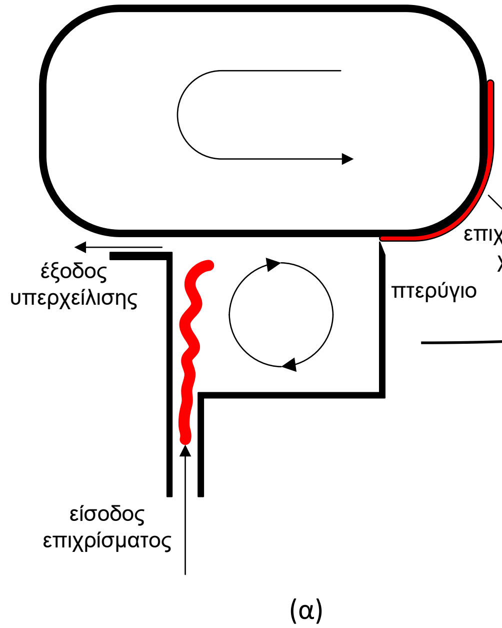
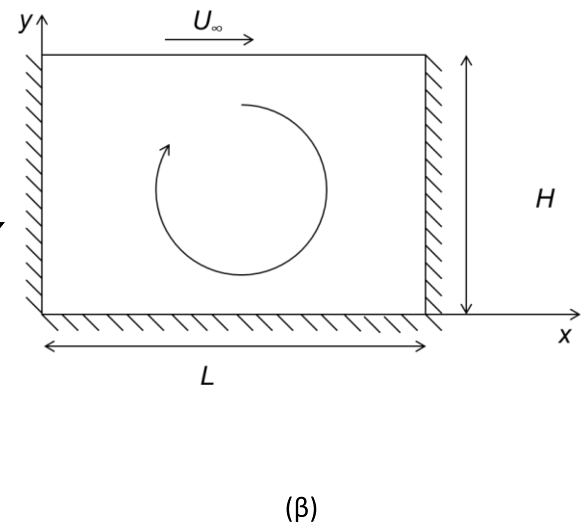
1ο Θέμα: Επίλυση ασυμπίεστης ροής σε ορθογωνική κοιλότητα με κινούμενη ελεύθερη επιφάνεια

Κατά την παραγωγή επεξεργασμένου χαρτιού το επίχρισμα εισάγεται μέσα σε κοιλότητα τοποθετημένη κάτω από το περιστρεφόμενο ρολό και δημιουργεί ένα στρώμα στην επιφάνεια του χαρτιού. Στην έξοδο της κοιλότητας υπάρχει ένα πτερύγιο το οποίο αφαιρεί την επιπλέον ποσότητα επιχρίσματος και εξασφαλίζει την ομαλή επίστρωση (Σχήμα 1α). Το τεχνικό πρόβλημα είναι η εμφάνιση στροβίλων και ανακυκλοφορίας εντός της κοιλότητας, που οδηγούν σε ανομιομορφίες στο βάρος του επιχρίσματος και υγρούς λεκέδες ή ραβδώσεις. Ζητείται να μελετηθεί η ροή στην κοιλότητα ορθογωνικής διατομής η οποία σχηματίζεται από τρία στερεά τοιχώματα και ένα καπάκι που κινείται με σταθερή ταχύτητα., δηλαδή αγνοείται η έξοδος του ρευστού από το πτερύγιο αποκοπής και την υπερχείλιση (Σχήμα 1β).





Σχήμα 1: (α) Μηχανισμός επίχρισης χαρτιού (β) Ορθογωνική κοιλότητα για τη μελέτη του στροβιλισμού της ροής.

Ζητούμενα:

α) Να διατυπώσετε τις μαθηματικές εξισώσεις που περιγράφουν το πεδίο ροής ως προς τη στροβιλότητα ω και τη ροϊκή συνάρτηση ψ μαζί με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες σε αδιάστατη μορφή. Για την αδιαστατοποίηση να χρησιμοποιήσετε το μήκος L της βάσης της ορθογωνικής διατομής και την ταχύτητα U_∞ της κινούμενης επιφάνειας.

β) Να διακριτοποιήσετε τις εξισώσεις και τις συνοριακές συνθήκες χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών σε ομοιόμορφο υπολογιστικό πλέγμα. Για την εξίσωση της στροβιλότητας να χρησιμοποιήσετε το σχήμα δύο βημάτων των Peaceman-Rachford.

γ) Να επιλύσετε αριθμητικά το σύστημα των διακριτοποιημένων εξισώσεων έως ότου αποκατασταθεί μόνιμη ροή. Το κριτήριο μονιμότητας της ροής ορίζεται από τη σχέση:

$$\frac{\omega-\omega_{old}}{\Delta t} \le \varepsilon, \quad \varepsilon = 10^{-8}$$

όπου Δt είναι το χρονικό βήμα και ω, ω_{old} είναι η τιμή της στροβιλότητας στο τρέχον και το προηγούμενο χρονικό βήμα.

