

因此, 可得下界为

$$P(\xi_1 + \xi_2 > x) \gtrsim \overline{V}_1(x).$$

□

**引理3.2.** 设  $\xi_1, \dots, \xi_n$  为  $n$  个实值随机变量分别具有分布函数  $V_1, \dots, V_n$ . 如果满足假设3.1, 则对每一个集合  $\emptyset \neq I \subsetneq \{1, \dots, n\}$ , 每一个  $j \in \{1, \dots, n\} \setminus I$ , 和任意的  $b > 0$ , 有,

$$\lim_{x \wedge y \rightarrow \infty} \sup_{c_i \in [0, b], i \in I} P\left(\left|\sum_{i \in I} c_i \xi_i\right| > x \mid \xi_j > y\right) = 0.$$

证明. 显然,

$$\sup_{c_i \in [0, b], i \in I} P\left(\left|\sum_{i \in I} c_i \xi_i\right| > x \mid \xi_j > y\right) \leq \sum_{i \in I} P\left(|\xi_i| > \frac{x}{bn} \mid \xi_j > y\right),$$

由假设3.1得, 当  $x \wedge y \rightarrow \infty$  时, 其趋于0.

□

**引理3.3.** 设  $\xi_1, \dots, \xi_n$  是  $n$  个实值随机变量分别具有分布函数  $V_1, \dots, V_n$ . 如果满足假设3.1且  $V_i \in \mathcal{L}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , 则有

$$P\left(\sum_{i=1}^n c_i \xi_i > x\right) \gtrsim \sum_{i=1}^n P(c_i \xi_i > x).$$

对任意的  $0 < a \leq b < \infty$  成立, 且对所有的  $c_i \in [a, b], i = 1, \dots, n$ , 一致成立.

证明. 回顾(3.8)中的函数 $h(\cdot)$ , 由Bonferroni不等式得

$$\begin{aligned}
 P\left(\sum_{i=1}^n c_i \xi_i > x\right) &\geq P\left(\sum_{i=1}^n c_i \xi_i > x, \bigcup_{k=1}^n (c_k \xi_k > x + h(x))\right) \\
 &\geq \sum_{k=1}^n P\left(\sum_{i=1}^n c_i \xi_i > x, c_k \xi_k > x + h(x)\right) \\
 &\quad - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(c_i \xi_i > x + h(x), c_j \xi_j > x + h(x)) \\
 &=: I_1 - I_2.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

由假设3.1和(3.8)得, 对每个 $1 \leq i < j \leq n$ , 有

$$\begin{aligned}
 P\left(c_i \xi_i > x + h(x), c_j \xi_j > x + h(x)\right) &\leq P\left(\xi_i > \frac{x}{c_i}, \xi_j > \frac{x}{c_j}\right) \\
 &= o(1)P(c_i \xi_i > x),
 \end{aligned}$$

对所有得 $c_i \in [a, b]$ 一致成立, 由此可得

$$I_2 = o(1) \sum_{i=1}^n P(c_i \xi_i > x). \tag{3.13}$$

至于 $I_1$ , 由引理3.2和(3.8)得,

$$\begin{aligned}
 I_1 &\geq \sum_{k=1}^n P\left(\sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \xi_i > -h(x), c_k \xi_k > x + h(x)\right) \\
 &= \sum_{k=1}^n P(c_k \xi_k > x + h(x)) - \sum_{k=1}^n P\left(\sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \xi_i \leq -h(x), c_k \xi_k > x + h(x)\right) \\
 &\sim \sum_{k=1}^n P(c_k \xi_k > x)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

对所有的 $c_i \in [a, b], i = 1, \dots, n$ , 一致成立. 因此由(3.12)–(3.14)可得我们想要的结果.  $\square$

**引理3.4.** 设 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 是 $n$ 个实值随机变量分别具有分布函数 $V_1, \dots, V_n$ . 如果满足假设3.2,  $V_i \in \mathcal{L}$ 且 $\bar{V}_i(x) \asymp \bar{V}(x)$ ,  $V \in \mathcal{S}, i = 1, \dots, n$ , 则存在两个正的 $x_0$ 和 $d_n$ 使得对任意的 $0 < a \leq b < \infty$ 和每一个 $k = 1, \dots, n$ , 有

$$P\left(\sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \xi_i > x \middle| \xi_k = x_k\right) \leq d_n P\left(\sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \xi_i^\perp > x\right) \tag{3.15}$$

对所有的 $x \wedge x_k \geq x_0$ 和 $c_i \in [a, b], i = 1, \dots, n$ 成立.

证明. 我们用 $n$ 的归纳法来证明. 对于 $n = 2$ , 由假设3.2可得上述结果成立. 假设(3.15)对 $n - 1$ 成立, 我们去证明其对 $n$ 成立. 不失一般性, 我们只证明



当  $k = n$  时的(3.15). 显然,

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i \xi_i > x \middle| \xi_n = x_n\right) &= P\left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i \xi_i > x, \bigcup_{k=1}^{n-1} (\xi_k \leq x_0) \middle| \xi_n = x_n\right) \\ &\quad + P\left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i \xi_i > x, \bigcap_{k=1}^{n-1} (\xi_k > x_0) \middle| \xi_n = x_n\right) \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

根据归纳假设和  $V_i \in \mathcal{L}$ , 我们可得对所有的  $x_n \geq x_0$ , 足够大的  $x$  和所有的  $c_i \in [a, b], i = 1, \dots, n-1$ , 有

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \sum_{k=1}^{n-1} P\left(\sum_{i=1, i \neq k}^{n-1} c_i \xi_i > x - c_k x_0 \middle| \xi_n = x_n\right) \\ &\leq d_{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} P\left(\sum_{i=1, i \neq k}^{n-1} c_i \xi_i^\perp > x - c_k x_0\right) \\ &\lesssim d_{n-1} (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} P(c_i \xi_i^\perp > x - b x_0) \\ &\sim d_{n-1} (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} P(c_i \xi_i^\perp > x) \\ &\sim d_{n-1} (n-1) P\left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i \xi_i^\perp > x\right), \end{aligned} \quad (3.17)$$

其中第三步和最后一步我们用了独立次指数分布的常数加权和的一致收敛性参见Tang和Yuan (2014)的Lemma 1. 关于  $I_2$ , 注意到假设3.2条件  $\xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ , 我们可得对所有的  $c_i \in [a, b], i = 1, \dots, n-1$ ,

$$I_2 \leq MP \left( c_1 \xi_1^\perp + \sum_{i=2}^{n-1} c_i \xi_i > x, \bigcap_{k=2}^{n-1} (\xi_k > x_0) \right).$$

重复上述步骤, 我们最终得到了对足够大的  $x$  和所有的  $c_i \in [a, b], i = 1, \dots, n-1$ , 有

$$I_2 \leq M^{n-1} P\left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i \xi_i^\perp > x\right). \quad (3.18)$$

将(3.17)和(3.18)带入到(3.16)中可得当  $k = n$  时的(3.15).  $\square$

**引理3.5.** 设  $\xi_1^\perp, \dots, \xi_n^\perp$  是  $n$  个独立的非负随机变量分别具有分布函数  $V_1, \dots, V_n$ . 设  $V_i \in \mathcal{L}$  和  $\overline{V}_i(x) \asymp \overline{V}(x)$ ,  $V \in \mathcal{S}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , 则对任意的函数  $h(x) \uparrow \infty$ , 任意的  $k = 1, \dots, n$ , 和  $0 < a \leq b < \infty$ , 有

$$P\left(\sum_{i=1}^n c_i \xi_i^\perp > x, h(x) < c_k \xi_k^\perp \leq x\right) = o(1) \sum_{i=1}^n P(c_i \xi_i^\perp > x). \quad (3.19)$$

对所有的  $c_i \in [a, b], i = 1, \dots, n$  一致成立.

证明. 显然, (3.19)左侧的概率有上界

$$\begin{aligned}
 & \int_0^x P\left(x - y < \sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \xi_i^\perp \leq x\right) P(c_k \xi_k^\perp \in dy) \\
 & + P\left(\sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \xi_i^\perp > x\right) P(c_k \xi_k^\perp > h(x)) \\
 = & P\left(\sum_{i=1}^n c_i \xi_i^\perp > x\right) - \left(P\left(\sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \xi_i^\perp > x\right) P(c_k \xi_k^\perp \leq x) + P(c_k \xi_k^\perp > x)\right) \\
 & + P\left(\sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \xi_i^\perp > x\right) P(c_k \xi_k^\perp > h(x)) \\
 =: & I_1 - I_2 + I_3.
 \end{aligned}$$

由Tang和Yuan (2014)的引理1得,

$$I_1 \sim \sum_{i=1}^n P(c_i \xi_i^\perp > x)$$

对所有的  $c_i \in [a, b]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , 一致成立. 再次利用Tang和Yuan (2014)的引理1, 得

$$\begin{aligned}
 I_3 & \lesssim \sum_{i=1}^n P(c_i \xi_i^\perp > x) \cdot \overline{V}_k\left(\frac{h(x)}{b}\right) \\
 & = o(1) \sum_{i=1}^n P(c_i \xi_i^\perp > x)
 \end{aligned}$$

对所有的  $c_i \in [a, b]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , 一致成立. 类似的, 有

$$I_2 \sim \sum_{i=1}^n P(c_i \xi_i^\perp > x)$$

对所有的  $c_i \in [a, b]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , 一致成立. 因此, 由上面的估计可得(3.19)成立.  $\square$

**引理3.6.** 在引理3.4的条件下, 对于  $0 < a \leq b < \infty$ , 有

$$P\left(\sum_{i=1}^n c_i \xi_i > x\right) \lesssim \sum_{i=1}^n P(c_i \xi_i > x) \quad (3.20)$$

对所有的  $c_i \in [a, b]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , 一致成立.

证明. 注意到  $P(\sum_{i=1}^n c_i \xi_i > x) \leq P(\sum_{i=1}^n c_i \xi_i^+ > x)$ , 我们只要证明对于非负  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , 有(3.20)成立. 回顾  $h(\cdot)$  和(3.8), 可得

$$\begin{aligned}
 P\left(\sum_{i=1}^n c_i \xi_i > x\right) & \leq \sum_{i=1}^n P(c_i \xi_i > x - h(x)) \\
 & \quad + P\left(\sum_{i=1}^n c_i \xi_i > x, h(x) < \bigvee_{k=1}^n c_k \xi_k \leq x - h(x)\right) \\
 =: & I_1 + I_2.
 \end{aligned}$$

由(3.8)得,  $I_1 \sim \sum_{i=1}^n P(c_i \xi_i > x)$  对所有的  $c_i \in [a, b]$ ,  $i = 1, \dots, n$  一致成立. 至于  $I_2$ , 由引理3.4和3.5得, 对足够大的  $x$ , 有

$$\begin{aligned}
 I_2 &\leq \sum_{k=1}^n P \left( \sum_{i=1}^n c_i \xi_i > x, h(x) < c_k \xi_k \leq x - h(x) \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \int_{\frac{h(x)}{c_k}}^{\frac{x-h(x)}{c_k}} P \left( \sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \xi_i > x - c_k y \middle| \xi_k = y \right) V_k(dy) \\
 &\leq d_n \sum_{k=1}^n \int_{\frac{h(x)}{c_k}}^{\frac{x-h(x)}{c_k}} P \left( \sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \xi_i^* > x - c_k y \right) V_k(dy) \\
 &= d_n \sum_{k=1}^n P \left( \sum_{i=1}^n c_i \xi_i^* > x, h(x) < c_k \xi_k^* \leq x - h(x) \right) \\
 &= o(1) \sum_{i=1}^n P(c_i \xi_i > x)
 \end{aligned}$$

对所有的  $c_i \in [a, b]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , 一致成立因此可得(3.20)成立.  $\square$

结合引理3.3和3.6 可以到第一个常权重加权和的尾概率的一致渐近结果.

**命题3.1.** 在引理3.4的条件下, 对  $0 < a \leq b < \infty$ , 有

$$P \left( \sum_{i=1}^n c_i \xi_i > x \right) \sim \sum_{i=1}^n P(c_i \xi_i > x)$$

对所有的  $c_i \in [a, b]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , 一致成立.

设  $\xi_1, \dots, \xi_n$  是  $n$  个非负随机变量满足假设3.2,  $\Theta_1, \dots, \Theta_n$  是  $n$  个任意相依的, 在0点非退化的, 非负随机变量, 且独立于  $\xi_1, \dots, \xi_n$ . 若  $\Theta_1, \dots, \Theta_n$  有上界, 则对每一个  $1 \leq i \neq j \leq n$ , 有

$$\begin{aligned}
 P(\Theta_i \xi_i > x, \Theta_j \xi_j > x) &\leq P \left( \Theta_i \xi_i > x, \xi_j > \frac{x}{b} \right) \\
 &= \int_0^b \int_{\frac{x}{b}}^\infty P \left( \xi_i > \frac{x}{u} \middle| \xi_j = y \right) P(\xi_j \in dy) P(\Theta_i \in du) \\
 &\leq M \int_0^b \int_{\frac{x}{b}}^\infty P \left( \xi_i > \frac{x}{u} \right) P(\xi_j \in dy) P(\Theta_i \in du) \\
 &= M P \left( \xi_j > \frac{x}{b} \right) P(\Theta_i \xi_i > x) \\
 &= o(1) P(\Theta_i \xi_i > x),
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

其中  $b > 0$  是  $\Theta_1, \dots, \Theta_n$  共同的上界.

利用(3.21)和命题3.1, 模仿Tang和Yuan (2014)的定理1的证明可以建立具有相依次指数分布的非负随机加权和的渐近结果.

**命题3.2.** 设 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 是 $n$ 个非负随机变量分别具有分布函数 $V_1, \dots, V_n$ , 且满足假设3.2; 设 $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ 是 $n$ 个非负的任意相依的随机变量, 有上界, 在0点非退化, 且独立于 $\xi_1, \dots, \xi_n$ . 若 $V_i \in \mathcal{L}$ ,  $\bar{V}_i(x) \asymp \bar{V}(x)$ ,  $V \in \mathcal{S}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , 则

$$P\left(\sum_{i=1}^n \Theta_i \xi_i > x\right) \sim \sum_{i=1}^n P(\Theta_i \xi_i > x).$$

现在我们给出本节的最后一个结果, 该结果为命题3.2的拓展.

**命题3.3.** 假设满足命题3.2的所有条件. 设 $\eta$ 是一个实值随机变量且独立于其他所有变量. 若 $P(\eta > x) = o(\bar{V}(\frac{x}{c}))$  对所有的 $c > 0$ 成立, 则有

$$P\left(\sum_{i=1}^n \Theta_i \xi_i + \eta > x\right) \sim \sum_{i=1}^n P(\Theta_i \xi_i > x).$$

证明. 一方面, 由于 $\Theta_i$ 在0点非退化, 所以存在一些小的 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $P(\Theta_1 \geq \varepsilon_0) > 0$ . 对于这样的 $\varepsilon_0$ , 由条件 $P(\eta > x) = o(\bar{V}(\frac{x}{\varepsilon_0}))$ 可得, 对于任意的 $\varepsilon > 0$ , 存在足够大的 $x_0$ 使得 $P(\eta > x) \leq \varepsilon \bar{V}(\frac{x}{\varepsilon_0})$  对所有的 $x \geq x_0$ 成立. 构造一个新的非负随机变量 $\zeta$ , 独立于其他所有变量, 且具有尾分布

$$P(\zeta > x) = \begin{cases} \varepsilon \bar{V}(\frac{x}{\varepsilon_0}), & x \geq x_0, \\ 1, & x < x_0. \end{cases}$$

显然,  $F_\zeta \in \mathcal{S}$ ,  $\eta \leq_{s.t.} \zeta$ . 进一步由命题3.2得,

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^n \Theta_i \xi_i + \eta > x\right) &\leq P\left(\sum_{i=1}^n \Theta_i \xi_i + \zeta > x\right) \\ &\sim \sum_{i=1}^n P(\Theta_i \xi_i > x) + \varepsilon \bar{V}\left(\frac{x}{\varepsilon_0}\right) \\ &\sim \sum_{i=1}^n P(\Theta_i \xi_i > x), \end{aligned}$$

让 $x \rightarrow \infty$ 得 $\varepsilon \downarrow 0$ , 其中最后一步我们用了 $\bar{V}_1(x) \asymp \bar{V}(x)$ 以及 $P(\Theta_1 \xi_1 > x) \geq P(\Theta_1 \xi_1 > x, \Theta_1 \geq \varepsilon_0) \geq P(\Theta_1 \geq \varepsilon_0) \bar{V}(\frac{x}{\varepsilon_0})$ .

另一方面, 根据Fatou引理和命题3.2得,

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\sum_{i=1}^n \Theta_i \xi_i + \eta > x)}{\sum_{i=1}^n P(\Theta_i \xi_i > x)} &\geq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\sum_{i=1}^n \Theta_i \xi_i - \eta^- > x)}{\sum_{i=1}^n P(\Theta_i \xi_i > x)} \\ &\geq \int_{0-}^{\infty} \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\sum_{i=1}^n \Theta_i \xi_i > x + u)}{\sum_{i=1}^n P(\Theta_i \xi_i > x)} P(\eta^- \in du) \\ &= \int_{0-}^{\infty} \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n P(\Theta_i \xi_i > x + u)}{\sum_{i=1}^n P(\Theta_i \xi_i > x)} P(\eta^- \in du) \\ &\geq \int_{0-}^{\infty} \liminf_{x \rightarrow \infty} \bigwedge_{i=1}^n \frac{P(\Theta_i \xi_i > x + u)}{P(\Theta_i \xi_i > x)} P(\eta^- \in du) \\ &= 1, \end{aligned}$$

其中最后一步我们用了 $F_{\Theta_i \xi_i} \in \mathcal{L}$ (由Tang和Yuan (2014)的引理2得到). □

注3.1. 若不是所有的权重都在0点退化, 则命题3.2和3.3仍然成立.

### 3.4 一些引理及主要证明

将(3.1)右侧最后一项随机积分记为

$$p(t) = \int_0^t e^{-\tilde{R}_s} B(ds), \quad (3.22)$$

对于任意的 $t \geq 0$ , 记其上确界和下确界为

$$p^*(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} p(s) \geq 0 \quad \text{and} \quad p_*(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} p(s) \leq 0.$$

在证明主要结论之前, 我们首先建立两个引理. 第一个引理给出了上述随机积分上确界和下确界的分布.

**引理3.7.** 设 $\{\tilde{R}_t, t \geq 0\}$ 是一个Lévy过程,  $\{B(t), t \geq 0\}$ 为一个Brownian运动且独立于 $\{\tilde{R}_t, t \geq 0\}$ . 则对任意给定的 $T > 0$ 和任意的 $x > 0$ , 有,

$$P(p^*(T) > x) = P(p_*(T) < -x) = 2P(Z\sqrt{\xi(T)} > x), \quad (3.23)$$

其中 $Z$ 是一个标准正态分布随机变量且独立于 $\xi(t) = \int_0^t e^{-2\tilde{R}_s} ds, t \geq 0$ .

若 $\tilde{R}_t = rt, r > 0$ , 则引理3.7可以简化为Piterbarg (1996)的定理D.3(ii).

引理3.7证明. 因为 $\{\tilde{R}_t, t \geq 0\}$ 独立于 $\{B(t), t \geq 0\}$ , 根据Packham 等(2013)的命题C.2, (3.22)中的随机积分 $p(t)$ 是一个连续的Ocone 鞅; 也就是, 它可以被表示为一个时间变化的Brownian运动

$$p(t) = W([p, p]_t) = W(\xi(t)), \quad t \geq 0, \quad (3.24)$$

其中Brownian运动 $\{W(t), t \geq 0\}$ 独立于 $\{\xi(t), t \geq 0\}$ ,  $[p, p]_t$ 是 $p(t)$ 的quadratic变量. 由(3.24)得

$$p^*(T) \stackrel{d}{=} -p_*(T) \stackrel{d}{=} |Z|\sqrt{\xi(T)},$$

这和(3.23)一致. □

进一步的, 若 $\{\tilde{R}_t, t \geq 0\}$ 是一个非负Lévy过程, 则 $\xi(T) \leq T$ 对任意给定的 $T > 0$ 成立. 因此, 由引理3.7得对任意 $x > 0$ , 有,

$$\begin{aligned} P(\delta p^*(T) > x) &= P(\delta p_*(T) > x) \\ &\leq 2\bar{\Phi}\left(\frac{x}{\delta\sqrt{T}}\right), \end{aligned} \quad (3.25)$$

其中 $\Phi$ 是标准高斯分布. 因此, 通过模仿Wang 等(2018)定理1.1得证明, 我们推出

**引理3.8.** 设 $\{\xi_i, i \geq 1\}$ 是一序列独立同分布的非负随机变量具有共同的分布属于 $\mathcal{S}$ , 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个更新过程且到达时间为 $\tau_1, \tau_2, \dots$ , 期望函数为 $\lambda(t)$ , 设 $\{R_t, t \geq 0\}$ 和 $\{\tilde{R}_t, t \geq 0\}$ 是两个非负Lévy过程. 假设 $\{\xi_i, i \geq 1\}$ ,  $\{N(t), t \geq 0\}$ ,  $\{R_t, t \geq 0\}$ 以及 $\{\tilde{R}_t, t \geq 0\}$ 互相独立. 则, 对于任意使得 $P(\tau_1 \leq T) > 0$ 的 $T > 0$ , 有

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 0} \frac{P\left(\sum_{i=1}^{N(T)} \xi_i e^{-R_{\tau_i}} + p^*(T) > x, N(T) > m\right)}{\int_{0-}^T P(\xi_1 e^{-R_s} > x) \lambda(ds)} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 0} \frac{\sum_{n=m+1}^{\infty} \sum_{i=1}^n P(\xi_i e^{-R_{\tau_i}} > x, N(T) = n)}{\int_{0-}^T P(\xi_1 e^{-R_s} > x) \lambda(ds)} = 0. \end{aligned}$$

**定理3.1 证明** 我们首先证明第一部分. 第一步处理 $\psi(x; T)$ 的上界. 选择足够大的 $m$ , 得对所有的 $x > 0$ , 有

$$\begin{aligned} \psi(x; T) &\leq P\left(\sum_{i=1}^{N(T)} X_i e^{-R_{\tau_i}} + \sum_{i=1}^{N(T)} Y_i e^{-R_{\tau_i+D_i}} 1_{(\tau_i+D_i \leq T)} + p^*(T) > x\right) \\ &= \left(\sum_{n=1}^m + \sum_{n=m+1}^{\infty}\right) \cdot \\ &\quad P\left(\sum_{i=1}^n X_i e^{-R_{\tau_i}} + \sum_{i=1}^n Y_i e^{-R_{\tau_i+D_i}} 1_{(\tau_i+D_i \leq T)} + p^*(T) > x, N(T) = n\right) \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{3.26}$$

至于 $I_2$ , 根据命题3.1得,

$$P(X + Y > x) \sim \bar{F}(x) + \bar{G}(x) \sim P(X^* + Y^* > x),$$

由引理3.1(1)可得 $F_{X+Y} \in \mathcal{S}$ , 且由 $\bar{F}(x) \asymp \bar{G}(x)$ 得,  $P(X + Y > x) = O(\bar{F}(x))$ . 进一步得到

$$\begin{aligned} & \int_{0-}^T P((X + Y)e^{-R_s} > x) \lambda(ds) \\ &= \int_{0-}^T \int_0^{\infty} \frac{P(X + Y > xe^u)}{\bar{F}(xe^u)} \cdot \bar{F}(xe^u) P(R_s \in du) \lambda(ds) \\ &= O(1) \int_{0-}^T P(Xe^{-R_s} > x) \lambda(ds). \end{aligned}$$

上述结果结合引理3.8可推出

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{I_2}{\int_{0-}^T P(Xe^{-R_s} > x) \lambda(ds)} \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=m+1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^n (X_i + Y_i) e^{-R_{\tau_i}} + p^*(T) > x, N(T) = n\right)}{\int_{0-}^T P(Xe^{-R_s} > x) \lambda(ds)} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.27}$$

现在我们处理 $I_1$ . 对每一个 $1 \leq n \leq m$ ,

$$\begin{aligned} & P \left( \sum_{i=1}^n X_i e^{-R_{\tau_i}} + \sum_{i=1}^n Y_i e^{-R_{\tau_i+D_i}} 1_{(\tau_i+D_i \leq T)} + p^*(T) > x, N(T) = n \right) \\ & \leq P \left( \sum_{i=1}^n X_i e^{-R_{\tau_i}} 1_{(N(T)=n)} + \sum_{i=1}^n Y_i e^{-R_{\tau_i+D_i}} 1_{(\tau_i+D_i \leq T, N(T)=n)} + p^*(T) > x \right). \end{aligned}$$

若 $P(N(T) = n) > 0$ , 则第一个 $n$ 项权重在0点非退化. 注意到(3.25)和 $F \in \mathcal{S}$ , 可得对所有的 $c > 0$ ,

$$P(p^*(T) > x) = o \left( \bar{F} \left( \frac{x}{c} \right) \right).$$

进一步根据命题3.3和注3.1得,

$$\begin{aligned} & P \left( \sum_{i=1}^n X_i e^{-R_{\tau_i}} + \sum_{i=1}^n Y_i e^{-R_{\tau_i+D_i}} 1_{(\tau_i+D_i \leq T)} + p^*(T) > x, N(T) = n \right) \\ & \lesssim \sum_{i=1}^n P(X_i e^{-R_{\tau_i}} 1_{(N(T)=n)} > x) + \sum_{i=1}^n P(Y_i e^{-R_{\tau_i+D_i}} 1_{(\tau_i+D_i \leq T, N(T)=n)} > x) \quad (3.28) \end{aligned}$$

显然, 若 $P(N(T) = n) = 0$ , 则(3.28)的两侧都为0, 且 $\lesssim$ 可以理解为 $=$ . 因此,

$$\begin{aligned} I_1 & \lesssim \left( \sum_{n=1}^{\infty} - \sum_{n=m+1}^{\infty} \right) \sum_{i=1}^n \left( P(X e^{-R_{\tau_i}} 1_{(N(T)=n)} > x) + P(Y e^{-R_{\tau_i+D_i}} 1_{(\tau_i+D_i \leq T, N(T)=n)} > x) \right) \\ & =: I_{11} - I_{12}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

交换 $I_{11}$ 中的求和顺序得

$$I_{11} = \int_{0-}^T P(X e^{-R_s} > x) \lambda(ds) + \int_{0-}^T P(Y e^{-R_s} > x) (\lambda * H)(ds). \quad (3.30)$$

至于 $I_{12}$ ,

$$I_{12} \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \left( P(X e^{-R_{\tau_i}} > x, N(T) = n) + P(Y e^{-R_{\tau_i}} > x, N(T) = n) \right).$$

由 $\bar{F}(x) \asymp \bar{G}(x)$ , 利用引理3.8得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{x \rightarrow 0} \frac{I_{12}}{\int_{0-}^T P(X e^{-R_s} > x) \lambda(ds)} = 0. \quad (3.31)$$

将(3.27)和(3.29)–(3.31)相结合, 我们得到了 $\psi(x; T)$ 的上界.

