实验指导书： 常微分方程（组）

【实验目的】

1．求微分方程的符号解。

2．求微分方程的数值解。

【实验相关知识】

(一)微分方程的符号解.

微分方程的符号解也叫做解析解. 求微分方程（组）的符号解用命令 dsolve. 命令格式如下：

s=dsolve('方程1','方程2','…','初始条件1','初始条件2','…','自变量')

说明：用字符串表示方程，自变量缺省则默认为 t. 导数用 D 表示, 2 阶导数用 D2 表示,以此类推。返回值 s 是符号解.

例 1. 求初值问题 $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{t}{t-3}\mathrm{y(t)},\ \mathrm{y(0)}=2$ 的解。

dsolve 命令格式是：

```
>> dsolve('Dy = y*t/(t-3)','y(0) = 2')
ans =
-2/3125*exp(t)*(t-3)^5
```

或者

```
s=dsolve('Dy = y*t/(t-3)','y(0) = 2')
 s =
 -2/3125*exp(t)*(t-3)^5
```

二阶或更高阶方程的处理情况相类似。例如：

$\dfrac{d^2y}{dx^2}-y=0$, y(0) = -1, y'(0) = 2

写成如下的形式输入 MATLAB：

```
>> dsolve('D2y - y = 0','y(0) = -1','Dy(0) = 2')
ans =
-3/2*exp(-t)+1/2*exp(t)
```

例 2: 求 $y''=\sin(2x)-y$ 满足初始条件 $y(0)=0,y'(0)=1$ 的符号解.

写成如下的形式输入 MATLAB：

```
s=dsolve('D2y=sin(2*x)-y','y(0)=0','Dy(0)=1','x')
simplify(s)    %如果得到符号解比较复杂,可以试试化简
pretty(s) %显示漂亮的形式。
```

大家得到的结果是什么呢？

(二)微分方程的数值解.

一般说来,只有对一些典型的常微分方程,才能求出它们的一般解.然而在实际问题中遇到的常微分方程往往很复杂,在许多情况下得不出一般解.所以一般是要求在若干点的近似数值解. 求数值解的命令如下:

[xout,yout]=ode45('equation',[x0,xm],y0)

说明：(1) 返回值中，xout 表示自变量的取值点($x_0, x_1, \cdots, x_n$)'， yout 表示数值解,它是一个矩阵,它的每一列对应 y 的一个分量。

(2) 这里'equation'必须是事先定义的表示微分方程(组)的 M-文件。

(3) [x0,xm]是自变量的区间。

(4) y0 是初始向量值。

(5)ode45 还可以换成其他算法,如 ode23.

注意：命令 ode45 或 ode23 是对一阶常微分方程(组)设计的,因此对高阶常微分方程,需将它转化为一阶常微分方程组.

例如对二阶常微分方程 $y''+(y+1)y'+y=0$，通过令 $y_1=y', y_2=y$ 得到一阶常微分方方程组 $\begin{cases} y_1'=-(y+1)y_1-y_2 \\ y_2'=y_1 \end{cases}$.

在求数值解时,我们往往将数值解与画图结合，将数值解用图像呈现出来.

例 3：求解微分方程组 $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt}=y_1y_2-0.3y_1 \\ \dfrac{dy_2}{dt}=-y_1y_2 \\ y_1(0)=0.02,\ \ y_2(0)=0.98 \end{cases}$

先定义 M-文件 fun1.m。

```
function x=fun1(t,y)
x=[y(1)*y(2)-0.3*y(1),-y(1)*y(2)]' ;
然后
ts=[0,50];              % 写成 ts=0:50 也行
y0=[0.02,0.98];         % 表示初始值
[t,y]=ode45('fun1',ts,y0);
plot(t,y(:,1),t,y(:,2))        %根据 x 的第一、二列同时作两条曲线
grid                    %为了观察方便,可添上网格线.
```

例 4： 求解微分方程 $y'=-y+t+1, y(0)=1$. 先求符号解,再求数值解，并作图进行比较.

```
s=dsolve('Dy=-y+t+1','y(0)=1','t')
simplify(s)
```

可得符号解为 y=t+exp(-t).