Να εξετάσετε την ανεξαρτησία των αποτελεσμάτων από το πλέγμα για 3 διαφορετικούς Reynolds: i) για τον αριθμό Reynolds, $Re_2 = Re_{nom}$, που προκύπτει από τα προσωπικά σας δεδομένα, ii) για τον αριθμό Reynolds $Re_1 = Re_{nom}/5$ (διαιρείτε την U_∞ δια 5 ώστε να μην αλλάξει η σχέση L/H), και για τον αριθμό Reynolds $Re_3 = Re_{nom} \cdot 5$ (πολ/ζετε την ταχύτητα U_∞ επί 5). Η ανεξαρτησία πλέγματος να γίνει διπλασιάζοντας κάθε φορά το πλήθος των κόμβων και στις δύο κατευθύνσεις και να εξεταστεί ως προς τη μέγιστη τιμή της απόλυτης μεταβολής της ταχύτητας u μεταξύ διαδοχικών πυκνώσεων με κριτήριο $\delta(\mathrm{Re}_n) = 0.02 \cdot 2^{n-1}, \quad n = 1,2,3$, δηλαδή

$$\Delta u_{\max} = \max\left[abs\left(u_2(x,y) - u_1(x,y)\right)\right] \leq \delta\left(\mathrm{Re}_n\right), \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < 5/6H$$

όπου οι δείκτες «1» και «2» αναφέρονται στο αραιότερο και πυκνότερο πλέγμα αντίστοιχα, και τα σημεία υπολογισμού (x, y) είναι τα κοινά σημεία των δύο πλεγμάτων. Δηλαδή, εξαιρούμε την άνω περιοχή κοντά στο κινούμενο καπάκι και εξετάζουμε την ανεξαρτησία της λύσης από το πλέγμα στην περιοχή που εμφανίζονται οι στρόβιλοι. Να απεικονίσετε τα διαγράμματα του $\Delta u_{\max}$ σε συνάρτηση με το πλήθος των σημείων $NX \times NY$ για καθένα από τους 3 αριθμούς Reynolds. Επίσης, να παραθέσετε σε πίνακα το πλήθος των σημείων NX, NY που τελικά επιλέξατε για κάθε αριθμό Reynolds και να σχολιάσετε το αποτέλεσμα. Σε κάθε περίπτωση να επιλέξετε το μεγαλύτερο δυνατό χρονικό βήμα που επιτρέπει τη σύγκλιση του κώδικα. Πώς μεταβάλλεται η τιμή του χρονικού βήματος (α) με την πυκνότητα του πλέγματος Δx και (β) με τον αριθμό Reynolds για το πλέγμα που επιλέξατε; Να συμπεριλάβετε την τιμή αυτή στον παραπάνω πίνακα και να σχολιάσετε το αποτέλεσμα ως προς την ευστάθεια του αριθμητικού σχήματος.

δ) Για καθένα από τους 3 αριθμούς Reynolds να απεικονίσετε τα ακόλουθα διαγράμματα (αφού αποκατασταθεί το μόνιμο πεδίο ροής):

i. Πεδίο και ισοσταθμικές στροβιλότητας.
ii. Πεδίο και ισοταχείς για τις δύο συνιστώσες και το μέτρο της ταχύτητας.
iii. Πεδίο και ισοβαρείς που προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης Poisson για την πίεση.
iv. Κατανομή της δύναμης τριβής που ασκείται από το ρευστό κατά μήκος των πλευρών της κοιλότητας.

Επίσης να υπολογίσετε τη συνολική ροπή που ασκείται από το ρευστό στην κοιλότητα εξαιτίας των τριβών (ως προς το κέντρο της κοιλότητας). Να συγκρίνετε τα διαγράμματα και να κάνετε ένα σύντομο σχολιασμό των αποτελεσμάτων.

Δίνονται:

- Βάση πλευράς κοιλώματος: L = ακέραιο μέρος $N/2$ σε (cm), όπου N =πλήθος γραμμάτων επωνύμου+πλήθος γραμμάτων μικρού ονόματος.
- Ύψος πλευράς κοιλότητας: H = πλήθος γραμμάτων μικρού ονόματος.
- Ταχύτητα στην ελεύθερη επιφάνεια του κοιλώματος U_∞ = 3+(τελευταίο ψηφίο ΑΜ/2) σε (cm)
- Κινηματική συνεκτικότητα ρευστού $\nu = 7 \cdot 10^{-6}\, m^2/s$
- Αριθμός Reynolds $\mathrm{Re} = U_\infty \cdot L/\nu$

Οδηγίες για τα Σχήματα:

- Να βάζετε αρίθμηση και αναλυτικό υπότιτλο.
- Να αναφέρετε τη σχετική αρίθμηση στο κείμενο κατά το σχολιασμό.
- Να βάζετε τίτλους στους άξονες των γραφημάτων και επεξηγηματικές λεζάντες στις καμπύλες των γραφημάτων.

Υπολογιστική Ρευστομηχανική
Ροή σε κοιλότητα (Ψ,ω)

Γιάννης Προσπαθόπουλος
Ε.Μ.Π., Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

Ε.Μ.Π. *Διατύπωση ροϊκής συνάρτησης-στροβιλότητας*

- Σε διδιάστατη – ασυμπίεστη ροή οι εξισώσεις Navier-Stokes μπορούν να διατυπωθούν ως ένα σύστημα δύο εξισώσεων με εξαρτημένες μεταβλητές τη ροϊκή συνάρτηση και τη στροβιλότητα
- Ορισμός στροβιλότητας: $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$
- Στις δύο διαστάσεις

$$\omega = \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

- Σχέση ταχυτήτων – ροϊκής συνάρτησης Ψ

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

- Η εξίσωση συνέχειας ικανοποιείται ταυτοτικά

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = 0$$

- Αντικατάσταση εκφράσεων ταχυτήτων στον ορισμό της στροβιλότητας → εξίσωση Poisson για τη ροϊκή συνάρτηση:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega \qquad \text{ελλειπτικού τύπου}$$