现在我们估计 $\psi(x; T)$ 的下界. 由于 $p^*(T) > 0$ , 得到对任意给定的整数 $m$ 和所

有的  $x > 0$ , 有

$$\begin{aligned}
 \psi(x; T) &\geq P\left(\sum_{i=1}^{N(T)} X_i e^{-R_{\tau_i}} + \sum_{i=1}^{N(T)} Y_i e^{-R_{\tau_i+D_i}} 1_{(\tau_i+D_i \leq T)} - p^*(T) - c_0 T > x\right) \\
 &\geq \sum_{n=1}^m P\left(\sum_{i=1}^n X_i e^{-R_{\tau_i}} + \sum_{i=1}^n Y_i e^{-R_{\tau_i+D_i}} 1_{(\tau_i+D_i \leq T)} - p^*(T) - c_0 T > x, N(T) = n\right) \\
 &\geq \sum_{n=1}^m P\left(\sum_{i=1}^n X_i e^{-R_{\tau_i}} 1_{(N(T)=n)} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=1}^n Y_i e^{-R_{\tau_i+D_i}} 1_{(\tau_i+D_i \leq T, N(T)=n)} - p^*(T) - c_0 T > x\right). \tag{3.32}
 \end{aligned}$$

因为  $-p^*(T) - c_0 T$  是非正的, 所以对于所有的  $c > 0$  和任意  $x > 0$ , 有

$$P(-p^*(T) - c_0 T > x) = 0 = o\left(\bar{F}\left(\frac{x}{c}\right)\right).$$

采用和  $I_1$  同样的处理方法, 我们可以推出  $\psi(x; T)$  的下界.

第二部分的证明和第一部分的很相似, 我们这里只展示不同的部分. 关于上界, 显然利用引理3.1(3)和

$$\begin{aligned}
 \int_{0-}^T P((X+Y)e^{-R_s} > x) \lambda(ds) &= \int_{0-}^T \int_0^\infty \frac{P(X+Y > xe^u)}{\bar{F}(xe^u)} \bar{F}(xe^u) P(e^{R_s} \in du) \lambda(ds) \\
 &\sim \int_{0-}^T P(Xe^{-R_s} > x) \lambda(ds) \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

可得(3.27)仍然成立. 注意到对每一个  $1 \leq n \leq m$ , 有

$$\begin{aligned}
 &P\left(\sum_{i=1}^n X_i e^{-R_{\tau_i}} + \sum_{i=1}^n Y_i e^{-R_{\tau_i+D_i}} 1_{(\tau_i+D_i \leq T)} + p^*(T) > x, N(T) = n\right) \\
 &\leq P\left(\sum_{i=1}^n (X_i + Y_i) e^{-R_{\tau_i}} 1_{(N(T)=n)} + p^*(T) > x\right).
 \end{aligned}$$

进一步的, 采取和(3.29)–(3.31)同样的做法, 利用引理3.1(3), 命题3.3, 引理3.8和(3.33), 可得

$$I_1 \lesssim \int_{0-}^T P(Xe^{-R_s} > x) \lambda(ds),$$

结合上(3.27), 可以推出

$$\psi(x; T) \lesssim \int_{0-}^T P(Xe^{-R_s} > x) \lambda(ds).$$

对于下界, 利用(3.32), 得对任意给定的整数  $m$  和所有的  $x > 0$ , 有

$$\psi(x; T) \geq \sum_{n=1}^m P\left(\sum_{i=1}^n X_i e^{-R_{\tau_i}} 1_{(N(T)=n)} - p^*(T) - c_0 T > x\right).$$



采取和(3.29)–(3.31)相同的做法, 可以推出

$$\psi(x; T) \gtrsim \int_{0-}^T P(Xe^{-R_s} > x) \lambda(ds).$$

至此3.1的证明结束.

**推论3.1 证明** 由Cont和Tankov (2004)的命题3.14得, 对任意的 $t \geq 0$ 和 $z \in \mathbb{R}$ ,

$$E[e^{-zR_t}] = e^{t\phi(z)}. \quad (3.34)$$

因为 $N(t)$ 是一个其次Poisson过程, 强度为 $\lambda$ , 分布函数 $H$ 为指数分布, 其参数为 $\lambda_H$ , 因此可计算出

$$(\lambda * H)(ds) = \lambda(1 - e^{-\lambda_H s})ds.$$

由 $G \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ 和(3.34)得

$$\begin{aligned} \int_{0-}^T P(Ye^{-R_s} > x) (\lambda * H)(ds) &= \lambda \int_0^T (1 - e^{-\lambda_H s}) \int_0^1 \overline{G}\left(\frac{x}{y}\right) P(e^{-R_s} \in dy) ds \\ &\sim \lambda \overline{G}(x) \int_0^T (1 - e^{-\lambda_H s}) E[e^{-\alpha R_s}] ds \\ &= \lambda \overline{G}(x) \int_0^T (1 - e^{-\lambda_H s}) e^{\phi(\alpha)s} ds \\ &= \lambda \left( \frac{e^{T\phi(\alpha)} - 1}{\phi(\alpha)} - \frac{e^{T(\phi(\alpha) - \lambda_H)} - 1}{\phi(\alpha) - \lambda_H} \right) \overline{G}(x), \end{aligned}$$

其中第二步我们用了控制收敛定理. 类似的可得,

$$\int_{0-}^T P(Xe^{-R_s} > x) \lambda(ds) \sim \frac{\lambda(e^{T\phi(\alpha)} - 1)}{\phi(\alpha)} \overline{F}(x).$$

因此, 由定理3.1和上述估计可以到推论3.1.

### 3.5 理论结果的数值模拟

在这一节中, 我们用粗略的蒙特卡洛法(CMC)去检验推论3.1中 $\psi(x; T)$ 渐近结果的准确性, 我们比较了模拟出的破产概率 $\psi(x; T)$ 和(3.6) 右侧的渐近结果. 首先介绍本小节所用的Pareto分布

$$V(x) = 1 - (x + \mu)^{-\alpha}, \quad x \geq 1 - \mu, \quad (3.35)$$

其中,  $\alpha > 0, \mu > 0$ . 为便于数值模拟, 我们将模型具体化, 如下所列:

- 主副理赔 $X$ 和 $Y$ 用二维FGM相依结构刻画(3.3), 我们将其简化为

$$P(X \leq x, Y \leq y) = F(x)G(y) (1 + \gamma \overline{F}(x) \overline{G}(y)), \quad \gamma \in [-1, 1],$$

它们的边缘分布均为Pareto分布(3.35), 其参数为 $\alpha > 0, \mu > 0$ . 显然,  $F = G \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ .

- 主理赔计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个齐次Poisson过程, 其强度为 $\lambda > 0$ . 也就是说, 时间间隔为 $\{\theta_i, i \geq 1\}$ 独立同分布的非负服从指数分布的随机变量, 其参数为 $\lambda > 0$ .
- 延迟时间 $\{D_i, i \geq 1\}$ 是独立同分布的非负服从指数分布的随机变量, 参数为 $\lambda_H > 0$ .
- 随机累计回报过程 $\{R_t, t \geq 0\}$ 特殊化为

$$R_t = r_0 t + \sum_{i=1}^{M(t)} Z_i, \quad (3.36)$$

其中 $r_0 \geq 0$ 为常数,  $\{M(t), t \geq 0\}$ 是齐次Poisson过程, 强度为 $\rho > 0$ ,  $\{Z_i, i \geq 1\}$ 是独立同分布的非负随机变量, 参见Korn and Koziol (2006) 的类似的讨论. 显然, 这样的 $R_t$  构成了一个非负Lévy 过程, 参见Cont and Tankov (2004)的命题3.10, 在推论3.1中可以计算出来为,

$$\phi(z) = \log E[e^{-zR_1}] = -r_0 z + (E[e^{-zZ_1}] - 1) \rho.$$

进一步的, 假设 $Z_1$ 在 $[0, 1]$ 上均匀分布.

- 随机利息过程 $\{\tilde{R}_t, t \geq 0\}$ 简化为 $\tilde{R}_t = rt, r > 0$ .

参数被设置为:

- $T = 10, c(s) = 1, \delta = 1, r = 1$ .
- $\gamma = 0.5, \alpha = 1.2, \mu = 1$ .
- $\lambda = 1, \lambda_H = 0.5$ ,
- $r_0 = 1, \rho = 1$ .

为了模拟 $\hat{\psi}(x; T)$ , 我们首先将时间间隔 $[0, T]$ 划分为 $n$ 个区间, 对给定的 $t_k = \frac{kT}{n}, k = 1, \dots, n$ , 我们生成 $m$ 个样本 $N^{(j)}(t_k), j = 1, \dots, m$ . 然后, 对每一个 $j = 1, \dots, m$ , 生成 $N^{(j)}(t_k)$ 对 $(X_i^{(j)}, Y_i^{(j)})$ , 以及主理赔时间间隔 $\theta_i^{(j)}$ 和延迟时间 $D_i^{(j)}, i = 1, \dots, N^{(j)}(t_k)$ . 对每一个 $j = 1, \dots, m$ , 根据(3.36)生成 $R_{t_k}^{(j)}$ . 因此, 折现的盈余过程 $U^{(j)}(t_k)$ 可以根据(3.1)计算得出. 这样, 破产概率 $\psi(x; T)$ 可以由下式估计得出:

$$\hat{\psi}(x; T) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m 1_{(\bigwedge_{k=1}^n U^{(j)}(t_k) < 0)}. \quad (3.37)$$

在图3.1中, 我们在左图中对比了估计值 $\hat{\psi}(x; T)$ 和(3.6)中的渐近值, 并在右图中展现了它们的比值. 样本容量 $m = 7 \times 10^6$ , 时间间隔 $\frac{T}{n} = 10^{-3}, n = 10^4$ , 初始资本 $x$ 为500到3000. 从图1中可以看出, 随着初始资本 $x$ 的增加, 两个估计值都在下降并越来越趋于一致. 此外, 模拟值和渐近值的比值趋于1. 存在波动是因为CMC需要很大的样本容量才能达到较高的精确度.

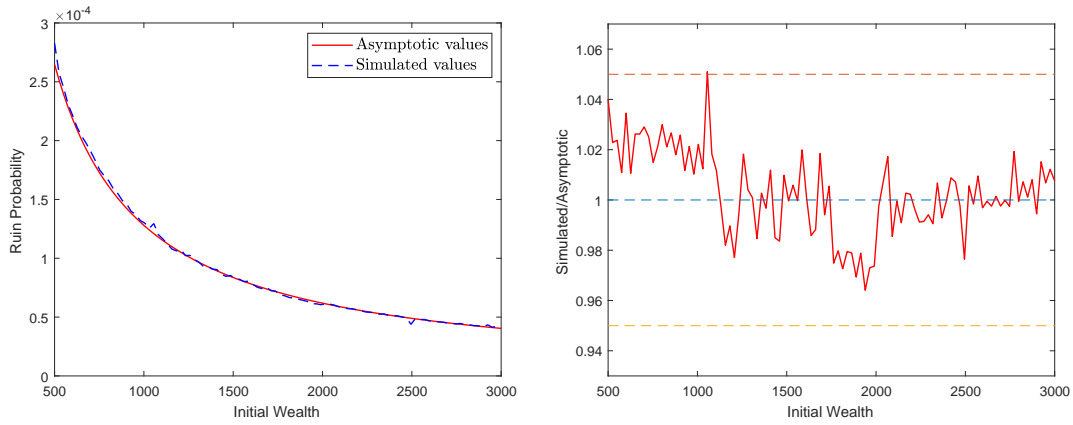


图 3.1 有限时破产概率模拟值和渐近值的比较(左)以及它们的比值(右).

### 3.6 本章小结

本章研究了带有随机随机利率和投资回报率的带有副理赔的风险模型. 现实世界中保险公司会将部分盈余资金进行投资, 且资金流计算需要考虑时间折扣, 因此本章允许保险公司在无风险市场进行投资, 并在第二章的基础上引入几何Lévy过程作为利率和投资回报率, 此外本章还加入了加入保险公司日常运行中可能发生的随机资金流动作为扰动项. 本章考虑主理赔属于次指数族, 副理赔可能和主理赔拥有相同地位, 也可能较小从而可以忽略不计, 且主副理赔之间具有一种特殊的渐近独立结构. 主理赔来的为更新计数过程. 在此基础上得到有限时破产概率的渐近行为, 并将模型简化为主理赔属于正则变换族, 主理赔计数过程为Poisson过程得出主要定理的推论, 最后基于该推论将相依结构特殊化为FGM copula后用蒙特卡洛模拟验证了渐近结果的精确性.

## 4 复合更新模型

### 4.1 复合更新模型介绍及相关文献回顾

本章我们考虑一个经典破产概率模型的延申形式—复合更新风险模型. 在这个模型中, 一次事故可能会导致多个理赔, 然而在传统的更新风险模型中, 一个事故只会导致一次理赔. 例如地震, 海啸, 或者金融危机都会导致多次理赔的发生. Tang 等(2001)首次对复合更新模型进行了研究, 该模型需要满足以下四个条件:

- (a) 事故的时间间隔序列 $\{\theta_n, n \geq 1\}$ 独立同分布且非负, 期望存在, 为 $\kappa_1$ .
- (b) 第 $n$ 个事故的理赔发生时刻为 $\tau_n = \sum_{k=1}^n \theta_k$ , 理赔额为 $\{X_k^{(n)}, k \geq 1\}$ . 假设 $\{\{X_k^{(n)}, k \geq 1\}, n \geq 1\}$ 是 $\{X_k, k \geq 1\}$ 的独立复制, 其中 $\{X_k, k \geq 1\}$ 是一个独立同分布的非负的序列, 具有共同的分布 $F$ , 期望存在为 $\mu_1$ .
- (c) 第 $n$ 个事故导致的理赔数量记为 $N_n$ . 假设 $\{N_n, n \geq 1\}$ 是独立同分布的非负整值序列, 期望存在为 $\nu_1$ .
- (d) 假设 $\{\theta_n, n \geq 1\}$ ,  $\{\{X_k^{(n)}, k \geq 1\}, n \geq 1\}$ 和 $\{N_n, n \geq 1\}$ 这三个序列相互独立.

上述的复合更新模型中, 若理赔次数 $N_n, n \geq 1$ , 都在1点退化, 则该模型退化为经典的更新风险模型.

现在回到上述复合更新风险模型中, 事故到达时间 $\tau_n, n \geq 1$ ,  $\tau_0 = 0$ , 形成了更新计数过程

$$\Theta(t) = \sup\{n \geq 0 : \tau_n \leq t\}, \quad t \geq 0,$$

上式表示时间间隔 $[0, t]$ 内事故的发生次数. 对于每个 $n \geq 1$ , 第 $n$ 次事故带来的随机累计理赔可以被表示为以下随机和

$$Y_n = \sum_{k=1}^{N_n} X_k^{(n)},$$

其期望为 $\nu_1 \mu_1$ . 显然,  $\{Y_n, n \geq 1\}$ 也是一个一序列的独立同分布非负的随机变量, 分布记为 $G$ . 在上述设定下, 保险公司的盈余过程可以被定义为

$$U(t) = x - \sum_{n=1}^{\Theta(t)} (Y_n - c\theta_n), \quad t \geq 0,$$

其中 $x \geq 0$  是保险公司的初始风险准备金,  $c > 0$ 是固定保费收入率. 上述设定下 $[0, t]$ 时刻内的有限破产概率以及无限时破产概率可以被分别定义为,

$$\psi_c(x; t) = P\left(\inf_{0 \leq s \leq t} U(s) < 0 \mid U(0) = x\right),$$

和

$$\psi_c(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_c(x, t) = P\left(\inf_{s \geq 0} U(s) < 0 \mid U(0) = x\right). \quad (4.1)$$

注意到无限时破产概率(4.1)可以被改写为

$$\psi_c(x) = P \left( \sup_{n \geq 0} \sum_{i=1}^n (Y_i - c\theta_i) > x \right). \quad (4.2)$$

特殊的, 在经典风险模型中, (也就是 $N_n = 1$ 对于所有的 $n \geq 1$ ), 我们记无限时破产概率为 $\psi_o(x) = P \left( \sup_{n \geq 0} \sum_{i=1}^n (X_i - c\theta_i) > x \right)$ .

在对无利率风险模型的研究中, 我们需要设置一个安全负载条件去排除 $\psi_c(x) \equiv 1$ 这种无意义的情况, 也就是,

$$\rho := \frac{cE[\theta_1] - E[Y_1]}{E[Y_1]} = \frac{c\kappa_1 - \nu_1\mu_1}{\nu_1\mu_1} > 0, \quad (4.3)$$

上述条件将作为本章研究的前提.

在最近几十年中, 许多早期文献致力于研究独立或者非独立经典更新风险模型下破产概率的渐近行为. 以下是由Embrechts和Veraverbeke (1982)建立的一个经典的结果: 在经典的独立更新风险模型下(也就是满足上述条件(a)-(d),  $N_n = 1, n \geq 1$ ), 如果分布 $F$ 的卷积 $F_e$ 是具有次指数分布尾, 则当 $x \rightarrow \infty$ 时,

$$\psi_o(x) \sim \frac{1}{\rho} \overline{F_e}(x), \quad (4.4)$$

安全负载条件 $\rho > 0$ 如(4.3)中所定义, 其中 $\nu_1 = 1$ ,

$$\overline{F_e}(x) = 1 - F_e(x) = \frac{1}{\mu_1} \int_x^\infty \overline{F}(t) dt. \quad (4.5)$$

Cang 等(2020) 考虑了非独立的经典更新风险模型, 其中, 每一对理赔和理赔到达时间都存在一定的相依结构, 在次设定下建立了具有一致变换尾分布下的有限时破产概率的渐近结果. 关于关于经典更新风险模型的拓展可以查阅Leipus和Šiaulyš (2007), Kočetova 等(2009), Yang 等(2011), Wang 等(2012), 及其他文献.

Tang 等(2001)研究了复合更新风险模型, 在每个理赔具有广义正则变换尾的条件下, 他们基于累积理赔过程建立了精致大偏差结果. Kaas 和Tang (2005)进一步考虑了一种特殊的相依复合更新风险模型—理赔成组到达, 且每组的理赔次数服从一个特定的负相依结构. 另一篇相关的文献是Yang 等(2012), 其中考虑了具有常数利率的复合更新风险模型, 并且推导出理赔为次指数族时的有限时破产概率的渐近公式. 更多关于复合模型的讨论可以参见Aleškevičienė 等(2008), Korshunov (2018), Liu 等(2020)及其他文献.

上述文献的研究均是基于破产概率渐近行为的一阶结果. 随着保险业的发展, 为满足保险公司或监管机构对风险分析的精确性要求, 对于破产概率二阶或者更高阶的渐近结果的需求也越来越多. Baltrūnas (2005) 考虑了一种经典的Poisson 风险模型并建立了具有次指数理赔情形下的粗糙的二阶无限时破产

概率的渐近结果. 最近, Lin (2012a) 基于卷积分布为二阶次指数的条件, 推导出经典风险模型的精确的二阶破产概率渐近结果. Lin (2019a) 进一步的拓展了Lin (2012a)的结果至具有延迟理赔的经典更新风险模型.更多关于二阶渐近的讨论可以参见Lin (2012b), Kortschak 和Hashorva (2014), Lin (2014), Lin (2019b)及其他文献.

在本章中, 我们主要关注复合更新风险模型.我们建立了无限时破产概率的精确的二阶渐近结果, 这将会帮助保险公司和监管机构更精确的控制保险风险.此外, 我们还做了蒙特卡洛模拟去展现出二阶结果相比一阶结果的精确性.

## 4.2 复合更新模型下的破产概率二阶渐近结果

假设理赔的共同分布 $F$ 绝对连续, 密度为 $f$ , 其风险方程为 $Q(x) = -\ln \bar{F}(x)$ , 风险率为 $q(x) = Q'(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}$ . 以下为定理4.1 中所需的条件.

**假设4.1.** 设理赔的风险方程 $Q(x)$ 和风险率 $q(x)$ 满足

- (1)  $r := \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xq(x)}{Q(x)} < 1$ ;
- (2)  $\beta := \liminf_{x \rightarrow \infty} xq(x) > \frac{2}{1-r}$ .

现在我们开始陈述本章的主要结果.假设理赔的二阶矩为 $E[X_1^2] = \mu_2 < \infty$ , 时间间隔的二阶矩为 $E[\theta_1^2] = \kappa_2 < \infty$ , 理赔次数的二阶矩为 $E[N_1^2] = \nu_2 < \infty$ .

**定理4.1.** 考虑一个复合更新风险模型. 在条件4.1下, 若 $f \in \mathcal{L}$ ,  $q(xy) = O(q(x))$ 与任意 $y > 0$ 成立, 且存在 $\epsilon > 0$ 使得 $E[(1 + \epsilon)^{N_1}] < \infty$ , 则

$$\psi(x) = \frac{1}{\rho} \bar{F}_e(x) + \left( K\nu_1 + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\nu_2}{\nu_1} - 1 \right) \right) \bar{F}(x) + o(\bar{F}(x)), \quad (4.6)$$

其中

$$\begin{aligned} K &= \frac{E[Y_1^2] + c^2\kappa_2 - 2c^2\kappa_1^2 + 2(c\kappa_1 - \mu_1\nu_1)C_\infty}{2(c\kappa_1 - \mu_1\nu_1)^2} \\ &= \frac{(\mu_2 - \mu_1^2)\nu_1 + \mu_1^2\nu_2 + c^2\kappa_2 - 2c^2\kappa_1^2 + 2(c\kappa_1 - \mu_1\nu_1)C_\infty}{2(c\kappa_1 - \mu_1\nu_1)^2}, \end{aligned}$$

$$C_\infty = E \left[ \sup_{n \geq 0} \sum_{i=1}^n (Y_i - c\theta_i) \right].$$

**注4.1.** 条件4.1类似于但是弱于Baltrūnas等(2004)的条件B. 由Baltrūnas等(2004)的引理3.8(a)得, 若 $r < 1$ 则 $F \in \mathcal{S}$ ; 进一步的, 若 $\beta > \frac{2}{1-r}$  (意味着 $\beta > \frac{1}{2-2r}$ ) 对于任意的 $r < 1$ 成立, 则由Baltrūnas 等(2004)的引理3.6(b)和3.8(b)可得 $F \in \mathcal{S}^*$ .

**注4.2.** Lin (2012a) 提供了经典风险模型下无限时破产概率二阶展开的充要条件.和Lin的结论相比, 我们建立了复合模型的类似的二阶渐近结果.

**注4.3.** 我们所得到的结论(4.6)比(4.4)更加精确, 但是(4.6)右边的第二项和第一项相比是可以忽略的, 因为在定理4.1的条件下  $\bar{F}(x) = o(\bar{F}_e(x))$ . 这一点将在第四节中得到验证.

由定理4.1和类似的Lin (2012a)的推论3.1中的讨论可以推出以下推论.

**推论4.1.** 考虑复合泊松风险模型, 也就是事故到达时间间隔是独立同分布的具有相同次指数分布的随机变量. 在定理4.1的条件下, (4.6)成立, 其中  $K = \frac{(\mu_2 - \mu_1^2)\nu_1 + \mu_1^2\nu_2}{(c\kappa_1 - \mu_1\nu_1)^2}$ .

### 4.3 一些引理及主要证明

在证明主要结论之前, 我们给出一系列的引理. 第一个引理来自Lin (2012b).

**引理4.1.** 假设  $F \in \mathcal{S}_2$ , 其期望存在为  $\mu_1$ .

(1) 对于所有的  $n \geq 2$ , 当  $x \rightarrow \infty$  时,

$$\bar{F}^{n*}(x) - n\bar{F}(x) \sim n(n-1)\mu_1 F(x, x+1].$$

(2) 对所有固定的  $\varepsilon > 0$ , 存在两个常数  $x_0 > 0$  和  $C > 0$ , 与  $n$  无关, 使得对所有的  $n \geq 2$ ,

$$\sup_{x \geq x_0} \left| \frac{\bar{F}^{n*}(x) - n\bar{F}(x)}{F(x, x+1]} \right| \leq C(1 + \varepsilon)^n.$$

**引理4.2.** 若  $f \in \mathcal{L}$ , 则  $F \in \mathcal{L}_{loc}$ , 且

$$F(x, x+1] \sim f(x). \quad (4.7)$$

**证明.** 证明可参见Asmussen 等(2003). 确实, 由  $f \in \mathcal{L}$ , 对于任意的  $t > 0$  和  $y > 0$  我们有

$$\begin{aligned} F(x + y + \Delta(t)) &= \int_x^{x+t} f(u + y) du \\ &\sim \int_x^{x+t} f(u) du \\ &= F(x + \Delta(t)). \end{aligned}$$

再次利用  $f \in \mathcal{L}$  可得,

$$F(x, x+1] = \int_0^1 f(x+u) du \sim f(x).$$

□

下一个引理在证明定理4.1中起着重要作用.

**引理4.3.** 若  $f \in \mathcal{L}$ ,  $r < 1$ ,  $\beta > \frac{1}{2-2^r}$ ,  $\mu_1 < \infty$ , 且  $q(xy) = O(q(x))$  对于所有的  $y > 0$  成立, 则  $F \in \mathcal{S}_2$ .

**证明.** 由  $r < 1$  和  $\beta > \frac{1}{2-2^r}$  得, 存在一个较小的  $\delta > 0$  使得  $0 < r + \delta < r + 2\delta < 1$ , 和一个较大的  $x_1 \geq 1$  使得对于所有的  $x \geq x_1$  有,

$$\frac{xq(x)}{Q(x)} \leq r + \delta \quad \text{and} \quad xq(x) > \frac{1}{2 - 2^{r+2\delta}}. \quad (4.8)$$

(4.8)中的第一个不等式, 结合Baltrūnas 等(2004)的命题3.7(a)意味着

$$Q(xy) \leq y^{r+\delta}Q(x)$$

对于所有的  $x \geq x_1$  和  $y \geq 1$  成立. 然后, 对于  $x \geq 2x_1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{x \left( \overline{F}\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2}{\overline{F}(x)} &= \exp \left\{ -2Q\left(\frac{x}{2}\right) + Q(x) + \ln x \right\} \\ &\leq \exp \left\{ -(2 - 2^{r+\delta})Q\left(\frac{x}{2}\right) + \ln x \right\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

(4.8)中的第二个不等式可以推出对所有的  $x \geq 2x_1$ ,

$$Q\left(\frac{x}{2}\right) - Q(x_1) \geq \frac{1}{2 - 2^{r+2\delta}} \ln \left( \frac{x}{2x_1} \right). \quad (4.10)$$

将(4.9)和(4.10)结合可得

$$\begin{aligned} \frac{x \left( \overline{F}\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2}{\overline{F}(x)} &\leq \exp \left\{ -\frac{2 - 2^{r+\delta}}{2 - 2^{r+2\delta}} \ln \left( \frac{x}{2x_1} \right) - (2 - 2^{r+\delta})Q(x_1) + \ln x \right\} \\ &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

由(4.7), (4.11) 和  $\beta > \frac{1}{2-2^r}$  得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( \overline{F}\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2}{F(x, x+1]} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( \overline{F}\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2}{f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left( \overline{F}\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2 / \overline{F}(x)}{xq(x)} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

此外, 由注4.1得  $F \in \mathcal{S}^*$ . 因此, 我们由引理4.2, (4.12)和Lin (2012b)的命题2.4可得出  $F \in \mathcal{S}_2$ .  $\square$

最近, Lin (2012a) 引入了一个  $\mathcal{S}^*$  的全新的子族  $\mathcal{H}$ . 一个支撑在  $\mathbb{R}_+$  的分布  $V$  属于  $\mathcal{H}$  若

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\frac{x}{2}} y \overline{V}(x-y) \overline{V}(y) dy}{\overline{V}(x)} = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^2 V(dy) < \infty.$$

正如Lin (2012a)指出,  $\mathcal{H} \subset \mathcal{S}^*$ ; 若  $F \in \mathcal{H}$ , 则  $F_e \in \mathcal{S}_2$ ; 一些常用的重尾分布属于  $\mathcal{H}$ , 例如参数大于2的Pareto分布, lognormal 分布, 以及参数介于(0,1)的Weibull分布.