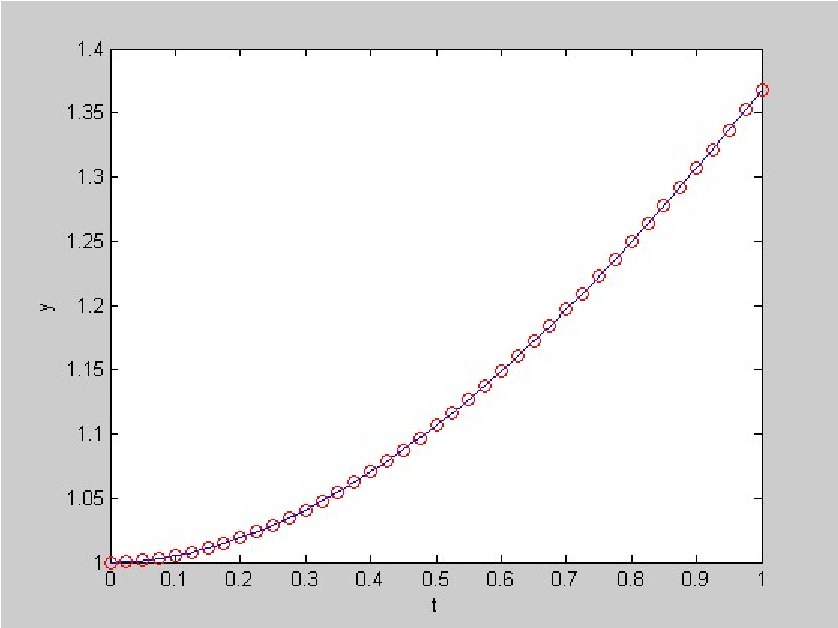
为了求数值解,先编写 M-文件 fun2.m

```
function f=fun2(t,y)
f=-y+t+1;
保存，再运行如下命令:
clear
```

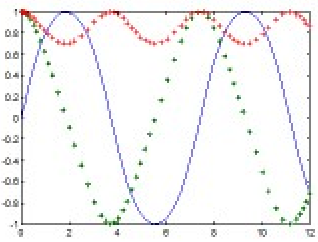
练习：

```
t=0:0.02:1;
y=t+exp(-t);
plot(t,y)       %画符号解的图形
hold on        %保留已画好的图形,
[t,y]=ode45('fun2',[0,1],1);
plot(t,y,'ro');      %画数值解图形,用红色小圆圈
xlabel('t'),ylabel('y')  %标上各坐标名称
```

运行结果见下图，可见符号解和数值解吻合得很好.



例 5 解微分方程组.
$$\begin{cases} y_1' = y_2 y_3 \\ y_2' = -y_1 y_3 \\ y_3' = -0.51 y_1 y_2 \\ y_1(0)=0, y_2(0)=1, y_3(0 \end{cases}$$



解 1、建立m-文件rigid.m如下：

```
function dy=rigid(t,y)
dy=zeros(3,1);
dy(1)=y(2)*y(3);
dy(2)=-y(1)*y(3);
dy(3)=-0.51*y(1)*y(2);
```

2、取$t_0=0$，$t_f=12$，输入命令：

```
[T,Y]=ode45('rigid',[0 12],[0 1 1]);
plot(T,Y(:,1),'-',T,Y(:,2),'*',T,Y(:,3),'+')
```

3、结果如图

图中，y_1的图形为实线，y_2的图形为“*”线，y_3的图形为“+”线.

练习：

问题 1：求$y''+4y'+29y=0$满足初始条件$y(0)=0, y'(0)=15$的符号解。

问题 2：求解微分方程

$$(1+x^2)y''=2xy', y(0)=1, y'(0)=3$$

先求符号解, 再求数值解， 并将符号解和数值解的图形进行比较.