- Εξισώσεις ορμής (διανυσματική μορφή):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \nabla\right)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v}$$

- Εφαρμόζουμε τον τελεστή του στροβιλισμού $\nabla \times$ στην εξίσωση ορμής:

$$\frac{\partial\left(\nabla \times \vec{v}\right)}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \nabla\right)\underbrace{\left(\nabla \times \vec{v}\right)}_{\vec{\omega}} = -\cancel{\frac{\nabla \times \nabla p}{\rho}} + \nu \nabla^2 \left(\nabla \times \vec{v}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \nabla\right)\vec{\omega} = \nu \nabla^2 \vec{\omega} \Rightarrow \frac{\partial \omega}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \nabla\right)\omega = \nu \nabla^2 \omega$$

Ε.Μ.Π. *Διατύπωση ροϊκής συνάρτησης-στροβιλότητας*

- Στην ίδια εξίσωση καταλήγουμε επίσης με σταυρωτή παραγώγιση των εξισώσεων ορμής (βαθμωτή μορφή) και αφαίρεση κατά μέλη:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\quad\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\quad\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{\omega}+u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=$$

$$=\nu\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]$$

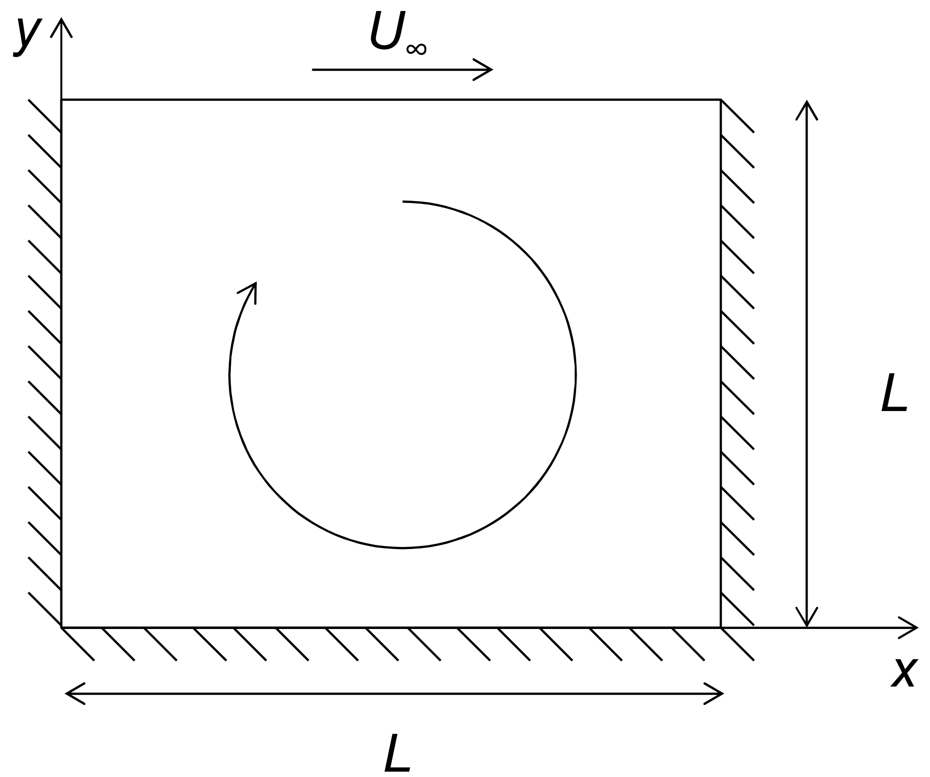
Μόνιμη κατάσταση
Ελλειπτικού τύπου

$$\cancel{\frac{\partial \omega}{\partial t}}+u\frac{\partial \omega}{\partial x}+v\frac{\partial \omega}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)$$