**引理4.4.** 若  $r < 1$ ,  $\beta > \frac{2}{1-r}$ , 则  $F \in \mathcal{H}$ .

**证明** 由  $\beta > \frac{2}{1-r}$  可得, 类似于(4.10), 存在一个小的  $\delta > 0$  使得  $0 < r + 2\delta < 1$ , 和一个大的  $x_2 > 0$  使得对于所有的  $x \geq x_2$ ,

$$Q(x) - Q(x_2) \geq \frac{2}{1-r-2\delta} \ln \left( \frac{x}{x_2} \right).$$

因此,

$$\begin{aligned} \int_{x_2}^{\infty} x (\overline{F}(x))^{1-r-\delta} dx &= \int_{x_2}^{\infty} x e^{-(1-r-\delta)Q(x)} dx \\ &\leq \int_{x_2}^{\infty} x \exp \left\{ -\frac{2(1-r-\delta)}{1-r-2\delta} \ln \left( \frac{x}{x_2} \right) - (1-r-\delta)Q(x_2) \right\} dx \\ &= (\overline{F}(x_2))^{1-r-\delta} x_2^{\frac{2(1-r-\delta)}{1-r-2\delta}} \int_{x_2}^{\infty} x^{-\frac{2(1-r-\delta)}{1-r-2\delta}+1} dx \\ &< \infty, \end{aligned}$$

这意味着由Lin (2012a)的命题3.4可得  $F \in \mathcal{H}$ .  $\square$

**定理4.1证明.** 注意到  $\frac{2}{1-r} > \frac{1}{2-2r}$  对任意的  $r < 1$  成立. 那么, 由引理4.3和4.4得,  $F \in \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{H}$ . 在本定理的前提条件下, 由Lin (2012b) 的定理2.1可得

$$\overline{G}(x) - \nu_1 \overline{F}(x) \sim \mu_1(\nu_2 - \nu_1)F(x, x+1], \quad (4.13)$$

这意味着

$$\overline{G}(x) \sim \nu_1 \overline{F}(x). \quad (4.14)$$

由  $F \in \mathcal{H}$  得  $G \in \mathcal{H}$ , 因此  $G_e \in \mathcal{S}_2$ , 具体可参见Lin (2012a)的命题3.1和定理3.2. 此外, 由(4.13)和Lin (2012b)的命题2.3可得  $G \in \mathcal{S}_2$ . 因此, 由Lin (2012a)的定理3.1可得

$$\psi(x) \sim \frac{1}{\rho} \overline{G}_e(x) + K \overline{G}(x) + o(\overline{G}(x)). \quad (4.15)$$

下面我们处理  $\overline{G}_e$ . 注意到

$$\frac{\overline{G}_e(x) - \overline{F}_e(x)}{\overline{F}(x)} = \frac{1}{\mu_1 \nu_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_x^{\infty} \frac{\overline{F}^{n*}(t) - n \overline{F}(t)}{F(t, t+1]} \cdot \frac{F(t, t+1]}{\overline{F}(x)} dt \right) P(N_1 = n). \quad (4.16)$$

由  $F \in \mathcal{S}_2$  和引理4.1(2), 对于给定的  $0 < \epsilon < 1$ , 存在较大的  $x_3 > 0$  和  $C > 0$  使得对于所有的  $t \geq x \geq x_3$  和  $n \geq 1$  有,

$$\left| \frac{\overline{F}^{n*}(t) - n \overline{F}(t)}{F(t, t+1]} \right| \leq C(1 + \epsilon)^n. \quad (4.17)$$

由洛必达法则和引理4.2得,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_x^{\infty} F(t, t+1] dt}{\overline{F}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x, x+1]}{f(x)} = 1.$$

对于上述 $\epsilon > 0$ , 存在较大的 $x_4 \geq x_3$  使得对所有的 $x \geq x_4$ ,

$$\int_x^\infty F(t, t+1]dt \leq (1+\epsilon)\bar{F}(x). \quad (4.18)$$

将(4.17)和(4.18)相结合, 我们得到对所有的 $x \geq x_4$ 和 $n \geq 1$ , (4.16)右侧的积分上界为 $C(1+\epsilon)^{n+1}$ . 由 $E[(1+\epsilon)^{N_1}] < \infty$ , 可利用控制收敛定理得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{G}_e(x) - \bar{F}_e(x)}{\bar{F}(x)} &= \frac{1}{\mu_1 \nu_1} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\bar{F}(x)} \int_x^\infty \bar{F}^{n*}(t) - n\bar{F}(t)dt \cdot P(N_1 = n) \\ &= \frac{1}{\mu_1 \nu_1} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}^{n*}(x) - n\bar{F}(x)}{f(x)} \cdot P(N_1 = n) \\ &= \frac{1}{\nu_1} \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x, x+1]}{f(x)} P(N_1 = n) \\ &= \frac{\nu_2}{\nu_1} - 1, \end{aligned} \quad (4.19)$$

其中我们在第二步使用了洛必达法则, 在第三步使用了 $F \in \mathcal{S}_2$ 和引理4.1(1), 在最后一步使用了引理4.2. 将(4.14)和(4.19)代入(4.15)可得(4.6).  $\square$

## 4.4 理论结果的数值模拟

在这一小节中, 我们做了一些蒙特卡洛模拟去验证推论4.1中无限时破产概率 $\psi(x)$ 的渐近结果的精确性, 然后展示我们的结果相比一阶结果的改进与提升. 我们还对破产概率 $\psi(x)$ 的一些主要参数做了敏感性分析, 包括理赔、事故时间间隔和理赔次数的参数. 我们首先去验证(4.1).

### 4.4.1 二阶结果精确性检验

以下是本次模拟中具体模型及参数设置:

- 理赔 $\{X_k, k \geq 1\}$  是依序略的独立同分布的非负随机变量, 具有共同的Pareto分布

$$F(x) = 1 - (1+x)^{-\alpha}, \quad x \geq 0, \quad (4.20)$$

$\alpha > 2$ ; 或者共同的Weibull分布

$$F(x) = 1 - \exp\{-x^a\}, \quad x \geq 0, \quad (4.21)$$

$0 < a < 1$ . 可以证明在这两种情况下, 密度函数 $f \in \mathcal{L}$  和 $q(xy) = O(q(x))$ 对任意的 $y > 0$ 成立. 此外, 可以计算得出, Pareto情形下, 条件4.1中 $r = 0, \beta = \alpha$ , Weibull情形下 $r = a < 1, \beta = \infty$ . 那么, 推论4.1中关于理赔的所有条件都满足了. 进一步的, 对比两种情形, Pareto分布的尾要比Weibull分布的尾更重.

- 理赔次数 $\{N_n, n \geq 1\}$ 是一序列独立同分布非负的整值随机变量, 具有共同的Poisson分布

$$P(N_1 = l) = \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.22)$$

$\lambda > 0$ . 显然,  $E[(1 + \epsilon)^{N_1}] < \infty$  对于任意的  $\epsilon > 0$  成立.

- 事故到达时间间隔 $\{\theta_n, n \geq 1\}$ 是一序列的独立同分布非负随机变量, 具有共同指数分布

$$P(\theta_1 \leq x) = 1 - e^{-\rho x}, \quad x \geq 0, \quad (4.23)$$

其中  $\rho > 0$ .

对于模拟值  $\psi_c(x)$ , 我们首先分别生成三个序列的事故到达时间间隔 $\{\theta_n, n \geq 1\}$ , 理赔额 $\{X_k^{(n)}, k \geq 1, n \geq 1\}$ 和理赔次数 $\{N_n, n \geq 1\}$ , 样本量为  $m$ . 对于每一个样本  $j = 1, \dots, m$ , 记上述三个序列为 $\{\theta_n^{(j)}, n \geq 1\}$ ,  $\{X_k^{(n,j)}, k \geq 1, n \geq 1\}$ 和 $\{N_n^{(j)}, n \geq 1\}$ , 然后计算出

$$L_n^{(j)} = \sum_{k=1}^{N_n^{(j)}} X_k^{(n,j)} - c\theta_n^{(j)},$$

这表示第  $n$  个事故的净损失. 选取一个充分大的  $n_0$ , 记最大的  $L_n^{(j)}$  为

$$M_{n_0}^{(j)} = \max_{1 \leq n \leq n_0} L_n^{(j)}.$$

重复上述算法  $m$  次,  $\psi_c(x)$  可以由下式估计出

$$\hat{\psi}_c(x; n_0) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m 1_{\{M_{n_0}^{(j)} > x\}}. \quad (4.24)$$

尽管我们估计的是无限时破产概率  $\psi_c(x)$ , 当做模拟时我们选择  $\hat{\psi}_c(x; n_0)$  作为替代, 其中  $n_0$  足够大.

设置  $n_0 = 10^5$ , 样本量分别为  $m = 10^6$  和  $m = 10^7$  在Pareto和Weibull分布下. 后者需要较大的样本量是因为Weibull分布的尾巴更轻. 参数被设置为  $c = 1, \lambda = 5, \rho = 0.1, \alpha = 2.05$  (Pareto 情形下),  $c = 1, \lambda = 6, \rho = 0.2$ , and  $a = 0.335$  (Weibull情形下).

对于渐近值  $\psi_c(x)$ , 我们考虑其一阶和二阶渐近估计. 记  $\psi_c^{(1)}(x)$  为一阶渐近值, 也就是(4.6)右侧的第一项, 记  $\psi_c^{(2)}(x)$  为二阶渐近值, 也就是(4.6)右侧前两项的和. 他们与模拟值  $\hat{\psi}_c(x; n_0)$  的偏差列在对应渐近值的下方.

表 4.1 Pareto分布下推论4.1的精确性验证

$x$	62	114	322	687	1202
$\hat{\psi}_c(x; n_0)$	$1.49 \times 10^{-2}$	$7.71 \times 10^{-3}$	$2.53 \times 10^{-3}$	$1.09 \times 10^{-3}$	$5.9 \times 10^{-4}$
$\psi_c^{(1)}(x)$	$1.23 \times 10^{-2}$ ( $2.6 \times 10^{-3}$ )	$6.53 \times 10^{-3}$ ( $1.18 \times 10^{-3}$ )	$2.21 \times 10^{-3}$ ( $3.2 \times 10^{-4}$ )	$1 \times 10^{-3}$ ( $9 \times 10^{-5}$ )	$5.57 \times 10^{-4}$ ( $3.3 \times 10^{-5}$ )
$\psi_c^{(2)}(x)$	$1.37 \times 10^{-2}$ ( $1.2 \times 10^{-3}$ )	$7.11 \times 10^{-3}$ ( $6. \times 10^{-4}$ )	$2.40 \times 10^{-3}$ ( $1.3 \times 10^{-4}$ )	$1.04 \times 10^{-3}$ ( $5 \times 10^{-5}$ )	$5.71 \times 10^{-4}$ ( $1.9 \times 10^{-5}$ )
$\frac{\psi_c^{(1)}(x)}{\hat{\psi}_c(x; n_0)}$	0.826	0.847	0.874	0.917	0.944
$\frac{\psi_c^{(2)}(x)}{\hat{\psi}_c(x; n_0)}$	0.919	0.922	0.949	0.954	0.968
$x$	1333	1596	1838	1949	2000
$\hat{\psi}_c(x; n_0)$	$5.25 \times 10^{-4}$	$4.35 \times 10^{-4}$	$3.75 \times 10^{-4}$	$3.45 \times 10^{-4}$	$3.35 \times 10^{-4}$
$\psi_c^{(1)}(x)$	$4.99 \times 10^{-4}$ ( $2.6 \times 10^{-5}$ )	$4.13 \times 10^{-4}$ ( $2.2 \times 10^{-5}$ )	$3.56 \times 10^{-4}$ ( $1.9 \times 10^{-5}$ )	$3.35 \times 10^{-4}$ ( $1.0 \times 10^{-5}$ )	$3.26 \times 10^{-4}$ ( $9.0 \times 10^{-6}$ )
$\psi_c^{(2)}(x)$	$5.11 \times 10^{-4}$ ( $1.4 \times 10^{-5}$ )	$4.22 \times 10^{-4}$ ( $1.3 \times 10^{-5}$ )	$3.62 \times 10^{-4}$ ( $1.2 \times 10^{-5}$ )	$3.41 \times 10^{-4}$ ( $4.0 \times 10^{-6}$ )	$3.31 \times 10^{-4}$ ( $4.0 \times 10^{-6}$ )
$\frac{\psi_c^{(1)}(x)}{\hat{\psi}_c(x; n_0)}$	0.950	0.949	0.949	0.971	0.973
$\frac{\psi_c^{(2)}(x)}{\hat{\psi}_c(x; n_0)}$	0.973	0.970	0.965	0.988	0.988

表 4.2 Weibull分布下推论4.1的精确性验证

$x$	231	452	673	1558	2000
$\hat{\psi}_c(x; n_0)$	$1.62 \times 10^{-2}$	$4.83 \times 10^{-3}$	$1.98 \times 10^{-3}$	$1.73 \times 10^{-4}$	$7.22 \times 10^{-5}$
$\psi_c^{(1)}(x)$	$1.3 \times 10^{-2}$ ( $3.2 \times 10^{-3}$ )	$3.98 \times 10^{-3}$ ( $8.5 \times 10^{-4}$ )	$1.67 \times 10^{-3}$ ( $3.1 \times 10^{-4}$ )	$1.56 \times 10^{-4}$ ( $1.7 \times 10^{-5}$ )	$6.51 \times 10^{-5}$ ( $7.1 \times 10^{-6}$ )
$\psi_c^{(2)}(x)$	$1.49 \times 10^{-2}$ ( $1.3 \times 10^{-3}$ )	$4.49 \times 10^{-3}$ ( $3.4 \times 10^{-4}$ )	$1.85 \times 10^{-3}$ ( $1.3 \times 10^{-4}$ )	$1.63 \times 10^{-4}$ ( $1 \times 10^{-5}$ )	$6.94 \times 10^{-5}$ ( $2.8 \times 10^{-6}$ )
$\frac{\psi_c^{(1)}(x)}{\hat{\psi}_c(x; n_0)}$	0.802	0.824	0.843	0.902	0.902
$\frac{\psi_c^{(2)}(x)}{\hat{\psi}_c(x; n_0)}$	0.919	0.930	0.934	0.942	0.961
$x$	2278	2456	2673	2814	3000
$\hat{\psi}_c(x; n_0)$	$4.84 \times 10^{-5}$	$3.31 \times 10^{-5}$	$2.32 \times 10^{-5}$	$1.65 \times 10^{-5}$	$1.40 \times 10^{-5}$
$\psi_c^{(1)}(x)$	$4.39 \times 10^{-5}$ ( $4.5 \times 10^{-6}$ )	$3.03 \times 10^{-5}$ ( $2.8 \times 10^{-6}$ )	$2.14 \times 10^{-5}$ ( $1.8 \times 10^{-6}$ )	$1.53 \times 10^{-5}$ ( $1.2 \times 10^{-6}$ )	$1.31 \times 10^{-5}$ ( $9.0 \times 10^{-7}$ )
$\psi_c^{(2)}(x)$	$4.67 \times 10^{-5}$ ( $1.7 \times 10^{-6}$ )	$3.21 \times 10^{-5}$ ( $1.0 \times 10^{-6}$ )	$2.25 \times 10^{-5}$ ( $7.0 \times 10^{-7}$ )	$1.61 \times 10^{-5}$ ( $4.0 \times 10^{-7}$ )	$1.37 \times 10^{-5}$ ( $3.0 \times 10^{-7}$ )
$\frac{\psi_c^{(1)}(x)}{\hat{\psi}_c(x; n_0)}$	0.907	0.915	0.922	0.927	0.936
$\frac{\psi_c^{(2)}(x)}{\hat{\psi}_c(x; n_0)}$	0.965	0.970	0.970	0.976	0.979

表4.1 和4.2 总结了不同的初值风险准备金 $x$ 下的模拟值 $\hat{\psi}_c(x; n_0)$ , 一阶二阶渐近值 $\psi_c^{(1)}(x)$ ,  $\psi_c^{(2)}(x)$ 和对应的比值. 可以看出随着 $x$  的增长, 模拟值以及两个渐近值都在逐渐下降. 进一步的, 二阶渐近值相对模拟值的偏差要小于一阶渐近值的偏差, 所有的偏差都随着 $x$  的增长而逐渐减小. 这表明我们的二阶渐近值对于无限时破产概率的估计要比传统的一阶渐近值更加精确, 从比值也可以看出这一趋势. 下面两幅图片进一步的展现出了这一趋势.

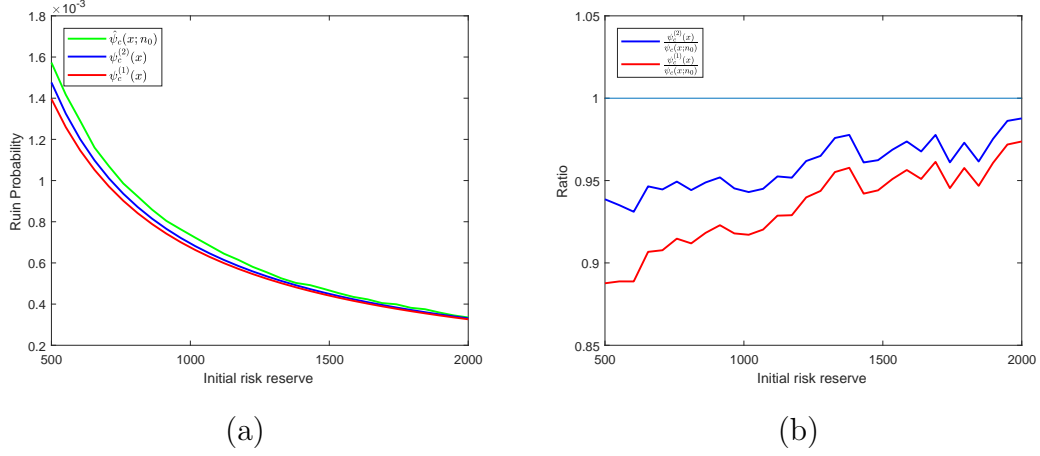


图 4.1 Pareto分布下无限时破产概率模拟值与渐近值的对比(左侧)及比值(右侧).

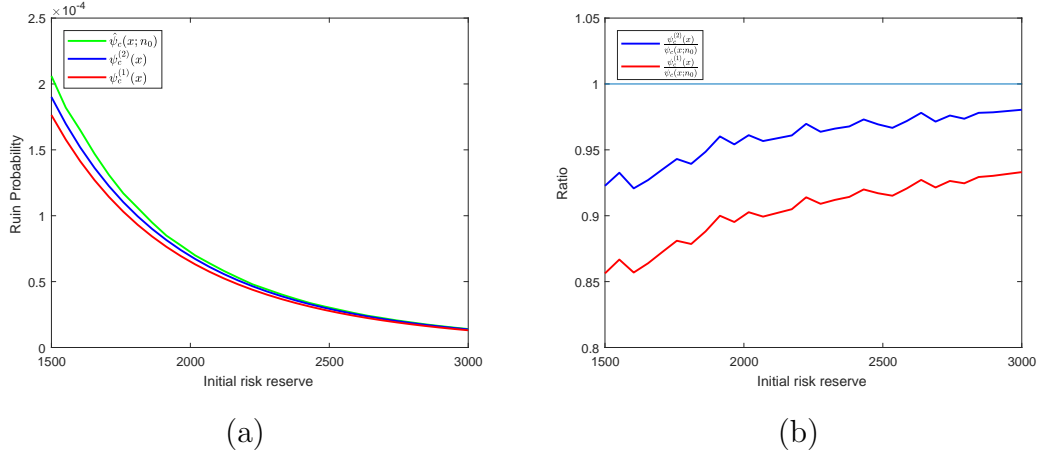


图 4.2 Weibull分布下无限时破产概率模拟值与渐近值的对比(左侧)及比值(右侧).

为了说明模拟结果的稳定性, 我们重复上述过程 $M = 10$ 次进一步的计算了 $\hat{\psi}_c(x; n_0)$ 的平均相对误差(MRE), 其定义为

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{\hat{\psi}_c(x; n_0)^{ith}}{\psi_c^{(2)}(x)} - 1,$$

其中分母 $\psi_c^{(2)}(x)$ 是二阶渐近值, 分子 $\hat{\psi}_c(x; n_0)^{ith}$ 是第 $i$ 次重复中的模拟值. 表4.3和表4.4中分别列出了Pareto 和Weibull 分布下的MRE 值.

表 4.3 Pareto分布下 $\hat{\psi}_c(x; n_0)$ 的MRE值

$x$	62	114	322	687	1202	1333	1596	1838	1949	2000
MRE	8.7%	8.4%	5.4%	4.8%	3.3%	2.7%	3.2%	3.6%	1.2%	1.1%

表 4.4 Weibull分布下 $\hat{\psi}_c(x; n_0)$ 的MRE值

$x$	231	452	673	1558	2000	2278	2456	2673	2814	3000
MRE	8.7%	7.5%	7.0%	4.9%	4.1%	3.6%	3.1%	3.2%	2.5%	2.2%

根据表4.3和表4.4, 可以明显地看出MRE值未超出10%, 这意味着我们的模拟结果是稳定的.

#### 4.4.2 敏感性分析

在这一小节中, 我们对 $\hat{\psi}_c(x; n_0)$ 的一些参数进行了敏感性分析, 分别为Pareto情形下的 $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$  和Weibull情形下的 $a$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$ .

表 4.5 Pareto分布下 $\hat{\psi}_c(x; n_0)$ 中 $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$ 的敏感性分析

Model parameters		$\hat{\psi}_c(x; n_0)$				
		$x = 62$	$x = 687$	$x = 1333$	$x = 1838$	$x = 2000$
% change in $\alpha$	+1%	-9.76%	-14.10%	-17.14%	-17.33%	-17.26%
	+0.5%	-4.88%	-7.10%	-7.53%	-7.87%	-7.91%
	$(\alpha = 2.05)$	$(1.49 \times 10^{-2})$	$(1.09 \times 10^{-3})$	$(5.25 \times 10^{-4})$	$(3.75 \times 10^{-4})$	$(3.35 \times 10^{-4})$
	-0.5%	+4.88%	+7.0%	+8.13%	+8.44%	+8.46%
% change in $\lambda$	-1%	+10.57%	+16.0%	+18.31%	+18.61%	+18.53%
	+1%	+1.63%	+2.0%	+2.53%	+2.75%	+2.78%
	+0.5%	+0.81%	+1.0%	+0.73%	+0.89%	+0.82%
	$(\lambda = 5)$	$(1.49 \times 10^{-2})$	$(1.09 \times 10^{-3})$	$(5.25 \times 10^{-4})$	$(3.75 \times 10^{-4})$	$(3.35 \times 10^{-4})$
% change in $\rho$	-0.5%	-1.63%	-1.0%	-0.85%	-0.71%	-0.77%
	-1%	-1.95%	-2.0%	-1.42%	-1.48%	-1.39%
	+1%	+1.63%	+2.0%	+2.02%	+1.92%	+1.97%
	+0.5%	+0.81%	+1.0%	+1.02%	+0.90%	+0.98%
% change in $\rho$	$(\rho = 0.1)$	$(1.49 \times 10^{-2})$	$(1.09 \times 10^{-3})$	$(5.25 \times 10^{-4})$	$(3.75 \times 10^{-4})$	$(3.35 \times 10^{-4})$
	-0.5%	-0.81%	-0.90%	-1.22%	-1.28%	-1.25%
	-1%	-1.95%	-2.0%	-1.77%	-1.55%	-1.63%

表 4.6 Weibull分布下 $\hat{\psi}_c(x; n_0)$ 中 $a, \lambda, \rho$ 的敏感性分析

Model parameters		$\hat{\psi}_c(x; n_0)$				
		$x = 231$	$x = 1558$	$x = 2278$	$x = 2673$	$x = 3000$
% change in $a$	+1%	-13.85%	-26.54%	-33.13%	-34.80%	-36.21%
	+0.5%	-8.46%	-18.29%	-16.03%	-19.11%	-19.74%
	$(a = 0.335)$	$(1.62 \times 10^{-2})$	$(1.73 \times 10^{-4})$	$(4.84 \times 10^{-5})$	$(2.32 \times 10^{-5})$	$(1.40 \times 10^{-5})$
	-0.5%	+8.15%	+18.59%	+21.80%	+23.84%	+24.81%
	-1%	+16.92%	+39.74%	+48.11%	+52.43%	+55.47%
% change in $\lambda$	+1%	+0.77%	+1.28%	+1.29%	+1.51%	+1.46%
	+0.5%	+0.23%	+0.45%	+0.64%	+0.89%	+0.73%
	$(\lambda = 6)$	$(1.62 \times 10^{-2})$	$(1.73 \times 10^{-4})$	$(4.84 \times 10^{-5})$	$(2.32 \times 10^{-5})$	$(1.40 \times 10^{-5})$
	-0.5%	-1.00%	-0.64%	-0.64%	-0.44%	-0.74%
	-1%	-1.54%	-1.28%	-1.29%	-1.11%	-1.46%
% change in $\rho$	+1%	+0.90%	+1.09%	+1.29%	+1.31%	+1.27%
	+0.5%	+0.23%	+0.45%	+0.64%	+0.65%	+0.66%
	$(\rho = 0.2)$	$(1.62 \times 10^{-2})$	$(1.73 \times 10^{-4})$	$(4.84 \times 10^{-5})$	$(2.32 \times 10^{-5})$	$(1.40 \times 10^{-5})$
	-0.5%	-1.0%	-0.83%	-0.64%	-0.45%	-0.69%
	-1%	-1.62%	-1.41%	-1.29%	-1.18%	-1.28%

表4.5总结了不同的 $x$ 下, 对应 $\alpha, \lambda$  和 $\rho$ 变化的 $\hat{\psi}_c(x; n_0)$ 的变化的百分比. 如表所示, 当 $\alpha$ 减小时 $\hat{\psi}_c(x; n_0)$  提高, 这也是可预测的, 因为更小的 $\alpha$  意味着更大的理赔额, 以及随之而来的更高的破产概率. 当 $\lambda$  或 $\rho$ 提高时,  $\hat{\psi}_c(x; n_0)$ 也提高, 这也是合理的, 因为更大的 $\lambda$  或 $\rho$  意味着一次事故导致更多理赔, 或者事故到来的更频繁, 随之而来就是破产概率的提高. 我们可以看到尽管三个参数以相同的比例变化,  $\hat{\psi}_c(x; n_0)$ 对 $\alpha$ 更加敏感, 相比 $\lambda$ 和 $\rho$ 而言.这是因为理赔额在盈余过程中占主导地位. 这和保险公司破产原因主要是突发的大额理赔这一事实相一致, 尤其是经济下行期. 同样的, 表4.6展示了 $\hat{\psi}_c(x; n_0)$ 随着 $a$ 的减小而提高, 随着 $\lambda$  或 $\rho$  的提高而提高. 同样得也可以观测到 $\hat{\psi}_c(x; n_0)$ 对 $a$ 更敏感, 相比 $\lambda$ 和 $\rho$ 而言.