Παραβολική ως προς το χρόνο

Ροή σε ορθογωνική κοιλότητα

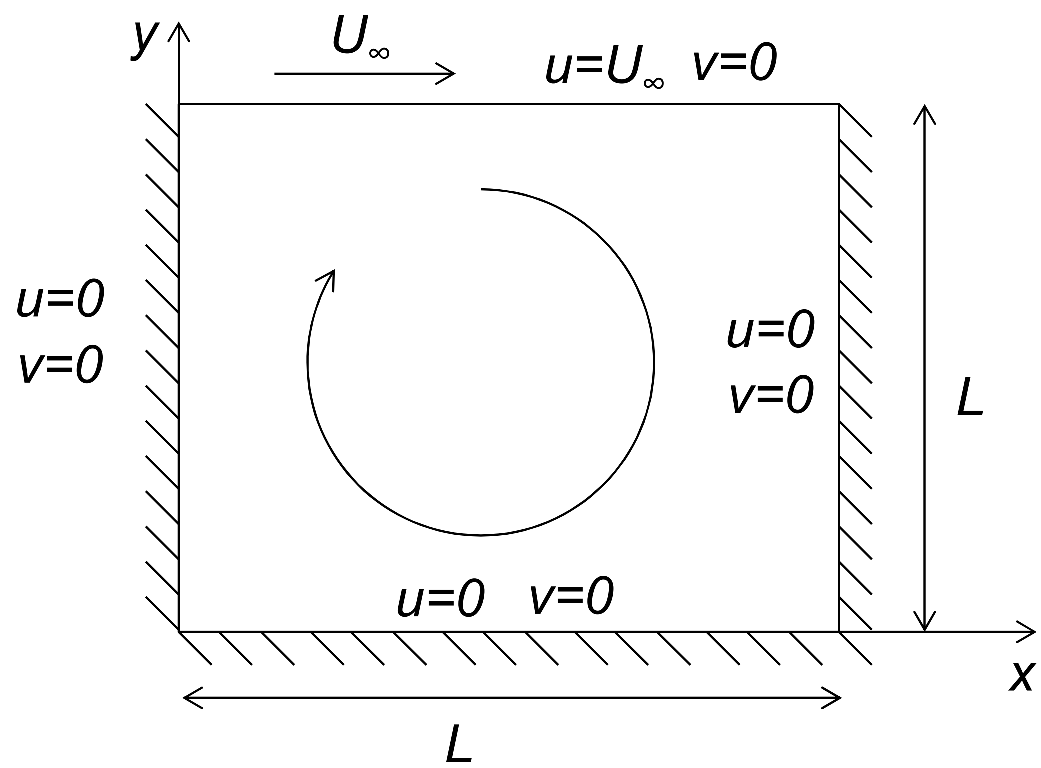
➢ Πρόβλημα: Να εξεταστεί η ροή ασυμπίεστου συνεκτικού ρευστού μέσα σε κοιλότητα τετραγωνικής διατομής όταν επιβάλλεται σταθερή ταχύτητα στην άνω ελεύθερη επιφάνεια της κοιλότητας



Ροή σε ορθογωνική κοιλότητα

- Εξισώσεις: $$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega \qquad \frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)$$

- Συνοριακές συνθήκες για *u,v*:
  - *x=0, u=v=0*
  - *x=L, u=v=0*
  - *y=0, u=v=0*
  - *y=L*, $u=U_\infty$, *v=0*



- Συνοριακές συνθήκες για *Ψ,ω*:

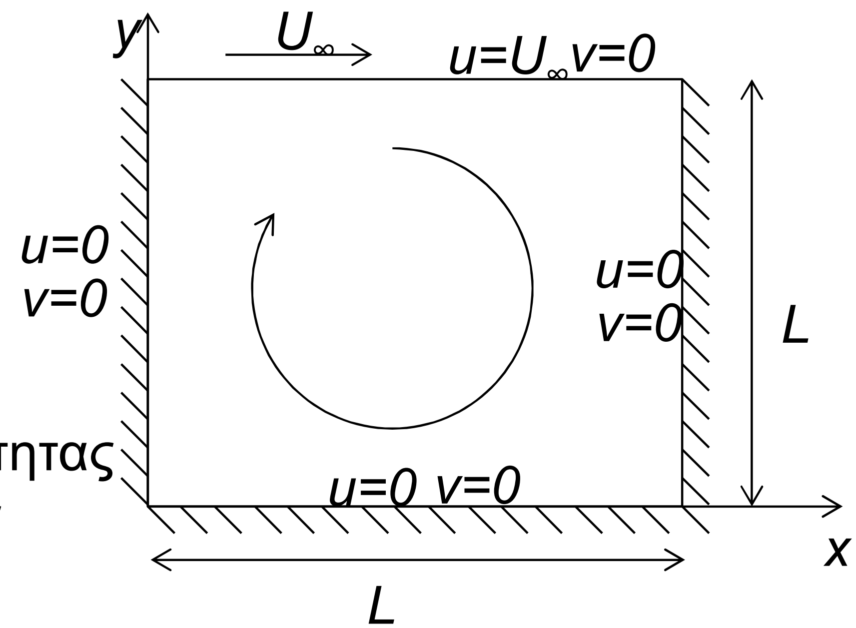
$x = 0$, αριστερός τοίχος
$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \Rightarrow \Psi = \sigma\tau\alpha\theta. \\ \omega = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \end{cases}$$

- Συνοριακές συνθήκες για *Ψ*,*ω*:

δεξιός τοίχος $x = L, \quad u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \Rightarrow \Psi = \sigma\tau\alpha\theta. \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \cancel{\frac{\partial u}{\partial y}} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$

κάτω τοίχος $y = 0, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \Rightarrow \Psi = \sigma\tau\alpha\theta. \quad \omega = \cancel{\frac{\partial v}{\partial x}} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}$

ελεύθερη επιφάνεια $y = L, \quad \begin{cases} v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \Rightarrow \Psi = \sigma\tau\alpha\theta. \\ \omega = \cancel{\frac{\partial v}{\partial x}} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \end{cases}$



- Προκύπτει ότι στο περίγραμμα της κοιλότητας ισχύει *Ψ*=σταθ., άρα αποτελεί γραμμή ροής

- Χωρίς βλάβη της γενικότητας *Ψ=0*

- Χαρακτηριστικά μεγέθη αδιαστατοποίησης:
  - Μήκος L, ταχύτητα U_∞, ροϊκή συνάρτηση $U_\infty \cdot L$, στροβιλότητα U_∞ / L

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad u^* = \frac{u}{U_\infty}, \quad v^* = \frac{v}{U_\infty}, \quad \Psi^* = \frac{\Psi}{U_\infty L}, \quad \omega^* = \frac{\omega}{U_\infty / L}, \quad t^* = \frac{t}{L / U_\infty}$$

- Αδιάστατες εξισώσεις:

$$\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial y^{*2}} = -\omega^*$$

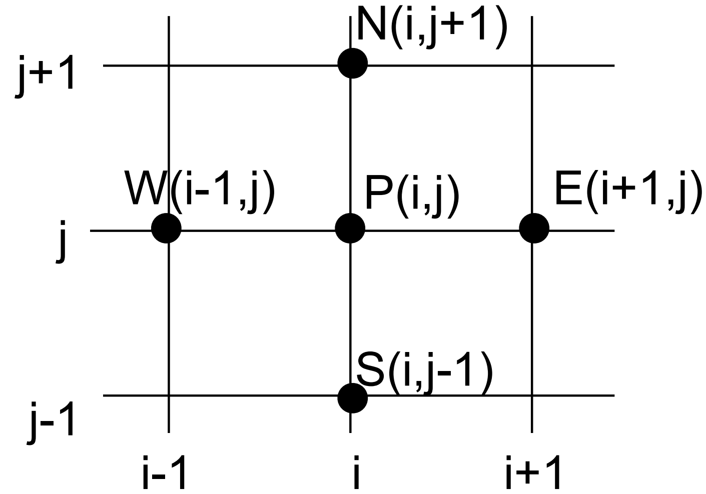
$$\frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \omega^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \omega^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \left(\frac{\partial^2 \omega^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial y^{*2}} \right) \qquad \mathrm{Re} = \frac{U_\infty L}{\nu}$$

- Αδιάστατες συνοριακές συνθήκες:

$$x^* = 0, \quad \Psi^* = 0, \quad \omega^* = -\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^{*2}} \qquad y^* = 0, \quad \Psi^* = 0, \quad \omega^* = -\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial y^{*2}}$$

$$x^* = 1, \quad \Psi^* = 0, \quad \omega^* = -\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^{*2}} \qquad y^* = 1, \quad \Psi^* = 0, \quad \omega^* = -\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial y^{*2}}$$

Διακριτοποίηση εξίσωσης Poisson για το Ψ



- Εξίσωση ροϊκής συνάρτησης:

$$\frac{\Psi^*_{i+1,j} - 2\Psi^*_{i,j} + \Psi^*_{i-1,j}}{\Delta x^{*2}} + \frac{\Psi^*_{i,j+1} - 2\Psi^*_{i,j} + \Psi^*_{i,j-1}}{\Delta y^{*2}} = -\omega^*_{i,j}$$

$$\underbrace{2\left(\frac{1}{\Delta x^{*2}} + \frac{1}{\Delta y^{*2}}\right)}_{A_P}\Psi^*_{i,j} = \underbrace{\frac{1}{\Delta x^{*2}}}_{A_E}\Psi^*_{i+1,j} + \underbrace{\frac{1}{\Delta x^{*2}}}_{A_W}\Psi^*_{i-1,j} + \underbrace{\frac{1}{\Delta y^{*2}}}_{A_N}\Psi^*_{i,j+1} + \underbrace{\frac{1}{\Delta y^{*2}}}_{A_S}\Psi^*_{i,j-1} + \underbrace{\omega^*_{i,j}}_{S}$$

$$\boxed{A_P\Psi^*_{i,j} = A_E\Psi^*_{i+1,j} + A_W\Psi^*_{i-1,j} + A_N\Psi^*_{i,j+1} + A_S\Psi^*_{i,j-1} + S}$$

$$\left.\begin{aligned} A_P\Psi^*_{i,j} - A_E\Psi^*_{i+1,j} - A_W\Psi^*_{i-1,j} &= A_N\Psi^*_{i,j+1} + A_S\Psi^*_{i,j-1} + S \\ A_P\Psi^*_{i,j} - A_N\Psi^*_{i,j+1} - A_S\Psi^*_{i,j-1} &= A_E\Psi^*_{i+1,j} + A_W\Psi^*_{i-1,j} + S \end{aligned}\right\}$$

2 τριδιαγώνια συστήματα

ADI

Διακριτοποίηση εξίσωσης για το ω

- Εξίσωση στροβιλότητας: Εφαρμόζεται μια μέθοδος 2 βημάτων στο χρόνο
- Σε κάθε βήμα επιλύεται ένα τριδιαγώνιο σύστημα
- *t→ t+Δt/2:* Θεωρούνται άγνωστοι οι παράγωγοι ως προς *x*. Οι παράγωγοι ως προς *y* λαμβάνονται από το προηγούμενο βήμα *t*
- *t+Δt/2→ t+Δt:* Θεωρούνται άγνωστοι οι παράγωγοι ως προς *y*. Οι παράγωγοι ως προς *x* λαμβάνονται από το βήμα *t+Δt/2*

$$\underbrace{\frac{\omega_{i,j}^{n+1/2}-\omega_{i,j}^{n}}{\Delta t/2} = -u_{i,j}^{n}\frac{\omega_{i+1,j}^{n+1/2}-\omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} - v_{i,j}^{n}\frac{\omega_{i,j+1}^{n}-\omega_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y} + \mathrm{Re}^{-1}\frac{\omega_{i+1,j}^{n+1/2}-2\omega_{i,j}^{n+1/2}+\omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \mathrm{Re}^{-1}\frac{\omega_{i,j+1}^{n}-2\omega_{i,j}^{n}+\omega_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^2}}_{\omega^{n+1/2}}$$

$$\underbrace{\frac{\omega_{i,j}^{n+1}-\omega_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} = -u_{i,j}^{n}\frac{\omega_{i+1,j}^{n+1/2}-\omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} - v_{i,j}^{n}\frac{\omega_{i,j+1}^{n+1}-\omega_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} + \mathrm{Re}^{-1}\frac{\omega_{i+1,j}^{n+1/2}-2\omega_{i,j}^{n+1/2}+\omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \mathrm{Re}^{-1}\frac{\omega_{i,j+1}^{n+1}-2\omega_{i,j}^{n+1}+\omega_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2}}_{\omega^{n+1}}$$