## 4.5 本章小结

在本章中, 我们建立了复合更新风险模型下的无限时破产概率的二阶渐近结果, 这与最近频繁出现的巨灾密切相关, 尤其是后经济危机时期. 这一章的主要贡献是建立了无限时破产率下要比一阶渐近结果更加精确的二阶渐近结果. 另一个主要贡献是我们的理赔额是基于二阶次指数分布的, 这样的话重度重尾, 例如Pareto分布或者轻度重尾, 包含重尾Weibull分布和lognormal分布等我们还做了一些模拟去检验理论结果的准确性, 以及展示二阶渐近结果相比一阶的进步与精确. 通过敏感性研究, 我们定量分析并区分模型参数的不同作用.这种定量敏感性分析是有趣的, 并可能为监管机构或保险公司提供一些如何确定保险风险管理中适当的有效因素的想法.

在今后的工作中, 我们有几项工作的扩展是值得追求的.首先, 我们的工作考虑了一个经典的风险模型, 其中利率的影响被排除在外.这样一来, 我们无法得知



保险公司未来资产的真实价值,而利率在估计未来资产的折现价值方面发挥着重要作用.因此,将二阶渐近研究扩展到这种情况将是有益的.第二,在考虑复合更新风险模型时,单一事故造成的个人理赔之间的独立性假设是不够的.事实上,作为补充,一些相依结构在未来的研究中需要解决.最后,事故更新计数过程的假设在某些情况下是不准确的,这意味着事故的到达时间是相互独立的.例如,在经济萧条时期,危机/事故的到达时间间隔之间有较强的关系.在模型中引入准更新计数过程具有重要意义.

## 5 带有相依结构的二维常利率风险模型

### 5.1 带有相依结构的二维常利率风险模型介绍及相关文献回顾

本章考虑一个二维连续时风险模型, 其折现后的盈余过程为

$$\begin{pmatrix} R_1(t) \\ R_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_{0-}^t e^{-rs} C_1(ds) \\ \int_{0-}^t e^{-rs} C_2(ds) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \int_{0-}^t e^{-rs} D_1(ds) \\ \int_{0-}^t e^{-rs} D_2(ds) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{N_1(t)} X_k e^{-r\tau_k^{(1)}} \\ \sum_{k=1}^{N_2(t)} Y_k e^{-r\tau_k^{(2)}} \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \quad (5.1)$$

其中  $(x, y)$  为初始资本向量;  $r \geq 0$  为常利率;  $\{(C_1(t), C_2(t)); t \geq 0\}$  表示右连续的非降的保费积累过程,  $(C_1(0), C_2(0)) = (0, 0)$ ;  $\{(X_k, Y_k); k \geq 1\}$  为一序列的独立同分布的理赔向量, 其有共同的向量  $(X, Y)$ , 且分别服从支撑在  $[0, \infty)$  的边际分布  $F_1$  和  $F_2$ ;  $\{(\tau_k^{(1)}, \tau_k^{(1)}); k \geq 1\}$  是一序列的理赔到达时间, 其中  $\tau_k^{(i)} = \sum_{l=1}^k \theta_l^{(i)}, i = 1, 2$ , 由此构成了更新理赔次数向量过程  $\{(N_1(t), N_2(t)); t \geq 0\}$ ;  $\{(D_1(t), D_2(t)); t \geq 0\}$  是实值随机向量过程, 为两条盈余路线的额外净损失(等于出去理赔和保费之外的总花费减去总收入),  $(D_1(0), D_2(0)) = (0, 0)$ . 假设  $\{(X_k, Y_k); k \geq 1\}$ ,  $\{(C_1(t), C_2(t)); t \geq 0\}$ ,  $\{D_1(t); t \geq 0\}$ ,  $\{D_2(t); t \geq 0\}$ ,  $(\theta_1^{(1)}, \theta_1^{(2)})$  和  $\{(\theta_k^{(1)}, \theta_k^{(2)}); k \geq 2\}$  之间相互独立; 此外,  $\theta_1^{(1)}$  和  $\theta_1^{(2)}$  互相独立. 记两个有限时更新函数为  $\lambda_i(t) = E[N_i(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} P(\tau_k^{(i)} \leq t), i = 1, 2$ .

在上面的连续时二维风险模型中, 对于任意的  $T \geq 0$ , 将三种有限时破产概率模型记为

$$\begin{aligned} \psi_{\text{sim}}(x, y) &= P \left( \inf_{0 \leq t \leq T} \{R_1(t) \vee R_2(t)\} < 0 \middle| (R_1(0), R_2(0)) = (x, y) \right) \\ &= P \left( R_i(t) < 0, i = 1, 2, 0 \leq t \leq T \middle| (R_1(0), R_2(0)) = (x, y) \right), \end{aligned}$$

$$\psi_{\text{and}}(x, y) = P \left( \inf_{0 \leq t \leq T} R_1(t) < 0 \text{ 且 } \inf_{0 \leq t \leq T} R_2(t) < 0 \middle| (R_1(0), R_2(0)) = (x, y) \right)$$

$$\psi_{\text{or}}(x, y) = P \left( \inf_{0 \leq t \leq T} R_1(t) < 0 \text{ 或 } \inf_{0 \leq t \leq T} R_2(t) < 0 \middle| (R_1(0), R_2(0)) = (x, y) \right),$$

其中  $R_1(t) \vee R_2(t) = \max\{R_1(t), R_2(t)\}$ .  $\psi_{\text{sim}}(x, y)$  表示在  $[0, T]$  时间段内两条业务盈余过程在同一时刻破产;  $\psi_{\text{and}}(x, y)$  表示两条业务盈余过程都破产, 但是不一定在同一时刻;  $\psi_{\text{or}}(x, y)$  表示至少有一个业务盈余过程破产. 显然, 对于任意  $T \geq 0$ , 有

$$\psi_{\text{sim}}(x, y) \leq \psi_{\text{and}}(x, y) \leq \psi_{\text{or}}(x, y). \quad (5.2)$$

以上破产概率在过去几十年里被广泛研究, 因为此模型在帮助保险公司评估赔付能力时起到重要作用. 在有关一维风险模型的研究中, Tang (2004),

Leipus和Šiaulyš (2007, 2009), Yang 等(2011) 和Wang 等(2012)等研究了无利率情况下具有独立或者相依关系的风险模型的有限时破产概率, Wang 等(2013)研究了带有常利率情况下的具有独立或者相依关系的风险模型的有限时破产概率; Li 等(2010, 2012), Yang 等(2014), Wang 等(2018), Cheng和Cheng (2018), Yang 等(2018) 和Tang和Yang (2019) 进一步研究带有随机利率的风险模型. 最近, 有更多的研究者专注于多元风险模型, 尤其是二元风险模型, 也就是保险公司同时运营两条产品线. 可以参见Li 等(2007), Yang和Li (2017), Li (2018)等.

在大多数已有的文献中, 学者们并没有考虑额外的净损失过程 $D_i(t), i = 1, 2$ , 一个典型的假设就是两条业务线共用同一个理赔到达过程, 也就是 $N_1(t) = N_2(t) = N(t)$ ,  $t \geq 0$ . 在这样的前提下, Yang 和Li (2014)假设 $X$ 和 $Y$  为次指数分布, 且其之间具有Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) copula 的相依结构, 由此建立了一个精确的有限时破产概率 $\psi_{\text{sim}}(x, y)$  的渐近结果. 此处, 主要用到次指数族一个特性, 即若 $V \in \mathcal{S}$ , 则对任意 $\varepsilon > 0$ , 有

$$e^{-\varepsilon x} = o(\bar{V}(x)) \quad \text{as } x \rightarrow \infty, \quad (5.3)$$

具体可参见Embrechts 等(1997)的引理1.3.5(b). 随后, Yang和Yuen (2016) 推广了Yang和Li (2014)的结果, 其将 $X$ 和 $Y$ 之间的FGM copula相依结构拓展到了Sarmanov 分布. 最近, Li (2018) 进一步考虑了一个 $X$ 和 $Y$ 之间的更一般的相依结构, 称之为强渐近独立.

**假设5.1.** 两个随机变量 $X$ 和 $Y$ 之间强渐近独立(SAI), 若存在 $\rho \geq 0$ 使得

$$P(X > x, Y > y) = (\rho + o(1))\bar{F}_1(x)\bar{F}_2(y) \quad \text{as } (x, y) \rightarrow (\infty, \infty). \quad (5.4)$$

在SAI的相依结构下, Li (2018)得到了有限时破产概率 $\psi_{\text{sim}}(x, y)$ 的渐近行为.

然而, 正如Yang和Li (2017)所说, 两条业务线之间具有相同的理赔到达过程是不符合现实的. 比如说一次车辆事故或许会导致一次立即的车损理赔以及不止一次医疗理赔. 则车险理赔到达过程和医疗理赔到达过程即不独立也不完全一样. 更多的讨论可以参见Chen 等(2019), Yang 等(2019). Yang和Li (2017) 考虑了两个理赔到达过程是任意相依的情形, 但是两条业务线之间的理赔是独立的, 且保费收入是确定的. 更多的讨论可以参见Chen和Yang (2019), Cheng (2021), Cheng和Yu (2019)等.

**定理1.A.** (Yang和Li (2017), 定理2.1 ) 考虑二维风险模型(5.1), 其中 $F_1 \in \mathcal{S}$ ,  $F_2 \in \mathcal{S}$ ,  $(C_1(t), C_2(t)) = (c_1 t, c_2 t)$ ,  $(D_1(t), D_2(t)) \equiv (0, 0)$ ,  $c_1 > 0, c_2 > 0$ ,  $t \geq 0$ . 假设 $\{X_k; k \geq 1\}$ ,  $\{Y_k; k \geq 1\}$  and  $\{(N_1(t), N_2(t)); t \geq 0\}$  之间互相独立. 则, 对任意的 $T > 0$ ,  $E[N_1(T)N_2(T)] > 0$ , 有

$$\psi_{\text{sim}}(x, y) \sim \int_{0-}^T \int_{0-}^T \bar{F}_1(xe^{rs})\bar{F}_2(ye^{rt})dE[N_1(s)N_2(t)] \quad \text{as } (x, y) \rightarrow (\infty, \infty). \quad (5.5)$$

受上述工作启发, 本章的目标是以更一般的二维风险模型(5.1)去研究有限时破产概率 $\psi_{\text{sim}}(x, y)$ ,  $\psi_{\text{min}}(x, y)$  and  $\psi_{\text{and}}(x, y)$  的渐近行为, 在该模型中, 我们设两个理赔到达过程 $\{N_1(t); t \geq 0\}$ 和 $\{N_2(t); t \geq 0\}$ 任意相依; 共同的理赔向量 $(X, Y)$  满足SAI(5.4)的相依结构; 保费过程 $\{C_1(t); t \geq 0\}$ 和 $\{C_2(t); t \geq 0\}$ 之间也是任意相依; 但是 $\{(X_k, Y_k); k \geq 1\}$ ,  $\{(C_1(t), C_2(t)); t \geq 0\}$ ,  $\{D_1(t); t \geq 0\}$ ,  $\{D_2(t); t \geq 0\}$ 和 $\{(N_1(t), N_2(t)); t \geq 0\}$ 相互独立.

## 5.2 不同业务线理赔具有SAI相依结构下的破产概率一阶渐近结果

**定理5.1.** 考虑一个二维风险模型(5.1), 其中 $F_1 \in \mathcal{S}$ ,  $F_2 \in \mathcal{S}$ . 假设对于 $\rho > 0$ 有(5.4)成立,  $E[N_1(T)N_2(T)] > 0$ ,  $T > 0$ . 如果

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{0-}^T e^{-rs} D_i(ds) > xe^{-rT}\right) = o(\overline{F}_i(x)), \quad i = 1, 2, \quad (5.6)$$

则有

$$\begin{aligned} \psi_{\text{sim}}(x, y) &\sim \psi_{\text{and}}(x, y) \\ &\sim \int_{0-}^T \int_{0-}^T \overline{F}_1(xe^{rs}) \overline{F}_2(ye^{rt}) \hat{\lambda}(ds, dt) \\ &+ (\rho - 1) \int_{0-}^T \int_{0-}^T \overline{F}_1(xe^{rs}) \overline{F}_2(ye^{rt}) \tilde{l}(ds, dt), \end{aligned} \quad (5.7)$$

其中 $\hat{\lambda}(s, t) = E[N_1(s)N_2(t)] = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} P(\tau_i^{(1)} \leq s, \tau_j^{(2)} \leq t)$ ,  $\tilde{l}(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\tau_i^{(1)} \leq s, \tau_i^{(2)} \leq t)$ .

**注5.1.** 如果 $(D_1(t), D_2(t)) \equiv (0, 0)$ , 则定理5.1对于任意相依的更新理赔次数过程 $\{N_1(t); t \geq 0\}, \{N_2(t); t \geq 0\}$  成立.

**注5.2.** 显然, 如果 $X$ 和 $Y$ 相互独立, 则(5.4)中 $\rho = 1$ , 由此, 由注5.1可得定理1.A可由定理5.1推出.

**注5.3.** 条件(5.6)被满足是由于(5.3)Wang等(2018)的引理2.7, 如果 $D_i(t) = \delta_i B_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , 其中 $B_1(t)$ 和 $B_2(t)$ 是两个独立标准布朗运动,  $\delta_i \geq 0$  是两个常波动率,  $i = 1, 2$ .

由定理5.1 和注5.2可得一个推论.

**推论5.1.** 在定理5.1的条件下, 对每个 $i = 1, 2$ , 有

$$P\left(\inf_{0 \leq t \leq T} R_i(t) < 0 \middle| R_i(0) = x\right) \sim \int_{0-}^T \overline{F}_i(xe^{rs}) \lambda_i(ds).$$

第二个结论建立了在长尾和控制变换尾理赔下的 $\psi_{\text{or}}(x, y)$ 的渐近结果.

**定理5.2.** 在定理5.1的条件下, 如果进一步要求 $F_1 \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$ ,  $F_2 \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$ , 则有

$$\psi_{\text{or}}(x, y) \sim \int_{0-}^T \overline{F}_1(xe^{rs})l_1(ds) + \int_{0-}^T \overline{F}_2(ye^{rt})\lambda_2(dt).$$

我们将定理5.1和5.2中公式特殊为更直接的形式来结束这一小节.  $\mathcal{L} \cap \mathcal{D}$ 一个最重要的子族之一是正则变换族(也是 $\mathcal{S}$ 的子族). 根据定义, 一个分布为 $V$ 为正则变换族, 记为 $V \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ ,  $\alpha \geq 0$ , 如果对所有的 $x \geq 0$ 和对任意的 $y > 0$ , 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{V}(xy)}{\overline{V}(x)} = y^{-\alpha}. \quad (5.8)$$

由等式(5.8)的一致性, 如果 $F_1$ 和 $F_2$ 均为正则变换尾, 则我们可以得到如下推论.

**推论5.2.** 在定理5.1的条件下, 进一步假设 $F_1 \in \mathcal{R}_{-\alpha_1}$ ,  $F_2 \in \mathcal{R}_{-\alpha_2}$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0$ .

(1) 如果 $N_1(t) = N_2(t) = N(t)$ ,  $t \geq 0$ , 且其期望存在为 $\lambda(t) = EN(t)$ , 则

$$\begin{aligned} \psi_{\text{sim}}(x, y) &\sim \psi_{\text{and}}(x, y) \\ &\sim \left( \int_{0-}^T \int_{0-}^{T-s} e^{-r(\alpha_1+\alpha_2)s} (e^{-r\alpha_1 t} + e^{-r\alpha_2 t}) \lambda(dt) \lambda(ds) \right. \\ &\quad \left. + \rho \int_{0-}^T e^{-r(\alpha_1+\alpha_2)s} \lambda(ds) \right) \overline{F}_1(x) \overline{F}_2(y). \end{aligned}$$

(2) 如果 $\{N_1(t); t \geq 0\}$ 和 $\{N_2(t); t \geq 0\}$ 相互独立, 则

$$\begin{aligned} \psi_{\text{sim}}(x, y) &\sim \psi_{\text{and}}(x, y) \\ &\sim \left( \int_{0-}^T e^{-\alpha_1 rs} \lambda_1(ds) \cdot \int_{0-}^T e^{-\alpha_2 rt} \lambda_2(dt) \right. \\ &\quad \left. + (\rho - 1) \sum_{i=1}^{\infty} E \left[ e^{-r(\alpha_1 \tau_i^{(1)} + \alpha_2 \tau_i^{(2)})} 1_{(\tau_i^{(1)} \leq T, \tau_i^{(2)} \leq T)} \right] \right) \overline{F}_1(x) \overline{F}_2(y), \end{aligned}$$

其中 $1_A$ 为事件 $A$ 的示性函数.

**推论5.3.** 在定理5.2的条件下, 如果进一步要求 $F_1 \in \mathcal{R}_{-\alpha_1}$ 和 $F_2 \in \mathcal{R}_{-\alpha_2}$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0$ , 则有

$$\psi_{\text{or}}(x, y) \sim \overline{F}_1(x) \int_{0-}^T e^{-r\alpha_1 s} \lambda_1(ds) + \overline{F}_2(y) \int_{0-}^T e^{-r\alpha_2 t} \lambda_2(dt).$$

### 5.3 一些重要引理

在本节中我们引入一些引理为后续证明做准备. 下文中, 假设 $\xi$ 和 $\eta$ 是两个独立的实值随机变量, 其分布分别为 $F_\xi$ ,  $F_\eta$ , 且其和其他所有变量之间均独立.

下面两个关于次指数分布的引理来自于Li (2017)的引理3.2和Yang和Li (2014)的引理A.1.

**引理5.1.** 设 $\{Z_k; k \geq 1\}$ 是一序列的独立的实值随机变量, 其分布分别为 $V_k, k \geq 1$ . 假设存在一个分布 $V \in \mathcal{S}$ 使得 $\overline{V}_k(x) \sim l_k \overline{V}(x), l_k, k \geq 1$ . 如果 $\overline{F}_\xi(x) = o(\overline{V}(\frac{x}{a}))$ ,  $a > 0$ , 则对每一个 $n \geq 1$ 和任意固定的 $b \geq a$ , 则对所有的 $\overline{c}_n := (c_1, \dots, c_n) \in [a, b]^n$ , 有

$$P\left(\sum_{k=1}^n c_k Z_k + \xi > x\right) \sim \sum_{k=1}^n \overline{V}_k\left(\frac{x}{c_k}\right)$$

一致成立, 其中一致性可以理解为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_{\overline{c}_n \in [a, b]^n} \left| \frac{P(\sum_{k=1}^n c_k Z_k + \xi > x)}{\sum_{k=1}^n \overline{V}_k\left(\frac{x}{c_k}\right)} - 1 \right| = 0.$$

**引理5.2.** 如果 $V \in \mathcal{L}$ , 则存在一个函数 $h(\cdot) : (0, \infty) \mapsto (0, \infty)$ 使得 $h(x) = o(x)$ ,  $h(x) \uparrow \infty$ ,  $h(zx) \sim h(x)$ 对任意给定的 $z > 0$ 成立, 且有

$$\overline{V}(c_1 x \pm c_2 h(x)) \sim \overline{V}(c_1 x) \quad (5.9)$$

对所有的 $(c_1, c_2) \in [a, b]^2$ 一致成立,  $0 < a \leq b < \infty$ .

第三个引理给出了在SAI的结构下的Kesten界的二维形式.

**引理5.3.** 设 $\{(X, Y), (X_k, Y_k); k \geq 1\}$ 是一序列的独立同分布的非负随机向量, 其具有相同的边际分布 $F_1 \in \mathcal{S}$ 和 $F_2 \in \mathcal{S}$ . 如果

$$P(X > x, Y > y) = O(1) \overline{F}_1(x) \overline{F}_2(y), \quad (5.10)$$

且 $\overline{F}_\xi(x) = O(\overline{F}_1(x)), \overline{F}_\eta(y) = O(\overline{F}_2(y))$ , 则对任意的 $\varepsilon > 0$ , 有一个正常数 $C$ 使得对所有的 $x \geq 0, y \geq 0$ 和 $n \geq 1, m \geq 1$ , 有

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i + \xi > x, \sum_{j=1}^m Y_j + \eta > y\right) \leq C(1 + \varepsilon)^{n+m} \overline{F}_1(x) \overline{F}_2(y).$$

**证明.** 由(5.10)得, 存在两个大的 $x_0 > 0$ 和 $C_1 > 0$ 使得

$$\frac{P(X > x, Y > y)}{\overline{F}_1(x) \overline{F}_2(y)} \leq C_1$$

对于所有的 $x \geq x_0$ 和 $y \geq x_0$ 成立. 如果有 $0 \leq x < x_0$ 或者 $0 \leq y < x_0$ , 则我们可以分别得到

$$\frac{P(X > x, Y > y)}{\overline{F}_1(x) \overline{F}_2(y)} \leq \frac{1}{\overline{F}_1(x_0)} \quad \text{或} \quad \frac{P(X > x, Y > y)}{\overline{F}_1(x) \overline{F}_2(y)} \leq \frac{1}{\overline{F}_2(x_0)}.$$

让 $C_2 = \max\{C_1, \frac{1}{\overline{F}_1(x_0)}, \frac{1}{\overline{F}_2(x_0)}, 1\}$ , 则对所有的 $x \geq 0$ 和 $y \geq 0$ , 有

$$P(X > x, Y > y) \leq C_2 \overline{F}_1(x) \overline{F}_2(y).$$

构造两个互相独立的非负随机变量 $X'$ 和 $Y'$ , 其具有生存函数

$$\overline{F}'_1(x) = 1 \wedge \sqrt{C_2 \overline{F}_1(x)} \quad , \quad \overline{F}'_2(y) = 1 \wedge \sqrt{C_2 \overline{F}_2(y)}.$$

显然,

$$\overline{F}'_1(x) \sim \sqrt{C_2 \overline{F}_1(x)} \quad , \quad \overline{F}'_2(y) \sim \sqrt{C_2 \overline{F}_2(y)}, \quad (5.11)$$

且对所有的 $x \geq 0$ 和 $y \geq 0$ , 有

$$P(X > x, Y > y) \leq P(X' > x, Y' > y) = (1 \wedge \sqrt{C_2 \overline{F}_1(x)})(1 \wedge \sqrt{C_2 \overline{F}_2(y)}). \quad (5.12)$$

由Embrechts 等(1997)的引理A 3.15可得 $F'_1 \in \mathcal{S}, F'_2 \in \mathcal{S}$ , 且由(5.12)的第一个式子可得 $(X, Y)$ 是被 $(X', Y')$ 随机控制的, 记为 $(X, Y) \leq_{st} (X', Y')$ , 这进一步意味着 $X \leq_{st} X'$ 和 $Y \leq_{st} Y'$ , 参见Tang 和Yang (2019). 设 $\{(X', Y'), (X'_k, Y'_k); k \geq 1\}$ 是一序列的独立同分布的随机向量, 其内部互相独立且与其他所有变量之间独立. 由 $F'_1 \in \mathcal{S}, F'_2 \in \mathcal{S}$ , (5.11)和Wang 等(2018)的引理2.6得, 对于任意得 $\varepsilon > 0$ , 存在足够大的 $C$ 使得对所有的 $x \geq 0, y \geq 0$ 和 $n \geq 1, m \geq 1$ , 有

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^n X'_i + \xi > x\right) &\leq \sqrt{C}(1 + \varepsilon)^n \overline{F}_1(x), \\ P\left(\sum_{j=1}^m Y'_j + \eta > y\right) &\leq \sqrt{C}(1 + \varepsilon)^m \overline{F}_2(y). \end{aligned}$$

由 $(X, Y) \leq_{st} (X', Y')$  以及上面两个不等式, 可得对所有的 $x \geq 0, y \geq 0$ 和 $n \geq 1, m \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} &P\left(\sum_{i=1}^n X_i + \xi > x, \sum_{j=1}^m Y_j + \eta > y\right) \\ &\leq P\left(\sum_{i=1}^n X'_i + \xi > x\right) P\left(\sum_{j=1}^m Y'_j + \eta > y\right) \\ &\leq C(1 + \varepsilon)^{n+m} \overline{F}_1(x) \overline{F}_2(y), \end{aligned}$$

由此该引理得证.  $\square$

下一个引理在定理5.1的证明中起到至关重要的作用.

**引理5.4.** 设 $\{(X, Y), (X_k, Y_k); k \geq 1\}$ 是一序列独立同分布的非负随机向量且分别具有相同的边际分布 $F_1 \in \mathcal{S}$ 和 $F_2 \in \mathcal{S}$ . 假设(5.4)对于 $\rho > 0$ 成立. 如果对于任意给定的 $0 < a \leq b < \infty$ , 有

$$\overline{F}_\xi(x) = o(1) \overline{F}_1\left(\frac{x}{a}\right) \quad , \quad \overline{F}_\eta(y) = o(1) \overline{F}_2\left(\frac{y}{a}\right), \quad (5.13)$$

则对任意给定的  $n \geq 1$  和  $m \geq 1$ , 对所有的  $\overline{c}_n := (c_1, \dots, c_n) \in [a, b]^n$  和  $\overline{d}_m := (d_1, \dots, d_m) \in [a, b]^m$ , 有

$$\begin{aligned} & P\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i + \xi > x, \sum_{j=1}^m d_j Y_j + \eta > y\right) \\ & \sim \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq j \neq i \leq m} \overline{F}_1\left(\frac{x}{c_i}\right) \overline{F}_2\left(\frac{y}{d_j}\right) + \rho \sum_{i=1}^{m \wedge n} \overline{F}_1\left(\frac{x}{c_i}\right) \overline{F}_2\left(\frac{y}{d_i}\right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\sim \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P\left(X_i > \frac{x}{c_i}, Y_j > \frac{y}{d_j}\right) \quad (5.15)$$

一致成立.

**证明.** 由于(5.15)很容易可以利用SAI相依结构得到, 因此我们主要关注(5.14)的证明. 下面, 我们分散布进行证明.

**第一步.** 在这一步中, 我们的目标是证明当  $n = m = 1$  时有(5.14)成立, 也就是

$$P(cX + \xi > x, dY + \eta > y) \sim \rho \overline{F}_1\left(\frac{x}{c}\right) \overline{F}_2\left(\frac{y}{d}\right) \quad (5.16)$$

对所有的  $(c, d) \in [a, b]^2$  一致成立.