αριστερός τοίχος

$$\left.\begin{aligned} & i=1,\quad \Psi_{1,j}=0,\quad \Psi_{2,j}=\Psi_{1,j}+\cancelto{v=0}{\left.\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|_{i=1}}\Delta x+\frac{1}{2}\boxed{\left.\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right|_{i=1}}\Delta x^2+\ldots \\ & \omega_{i=1}=-\left.\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right|_{i=1} \end{aligned}\right\}\ \omega_{i=1}=\frac{2\left(\Psi_{1,j}-\Psi_{2,j}\right)}{\Delta x^2}$$

δεξιός τοίχος

$$\left.\begin{aligned} & i=NI,\ \Psi_{NI,j}=0,\ \Psi_{NI-1,j}=\Psi_{NI,j}-\cancelto{v=0}{\left.\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|_{i=NI}}\Delta x+\frac{1}{2}\boxed{\left.\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right|_{i=NI}}\Delta x^2 \\ & \omega_{i=NI}=-\left.\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right|_{i=NI} \end{aligned}\right\}\ \omega_{i=NI}=\frac{2\left(\Psi_{NI,j}-\Psi_{NI-1,j}\right)}{\Delta x^2}$$

κάτω τοίχος

$$\left.\begin{aligned} & j=1,\ \Psi_{i,1}=0,\ \Psi_{i,2}=\Psi_{i,1}+\cancelto{u=0}{\left.\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right|_{j=1}}\Delta y+\boxed{\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right|_{j=1}}\Delta y^2 \\ & \omega_{j=1}=-\left.\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right|_{i=1} \end{aligned}\right\}\ \omega_{j=1}=\frac{2\left(\Psi_{i,1}-\Psi_{i,2}\right)}{\Delta y^2}$$

Διακριτοποίηση συνοριακών συνθηκών

$u=1$

ελεύθερη επιφάνεια

$$j = NJ,\ \ \Psi_{i,NJ} = 0,\ \ \Psi_{i,NJ-1} = \Psi_{i,NJ} - \cancel{\left.\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right|_{j=NJ}} \Delta y + \frac{1}{2}\boxed{\left.\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right|_{j=NJ}} \Delta y^2$$

$$\omega_{j=1} = -\left.\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right|_{i=1}$$

$$\Rightarrow \omega_{j=NJ} = \frac{2\left(\Psi_{i,NJ} - \Psi_{i,NJ-1} - \Delta y\right)}{\Delta y^2}$$

- Εξίσωση Poisson για την πίεση. Προκύπτει παραγωγίζοντας την εξίσωση ορμής κατά *x* ως προς *x* και την εξίσωση ορμής ως προς *y* κατά *y* και αθροίζοντας κατά μέλη. Ο όρος πηγής υπολογίζεται από το γνωστό Ψ:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 2\left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}\right)^2\right]$$

- Οι συνοριακές συνθήκες προκύπτουν από την απλοποίηση της εξίσωσης ορμής κατά την κατεύθυνση του τοιχώματος

Αλγόριθμος

- Ανάγνωση αριθμού Reynolds, πλήθους σημείων *NI, NJ*, πλήθους χρονικών βημάτων *NT* και χρονικού βήματος Δt από αρχείο εισόδου
- Υπολογισμός Δx, Δy
- Αρχικοποίηση πεδίων Ψ, ω
- Για κάθε χρονικό βήμα *n* (loop χρονικών βημάτων από *1* έως *NT*)
  - ✓ Επίλυση της εξίσωσης Poisson για τη ροϊκή συνάρτηση με μέθοδο ADI
  - ✓ Υπολογισμός πεδίου ταχύτητας u_n, v_n
  - ✓ Επίλυση της εξίσωσης στροβιλότητας (1° βήμα: $n \rightarrow n+1/2$) και υπολογισμός πεδίου στροβιλότητας $\omega_{n+1/2}$ με επίλυση τριδιαγώνιου συστήματος (σάρωση κατά *y*)
  - ✓ Επίλυση της εξίσωσης στροβιλότητας (2° βήμα: $n+1/2 \rightarrow n+1$) και υπολογισμός πεδίου στροβιλότητας ω_{n+1} με επίλυση τριδιαγώνιου συστήματος (σάρωση κατά *x*)
  - ✓ Καταγραφή πεδίων Ψ, ω σε αρχείο εξόδου
  - ✓ Ενημέρωση τιμών ω για το επόμενο βήμα
- Επίλυση εξίσωσης Poisson για την πίεση με μέθοδο ADI