我们首先处理(5.16)的上界. 设引理5.2中的  $h_1(\cdot)$  和  $h_2(\cdot)$  作为  $F_1$  和  $F_2$ . 设  $h(\cdot) = h_1(\cdot) \wedge h_2(\cdot)$ , 则将  $V$  替换成  $F_1$  或  $F_2$  时有(5.9) 成立. 根据  $(\xi, \eta)$  属于  $(-\infty, h(x)] \times (-\infty, h(y)]$ ,  $(h(x), \infty) \times \mathbb{R}$  和  $\mathbb{R} \times (h(y), \infty)$ , 所以我们将(5.16) 左侧的概率分为三段分别记为  $I_k, k = 1, 2, 3$ . 显然,

$$P(cX + \xi > x, dY + \eta > y) \leq \sum_{k=1}^3 I_k. \quad (5.17)$$

注意本证明中所有渐近关系都为一致成立. 一这一步的渐近关系为例, 对于所有的  $(c, d) \in [a, b]^2$  都具有一致性. Li (2018)的引理3.5和本文的引理5.2, 得

$$\begin{aligned} I_1 & \leq P(cX > x - h(x), dY > y - h(y)) \\ & \sim \rho \overline{F}_1\left(\frac{x}{c}\right) \overline{F}_2\left(\frac{y}{d}\right). \end{aligned} \quad (5.18)$$

再次利用在引理5.3中构建得控制随机向量  $(X', Y')$ . 由  $(X, Y) \leq_{st} (X', Y')$  得,

$$I_2 \leq P(cX' + \xi > x, \xi > h(x)) P(dY' + \eta > y).$$

由(5.13), (5.11)以及引理5.1和5.2得,

$$\begin{aligned} & P(cX' + \xi > x, \xi > h(x)) \\ & \leq P(cX' + \xi > x) - P(cX' + \xi > x, -h(x) < \xi \leq h(x)) \\ & \leq P(cX' + \xi > x) - P(cX' > x + h(x))P(-h(x) < \xi \leq h(x)) \\ & = o(1) \overline{F}_1\left(\frac{x}{c}\right), \end{aligned}$$



再有引理5.1和(5.11)得,

$$P(dY' + \eta > y) \sim \sqrt{C_2 F_2} \left( \frac{y}{d} \right).$$

将上述三个估计结合可得

$$I_2 = o(1) \overline{F_1} \left( \frac{x}{c} \right) \overline{F_2} \left( \frac{y}{d} \right). \quad (5.19)$$

与之对称的有,

$$I_3 = o(1) \overline{F_1} \left( \frac{x}{c} \right) \overline{F_2} \left( \frac{y}{d} \right). \quad (5.20)$$

将(5.18)–(5.20)带入(5.17)可得上界.

至于(5.16)的下界, 有

$$\begin{aligned} & P(cX + \xi > x, dY + \eta > y) \\ & \geq P(cX + \xi > x, -h(x) < \xi \leq h(x), dY + \eta > y, -h(y) < \eta \leq h(y)) \\ & \geq P(cX > x + h(x), dY > y + h(y)) P(-h(x) < \xi \leq h(x)) P(-h(y) < \eta \leq h(y)) \\ & \sim \rho \overline{F_1} \left( \frac{x}{c} \right) \overline{F_2} \left( \frac{y}{d} \right), \end{aligned}$$

其中最后一步我们用了Li (2018)的引理3.5以及本文的引理5.2.

**第二步.** 在这一步中, 我们考虑当 $n = m > 1$ 时(5.14)的情况. 假设当 $n = m = l$ 时(5.14)成立, 我们去们证明对所有的 $\overline{c_{l+1}} \in [a, b]^{l+1}$  和 $\overline{d_{l+1}} \in [a, b]^{l+1}$  成立,

$$\begin{aligned} & P \left( \sum_{i=1}^{l+1} c_i X_i + \xi > x, \sum_{j=1}^{l+1} d_j Y_j + \eta > y \right) \\ & \sim \sum_{i=1}^{l+1} \sum_{1 \leq j \neq i \leq l} \overline{F_1} \left( \frac{x}{c_i} \right) \overline{F_2} \left( \frac{y}{d_j} \right) + \rho \sum_{i=1}^{l+1} \overline{F_1} \left( \frac{x}{c_i} \right) \overline{F_2} \left( \frac{y}{d_i} \right). \quad (5.21) \end{aligned}$$

根据 $(c_{l+1}X_{l+1}, d_{l+1}Y_{l+1})$ 属于 $[0, h(x)] \times [0, h(y)]$ ,  $[0, h(x)] \times (y - h(y), \infty)$ ,  $(x - h(x), \infty) \times [0, h(y)]$ ,  $(x - h(x), \infty) \times (y - h(y), \infty)$ ,  $(h(x), x - h(x)) \times [0, \infty)$ ,  $[0, \infty) \times (h(y), y - h(y))$ , 我们将(5.21)左侧的概率拆分成了六个部分, 并将得到的概率记为 $L_k(x, y; \overline{c_{l+1}}, \overline{d_{l+1}})$ ,  $1 \leq k \leq 6$ . 显然,

$$P \left( \sum_{i=1}^{l+1} c_i X_i + \xi > x, \sum_{j=1}^{l+1} d_j Y_j + \eta > y \right) \leq \sum_{k=1}^6 L_k(x, y; \overline{c_{l+1}}, \overline{d_{l+1}})$$

再利用引理5.1, 5.2, 以及假设 $n = m = l$ , 模仿Li (2018)的引理3.5的证明可得(5.21)对于所有的 $\overline{c_l} \in [a, b]^l$ 和 $\overline{d_l} \in [a, b]^l$ 一致成立.

**第三步.** 最后我们来证明当 $n \neq m$ 时的(5.14). 不失一般性, 我们假设 $n < m$ . 根据三个不相交的事件 $(\sum_{j=n+1}^m d_j Y_j \leq h(y))$ ,  $(\sum_{j=1}^n d_j Y_j + \eta \leq h(y))$ ,  $\sum_{j=n+1}^m d_j Y_j >$

$h(y))$ 和 $(\sum_{j=1}^n d_j Y_j + \eta > h(y), \sum_{j=n+1}^m d_j Y_j > h(y))$ , 我们将(5.14)中的联合尾概率分成三个部分, 分别记为 $J_k, k = 1, 2, 3$ . 显然,

$$P\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i + \xi > x, \sum_{j=1}^m d_j Y_j + \eta > y\right) = \sum_{k=1}^3 J_k. \quad (5.22)$$

因为当 $n = m$ 时有(5.14)成立, 因此利用引理5.2可得

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{0-}^{h(y)} P\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i + \xi > x, \sum_{j=1}^n d_j Y_j + \eta > y - u\right) P\left(\sum_{j=n+1}^m d_j Y_j \in du\right) \\ &\sim \int_{0-}^{h(y)} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq j \neq i \leq n} \overline{F}_1\left(\frac{x}{c_i}\right) \overline{F}_2\left(\frac{y-u}{d_j}\right) + \rho \sum_{i=1}^n \overline{F}_1\left(\frac{x}{c_i}\right) \overline{F}_2\left(\frac{y-u}{d_i}\right)\right) \\ &\quad P\left(\sum_{j=n+1}^m d_j Y_j \in du\right) \\ &\sim \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq j \neq i \leq n} \overline{F}_1\left(\frac{x}{c_i}\right) \overline{F}_2\left(\frac{y}{d_j}\right) + \rho \sum_{i=1}^n \overline{F}_1\left(\frac{x}{c_i}\right) \overline{F}_2\left(\frac{y}{d_i}\right). \end{aligned} \quad (5.23)$$

至于 $J_2$ , 对于足够大得 $y$ , 由引理5.1可得,

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{-\infty}^{h(y)} P\left(\sum_{j=n+1}^m d_j Y_j > y - u\right) P\left(\sum_{j=1}^n d_j Y_j + \eta \in du, \sum_{i=1}^n c_i X_i + \xi > x\right) \\ &\sim \int_{-\infty}^{h(y)} \sum_{j=n+1}^m \overline{F}_2\left(\frac{y-u}{d_j}\right) P\left(\sum_{j=1}^n d_j Y_j + \eta \in du, \sum_{i=1}^n c_i X_i + \xi > x\right). \end{aligned}$$

注意, 由5.2得,

$$\frac{\sum_{j=n+1}^m \overline{F}_2\left(\frac{y-u}{d_j}\right)}{\sum_{j=n+1}^m \overline{F}_2\left(\frac{y}{d_j}\right)} 1_{(u \leq h(y))} \leq \frac{\sum_{j=n+1}^m \overline{F}_2\left(\frac{y-h(y)}{d_j}\right)}{\sum_{j=n+1}^m \overline{F}_2\left(\frac{y}{d_j}\right)} \leq 2,$$

其关于 $P\left(\sum_{j=1}^n d_j Y_j + \eta \in du, \sum_{i=1}^n c_i X_i + \xi > x\right)$ 是可积的. 因此由控制收敛定理和 $F_2 \in \mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ 得,

$$\begin{aligned} &\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{J_2}{\sum_{j=n+1}^m \overline{F}_2\left(\frac{y}{d_j}\right)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=n+1}^m \overline{F}_2\left(\frac{y-u}{d_j}\right)}{\sum_{j=n+1}^m \overline{F}_2\left(\frac{y}{d_j}\right)} 1_{(u \leq h(y))} P\left(\sum_{j=1}^n d_j Y_j + \eta \in du, \sum_{i=1}^n c_i X_i + \xi > x\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i + \xi > x\right), \end{aligned}$$

结合上引理5.2, 进一步推出

$$J_2 \sim \sum_{i=1}^n \overline{F}_1\left(\frac{x}{c_i}\right) \sum_{j=n+1}^m \overline{F}_2\left(\frac{y}{d_j}\right). \quad (5.24)$$

现在我们证明 $J_3$ 是可忽略的. 确实, 由 $(X, Y) \leq_{st} (X', Y')$ , 采取和证明引理5.3时的相同步骤,

$$\begin{aligned} J_3 &\leq P\left(\sum_{i=1}^n c_i X'_i + \xi > x\right) \\ &\quad \times P\left(\sum_{j=1}^n d_j Y'_j + \eta + \sum_{j=n+1}^m d_j Y_j > y, \sum_{j=1}^n d_j Y'_j + \eta > h(y), \sum_{j=n+1}^m d_j Y_j > h(y)\right) \\ &=: J_{31} \times J_{32}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

由引理5.1和(5.11),

$$J_{31} \sim \sum_{i=1}^n \overline{F}'_1\left(\frac{x}{c_i}\right) \sim \sqrt{C_2} \sum_{i=1}^n \overline{F}_1\left(\frac{x}{c_i}\right). \quad (5.26)$$

至于 $J_{32}$ , 对于足够大的 $y$ , 有

$$\begin{aligned} J_{32} &\leq P\left(\sum_{j=1}^n d_j Y'_j + \eta + \sum_{j=n+1}^m d_j Y_j > y\right) \\ &\quad - P\left(\sum_{j=1}^n d_j Y'_j + \eta + \sum_{j=n+1}^m d_j Y_j > y, -h(y) < \sum_{j=1}^n d_j Y'_j + \eta \leq h(y)\right) \\ &\quad - P\left(\sum_{j=1}^n d_j Y'_j + \eta + \sum_{j=n+1}^m d_j Y_j > y, -h(y) < \sum_{j=n+1}^m d_j Y_j \leq h(y)\right) \\ &=: J_{321} - J_{322} - J_{323}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

类似于(5.26), 有

$$J_{321} \sim \sqrt{C_2} \sum_{j=1}^n \overline{F}_2\left(\frac{y}{d_j}\right) + \sum_{j=n+1}^m \overline{F}_2\left(\frac{y}{d_j}\right). \quad (5.28)$$

再次利用引理5.1和5.2得,

$$\begin{aligned} J_{322} &\geq P\left(\sum_{j=n+1}^m d_j Y_j > y + h(y)\right) P\left(-h(y) < \sum_{j=1}^n d_j Y'_j + \eta \leq h(y)\right) \\ &\sim \sum_{j=n+1}^m \overline{F}_2\left(\frac{y}{d_j}\right). \end{aligned} \quad (5.29)$$

同样得,

$$J_{323} \gtrsim \sum_{j=1}^n \overline{F}'_2\left(\frac{y}{d_j}\right) \sim \sqrt{C_2} \sum_{j=1}^n \overline{F}_2\left(\frac{y}{d_j}\right). \quad (5.30)$$

将(5.27)–(5.30)结合起来得

$$J_{32} = o(1) \left( \sqrt{C_2} \sum_{j=1}^n \overline{F}_2\left(\frac{y}{d_j}\right) + \sum_{j=n+1}^m \overline{F}_2\left(\frac{y}{d_j}\right) \right) = o(1) \left( \sum_{j=1}^m \overline{F}_2\left(\frac{y}{d_j}\right) \right). \quad (5.31)$$

由(5.25), (5.26)和(5.31)可得

$$\begin{aligned} J_3 &= o(1) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \overline{F_1} \left( \frac{x}{c_i} \right) \overline{F_2} \left( \frac{y}{d_j} \right) \\ &= o(1) \left( \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq j \neq i \leq m} \overline{F_1} \left( \frac{x}{c_i} \right) \overline{F_2} \left( \frac{y}{d_j} \right) + \rho \sum_{i=1}^n \overline{F_1} \left( \frac{x}{c_i} \right) \overline{F_2} \left( \frac{y}{d_i} \right) \right) \end{aligned} \quad (5.32)$$

将(5.23), (5.24)和(5.32)带入(5.22)可得当 $n < m$ 时有(5.14).

这就完成了引理5.4的证明.  $\square$

为了方便起见, 我们将式(5.8)右侧记为 $\phi(x, y)$ .

**引理5.5.** 考虑一个二维风险模型(5.1), 其中 $F_1 \in \mathcal{S}$ ,  $F_2 \in \mathcal{S}$ . 假设有(5.4)对于 $\rho > 0$ 和 $E[N_1(T)N_2(T)] > 0$ ,  $T > 0$ 成立. 设 $\xi$ 和 $\eta$ 是两个独立的实值随机变量满足

$$\overline{F_\xi}(x) = o(1)F_1(e^{rT}x) \quad \text{和} \quad \overline{F_\eta}(y) = o(1)\overline{F_2}(e^{rT}y). \quad (5.33)$$

则有

$$P \left( \sum_{i=1}^{N_1(T)} X_i e^{-r\tau_i^{(1)}} + \xi > x, \sum_{j=1}^{N_2(T)} Y_j e^{-r\tau_j^{(2)}} + \eta > y \right) \sim \phi(x, y). \quad (5.34)$$

**证明.** 将(5.33)左侧改写为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P \left( \sum_{i=1}^n X_i e^{-r\tau_i^{(1)}} + \xi > x, \sum_{j=1}^m Y_j e^{-r\tau_j^{(2)}} + \eta > y, N_1(T) = n, N_2(T) = m \right) \\ & + P(\xi > x, \eta > y, N_1(T) = 0, N_2(T) = 0) \\ & + P(\xi > x) \sum_{m=1}^{\infty} P \left( \sum_{j=1}^m Y_j e^{-r\tau_j^{(2)}} + \eta > y, N_1(T) = 0, N_2(T) = m \right) \\ & + P(\eta > x) \sum_{n=1}^{\infty} P \left( \sum_{i=1}^n X_i e^{-r\tau_i^{(1)}} + \xi > x, N_1(T) = n, N_2(T) = 0 \right) \\ & =: \sum_{k=1}^4 K_k(x, y). \end{aligned}$$

注意到 $\{N_i(t); t \geq 0\}, i = 1, 2$ 是两个更新理赔计数过程, 其矩生成函数在0附近是解析的, 参见Stein (1946). 因此我们可以选择足够小的 $\varepsilon > 0$ , 使得

$$E[(1 + \varepsilon)^{xN_i(T)}] < \infty, \quad i = 1, 2,$$

这进一步意味着对于任意的 $p > 0$ 有 $E[(N_i(T))^p] < \infty, i = 1, 2$ . 使用引理5.3和5.4,

并采取和Yang和Li (2017)的引理4.4的相同的证明方法, 可得

$$\begin{aligned}
 K_1(x, y) &\sim \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{1 \leq j \neq i < \infty} \int_{0-}^T \int_{0-}^T \overline{F}_1(xe^{rs} \overline{F}_2(ye^{rt}) P\left(\tau_i^{(1)} \in ds, \tau_j^{(2)} \in dt\right) \\
 &+ \rho \sum_{i=1}^{\infty} \int_{0-}^T \int_{0-}^T \overline{F}_1(xe^{rs} \overline{F}_2(ye^{rt}) P\left(\tau_i^{(1)} \in ds, \tau_j^{(2)} \in dt\right) \\
 &= \phi(x, y).
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

因为 $\theta_1^{(1)}$ 独立于其他所有变量, 因此易得

$$\begin{aligned}
 \phi(x, y) &\geq (\rho \wedge 1) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{0-}^T \int_{0-}^T \overline{F}_1(xe^{rs} \overline{F}_2(ye^{rt}) P\left(\tau_i^{(1)} \in ds, \tau_j^{(2)} \in dt\right) \\
 &\geq (\rho \wedge 1) P\left(\theta_1^{(1)} \leq T\right) \overline{F}_1(xe^{rT}) \int_{0-}^T \overline{F}_2(te^{rt} \lambda_2(dt) \\
 &\geq (\rho \wedge 1) P\left(\theta_1^{(1)} \leq T\right) P\left(\theta_1^{(2)} \leq T\right) \overline{F}_1(xe^{rT}) \overline{F}_2(ye^{rT}).
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

$$\geq (\rho \wedge 1) P\left(\theta_1^{(1)} \leq T\right) P\left(\theta_1^{(2)} \leq T\right) \overline{F}_1(xe^{rT}) \overline{F}_2(ye^{rT}). \tag{5.37}$$

因此由于 $\xi$ 与 $\eta$ 之间的独立性, 以及(5.37)和(5.34), 得

$$K_2(x, y) = o(1)\phi(x, y). \tag{5.38}$$

关于 $K_3(x, y)$ , 和(5.36)的证明类似, 通过(5.33)和(5.37), 可得

$$\begin{aligned}
 K_3(x, y) &= o(1)P(\xi > x) \int_{0-}^T \overline{F}_2(ye^{rt} \lambda_2(dt) \\
 &= o(1)\phi(x, y).
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

采取同样的做法, 我们可得

$$K_4(x, y) = o(1)\phi(x, y). \tag{5.40}$$

将(5.36),(5.38),(5.40)和(5.40)代入(5.35)中, 可得(5.34).

**注5.4.** 从引理5.5的证明中得出如果 $\xi = \eta = 0$ , 则无论 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 之间为何相依结构, (5.34)依然成立, 这是因为这种情况下(5.35)中 $K_2(x, y) = K_3(x, y) = K_4(x, y) = 0$ .

## 5.4 主要结论的证明

**定理5.1 证明** 构造两个独立的随机变量

$$\xi = \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{0-}^t e^{-rs} D_1(ds), \quad \eta = \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{0-}^t e^{-rt} D_2(dt),$$

其独立于其他所有随机变量. 则由(5.6)得, 其满足(5.33). 一方面, 通过引理5.5可得

$$\begin{aligned}\psi_{\text{and}}(x, y) &\leq P\left(\sum_{i=1}^{N_1(T)} X_i e^{-r\tau_i^{(1)}} + \xi > x, \sum_{j=1}^{N_2(T)} Y_j e^{-r\tau_j^{(2)}} + \eta > y\right) \\ &\sim \phi(x, y).\end{aligned}\quad (5.41)$$

另一方面, 设

$$\xi' = \inf_{0 \leq t \leq T} \int_{0-}^t e^{-rs} D_1(ds) \quad , \quad \eta' = \inf_{0 \leq t \leq T} \int_{0-}^t e^{-rt} D_2(dt).$$

再次利用引理5.5, 得

$$\begin{aligned}\psi_{\text{sim}}(x, y) &\geq P\left(\sum_{i=1}^{N_1(T)} X_i e^{-r\tau_i^{(1)}} + \xi' - \int_{0-}^T e^{-rs} C_1(ds) > x, \sum_{j=1}^{N_2(T)} Y_j e^{-r\tau_j^{(2)}} + \eta' - \int_{0-}^T e^{-rt} C_2(dt) > y\right) \\ &= \int_{0-}^{\infty} \int_{0-}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{N_1(T)} X_i e^{-r\tau_i^{(1)}} + \xi' > x + u, \sum_{j=1}^{N_2(T)} Y_j e^{-r\tau_j^{(2)}} + \eta' > y + v\right) H(du, dv) \\ &\sim \int_{0-}^{\infty} \int_{0-}^{\infty} \phi(x + u, y + v) H(du, dv) \\ &\sim \phi(x, y),\end{aligned}\quad (5.42)$$

其中 $H(\cdot, \cdot)$ 是 $(\int_{0-}^T e^{-rs} C_1(ds)$ 和 $\int_{0-}^T e^{-rt} C_2(dt)$ )的联合分布, 最后一步我们用了Yang和Li (2014)定理2的证明中同样的方法. 因此, 由(5.41), (5.42) 和(5.2)推出(5.8). 这就完成了定理5.1 的证明.  $\square$

**定理5.2 证明.** 显然, 对于任意的 $T > 0$ , 有,

$$\begin{aligned}\psi_{\text{or}}(x, y) &= P\left(\inf_{0 \leq t \leq T} R_1(t) < 0 \middle| R_1(0) = x\right) + P\left(\inf_{0 \leq t \leq T} R_2(t) < 0 \middle| R_2(0) = y\right) \\ &\quad - \psi_{\text{and}}(x, y).\end{aligned}\quad (5.43)$$

注意到

$$\int_{0-}^T \overline{F}_1(xe^{rs}) \lambda_1(ds) \geq \overline{F}_1(xe^{rT}) \lambda_1(T). \quad (5.44)$$

利用定理5.1, Hölder'不等式, (5.44)和 $F_1 \in \mathcal{D}$ , 得

$$\begin{aligned}
 \psi_{\text{and}}(x, y) &\sim \phi(x, y) \\
 &\sim \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{1 \leq j \neq i < \infty} \int_{0-}^T \int_{0-}^T \overline{F}_1(xe^{rs}) \overline{F}_2(ye^{rt}) P\left(\tau_i^{(1)} \in ds, \tau_j^{(2)} \in dt\right) \\
 &\quad + \rho \sum_{i=1}^{\infty} \int_{0-}^T \int_{0-}^T \overline{F}_1(xe^{rs}) \overline{F}_2(ye^{rt}) P\left(\tau_i^{(1)} \in ds, \tau_i^{(2)} \in dt\right) \\
 &\leq (1 \vee \rho) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{0-}^T \int_{0-}^T \overline{F}_1(xe^{rs}) \overline{F}_2(ye^{rt}) P\left(\tau_i^{(1)} \in ds, \tau_j^{(2)} \in dt\right) \\
 &\leq (1 \vee \rho) E[N_1(T)N_2(T)] \overline{F}_1(x) \overline{F}_2(y) \\
 &\leq (1 \vee \rho) \left(E[(N_1(T))^2] E[(N_2(T))^2]\right)^{\frac{1}{2}} \overline{F}_1(x) \overline{F}_2(y) \\
 &= o(1) \int_{0-}^T \overline{F}_1(xe^{rs}) \lambda_1(ds). \tag{5.45}
 \end{aligned}$$

因此, 由(5.43), (5.45)和推论5.1可得想要得结果, 至此本章证明结束.  $\square$

## 5.5 本章小结

本章估计了具有相依结构得二维连续时风险模型的破产概率. 模型假定保险公司同时经营两条业务线, 两条业务线的保费收入过程任意相依, 理赔到达过程也为任意相依, 理赔额之间满足强渐近独立的相依结构. 除了考虑保费收入与理赔损失之外, 本章的风险模型考虑了额外的净损失, 两条业务线的净损失之间相互独立. 基于此模型, 本章构建了三种破产情形, 分别为两条业务线同时破产, 两条业务线都破产但是不在同一时刻, 或者两条业务线有一条出现破产. 基于以上设计, 本章考虑了理赔额属于次指数族以及属于长尾族交上控制变换尾分布族两者情形, 并分别得到了前述三种破产概率, 并进一步得到了理赔额属于正则变换族时的破产概率.

## 6 重尾投资组合损失模型

### 6.1 重尾投资组合损失模型介绍及相关文献回顾

考虑一个风险模型, 保险公司在一段时间内可以将其财产投入到 $n$ 个风险资产中. 对每一个 $i = 1, \dots, n$ , 实值随机变量 $X_i$ 表示第 $i$ 个风险资产在中止时可能会带来的潜在损失或者理赔, 非负随机变量 $\Theta_i$ 为这段时间上的折现因子. 在以上设定下, 保险公司的总投资组合损失可以表示为一个随机加权和

$$S_n = \sum_{i=1}^n \Theta_i X_i. \quad (6.1)$$

除了一些理想状态下的分布假设以外, 是无法得到一个关于 $S_n$ 的尾概率的精确的表达式的. 因此主流研究都专注于刻画 $S_n$ 尾概率的渐近行为, 这也逐渐成为了保险, 金融, 风险管理中的一个越来越热门的话题. 一些相关的研究可以参见Chen和Yuen (2009), Tang和Yuan (2014, 2016), Chen (2017). 在本章中, 我们的研究兴趣也于一些 $S_n$ 风险测度的渐近性, 这可以通过研究它的尾概率得到.

一些风险投资组合会带来一些潜在的损失, 监管者会要求金融机构有一定量的风险准备金去应对巨额损失. 风险管理中一个最重要的任务就是去衡量风险资本, 或者说度量风险. 风险测度的选择是主观的, 但是在险价值(Value at Risk, VaR) 和条件尾期望(Conditional Tail Expectation, CTE)是两个主要的风险测度, 经常用于保险监管. 很著名的例子是Solvency II 标准就是基于VaR 去制定了欧盟保险监管准则, 瑞士基于CTE 在瑞士制定了瑞士偿付测试准则. VaR首先是由摩根大通公司提出来的以应对银行风险, 指的是在正常市场环境下, 在给定一个时段和一个执行水平, 投资组合可能出现的最大损失. 设 $X$  是一个实值的随机变量其分布尾 $F$ , 表示投资组合的潜在损失, 则它的VaR被定义为

$$\text{VaR}_q(X) = \inf\{x : F(x) \geq q\} = F^{\leftarrow}(q),$$

其中 $q \in (0, 1)$ 为置信水平,  $F^{\leftarrow}$ 为 $F$ 的左连续广义逆. 但是, 随着风险测度研究的发展, VaR因为缺乏次可加性而受到批评, 参见Asimit 等(2013). 事实上, 次可加性是通过分散降低风险的特性. 这意味这当使用VaR作为风险测度时, 一个投资组合的风险可能比其各部分相加的风险更大. 此外, VaR对于低概率高损失的极端事件不够敏感. 因此, Artzner 等(1999)引入了CTE 这个概念,

$$\text{CTE}_q(X) = E[X | X > \text{VaR}_q(X)],$$

其中 $q \in (0, 1)$ . CTE捕捉到了当风险超过VaR时的期望, 并且满足了单调性, 正其次性, 转移不变性, 次可加性. 因此CTE是一个具体一致性的风险测度, 而VaR不是, 具体参见Zhu和Li (2012). 一些更多的关于两者的优势和劣势的讨论可以参见Emmer 等(2015), 但是没有明显的证据表明其中一方能够完全取代另一方.