Παρατηρήσεις για τον προγραμματισμό

- Η επίλυση της εξίσωσης της ροϊκής συνάρτησης γίνεται με την ***ADI***

$$A_P \Psi^*_{i,j} = A_E \Psi^*_{i+1,j} + A_W \Psi^*_{i-1,j} + A_N \Psi^*_{i,j+1} + A_S \Psi^*_{i,j-1} + S$$

- Π.χ. σε Matlab

```
for i=1:nswp
[psi]=ADI(ni,nj,ae,aw,an,as,ap,su,psi);
end
```

- Θα πρέπει να δοθούν ως είσοδος οι διαστάσεις των μητρώων ni, nj, και οι τιμές των συντελεστών *ae(i,j)*, *aw(i,j)*, *an(i,j)*, *as(i,j)*, *ap(i,j)*, *su(i,j)* για να υπολογιστεί το μητρώο *psi(i,j)*
- Προσοχή: Για *i=1, i=NI, j=1, j=NJ* θα πρέπει να δοθούν οι κατάλληλες τιμές στους συντελεστές ώστε να ικανοποιείται η συνοριακή συνθήκη Ψ=0
- Π.χ. για i=1, ap(i,j)=1 και οι υπόλοιποι συντελεστές μηδέν για όλα τα *j*
- Προφανώς όλα τα μητρώα εδώ ορίζονται ως διδιάστατα.
- *nswp* είναι το πλήθος των σαρώσεων της ADI, π.χ. 10

Παρατηρήσεις για τον προγραμματισμό

- Η επίλυση της εξίσωσης της στροβιλότητας γίνεται με την ***tridag***, μια φορά κατά την κατεύθυνση *y* και μια φορά κατά την κατεύθυνση *x*

$$\alpha_W \omega_{i-1,j}^{n+1/2} + \alpha_P \omega_{i,j}^{n+1/2} + \alpha_E \omega_{i+1,j}^{n+1/2} = S$$

$$\alpha_S \omega_{i,j-1}^{n} + \alpha_P \omega_{i,j}^{n} + \alpha_N \omega_{i,j+1} = S$$

- Προσοχή: Στην tridag όλα τα μητρώα είναι μονοδιάστατα. Το μητρώο εξόδου, έστω *vort1d(ni)* αντιστοιχεί σε μία στήλη του διδιάστατου μητρώου *vort(i,j).* Αυτό σημαίνει η επίλυση πρέπει να επαναληφθεί για όλα τα *j=2:nj-1.* Π.χ. σε Matlab

```
for j=2:nj-1
[vort1d]=tridag(αw,αp,αe,su,ni);
vort(:,j)=vort1d;
end
```

- Έτσι λαμβάνω το πεδίο vort(i,j) τη χρονική στιγμή *n+1/2*. Για τη χρονική στιγμή *n* θα πρέπει να καλέσω την tridag για *i=2,ni-1*

Παρατηρήσεις για τον προγραμματισμό

- Προσοχή!: Αν στο 2ο χρονικό βήμα χρησιμοποιήσω τα ίδια μητρώα *ap, vort1d,* θα πρέπει να τα «καθαρίσω» από τις προηγούμενες τιμές. Π.χ. στη Matlab υπάρχει η εντολή clear. Αλλιώς ορίζω διαφορετικά μητρώα.
- Και εδώ θα πρέπει να δώσω τις κατάλληλες τιμές για *i=1, i=NI, j=1, j=NJ* ώστε να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες για τη στροβιλότητα.
- Δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσω διαφορετικά διδιάστατα μητρώα για το ενδιάμεσο βήμα της εξίσωσης στροβιλότητας. Δηλαδή μπορώ να έχω *vortold(i,j)* για τη χρονική στιγμή *n* και *vort(i,j)* για τις χρονικές στιγμές *n* και *n+1/2*. Το πεδίο στη χρονική στιγμή n+1/2 είναι κάτι ενδιάμεσο που δε μας ενδιαφέρει να παραμένει στη μνήμη.
- Το κριτήριο σύγκλισης του κώδικα αφορά στη μόνιμη κατάσταση, δηλαδή στη διαφορά |*vort-vortold*|/*Δt*. Καλό είναι όμως να ελέγχουμε και το υπόλοιπο της εξίσωσης της ροϊκής συνάρτησης, δηλαδή

$$\mathrm{A}_P \Psi^*_{i,j} - \mathrm{A}_E \Psi^*_{i+1,j} - \mathrm{A}_W \Psi^*_{i-1,j} - \mathrm{A}_N \Psi^*_{i,j+1} - A_S \Psi^*_{i,j-1} - S \approx 0$$

```
      SUBROUTINE TRIDAG(A,B,C,R,U,N)
      double precision :: GAM(N),A(N),B(N),C(N),R(N),U(N)
      double precision BET
      integer N,J
      IF(B(1).EQ.0.)PAUSE
      BET=B(1)
      U(1)=R(1)/BET
      DO 11 J=2,N
        GAM(J)=C(J-1)/BET
        BET=B(J)-A(J)*GAM(J)
        IF(BET.EQ.0.)PAUSE
        U(J)=(R(J)-A(J)*U(J-1))/BET
11    CONTINUE
      DO 12 J=N-1,1,-1
        U(J)=U(J)-GAM(J+1)*U(J+1)
12    CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE TRIDAG(A,B,C,R,U,N)
      PARAMETER (NMAX=100)
      DIMENSION GAM(NMAX),A(N),B(N),C(N),R(N),U(N)
      IF(B(1).EQ.0.)PAUSE
      BET=B(1)
      U(1)=R(1)/BET
      DO 11 J=2,N
        GAM(J)=C(J-1)/BET
        BET=B(J)-A(J)*GAM(J)
        IF(BET.EQ.0.)PAUSE
        U(J)=(R(J)-A(J)*U(J-1))/BET
11    CONTINUE
      DO 12 J=N-1,1,-1
        U(J)=U(J)-GAM(J+1)*U(J+1)
12    CONTINUE
      RETURN
      END
```

Η ADI.f90 επιλύει το γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\alpha_P \varphi_P = \alpha_W \varphi_W + \alpha_E \varphi_E + \alpha_N \varphi_N + \alpha_S \varphi_S + S$$

όπου

$$\varphi_P = PHI(i,j), \quad \varphi_N = PHI(i,j+1), \quad \varphi_S = PHI(i,j-1), \quad \varphi_W = PHI(i-1,j), \quad \varphi_E = PHI(i+1,j)$$

$$\alpha_P = AP(i,j), \quad \alpha_N = AN(i,j), \quad \alpha_S = AS(i,j), \quad \alpha_W = AW(i,j), \quad \alpha_E = AE(i,j), \quad S = ASU(i,j)$$

και *NI, NJ* είναι οι διαστάσεις των μητρώων και του δισδιάστατου πλέγματος.

```
     SUBROUTINE LISOLV(NI,NJ,AE,AW,AN,AS,AP,ASU,PHI)
     double precision :: AE(NI,NJ),AW(NI,NJ),AN(NI,NJ),AS(NI,NJ),AP(NI,NJ),ASU(NI,NJ),PHI(NI,NJ)
     double precision, allocatable :: A(:),B(:),C(:),D(:)
```

```
   double precision TERM
   integer I,II,J,JJ,NI,NJ,NIM1,NJM1
   NIM1=NI-1
   NJM1=NJ-1
   allocate (A(NJ),B(NJ),C(NJ),D(NJ))
!---- COMMENCE W-E SWEEP
!---- WE INCLUDE I=1 AND I=NI IN ORDER TO CALCULATE THE CORNER POINTS (1,1),(1,NJ),(NI,1),(NI,NJ)
!---- NO NEED TO REPEAT FOR THE N-S SWEEP
   do I=1,NI
    A(1)=AN(I,1)
    if(I.ne.1.and.I.ne.NI) then
     C(1)=(AE(I,1)*PHI(I+1,1)+AW(I,1)*PHI(I-1,1)+ASU(I,1))/AP(I,1)
    elseif (I.eq.1) then
     C(1)=(AE(I,1)*PHI(I+1,1)+ASU(I,1))/AP(I,1)
    else
     C(1)=(AW(I,1)*PHI(I-1,1)+ASU(I,1))/AP(I,1)
    endif
!-----COMMENCE S-N TRAVERSE
    do J=2,NJ
!-----ASSEMBLE TDMA COEFFICIENTS
     A(J)=AN(I,J)
     B(J)=AS(I,J)
     if(I.ne.1.and.I.ne.NI) then
      C(J)=AE(I,J)*PHI(I+1,J)+AW(I,J)*PHI(I-1,J)+ASU(I,J)
     elseif (I.eq.1) then
      C(J)=(AE(I,J)*PHI(I+1,J)+ASU(I,J))/AP(I,J)
     else
      C(J)=(AW(I,J)*PHI(I-1,J)+ASU(I,J))/AP(I,J)
     endif
     D(J)=AP(I,J)
!-----CALCULATE COEFFICIENTS OF RECURRENCE FORMULA
     TERM=1./(D(J)-B(J)*A(J-1))
     A(J)=A(J)*TERM
     C(J)=(C(J)+B(J)*C(J-1))*TERM
    enddo
!-----OBTAIN NEW PHI'S
    PHI(I,NJ)=C(NJ)
    do JJ=2,NJ
     J=NJ+1-JJ
     PHI(I,J)=A(J)*PHI(I,J+1)+C(J)
    enddo
   enddo
   deallocate (A,B,C,D)

   allocate (A(NI),B(NI),C(NI),D(NI))
!-----COMMENCE N-S SWEEP
   do J=2,NJM1
    A(1)=AE(1,J)
    C(1)=(AN(1,J)*PHI(1,J+1)+AS(1,J)*PHI(1,J-1)+ASU(1,J))/AP(1,J)
!-----COMMENCE W-E TRAVERSE
!    do I=2,NIM1
    do I=2,NI
!-----ASSEMBLE TDMA COEFFICIENTS
     A(I)=AE(I,J)
```

```
     B(I)=AW(I,J)
     C(I)=AN(I,J)*PHI(I,J+1)+AS(I,J)*PHI(I,J-1)+ASU(I,J)
     D(I)=AP(I,J)
!-----CALCULATE COEFFICIENTS OF RECURRENCE FORMULA
     TERM=1./(D(I)-B(I)*A(I-1))
     A(I)=A(I)*TERM
     C(I)=(C(I)+B(I)*C(I-1))*TERM
    enddo
!-----OBTAIN NEW PHI'S
    PHI(NI,J)=C(NI)
    do II=2,NI
     I=NI+1-II
     PHI(I,J)=A(I)*PHI(I+1,J)+C(I)
    enddo
   enddo
   deallocate (A,B,C,D)
   return
   end
```

module constants

```
 double precision ::GAM, GAMM1 ,rkconst(4)
```