在过去的几十年里,有许多学者多这两种风险测度进行了研究. Asimit 等(2011)基于CTE考虑了一些具有相依结构的风险资本分配的渐近性. Joe和Li (2011) 分析了在损失具有多元正则变换尾时的尾风险. Hua 和Joe (2011)在二阶正则变换的条件下进行了一些CTE的渐近分析. Yang和Hashorva (2013) 获得了两种风险的乘以及和的渐近结果,并在精算数学方面做了一些应用. Yang 等(2015)进一步研究了在二维Sarmanov 相依结构下的随机加权求和的CTE 的渐近结果. 最近, Asimit 和Li (2016)在极值领域建立了一些一致测度的条件分布的渐近结果. Xing 等(2020)在Farlie-Gumbel-Morgenstern(FGM) copula 相依结构下进行了关于CTE 的研究. 还有一些相关研究可以参见Xing和Gan (2019), Yang 等(2019), Yang 等(2020) 等. 在本章中,受到Xing 等(2020)的启发,我们对投资组合损失 $S_n$ 的VaR和CTE的渐近性进行一些研究. 注意到在正常市场条件下,潜在损失一般具有弱相关性的特征. 本文假设潜在损失 $X_1, \dots, X_n$ 是 $n$ 个任意相依的或者两两QAI 的,或者独立的实值随机变量,其分布分别为 $F_1, \dots, F_n$ ; 折扣因子 $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ 是 $n$ 个非负的在零点非退化的随机变量;  $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ 独立于 $X_1, \dots, X_n$ 且任意相依,因为它们来自于同一个时段. 我们也考虑了一些拓展的情形,允许潜在损失于折扣因子之间存在一些特殊的相依结构.

## 6.2 投资组合损失的VaR和CTE的渐近行为

在这节中,我们研究了当置信水平 $q \uparrow 1$ 时的投资组合损失 $S_n$ 的VaR和CTE的渐近性. 前两个结论考虑极端重尾的潜在损失.

**定理6.1.** 考虑风险模型(6.1), 其中 $X_1, \dots, X_n$ 是 $n$ 个任意相依的随机变量,其分布分别为 $F_1, \dots, F_n$ ;  $\Theta_1, \dots, \Theta_n$  是 $n$ 个任意相依的在零点非退化的非负随机变量,独立于 $X_1, \dots, X_n$ . 如果 $F_1 \in \mathcal{R}_{-\alpha_1}$ ,  $\alpha_1 > 0$ ,  $P(|X_i| > x) = o(\overline{F_1}(x))$ ,  $i = 2, \dots, n$ , 且 $E[\Theta_i^{\alpha_1+\varepsilon}] < \infty$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , 则当 $q \uparrow 1$ 时有,

$$\text{VaR}_q(S_n) \sim (E[\Theta_1^{\alpha_1}])^{\frac{1}{\alpha_1}} \text{VaR}_q(X_1),$$

如果进一步的要求 $\alpha_1 > 1$ , 则有

$$\text{CTE}_q(S_n) \sim \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1} (E[\Theta_1^{\alpha_1}])^{\frac{1}{\alpha_1}} \text{VaR}_q(X_1). \quad (6.2)$$

我们第二个结论关于两两QAI的具有正则变换尾的潜在损失的尾等价性.

**定理6.2.** 考虑风险模型(6.1), 其中 $X_1, \dots, X_n$ 是 $n$ 个两两QAI的实值随机变量,其分布分别为 $F_1, \dots, F_n$ ;  $\Theta_1, \dots, \Theta_n$  是 $n$ 个任意相依的在零点非退化的非负随机变量,独立于 $X_1, \dots, X_n$ . 如果 $F_1 \in \mathcal{R}_{-\alpha_1}$ ,  $\alpha_1 > 0$ ,  $E[\Theta_i^{\alpha_1+\varepsilon}] < \infty$ ,  $\varepsilon > 0$ , 且对于常数 $c_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, k, n$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_i}(x)}{\overline{F_1}(x)} = c_i, \quad (6.3)$$

则当  $q \uparrow 1$  时, 有,

$$\text{VaR}_q(S_n) \sim \left( \sum_{i=1}^n c_i E[\Theta_i^{\alpha_1}] \right)^{\frac{1}{\alpha_1}} \text{VaR}_q(X_1),$$

如果进一步的要求  $\alpha_1 > 1$ , 则有

$$\text{CTE}_q(S_n) \sim \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1} \left( \sum_{i=1}^n c_i E[\Theta_i^{\alpha_1}] \right)^{\frac{1}{\alpha_1}} \text{VaR}_q(X_1). \quad (6.4)$$

第三个结论建立在轻度重尾但是潜在损失独立同分布的条件下.

**定理6.3.** 考虑风险模型(6.1), 其中  $X_1, \dots, X_n$  是  $n$  个独立同分布的实质随机变量, 有共同的分布  $F_1$ ;  $\Theta_1, \dots, \Theta_n$  是  $n$  个任意相依的在零点非退化的同分布的非负随机变量, 有上界, 且独立于  $X_1, \dots, X_n$ . 如果  $F_1 \in \mathcal{S} \cap \mathcal{R}_{-\infty}$ , 则当  $q \uparrow 1$  时, 有,

$$\text{VaR}_q(S_n) \sim \text{VaR}_{1-\frac{1-q}{n}}(\Theta_1 X_1). \quad (6.5)$$

如果进一步要求  $\Theta_1 = \dots = \Theta_n = e^{-\delta T}$ , 其中  $\delta > 0$  为常利率,  $T > 0$  是区间的长度, 则我们可以推导出以下推论.

**推论6.1.** 在定理6.3的条件下, 如果  $\Theta_1 = \dots = \Theta_n = e^{-\delta T}$  对于一些  $\delta > 0$  和  $T > 0$  成立, 则当  $q \uparrow 1$  时有下式成立,

$$\text{VaR}_q(S_n) \sim e^{-\delta T} \text{VaR}_{1-\frac{1-q}{n}}(X_1). \quad (6.6)$$

### 6.3 相依结构的一些拓展

在这一小节中, 我们进一步考虑了以下一些潜在损失和折扣因子之间特殊的相依结构. 简单起见, 我们假设  $X_1, \dots, X_n$  同分布. 在给出一些拓展定理之前, 我们先给出一些假设.

**假设6.1.** 对于一个非负随机向量  $(\xi_1, \xi_2)$ , 存在一个可测函数  $h : [0, \infty) \mapsto (0, \infty)$  使得

$$P(\xi_1 > x | \xi_2 = t) \sim h(t) P(\xi_1 > x)$$

对所有的  $t \in [0, \infty)$  一致成立, 也就是,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, \infty)} \left| \frac{P(\xi_1 > x | \xi_2 = t)}{h(t) P(\xi_1 > x)} - 1 \right| = 0.$$

当  $t$  取  $\xi_2$  的概率为1时, 条件概率  $P(\xi_1 > x | \xi_2 = t)$  可以理解为无条件概率, 此时  $h(t) = 1$ . 此外, 假设6.1意味着  $E[h(\xi_2)] = 1$ , 若  $P(\xi_1 > x) > 0$ ,  $x \in [0, \infty)$ . 因此, 如果  $(\xi_1, \xi_2)$  满足假设6.1, 则有

$$\begin{aligned} P(\xi_1 > x, \xi_2 > x) &= \int_x^\infty P(\xi_1 > x | \xi_2 = t) P(\xi_2 \in dt) \\ &\sim P(\xi_1 > x) E[h(\xi_2) 1_{(\xi_2 > x)}] \\ &= o(P(\xi_1 > x)), \end{aligned}$$

意味着两个非负的 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 为QAI的相依结构. 另一个关于Sarmanov分布的概念是由Sarmanov (1966)提出来的. 称一个实值随机向量 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  服从多维Sarmanov分布, 如果

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n (\xi_i \in dx_i)\right) = \left(1 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \omega_{ij} \phi_i(x_i) \phi_j(x_j)\right) \prod_{i=1}^n P(\xi_i \in dx_i), \quad (6.7)$$

其中 $\phi_1, \dots, \phi_n$ 是实值的核函数,  $\omega_{ij}, 1 \leq i < j \leq n$ , 是实值的参数, 使得 $E[\phi_i(\xi_i)] = 0, i = 1, \dots, n$ , 并且对每一个 $I \subset \{1, \dots, n\}, 1 + \sum_{i < j \in I} \omega_{ij} \phi_i(x_i) \phi_j(x_j) \geq 0, (x_i, x_j) \in \text{supp}(\xi_i) \times \text{supp}(\xi_j)$ . 显然, 对所有的 $I \subset \{1, \dots, n\}, |I| \geq 2$ , 随机向量 $(\xi_i, i \in I)$ 仍然继承了Sarmanov分布, 也就是,

$$P\left(\bigcap_{i \in I} (\xi_i \in dx_i)\right) = \left(1 + \sum_{i < j \in I} \omega_{ij} \phi_i(x_i) \phi_j(x_j)\right) \prod_{i \in I} P(\xi_i \in dx_i).$$

因此, 如果一个实值的随机向量 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 服从Sarmanov分布(6.7), 则 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 是两两QAI的. 确实, 对于每一个 $1 \leq i < j \leq n$ ,

$$\begin{aligned} P(\xi_i > x, \xi_j > x) &= \int_x^\infty \int_x^\infty (1 + \omega_{ij} \phi_i(x_i) \phi_j(x_j)) P(\xi_i \in dx_i) P(\xi_j \in dx_j) \\ &\leq C P(\xi_i > x) P(\xi_j > x) \\ &= o(1)(P(\xi_i > x) + P(\xi_j > x)), \end{aligned} \quad (6.8)$$

其中 $C > 0$ , 第二步成立是由于 $\phi_k$ 有上界 $\text{supp}(\xi_k), k = 1, \dots, n$ , 具体参见Wei和Yuan (2016)的引理3.2或者Yang和Wang (2013) 的命题1.1. 类似的, 对所有的 $(\xi_i^+, \xi_j^-)$ 和 $(\xi_i^-, \xi_j^+)$ , (6.8). 进一步说, 对于一个非负服从二维Sarmanov分布的随机向量 $(\xi_1, \xi_2)$ , 假设6.1 可以在一些额外条件下被满足, 参见Yang 等(2015)的引理3.5. 更多关于分布假设6.1和Sarmanov分布的讨论, 可以参见Li 等(2010), Lee (1996), Vernic (2016)等.

**定理6.4.** 考虑风险模型(6.1), 其中 $(X_1, \dots, X_n, \Theta_1, \dots, \Theta_n) := (\xi_1, \dots, \xi_{2n})$ 服从 $2n$ 维度Sarmanov 分布, 其形式如(6.7),  $d_i = \lim \phi_i(x) < \infty, i = 1, \dots, n$ . 假设 $X_1, \dots, X_n$ 是 $n$ 个同分布的实值的随机变量, 其具有共同的分布 $F_1 \in \mathcal{R}_{-\alpha_1}$ ,  $\alpha_1 > 0$ ;  $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ 是 $n$ 个在零点非退化的非负随机变量, 其期望为 $E[\Theta_i^{\alpha_1 + \varepsilon}] < \infty, \varepsilon > 0, i = 1, \dots, n$ . 则当 $q \uparrow 1$ 时, 有,

$$\text{VaR}_q(S_n) \sim \left( \sum_{i=1}^n (E[\Theta_i^{\alpha_1}] + \omega_{i(n+i)} d_i E[\phi_{n+i}(\Theta_i) \Theta_i^{\alpha_1}]) \right)^{\frac{1}{\alpha_1}} \text{VaR}_q(X_1),$$

如果进一步要求 $\alpha_1 > 1$ , 则有

$$\text{CTE}_q(S_n) \sim \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1} \left( \sum_{i=1}^n (E[\Theta_i^{\alpha_1}] + \omega_{i(n+i)} d_i E[\phi_{n+i}(\Theta_i) \Theta_i^{\alpha_1}]) \right)^{\frac{1}{\alpha_1}} \text{VaR}_q(X_1). \quad (6.9)$$

**定理6.5.** 考虑风险模型(6.1), 其中 $(X_1, \Theta_1), \dots, (X_n, \Theta_n)$ 之间互相独立, 但是对每个 $(X_i^+, \Theta_i)$ 都满足假设6.1, 且其可测函数为 $h_i, i = 1, \dots, n$ . 假设 $X_1, \dots, X_n$ 是 $n$ 个同分布的实值的随机变量, 具有相同的分布为 $F_1 \in \mathcal{R}_{-\alpha_1}, \alpha_1 > 0$ ;  $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ 是 $n$ 个在零点非退化的非负随机变量, 期望为 $E[\Theta_i^{\alpha_1+\varepsilon}] \vee E[h_i(\Theta_i)\Theta_i^{\alpha_1+\varepsilon}] < \infty, \varepsilon > 0, i = 1, \dots, n$ . 则当 $q \uparrow 1$ 时, 有,

$$\text{VaR}_q(S_n) \sim \left( \sum_{i=1}^n E[h_i(\Theta_i)\Theta_i^{\alpha_1}] \right)^{\frac{1}{\alpha_1}} \text{VaR}_q(X_1),$$

如果进一步要求 $\alpha_1 > 1$ , 则有

$$\text{CTE}_q(S_n) \sim \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1} \left( \sum_{i=1}^n E[h_i(\Theta_i)\Theta_i^{\alpha_1}] \right)^{\frac{1}{\alpha_1}} \text{VaR}_q(X_1). \quad (6.10)$$

正如在上文所说, 尽管定理6.4的条件, 结合一些其他条件按, 可以保证假设6.1对每个 $(X_i^+, \Theta_i), i = 1, \dots, n$ 成立, 但是定理6.5也需要一些 $(X_1, \Theta_1), \dots, (X_n, \Theta_n)$ 之间保持相互独立.

## 6.4 一些引理及主要证明

在进行主要结论的证明之前, 我们首先引用一些引理. 第一个引理来自于Yang 等(2018)的引理3.3.

**引理6.1.** 设 $(X_1, X_2)$ 是一个实值随机向量,  $X_1$ 和 $X_2$ 之间任意相依, 分布分别为 $F_1$ 和 $F_2$ . 如果 $F_1 \in \mathcal{R}_{-\alpha_1}, \alpha_1 > 0$ , 且 $P(|X_2| > x) = o(\overline{F_1}(x))$ , 则有

$$P(X_1 + X_2 > x) \sim \overline{F_1}(x).$$

第二个引理主要关于随机加权和的尾渐近性, 来自于Chen和Yuen (2009)的定理3.2和Tang和Yuan (2014)的定理1.

**引理6.2.** (1) 设 $X_1, \dots, X_n$ 个 $n$ 个两两QAI的实值随机变量, 其分布分别为 $F_1, \dots, F_n$ ;  $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ 是 $n$ 个任意相依的在零点非退化的非负随机变量, 且独立于 $X_1, \dots, X_n$ . 如果 $F_i \in \mathcal{R}_{-\alpha_i}, \alpha_i > 0$ , 且 $E[\Theta_i^{\alpha_i+\varepsilon}] < \infty, \varepsilon > 0, i = 1, \dots, n$ , 则有

$$P\left(\sum_{i=1}^n \Theta_i X_i > x\right) \sim \sum_{i=1}^n P(\Theta_i X_i > x). \quad (6.11)$$

(2) 设 $X_1, \dots, X_n$ 是 $n$ 个独立同分布是值随机变量, 具有共同的分布 $F_1$ ;  $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ 是 $n$ 个任意相依的在零点非退化的非负随机变量, 有上界且独立于 $X_1, \dots, X_n$ . 如果 $F_1 \in \mathcal{S}$ , 则有(6.11)成立.

第三个引理来自于Böcker和Klüppelberg (2010).

**引理6.3.** 设 $F_1$ 和 $F_2$ 是两个分布函数, 满足 $\overline{F_1}(x) \sim \overline{F_2}(x)$ . 如果 $F_1 \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ ,  $0 < \alpha \leq \infty$ , 则

$$\left(\frac{1}{\overline{F_1}}\right)^{\leftarrow}(x) \sim \left(\frac{1}{\overline{F_2}}\right)^{\leftarrow}(x).$$

现在我们开始主要结果的证明.

**定理6.1 证明.** 首先我们需要证明

$$P(S_n > x) \sim P(\Theta_1 X_1 > x) \sim E[\Theta_1^{\alpha_1}] \overline{F_1}(x). \quad (6.12)$$

由 $F_1 \in \mathcal{R}_{-\alpha_1}$ 以及Breiman定理可得, (6.12)的第二个关系式成立. 因此, (6.12)中第一个关系式. 不失一般性, 我们假设 $n = 2$ . 对于足够小的 $\epsilon > 0$ ,  $(1-\epsilon)(\alpha_1+\epsilon) > \alpha_1$ , 由 $P(|X_2| > x) = o(\overline{F_1}(x))$  和Markov 不等式得,

$$\begin{aligned} P(\Theta_2 |X_2| > x) &\leq \int_0^{x^{1-\epsilon}} P\left(|X_2| > \frac{x}{u}\right) P(\Theta_2 \in du) + P(\Theta_2 > x^{1-\epsilon}) \\ &\leq o(1) \int_0^{x^{1-\epsilon}} \overline{F_1}\left(\frac{x}{u}\right) P(\Theta_2 \in du) + x^{-(1-\epsilon)(\alpha_1+\epsilon)} E[\Theta_2^{\alpha_1+\epsilon}] \\ &= o(1) P(\Theta_2 X_1 > x) + o(\overline{F_1}(x)) \\ &= o(\overline{F_1}(x)) \\ &= o(1) P(\Theta_1 X_1 > x), \end{aligned} \quad (6.13)$$

其中第三步我们利用Tang和Tsitsiashvili (2003)的引理3.5得到, 最后两步我们使用Breiman定理两次得到. 此外, Embrechts和Goldie (1980)的推论得,  $F_{\Theta_1 X_1} \in \mathcal{R}_{-\alpha_1}$ . 然后通过使用(6.13)和引理6.1, 可得当 $n = 2$ 时, (6.12)成立, 这意味着 $F_{S_n} \in \mathcal{R}_{-\alpha_1}$ . 通过使用(6.12)和引理6.3 得, 当 $q \uparrow 1$ 时,

$$\begin{aligned} \text{VaR}_q(S_n) &= \left(\frac{1}{\overline{F_{S_n}}}\right)^{\leftarrow} \left(\frac{1}{1-q}\right) \\ &\sim \left(\frac{1}{\overline{F_1}}\right)^{\leftarrow} \left(\frac{E[\Theta_1^{\alpha_1}]}{1-q}\right) \\ &\sim (E[\Theta_1^{\alpha_1}])^{\frac{1}{\alpha_1}} \text{VaR}_q(X_1), \end{aligned} \quad (6.14)$$

最后一个我们使用了 $\left(\frac{1}{\overline{F_1}}\right)^{\leftarrow}$  了的正则变换的性质, 其参数为 $\frac{1}{\alpha_1}$ .

现在我们开始估计 $\text{CTE}_q(S_n)$ . 显然,

$$\text{CTE}_q(S_n) = \text{VaR}_q(S_n) + \frac{\int_{\text{VaR}_q(S_n)}^{\infty} P(S_n > x) dx}{P(S_n > \text{VaR}_q(S_n))}.$$

然后由 $F_{S_n} \in \mathcal{R}_{-\alpha_1}$ , Karamata定理, 和(6.14)得到我们所希望的(6.2). 这就完成了定理6.1的证明.  $\square$

**定理6.2 证明.** 由Breiman定理, 或者采取和(6.13)相同的做法, 在(6.3)的条件下, 对每个 $i = 1, \dots, n$ , 有

$$\lim \frac{P(\Theta_i X_i > x)}{\overline{F_1}(x)} = c_i E[\Theta_i^{\alpha_1}].$$

类似于Chen和Yuen (2009)的引理3.1的证明, 在QAI的假设下, 对每个 $1 \leq i \neq j \leq n$ , 有

$$\lim \frac{P(\Theta_i X_i^\pm > x, \Theta_j X_j > x)}{\overline{F}_1(x)} = 0.$$

然后通过模仿Chen和Yuen (2009)定理3.1的证明, 由Breiman定理可得,

$$P(S_n > x) \sim \sum_{i=1}^n c_i E[\Theta_i^{\alpha_1}] \overline{F}_1(x).$$

通过和定理6.1一样的证明方法, 我们得到了想要的结果.  $\square$

**定理6.3 证明.** 由引理6.2(2)得,

$$P(S_n > x) \sim \sum_{i=1}^n P(\Theta_i X_i > x) = nP(\Theta_1 X_1 > x). \quad (6.15)$$

由于 $\Theta_1$ 有上界 $b > 0$ , 通过 $F_1 \in \mathcal{S}$ 和Tang (2006)的定理1.1, 得 $F_{\Theta_1 X_1} \in \mathcal{S}$ . 此外, 通过 $F_1 \in \mathcal{R}_{-\infty}$ 得, 对任意的 $y > 1$

$$\begin{aligned} P(\Theta_1 X_1 > xy) &= \int_0^b \frac{\overline{F}_1\left(\frac{xy}{u}\right)}{\overline{F}_1\left(\frac{x}{u}\right)} \overline{F}_1\left(\frac{x}{u}\right) P(\Theta_1 \in du) \\ &= o(1) \int_0^b \overline{F}_1\left(\frac{x}{u}\right) P(\Theta_1 \in du) \\ &= o(1) P(\Theta_1 X_1 > x), \end{aligned}$$

这意味着 $F_{\Theta_1 X_1} \in \mathcal{R}_{-\infty}$ . 由(6.15)和引理6.3得, 当 $q \uparrow 1$ 时有,

$$\begin{aligned} \text{VaR}_q(S_n) &= \left( \frac{1}{\overline{F}_{S_n}} \right)^{\leftarrow} \left( \frac{1}{1-q} \right) \\ &\sim \inf \left\{ x : \frac{1}{P(\Theta_1 X_1 > x)} \geq \frac{n}{1-q} \right\} \\ &= \text{VaR}_{1-\frac{1-q}{n}}(\Theta_1 X_1). \end{aligned}$$

由此得证.  $\square$

**推论6.1 证明.** 由(6.5)得, 当 $q \uparrow 1$ 时, 有,

$$\begin{aligned} \text{VaR}_q(S_n) &\sim \text{VaR}_{1-\frac{1-q}{n}}(e^{-\delta T} X_1) \\ &= e^{-\delta T} \text{VaR}_{1-\frac{1-q}{n}}(X_1), \end{aligned}$$

由此得证.  $\square$

**定理6.4 证明.** 由于 $(\xi_1, \dots, \xi_{2n}) = (X_1, \dots, X_n, \Theta_1, \dots, \Theta_n)$ 服从 $2n$ 维Sarmanov分布, 其形式为(6.7), 得对每一个 $i = 1, \dots, n$ ,  $(\xi_i, \xi_{n+i}) = (X_i, \Theta_i)$ 服从二维Sarmanov分布, 核函数为 $\phi_i, \phi_{n+i}$ , 参数为 $\omega_{i(n+i)}$ . 由Yang和Wang (2013)的定理2.1得, 对每一个 $i = 1, \dots, n$ ,

$$P(\Theta_i X_i > x) \sim (E[\Theta_i^{\alpha_1}] + \omega_{i(n+i)} d_i E[\phi_{n+i}(\Theta_i) \Theta_i^{\alpha_1}]) \overline{F}_1(x), \quad (6.16)$$

这意味着  $F_{\Theta_i X_i} \in \mathcal{R}_{-\alpha_1}$ . 采取和(6.8)式中同样的做法,

$$\begin{aligned}
 P(\Theta_1 X_1 > x, \Theta_2 X_2 > x) &= \int \cdots \int_{x_1 x_3 > x, x_2 x_4 > x} \left( 1 + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \omega_{ij} \phi_i(x_i) \phi_j(x_j) \right) \\
 &\quad P(X_1 \in dx_1) P(X_2 \in dx_2) P(\Theta_1 \in dx_3) P(\Theta_2 \in dx_4) \\
 &\leq C P(\Theta_1^\perp X_1^\perp > x) P(\Theta_2^\perp X_2^\perp > x) \\
 &= o(P(\Theta_1^\perp X_1^\perp > x) + P(\Theta_2^\perp X_2^\perp > x)) \\
 &= o(\overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x)) \\
 &= o(P(\Theta_1 X_1 > x) + P(\Theta_2 X_2 > x)), \tag{6.17}
 \end{aligned}$$

$C > 0$ . 且  $(X_1^\perp, X_2^\perp, \Theta_1^\perp, \Theta_2^\perp)$  之间相互独立, 且和  $(X_1, X_2, \Theta_1, \Theta_2)$  具有相同的分布, 在第二步中我们用了Wei和Yuan (2016)的引理3.2, 最后两步是用了Breiman定理和(6.16). 采取同样的方法, 对  $(X_1^+, X_2^-)$  和  $(X_1^-, X_2^+)$ , 式(6.17)也成立. 这确保了  $\Theta_1 X_1, \dots, \Theta_n X_n$  是两两QAI的. 然后通过引理6.2(1)和(6.16)得,

$$\begin{aligned}
 P(S_n > x) &\sim \sum_{i=1}^n P(\Theta_i X_i > x) \\
 &\sim \overline{F}_1(x) \sum_{i=1}^n (E[\Theta_i^{\alpha_1}] + \omega_{i(n+i)} d_i E[\phi_{n+i}(\Theta_i) \Theta_i^{\alpha_1}]).
 \end{aligned}$$

因此, 通过和定理6.1同样的证明方法可得我们所希望的结果.  $\square$

**定理6.5 证明.** 考虑乘积  $\Theta_i X_i, i = 1, \dots, n$  的尾概率. 对每一个  $i = 1, \dots, n$  和任意一个  $0 < \epsilon < \frac{\epsilon}{\alpha_1 + \epsilon}$ , 我们将  $P(\Theta_i X_i > x)$  分为三段, 分别为  $\Theta_i$  in  $[0, 1]$ ,  $(1, x^{1-\epsilon}]$  和  $(x^{1-\epsilon}, \infty)$ , 分别记为  $I_1, I_2$  和  $I_3$ . 显然, 由Markov不等式,  $F_1 \in \mathcal{R}_{-\alpha_1}$  和  $E[\Theta_i^{\alpha_1 + \epsilon}] < \infty$ , 可得

$$\begin{aligned}
 I_3 &\leq P(\Theta_i > x^{1-\epsilon}) \\
 &\leq x^{-(1-\epsilon)(\alpha_1 + \epsilon)} E[\Theta_i^{\alpha_1 + \epsilon}] \\
 &= o(\overline{F}_1(x)).
 \end{aligned}$$

由Potter界(参见Bingham 等(1987)的命题2.2.1)和  $E[h(\Theta_i) \Theta_i^{\alpha_1 + \epsilon}] < \infty$ , 应有控制收敛定理得

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_1^{x^{1-\epsilon}} P\left(X_i > \frac{x}{u} \middle| \Theta_i = u\right) P(\Theta_i \in du) \\
 &\sim \int_1^{x^{1-\epsilon}} h_i(u) \overline{F}_1\left(\frac{x}{u}\right) P(\Theta_i \in du) \\
 &\sim \overline{F}_1(x) E[h_i(\Theta_i) \Theta_i^{\alpha_1} 1_{(\Theta_i > 1)}].
 \end{aligned}$$

类似的, 再次使用控制收敛定理, 以及  $E[h_i(\Theta_i)] = 1$ , 得

$$I_1 \sim \overline{F}_1(x) E[h_i(\Theta_i) \Theta_i^{\alpha_1} 1_{(\Theta_i \leq 1)}].$$

将上述三个估计相结合可得对每个  $i = 1, \dots, n$ , 有,

$$P(\Theta_i X_i > x) \sim \overline{F}_1(x) E[h_i(\Theta_i) \Theta_i^{\alpha_1}],$$

由此, 结合Yang 等(2013)的定理1, 得

$$\begin{aligned} P(S_n > x) &\sim \sum_{i=1}^n P(\Theta_i X_i > x) \\ &\sim \overline{F}_1(x) \sum_{i=1}^n E[h_i(\Theta_i) \Theta_i^{\alpha_1}]. \end{aligned}$$

和前面的证明类似, 我们得到了想要的结果. 至此, 本章证明结束  $\square$

## 6.5 理论结果的数值模拟

在这一节中, 我们使用Python做了一些蒙特卡洛模拟去检验我们结果的准确性考虑一个投资组合, 其具有两个潜在损失  $X_1$  和  $X_2$ , 它们具有Clayton copula的相依结构

$$C(u, v) = \left( (u^{-\beta} + v^{-\beta} - 1) \vee 0 \right)^{-\frac{1}{\beta}}, \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \quad (6.18)$$

其参数  $\beta \in [-1, 0) \cup (0, \infty)$ , 具体参见Nelsen (2006). 经验证, 如果  $\beta = 1$ , 则  $X_1$  和  $X_2$  满足QAI的相依结构.

我们首先进行第一个模拟, 设  $X_1$  和  $X_2$  服从Pareto分布

$$F_i(x) = 1 - \left( 1 + \frac{x}{\sigma_i} \right)^{-\alpha_i}, \quad x \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (6.19)$$

$\alpha_2 > \alpha_1 > 1$ ,  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 > 0$ . 显然,  $F_i \in \mathcal{R}_{-\alpha_i}$ ,  $i = 1, 2$ , 且  $\overline{F}_2(x) = o(\overline{F}_1(x))$ . 两个折扣因子分别为  $\Theta_1 = Y_1$  和  $\Theta_2 = Y_1 Y_2$ , 其中  $Y_1$  和  $Y_2$  是两个支撑在  $(0, 1)$  上的独立的均匀分布, 且独立于  $X_1$  和  $X_2$ . 由此, 定理6.1的所有条件都满足了. 现在我们进行蒙特卡洛模拟去阐明(6.2).

下面是生成  $N$  对具有相依结构的随机向量  $(X_1, X_2)$  的算法:

步骤a: 生成  $N$  对独立同分布的服从  $(0, 1)$  上均匀分布的随机变量  $u_i$  和  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ;

步骤b: 计算  $x_{1,i} = \sigma_1 \left( (1 - u_i)^{-\frac{1}{\alpha_1}} - 1 \right)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ;

步骤c: 计算  $w_i = \left( 1 + \left( v_i^{-\frac{\beta}{1+\beta}} - 1 \right) u_i^{-\beta} \right)^{-\frac{1}{\beta}}$  和  $x_{2,i} = \sigma_2 \left( (1 - w_i)^{-\frac{1}{\alpha_2}} - 1 \right)$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

由此, 对每一个  $i = 1, \dots, N$ , 所获得的  $(x_{1,i}, x_{2,i})$  向量值均服从Clayton copula (6.18), 并且边际分布为Pareto分布(6.19).

估计  $\text{VaR}_q(X_1)$  和  $\text{CTE}_q(S_2)$  的过程如下:



步骤1: 生成 $N$ 对独立同分布的在 $(0, 1)$ 上服从均匀分布的随机变量 $y_{1,i}$ 和 $y_{2,i}$ , 然后计算 $\Theta_{1,i} = y_{1,i}$ 和 $\Theta_{2,i} = y_{1,i}y_{2,i}$ . 则 $s_{2,i} = \Theta_{1,i}x_{1,i} + \Theta_{2,i}x_{2,i}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ;

步骤2: 设次序统计量 $x_{1,(1)} \leq \dots \leq x_{1,(N)}$ , 选择 $x_{1,(\lceil Nq \rceil)}$ 作为 $\text{VaR}_q(X_1)$ , 这里 $\lceil x \rceil$ 是不小于 $x$ 的最小整数;

步骤3: 设次序统计量 $s_{2,(1)} \leq \dots \leq s_{2,(N)}$ , 选择 $s_{2,(\lceil Nq \rceil)}$ 作为 $\text{VaR}_q(S_2)$ , 然后计算大于 $\text{VaR}_q(S_2)$ 的 $s_{2,1}, \dots, s_{2,N}$ 的均值作为 $\text{CTE}_q(S_2)$ .

样本量设置为 $N = 3 \times 10^7$ , 置信水平 $q$ 的范围为0.95到0.9995. 变量的参数设置为 $\alpha_1 = 1.6, \alpha_2 = 2.5, \sigma_1 = \sigma_2 = 1$ 和 $\beta = 1$ . 图1中展示了模拟(1)的结果.

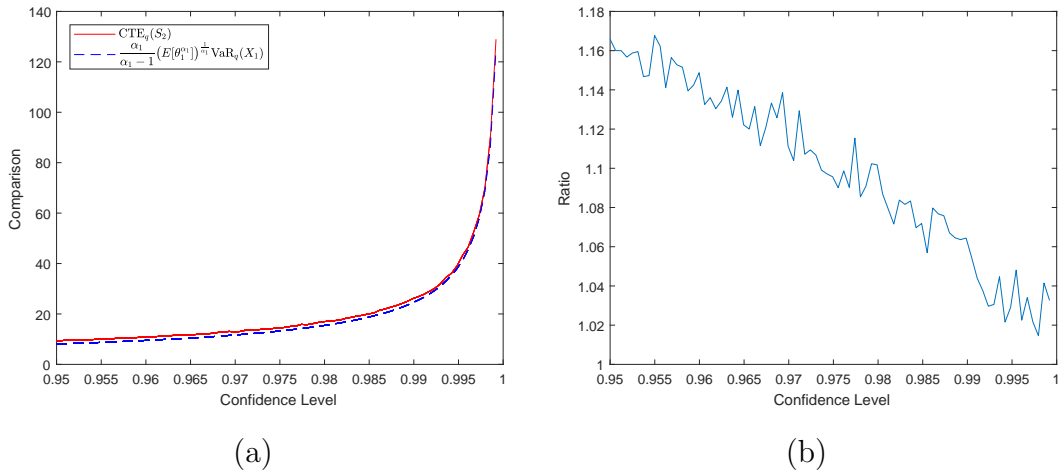


图 6.1 Clayton copula下定理6.1中 $\text{CTE}_q(S_2)$ 和 $\frac{\alpha_1}{\alpha_1-1} (E[\Theta_1^{\alpha_1}])^{\frac{1}{\alpha_1-1}} \text{VaR}_q(X_1)$  的对比(左) 以及它们的比值(右),  $\alpha_1 = 1.6, \alpha_2 = 2.5, \sigma_1 = \sigma_2 = 1, \beta = 1, N = 3 \times 10^7$ .

在图6.1(a)中, 我们对比了 $\text{CTE}_q(S_2)$ 和 $\frac{\alpha_1}{\alpha_1-1} (E[\Theta_1^{\alpha_1}])^{\frac{1}{\alpha_1-1}} \text{VaR}_q(X_1)$  的估计值, 并在图6.1(b)中展示了它们的比值. 从6.1(a)可以看出随着置信水平的增长, 估计值也快速增长并且两条线靠的越来越近. 尽管图6.1(b)中的比值有一些波动, 但是当置信水平趋于1时,  $\text{CTE}_q(S_2)$  和 $\frac{\alpha_1}{\alpha_1-1} (E[\Theta_1^{\alpha_1}])^{\frac{1}{\alpha_1-1}} \text{VaR}_q(X_1)$  的比值很接近1.

事实上, 这种波动某种程度上归结于蒙特卡洛模拟的表现不好, 其需要足够大的样本才能达到理想的精度. 为了去改善这一问题, 我们将样本容量 $N$ 增加到 $N = 4 \times 10^8$ , 相应的结果展示在图6.2中. 可以看出比值的收敛有了很大的提高, 更加的稳定, 并最终落到了 $[0.95, 1.05]$ 之间. 因此, 我们在定理6.1 中所得到的 $\text{CTE}_q(S_2)$ 和 $\text{VaR}_q(X_1)$ 之间的渐近关系是合理的.

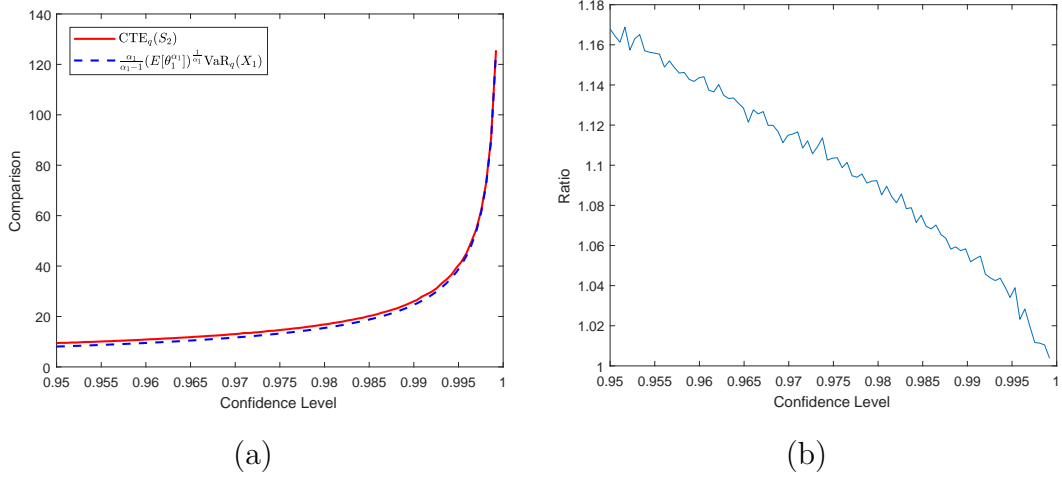


图 6.2 Clayton copula 下定理 6.1 中  $CTE_q(S_2)$  和  $\frac{\alpha_1}{\alpha_1-1} (E[\Theta_1^{\alpha_1}])^{\frac{1}{\alpha_1}} \text{VaR}_q(X_1)$  的对比(左)以及它们的比值(右),  $\alpha_1 = 1.6, \alpha_2 = 2.5, \sigma_1 = \sigma_2 = 1, \beta = 1, N = 4 \times 10^8$ .

下面, 我们基于定理 6.2 进行模拟(2). 在 6.2 中, 假设分布  $F_1$  为 Parato 分布(6.19), 参数为  $\alpha_1$  和  $\sigma_1$ ; 第二个潜在损失  $X_2$  的尾分布为  $\overline{F}_2$ , 其于  $\overline{F}_1$  成比例, 比例系数为  $c_2$ ;  $\Theta_1$  和  $\Theta_2$  和模拟(1)中的设定一样. 由此定理 6.2 的所有条件都满足了. 在模拟(2)中, 我们计划去检查(6.4)的准确性, 参数  $\alpha_1, \sigma_1$  的敏感性, 以及不同相依结构的影响.

我们考虑四种情形去检查不同参数和相依结构带来的影响. 在情形(1)–(3), 潜在损失  $X_1$  和  $X_2$  的相依关系由 Clayton copula (6.18) 刻画, 情形(1) 的参数被设置为  $\alpha_1 = 2.5, \sigma_1 = 1, \beta = 1, c_2 = 0.5$ ; 情形(2) 的参数被设置为  $\alpha_1 = 2, \sigma_1 = 1, \beta = 1, c_2 = 0.5$  in case (2); 情形(3) 的参数被设置为  $\alpha_1 = 2.5, \sigma_1 = 0.8, \beta = 1, c_2 = 0.5$ . 情形(4) 中, 我们对比 Clayton copula 下和 Frank copula 下的模拟结果, Frank copula 的表达式如下

$$C(u, v) = -\frac{1}{\gamma} \log \left( 1 + \frac{(e^{-\gamma u} - 1)(e^{-\gamma v} - 1)}{e^{-\gamma} - 1} \right), \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \quad (6.20)$$

$\gamma \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ . 经检查当  $\gamma = 1$  时,  $X_1$  和  $X_2$  是 QAI. 参数被设置为  $\gamma = 1$ , 其他的和情形(1) 一样. 我们在图 6.3 中对比了情形(1) 和(2), 在图 6.4 中对比了情形(1) 和(3), 在图 6.5 中对比了情形(1) 和(4), 样本量为  $N = 3 \times 10^7$ , 置信水平  $q$  范围为 0.95 到 0.9995.

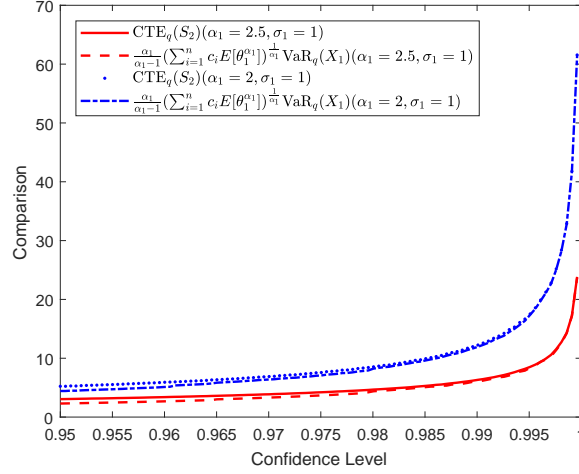


图 6.3 Clayton copula 下定理 6.2 中  $\text{CTE}_q(S_2)$  和  $\frac{\alpha_1}{\alpha_1-1} \left( \sum_{i=1}^2 c_i E[\Theta_i^{\alpha_1}] \right)^{\frac{1}{\alpha_1}} \text{VaR}_q(X_1)$  的对比,  $\beta = 1, \sigma_1 = 1, \alpha_1 = 2.5$  (or 2),  $N = 3 \times 10^7$ .

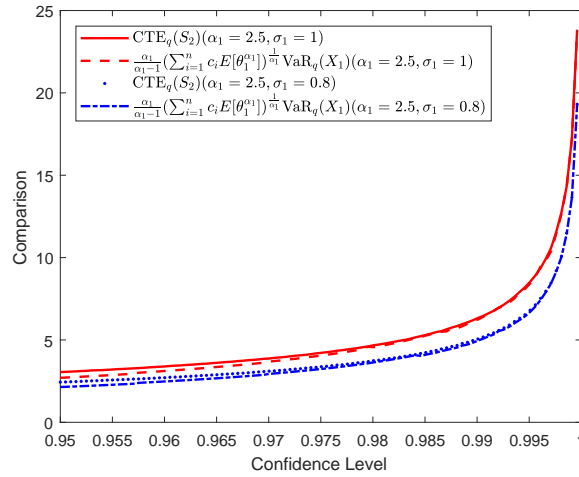


图 6.4 Clayton copula 下定理 6.2 中  $\text{CTE}_q(S_2)$  和  $\frac{\alpha_1}{\alpha_1-1} \left( \sum_{i=1}^2 c_i E[\Theta_i^{\alpha_1}] \right)^{\frac{1}{\alpha_1}} \text{VaR}_q(X_1)$  的对比,  $\beta = 1, \alpha_1 = 2.5, \sigma_1 = 1$  (or 0.8),  $N = 3 \times 10^7$ .

首先通过图 6.3 和图 6.4 检查 (6.4) 的精确性. 由图 6.3 我们可以看出无论  $\alpha_1 = 2.5$  还是  $\alpha_1 = 2$ , 估计值都增长的很快, 并且随着置信水平的提高  $\text{CTE}_q(S_2)$  和  $\frac{\alpha_1}{\alpha_1-1} \left( \sum_{i=1}^n c_i E[\Theta_i^{\alpha_1}] \right)^{\frac{1}{\alpha_1}} \text{VaR}_q(X_1)$  离的越来越近, 图 6.4 中也是一样的情形. 其次, 我们分析了  $\alpha_1$  and  $\sigma_1$  的敏感性. 在图 6.3 中, 两个估计值大概增长了三倍当固定  $\sigma_1$  并将  $\alpha_1$  由 2.5 减小为 2 时; 然而在图 6.4 中两个估计值的变化幅度很小 (大约 20%), 当固定  $\alpha_1$  将  $\sigma_1$  由 1 减小至 0.8 时. 似乎变化 Pareto 分布的参数  $\sigma_1$  时对两个估计值造成的影响不大. 事实上, 这是由于 Pareto 分布的尾主要由  $\alpha_1$  决定. 因此, 参数  $\alpha_1$  比  $\sigma_1$  更敏感. 最后, 在图 6.5 中展示了不同相依结构的影响, 参数  $\alpha_1, \sigma_1$  and  $c_2$  和情形 (1) 中一样, 但是用 Frank copula 去替换了 Clayton copula. 尽管有一些细微的区别, 但是四条曲线几乎重合, 所以在不同的 QAI 的 copula 下收敛情况很稳定. 这个意味着在我们的设定下, 投资组合损失的 VaR 和 CTE 主要受潜在损失

的重尾性影响, 而不是它们的相依结构, 这我们的理论结果是一致的.

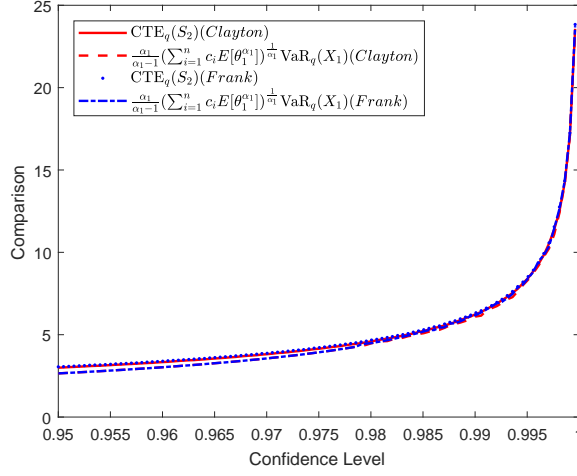


图 6.5 Clayton和Frank copula下定理6.2中 $CTE_q(S_2)$ 和 $\frac{\alpha}{\alpha-1}(\sum_{i=1}^2 c_i E[\Theta_i^{\alpha-1}])^{\frac{1}{\alpha-1}} VaR_q(X_1)$ 的对比,  $\beta = 1, \gamma = 1, \alpha_1 = 2.5, \sigma_1 = 1, N = 3 \times 10^7$ .

现在我们基于定理6.3做模拟(3). 我们模拟了推论6.1, 其中潜在损失 $X_1$ 和 $X_2$ 是两个独立同分布的随机变量, 有共同的Weibull 分布

$$F_1(x) = 1 - e^{-cx^\tau}, \quad x \geq 0,$$

$c > 0, 0 < \tau < 1$ , 这意味着 $F_1 \in \mathcal{S} \cap \mathcal{R}_{-\infty}$ . 折扣因子 $\Theta_1$ 和 $\Theta_2$ 为常数 $e^{-\delta T}$ ,  $\delta > 0, T > 0$ . 由此, 推论6.1 中的所有条件都满足了. 和上面一样, 我们检查(6.6)的精确性并对参数 $\tau$ 和 $c$ 进行敏感性分析.

参数被设置为 $\tau = 0.5$  (或者 $\frac{1}{3}$ ),  $c = 1$  (或者 $\frac{2}{3}$ ),  $\delta = 1, T = 1$ , 样本容量为 $N = 3 \times 10^7$ , 置信水平 $q$ 的范围为0.95 到0.9995. 图6.6 和图6.7展示了 $VaR_q(S_2)$ 和 $e^{-\delta T} VaR_{1-\frac{1-q}{2}}(X_1)$ 的对比.

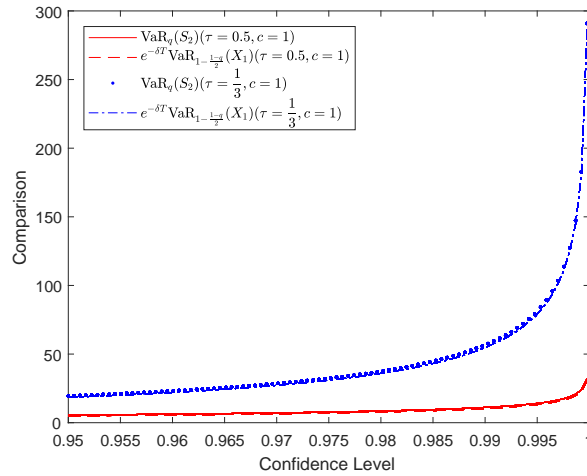


图 6.6 推论6.1下 $VaR_q(S_2)$ 和 $e^{-\delta T} VaR_{1-\frac{1-q}{2}}(X_1)$  的对比,  $c = 1, \tau = 0.5$  (或者 $\frac{1}{3}$ ),  $N = 3 \times 10^7$ .

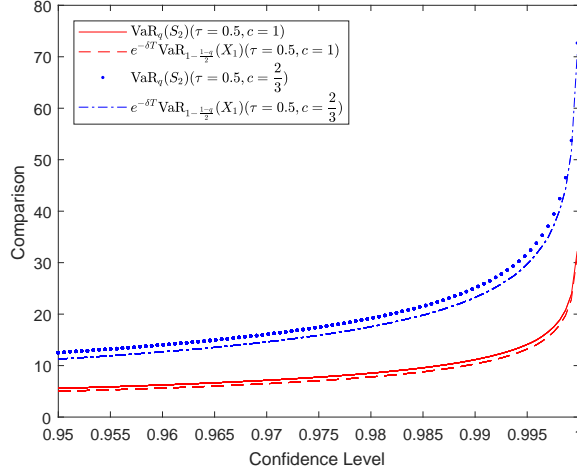


图 6.7 推论6.1下 $\text{VaR}_q(S_2)$ 和 $e^{-\delta T} \text{VaR}_{1-\frac{1-q}{2}}(X_1)$ 的对比,  $\tau = 0.5, c = 1$  (或者 $\frac{2}{3}$ ),  $N = 3 \times 10^7$ .

图6.6和图6.7都显示了推论6.1在潜在损失为适度重尾的条件下是合理的. 此外,  $\text{VaR}_q(S_2)$ 和 $e^{-\delta T} \text{VaR}_{1-\frac{1-q}{2}}(X_1)$ 的曲线在同样的参数 $\tau$ 下的变化比不同的参数 $c$ 下的更明显, 这表明两个估计对 $\tau$ 更敏感. 这是由于Weibull 分布由 $\tau$  掌控.

在这一节的最后, 我们基于定理6.4和定理6.5分别去考虑模拟(4)和模拟(5). 在模拟(4), 假设两个潜在损失 $X_1, X_2$ 和两个折扣因子 $\Theta_1, \Theta_2$ 具有4维FGM copula 的相依结构,

$$C(\mathbf{u}) = \prod_{k=1}^4 u_k \left( 1 + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \omega_{ij} (1 - u_i)(1 - u_j) \right), \quad \mathbf{u} \in [0, 1]^4,$$

其参数 $\omega_{ij} \in [-1, 1], 1 \leq i < j \leq 4$ . 显然,  $(X_1, X_2, \Theta_1, \Theta_2)$ 服从4维Sarmanov分布, 参见Wei和Yuan (2016). 进一步假设 $X_1$  和 $X_2$  都服从Pareto分布(6.19), 参数为 $\alpha_1 > 0, \sigma_1 > 0$ , 且 $\Theta_1, \Theta_2$ 都服从指数分布其参数为 $\lambda_1 > 0$ . 设 $d_1 = d_2 = -1$ ,  $\phi_3(x) = \phi_4(x) = 2e^{-\lambda_1 x} - 1$ , 则定理6.4的条件都满足了. 在这个模拟中, 我们考虑尾巴更重, 置信水平更高的情形, 也就是减小 $\alpha_1$  并增大 $q$ . 参数设置为 $\alpha_1 = 1.24, \sigma_1 = 1, \lambda_1 = 1, \omega_{ij} = 0.5, 1 \leq i < j \leq 4$ , 样本量为 $N = 3 \times 10^7$ , 置信水平 $q$ 的范围为0.9995到0.99999.

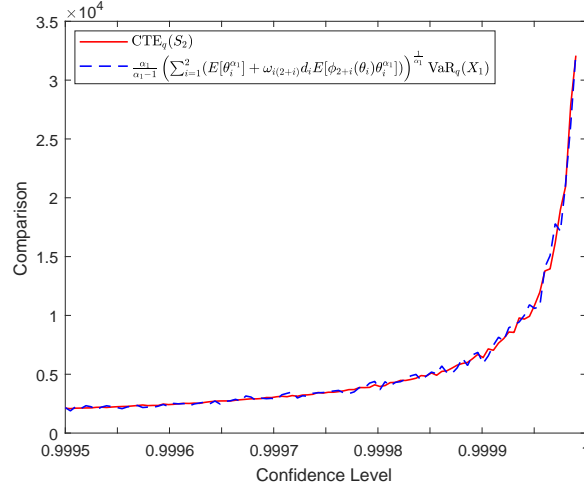


图 6.8 FGM copula 下定理 6.4 中  $\text{CTE}_q(S_2)$  和  $\frac{\alpha_1}{\alpha_1-1} \left( \sum_{i=1}^2 (E[\Theta_i^{\alpha_1}] + \omega_{i(2+i)} d_i E[\phi_{2+i}(\Theta_i) \Theta_i^{\alpha_1}]) \right)^{\frac{1}{\alpha_1}} \text{VaR}_q(X_1)$  的对比,  $\alpha_1 = 1.24, \sigma_1 = 1, \lambda_1 = 1, \omega_{ij} = 0.5, N = 3 \times 10^7$ .

可以看出, 图 6.8 中的 CTE 的模拟值和渐近值和前面的模拟相比都显著提高了, 这是由于更小的  $\alpha_1 > 1$  和更接近于 1 的  $q$ , 也就是更重的尾和更高的置信水平.

在模拟(5)中, 假设  $(X_1, \Theta_1)$  和  $(X_2, \Theta_2)$  是两个独立同分布的随机向量, 对每一个  $i = 1, 2$ ,  $X_i$  和  $\Theta_i$  具有 Frank copula 相依结构, 参数为  $\gamma \neq 0$ .  $X_1, X_2, \Theta_1, \Theta_2$  的分布和模拟(4)中一样. 设  $h_1(x) = h_2(x) = \frac{\gamma e^{\gamma(1-e^{-\lambda_1 x})}}{e^{\gamma}-1}$ , 由此, 定理 6.5 中所有条件都满足了, 可以参见 Li 等(2010)的例 3.3. 参数设置为  $\alpha_1 = 1.28, \sigma_1 = 1, \lambda_1 = 1, \gamma = 0.5$ , 样本容量为  $N = 3 \times 10^7$ , 置信水平  $q$  的范围为 0.9995 到 0.99999. 图 6.9 展示了  $\text{CTE}_q(S_2)$  的模拟值和渐近值.

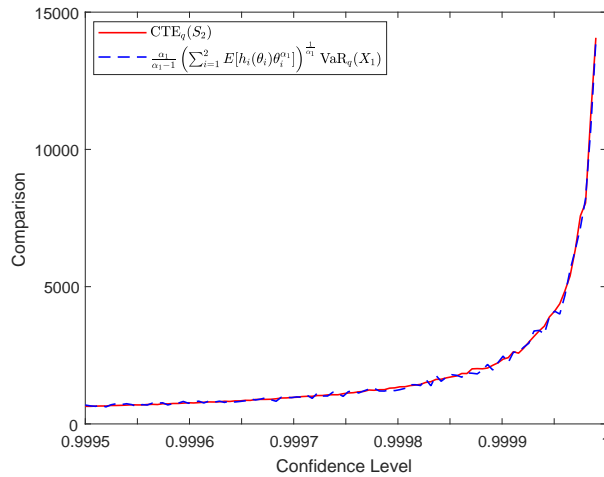


图 6.9 Frank copula 下定理 6.5 中  $\text{CTE}_q(S_2)$  和  $\frac{\alpha_1}{\alpha_1-1} \left( \sum_{i=1}^2 (E[h_i(\Theta_i) \Theta_i^{\alpha_1}]) \right)^{\frac{1}{\alpha_1}} \text{VaR}_q(X_1)$  的对比,  $\alpha_1 = 1.28, \sigma_1 = 1, \lambda_1 = 1, \gamma = 0.5, N = 3 \times 10^7$ .

## 6.6 本章小结

在本章中, 我们估计了投资组合的 VaR 和 CTE 的渐近行为, 该投资组合为潜

在损失乘以折扣因子的和. 我们允许潜在损失可以为重度重尾或适度重尾, 可以为任意相依或者弱相依(QAI)或者完全独立, 这些情形下允许折扣因子为任意相依. 我们还完成了一些允许潜在损失和折扣因子之间存在相依关系的情形. 最后我们做了一些蒙特卡洛模拟去检验理论结果的准确性, 并分析了潜在损失分布的参数以及潜在损失之间的相依结构对于投资组合VaR和CTE的敏感性. 这些可能会给监管者们提供一些思路, 使得他们在对保险或者金融风险管理进行监管时能够找到更适当的影响因素. 此外, 我们的结果主要适合在经济或者市场状况较为稳定时使用, 当经济状况恶化时可以使用一些更强的相依结构.

## 7 总结与展望

本文主要研究了重尾情形下带有各类相依结构的连续时破产概率的渐近行为, 具体内容及展望如下.

对于具有相依结构的连续时风险模型的破产概率, 我们假定一次事故会带来一次立即发生的主理赔和一次延迟一段时间发生的副理赔, 并对主理赔发生的时间间隔的相依关系做了下负相依和负相依两种假设. 此外, 我们分别假设了主副理赔相依结构为准渐近独立, 具有二元正则变换尾, 以及任意相依这三种情况, 允许主副理赔属于正则变换尾分布族或者一直变换尾分布族, 且考虑到了主索赔较大可以忽略副理赔的情况, 最终得到多种假设下的破产概率渐近行为.

对于带有随机利率和投资回报率的带有副理赔的风险模型. 我们假设保险公司在无风险市场进行投资, 并在第二章的基础上引入几何Lévy过程作为利率和投资回报率, 此外我们还加入了加入保险公司日常运行中可能发生的随机资金流动作为扰动项. 考虑主理赔属于次指数族, 副理赔可能和主理赔拥有相同地位, 也可能较小从而可以忽略不计, 且主副理赔之间具有一种特殊的渐近独立结构. 主理赔来的为更新计数过程. 在此基础上得到有限时破产概率的渐近行为, 并将模型简化为主理赔属于正则变换族, 主理赔计数过程为Poisson过程得出主要定理的推论, 最后基于该推论将相依结构特殊化为FGM copula后用蒙特卡洛模拟验证了渐近结果的精确性.

对于复合更新风险模型, 我们建立了无限时破产率下要比一阶渐近结果更加精确的二阶渐近结果. 另一个主要贡献是我们的理赔额是基于二阶次指数分布的, 这种情况下重度重尾, 例如Pareto分布或者轻度重尾, 包含重尾Weibull分布和lognormal分布等我们还做了一些模拟去检验理论结果的准确性, 以及展示二阶渐近结果相比一阶的进步与精确. 通过敏感性研究, 我们定量分析并区分模型参数的不同作用. 这种定量敏感性分析是有趣的, 并可能为监管机构或保险公司提供一些如何确定保险风险管理中适当的有效因素的想法.

对于具有相依结构的二维连续时风险模型的破产概率. 我们模型假定保险公司同时经营两条业务线, 两条业务线的保费收入过程任意相依, 理赔到达过程也为任意相依, 理赔额之间满足强渐近独立的相依结构, 两条业务线的净损失之间相互独立. 基于此模型, 我们构建了三种破产情形, 分别为两条业务线同时破产, 两条业务线都破产但是不在同一时刻, 或者两条业务线有一条出现破产, 并且考虑了理赔额属于次指数族以及属于长尾族交上控制变换尾分布族两者情形, 最终分别得到了前述三种破产概率, 并进一步得到了理赔额属于正则变换族时的破产概率.

对于投资组合模型, 我们假设潜在损失可以为重度重尾或适度重尾, 可以为任意相依或者弱相依或者完全独立, 这些情形下允许折扣因子为任意相依. 我们还分析了一些允许潜在损失和折扣因子之间存在相依关系的情形. 最后我们做了



一些蒙特卡洛模拟去检验理论结果的准确性,并分析了潜在损失分布的参数以及潜在损失之间的相依结构对于投资组合VaR和CTE的敏感性.这些可能会给监管者们提供一些思路,使得他们在对保险或者金融风险管理进行监管时能够找到更适当的影响因素.

在今后的工作中,有一些工作值得我们继续探讨.对于二维连续时风险模型,可以进一步考虑两条业务线的损失之间存在相依结构,事实上保险公司不同的产品之间是有可能存在联系的,对此进行研究可以更完整的刻画保险公司的产品线.对于投资组合模型,我们考虑的重尾分布族类主要为正则变换族,该族类范围较小且为重度重尾,可以继续探讨次指数族下的相关研究,提高模型的适用性.对于复合更新风险模型,我们得到了破产概率的二阶渐近结果,但是我们的模型把利率的影响被排除在外.这样一来,我们无法得知保险公司未来资产的真实价值,此外,单一事故造成的个人理赔之间的独立性假设不完整,作为补充,一些相依结构在未来的研究中需要引入.最后,该模型中我们假设事故为更新计数过程,这意味着事故的到达时间是相互独立的.然而,在经济萧条时期,危机/事故的到达时间间隔之间有较强的关系,未来可以考虑在模型中引入准更新计数过程.

## 8 参考文献

### References

- [1] Alam, K., Saxena, K.M.L. Positive dependence in multivariate distributions. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 1981, 10: 1183-1196.
- [2] Aleškevičienė, A., Leipus, R., Šiaulys, J. Tail behavior of random sums under consistent variation with applications to the compound renewal risk model. *Extremes*, 2008, 11: 261-279.
- [3] Applebaum, D. *Lévy Process and Stochastic Calculus*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [4] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath, D. Coherent measures of risks. *Mathematical Finance*, 1999, 9: 203-228.
- [5] Asimit, A.V., Badescu, A.L. Extremes on the discounted aggregate claims in a time dependent risk model. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2020, 2: 93-104.
- [6] Asimit, A.V., Badescu, A.M., Tsanakas, A. Optimal risk transfers in insurance groups. *European Actuarial Journal*, 2013, 3(1): 159-190.
- [7] Asimit, A.V., Furman, E., Tang, Q., Vernic, R. Asymptotic for risk capital allocations based on Conditional Tail Expectation. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2011, 49: 310-324.
- [8] Asimit, A.V., Li, J. Extremes for coherent risk measures. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2016, 71: 332-341.
- [9] Asmussen, S., Albrecher, H. *Ruin Probabilities*. Singapore: World Scientific, 2010.
- [10] Asmussen, S., Foss, S., Korshunov, D. Asymptotics for sums of random variables with local subexponential behaviour. *Journal of Theoretical Probability*, 2003, 16: 489-518.
- [11] Baltrūnas, A., Daley, D.J., Klüppelberg, C. Tail behaviour of the busy period of a GI/GI/1 queue with subexponential service times. *Stochastic Processes and their Applications*, 2004, 111(2): 237-258.
- [12] Baltrūnas, A. Second order behaviour of ruin probabilities in the case of large claims. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2005 36(3): 485-498.

- [13] Bingham, N.H., Goldie, C.M., Teugels, J.L. *Regular Variation*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- [14] Böcker, K. and Klüppelberg, C. Multivariate models for operational risk. *Quantitative Finance*, 2010, 10(8): 855-869.
- [15] Cang, Y., Yang, Y., Shi, X. A note on the uniform asymptotic behavior of finite-time ruin probability in a nonstandard renewal risk model. *Lithuanian Mathematical Journal*, 2020, 60(1): 161-172.
- [16] Chen, Y. Interplay of subexponential and dependent insurance and financial risks. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2017, 77: 78-83.
- [17] Chen, Y., Yang, Y. Bivariate regular variation among randomly weighted sums in general insurance. *European Actuarial Journal*, 2019, 9: 301-322.
- [18] Chen, Y., Yang, Y., Jiang, T. Uniform asymptotics for finite time ruin probability of abidimensional risk model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2019, 469(2): 525-536.
- [19] Chen, Y., Yuen, K.C. Sums of pairwise quasi-asymptotically independent random variables with consistent variation. *Stochastic Models*, 2009, 25(1): 76-89.
- [20] Cheng, D. Uniform asymptotics for the finite-time ruin probability of a generalized bidimensional risk model with Brownian perturbations. *Stochastics*, 2021, 93(1): 56-71.
- [21] Cheng, D., Yu, C. Uniform asymptotics for the ruin probabilities in a bidimensional renewal risk model with strongly subexponential claims. *Stochastics*, 2019, 91(5): 643-656.
- [22] Cheng, F., Cheng, D. Randomly weighted sums of dependent subexponential random variables with applications to risk theory. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2018, 3: 191-202.
- [23] Cline, D.B., Samorodnitsky, G. Subexponentiality of the product of independent random variables. *Stochastic Processes and their Applications*, 1994, 49(1): 75-98.
- [24] Cont, R., Tankov, P. *Financial Modelling with Jump Processes*. London: Chapman & Hall/CRC, 2004.

- [25] Coorey, K., Ananda, M.M. Modelling actuarial data with a composite log-normal-Pareto model. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2005, 5: 321-334.
- [26] de Haan, L. *On regular variation and its application to the weak convergence of sample extremes*. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1970.
- [27] Ebrahimi, N., Ghosh, M. Multivariate negative dependence. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 1981, 10(4): 307-337.
- [28] Eling, M. Fitting insurance claims to skewed distributions: Are the skew-normal and skew-student good models? *Insurance: Mathematics and Economics*, 2012, 51(2): 239-248.
- [29] Embrechts, P., Goldie, C. On closure and factorization properties of subexponential and related distributions. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 1980, 29: 243-256.
- [30] Embrechts, P., Klüppelberg, C., Mikosch, T. *Modelling Extremal Events for Finance and Insurance*. Berlin: Springer-Verlag, 1997.
- [31] Embrechts, P., Veraverbeke, N. Estimates for probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1982, 1(1): 55-72.
- [32] Emmer, S., Kratz, M., Tasche, D. What is the best risk measure in practice? A comparison of standard measures. *Journal of Risk*, 2015, 18(2): 31-60.
- [33] Feller, W. One-sided analogus of Karamata's regular variation. *L'Enseignement Math*, 1969, 15: 107-121.
- [34] Foss, S., Korshunov, D., Zachary, S. *An Introduction to Heavy Tailed and Subexponential Distributions*. New York: Springer, 2011.
- [35] Fu, K., Li, H. Asymptotic ruin probability of a renewal risk model with dependent by-claims and stochastic returns. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2016, 306: 154-165.
- [36] Fu, K., Qiu, Y., Wang, A. Estimates for the ruin probability of a time-dependence renewal risk model with dependent by-claims. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 2015, 30(3): 347-360.
- [37] Gao, Q., Zhuang, J., Huang, Z. Asymptotics for a delay-claim risk model with diffusion, dependence structures and constant force of interest. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2019, 353: 219-231.

- [38] Geluk, J., Tang, Q. Asymptotic tail probabilities of sums of dependent subexponential random variables. *Journal of Theoretical Probability*, 2009, 22(4): 871-882.
- [39] Hua, L., Joe, H. Second order regular variation and conditional tail expectation of multiple risks. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2011, 49(3): 537-546.
- [40] Joag-Dev, K., Proschan, E. Negative association of random variables with applications. *The Annals of Statistics*, 1983, 11(1): 286-295.
- [41] Joe, H., Li, H. Tail risk of multivariate regular variation. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 2011, 13(4): 671-693.
- [42] Johnson, N.L., Kotz, S. On some generalized Farlie - Gumbel - Morgenstern distributions—II regression, correlation and further generalizations. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 1977, 6(6): 485-496.
- [43] Kass, R., Tang, Q. A large deviation result for aggregate claims with dependent claim occurrences. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2005, 36(3): 251-259.
- [44] Kočetova, J., Leipus, R., Šiaulyš, J. A property of the renewal counting process with application to the finite-time ruin probability. *Lithuanian Mathematical Journal*, 2009, 49(1): 55-61.
- [45] Korn, O., Koziol, C. Bond portfolio optimization: A risk-return approach. *The Journal of Fixed Income*, 2006, 15(4): 48-60.
- [46] Korshunov, D. On subexponential tails for the maxima of negatively derived compound renewal and Lévy processes. *Stochastic Processes and their Applications*, 2018, 128(4): 1316-1332.
- [47] Kortschak, D., Hashorva, E. Second order asymptotics of aggregated log-elliptical risk. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 2014, 16(4): 969-985.
- [48] Kotz, S., Balakrishnan, N., Johnson, N.L. *Continuous Multivariate Distributions, Volume. 1, Models and Applications*. New York: Wiley, 2000.
- [49] Lee, M.T. Properties and applications of the Sarmanov family of bivariate distributions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 1996, 25(6): 1207-1222.

- [50] Lehmann, E.L. Some concepts of dependence. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1966, 37: 1137-1153.
- [51] Leipus, R., Šiaulys, J. Asymptotic behaviour of the finite time ruin probability under subexponential claim sizes. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2007, 40(3): 498-508.
- [52] Leipus, R., Šiaulys, J. Asymptotic behaviour of the finite time ruin probability in renewal risk models. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 2009, 25(3): 309-321.
- [53] Li, J. Asymptotics in a time-dependent renewal risk model with stochastic return. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, 387: 1009-1023.
- [54] Li, J. On pairwise quasi-asymptotically independent random variables and their applications. *Statistics & Probability Letters*, 2013, 83(9): 2081-2087.
- [55] Li, J. A note on the finite-time ruin probability of a renewal risk model with Brownian perturbation. *Statistics & Probability Letters*, 2017, 127: 49-55.
- [56] Li, J. A note on a by-claim risk model: asymptotic results. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 2017, 46(22): 11289-11295.
- [57] Li, J. A revisit to asymptotic ruin probabilities for a bidimensional renewal risk model. *Statistics & Probability Letters*, 2018, 140: 23-32.
- [58] Li, J., Liu, Z., Tang, Q. On the ruin probabilities of a bidimensional perturbed risk model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2007, 41(1): 185-195.
- [59] Li, J., Tang, Q., Wu, R. Subexponential tails of discounted aggregate claims in a time-dependent renewal risk model. *Advances in Applied Probability*, 2010, 42(4): 1126-1146.
- [60] Lin, J. Second order asymptotics for ruin probabilities in a renewal risk model with heavy-tailed claims. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2012a, 51(2): 422-429.
- [61] Lin, J. Second order subexponential distributions with finite mean and their applications to subordinated distributions. *Journal of Theoretical Probability*, 2012b, 25: 834-853.

- [62] Lin, J. Second order tail behaviour for heavy-tailed sums and their maxima with applications to ruin theory. *Extremes*, 2014, 17(2): 247-262.
- [63] Lin, J. Second order asymptotics for ruin probabilities of the delayed renewal risk model with heavy-tailed claims. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 2019a, DOI: 10.1080/03610926.2019.1648828.
- [64] Lin, J. Second order tail approximation for the maxima of randomly weighted sums with applications to ruin theory and numerical examples. *Statistics & Probability Letters*, 2019b, 153: 37-47.
- [65] Liu, X., Gao, Q., Liu, M. Large deviations for the stochastic present value of aggregate claims in the nonstandard compound renewal risk model with widely upper orthant dependent claims. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 2020, 49(13): 3073-3093.
- [66] Liu, X., Gao, Q., Wang, Y. A note on a dependent risk model with constant interest rate. *Statistics & Probability Letters*, 2012 82(4): 707-712.
- [67] Maulik, K., Resnick, S. Characterizations and examples of hidden regular variation. *Extremes*, 2004, 7(1): 31-67.
- [68] McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P. *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton: Princeton University Press, 2015.
- [69] Nelsen, R.B. *An Introduction to Copulas, Second Edition*. New York: Springer-Verlag, 2006.
- [70] Packham, N., Schloegl, L., Schmidt, W.M. Credit gap risk in a first passage time model with jumps. *Quantitative Finance*, 2013, 13(12): 1871-1889.
- [71] Piterbarg, V.I. *Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields*. Providence: American Mathematical Society, 1996.
- [72] Resnick. S.I. *Regular Variation, and Point Processes*. New York: Springer-Verlag, 1987.
- [73] Resnick. S.I., Willehens, E. Moving averages with random coefficients and random coefficient autoregressive models. *Communications in Statistics-Stochastic Models*, 1991, (4):511-525.
- [74] Resnick, S.I. Discussion of the Danish data on large fire insurance losses. *ASTIN Bulletin*, 1997, 27(1): 139-151.

- [75] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., Teugels, J. *Process for Insurance and Finance*. New York: John Wiley and Sons, 1999.
- [76] Sarmanov, O.V. Generalized normal correlation and two-dimensional Fréchet classes. *Doklady Akademii Nauk*, 1996, 168(1): 32-35.
- [77] Sato, K. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [78] Stein, C. A note on cumulative sums. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1946, 17(4): 498-499.
- [79] Tang, Q. Asymptotics for the finite time ruin probability in the renewal model with consistent variation. *Stochastic Models*, 2004, 20(3): 281-297.
- [80] Tang, Q. The subexponentiality of products revisited. *Extremes*, 2006, 9: 231-241.
- [81] Tang, Q., Tang, Z., Yang, Y. Sharp asymptotics for large portfolio losses under extreme risks. *European Journal of Operational Research*, 2019, 276(2): 710-722.
- [82] Tang, Q., Su, C., Jiang, T., Zhang, J. Large deviations for heavy-tailed random sums in compound renewal model. *Statistics & Probability Letters*, 2001, 52: 91-100.
- [83] Tang, Q., Tsitsiashvili, G. Precise estimates for the ruin probability in finite horizon in a discrete-time model with heavy-tailed insurance and financial risks. *Stochastic Processes and their Applications*, 2003, 108: 299-325.
- [84] Tang, Q., Yang, Y. Interplay of insurance and financial risks in a stochastic environment. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2019, 2019(5): 432-451.
- [85] Tang, Q., Yuan, Z. Randomly weighted sums of subexponential random variables with application to capital allocation. *Extremes*, 2014, 17: 467-493.
- [86] Tang, Q., Yuan, Z. Random difference equations with subexponential innovations. *Science China Mathematics*, 2016, 59(12): 2411-2426.
- [87] Veraverbeke, N. Asymptotic behavior of wiener-hopf factors of a random walk. *Stochastic Process and their Applications*, 1977, 5: 27-37.
- [88] Vernic, R. On the distribution of a sum of Sarmanov distributed random variables. *Journal of Theoretical Probability*, 2016, 29(1): 118-142.



- [89] Wang, K., Chen, L., Yang, Y., Gao, M. The finite-time ruin probability of a risk model with stochastic return and Brownian perturbation. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 2018, 35: 1173-1189.
- [90] Wang, Y., Cheng, D. Basic renewal theorems for random walks with widely dependent increments. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2011, 384(2): 597-606.
- [91] Wang, Y., Cui, Z., Wang, K., Ma, X. Uniform asymptotics of the finite-time ruin probability for all times. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, 390(1): 208-223.
- [92] Wang, K., Wang, Y., Gao, Q. Uniform asymptotics for the finite-time ruin probability of a dependent risk model with a constant interest rate. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 2013, 15(1): 109-124.
- [93] Wei, L., Yuan, Z. The loss given default of a low-default portfolio with weak contagion. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2016, 66: 113-123.
- [94] Wu, L., Li, S. On a discrete time risk model with timedelayed claims and a constant dividend barrier. *Insurance Markets and Companies: Analyses and Actuarial Computations*, 2012, 3: 50-57.
- [95] Xiao, Y., Guo, J. The compound binomial risk model with time-correlated claims. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2007, 41(1): 124-133.
- [96] Xing, G., Gan, X. Asymptotic analysis of tail distortion risk measure under the framework of multivariate regular variation. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 2020, 49: 2931-2941.
- [97] Xing, G., Li, X., Yang, S. On the asymptotics of tail conditional expectation for portfolio loss under bivariate Eyraud-Farlie-Gumbel-Morgenstern copula and heavy tails. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 2020, 49: 2049-2058.
- [98] Yang, H., Li, J. Asymptotic finite-time ruin probability for a bidimensional renewal risk model with constant interest force and dependent subexponential claims. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2014, 58: 185-192.
- [99] Yang, H., Li, J. Asymptotic ruin probabilities for a bidimensional renewal risk model. *Stochastics*, 2017, 89: 687-708.

- [100] Yang, H., Li, J. On asymptotic finite-time ruin probability of a renewal risk model with subexponential main claims and delayed claims. *Statistics & Probability Letters*, 2019, 149: 153-159.
- [101] Yang, Y., Hashorva, E. Extremes and products of multivariate AC-product risks. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2013, 52(2): 312-319.
- [102] Yang, Y., Ignatavičiute, E., Šiaulyš, J. Conditional tail expectation of randomly weighted sums with heavy-tailed distributions. *Statistics & Probability Letters*, 2015, 105: 20-28.
- [103] Yang, Y., Jiang, T., Wang, K., Yuen, K.C. Interplay of financial and insurance risks in dependent discrete-time risk models. *Statistics & Probability Letters*, 2020, 162: 108752.
- [104] Yang, Y., Leipus, R., Šiaulyš, J., Cang, Y. Uniform estimates for the finite-time ruin probability in the dependent renewal risk model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2011, 383(1): 215-225.
- [105] Yang, Y., Lin, J., Huang, C., Ma, X. The finite-time ruin probability in two non-standard renewal risk models with constant interest rate and dependent subexponential claims. *Journal of Korean Statistical Society*, 2012, 41(2): 213-224.
- [106] Yang, Y., Wang, K., Konstantinides, D. Uniform asymptotics for discounted aggregate claims in dependent risk models. *Journal of Applied Probability*, 2014, 51(3): 669-684.
- [107] Yang, Y., Wang, K., Liu, J., Zhang, Z. Asymptotics for a bidimensional risk model with two geometric Lévy price processes. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2019, 15(2): 481-505.
- [108] Yang, Y., Wang, K., Leipus, R., Šiaulyš, J. A note on the max-sum equivalence of randomly weighted sums of heavy-tailed random variables. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 2013, 84: 519-525.
- [109] Yang, Y., Wang, X., Su, X., Zhang, A. Asymptotic behavior of ruin probabilities in an insurance risk model with quasi-asymptotically independent or bivariate regularly-varying-tailed main claim and by-claim. *Complexity*, 2019, <https://doi.org/10.1155/2019/4582404>.

- [110] Yang, Y., Wang, Y. Tail behavior of the product of two dependent random variables with applications to risk theory. *Extremes*, 2013, 16: 55-74.
- [111] Yang, Y., Yuen, K.C. Finite-time and infinite-time ruin probabilities in a two-dimensional delayed renewal risk model with Sarmanov dependent claims. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2016, 442(2): 600-626.
- [112] Yang, Y., Yuen, K.C., Liu, J.F. Asymptotics for ruin probabilities in Levy-driven risk models with heavy-tailed claims. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2018, 14(1): 231-247.
- [113] Yoshihara, K.I. Limiting behavior of U-statistics for stationary, absolutely regular processes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 1976, 35(3): 237-252.
- [114] Yuen, K.C., Guo, J.Y. Ruin probabilities for time-correlated claims in the compound binomial model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2001, 29(1): 47-57.
- [115] Yuen, K.C., Guo, J.Y., Ng, K.W. On ultimate ruin in a delayed claims risk model. *Journal of Applied Probability*, 2005, 42(1): 163-174.
- [116] Zhu, L., Li, H. Tail distortion risk and its asymptotic analysis. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2012, 51(1): 115-121.

## 9 作者在校期间论文录用情况

### 已发表文章

1. Yang, Y., **Wang, X.Z.**, Su, X.N., Zhang, A.L. Asymptotic behavior of ruin probabilities in an insurance risk model with quasi-asymptotically independent or bivariate regularly varying-tailed main claim and by-claim. Complexity, 2019. <https://doi.org/10.1155/2019/4582404>. (SCI一区)
2. Su, X.N., **Wang, X.Z.**, Yang, Y. Asymptotics for value at risk and conditional tail expectation of a portfolio loss. Applied Stochastic Models in Business and Industry, 2020, 2(37): 266-281. (SCI三区)
3. Cheng, D.Y., Yang, Y., **Wang, X.Z.** Asymptotic finite-time ruin probabilities in a dependent bidimensional renewal risk model with subexponential claims. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 2020, 37: 657-675. (SCI四区)

### 已录用文章

4. Yang, Y., **Wang, X.Z.** Second order asymptotics for infinite-time ruin probability in a continuous compound renewal risk model with Crude-Monte-Carlo simulations. Methodology and Computing in Applied Probability. (SCI二区)
5. Yang, Y., **Wang, X.Z.**, Zhang, Z.M. Finite-time ruin probability of a risk model with dependent subexponential main and delayed claims. Nonlinear Analysis: Modelling and Control. (SCI一区)

## 10 致谢

光阴荏苒, 岁月如梭, 三年的研究生生涯已接近尾声, 回顾往昔, 研究生的三年让我成长很多, 要感谢的人也太多.

首先, 我要对我的导师杨洋教授表示衷心的感谢, 我很荣幸能够在杨洋老师的指导下度过研究生三年的学术生涯. 在此期间, 我曾遇到过诸多难题, 也曾多次迷失方向, 但是在导师的耐心指导下克服一个又一个困难, 拨开重重迷雾, 得以顺利的完成学业并开启人生的下一个阶段. 在学术指导上, 导师是严格的, 我很庆幸原本懒散的我在导师的教导下成为了一个有责任感, 细心, 拒绝拖延的人; 同时, 导师也是勤奋的, 在保持论文高水平高产出的同时还不断探索新的课题与方向, 这一点也深深感染着我, 让我不断鞭策自己无论是学习上, 还是未来的工作上, 都要不断的努力提升自己, 并不断学习新鲜知识. 在生活中, 导师还毫无保留的指导我如何成为一个能够“走的出去”的人, 让我在即将离开学校迈向社会时心底更加的踏实. 再次衷心感谢导师对我无私的教导, 这些是我人生中一笔宝贵的财富.

其次, 我要感谢我的父母, 在我尽情的探索人生的方向时, 你们总是给予无条件的信任与支持, 感谢你们倾其所有的付出, 人生因为你们的支持而更加从容. 我还要感谢我的恋人匡倩, 感谢你对我的认可, 感谢你对我的期待, 以及感谢你对我的赞许, 这些是我不断前行并做的更好的重要动力.

最后, 我还要感谢我的同学和朋友, 与你们的交流总是可以让我迸发出新的想法, 探索出新的方向, 感谢你们帮我不断拓宽视野与思维, 人生因为有你们而更加精彩.

千言万语也无法道尽我的心情, 最后, 祝愿我的导师及其他所有的老师们工作顺利, 祝愿我的父母身体健康, 祝愿我和我的恋人白头偕老, 祝愿我的同学和朋友们前程似锦, 友谊长存!