实验指导书： 差分方程模型

【实验目的】

教学目的：学会用差分方程建立离散动态过程的数学模型，并用 MATLAB 计算其数值解；了解差分方程平衡点及其稳定性的基本知识，基本掌握数值微分的计算。

教学重点：二阶差分方程模型的建立及编程；

教学难点：高阶差分方程求解的编程。

【实验相关知识】

差分方程建立离散动态过程的数学模型：

差分方程就是针对要解决的目标，引入系统或过程中的离散变量，根据实际背景的规律、性质、平衡关系，建立离散变量所满足的平衡关系等式，从而建立差分方程。通过求出和分析方程的解，或者分析得到方程解的 特别性质（平衡性、稳定性、渐近性、振动性、周期性等），从而把握这个离散变量的变化过程的规律，进一步再结合其他分析，得到原问题的解。

差分方程是在离散时段上描述现实世界中变化过程的数学模型。(具体说来是将第 k+1 人时段我们所关注的数量表示为第 k 个时段的数量的递推公式,先将第 k 个时段的变化弄清楚)

变化＝未来值－现在值　　　未来值=现在值+变化值。

例 1、**抵押贷款买房**　六年前，李红的父母筹借月利率为 1%，每月还款 880.87 元的 20 年贷款资金 80000 元买了房子，他们已经还款 72 个月，同时想知道他们 还欠多少抵押贷款，他们正在考虑用他们得到的一笔遗产来付清贷款。或者他们可以重新根据偿还期长短，以不同利率偿还抵押贷款。

解、设第 k 个月的欠款余额为 bk，则

$$b_{k+1}＝b_k＋0.01b_k-880.87 \qquad (1)$$

$$b_0=80000$$

键入程序：ex2t1.m

```
clear;
a=0.01;b(1)=80000;n=12*20;
for k=1:n-1
    b(k+1)=b(k)+a*b(k)-880.87;
end
plot(1:n,b);
b’
```

得 b(73)=

例 2、**污水处理**　污水处理厂每天可将处理池的污水（中含污物）浓度降低一个固定比例 q，问多长时间才能使污水浓度降低一半？

解、设第 k 天的污水浓度为 ck，则　$c_{k+1}=(1-q)c_k$　(2)

n=-log2/log(1-q)　如 q=0.15，则 n=4.2650 天

问题：FLORIDA 沙丘鹤属于濒危物种,据报道,生态学家估计它在较好的自然环境下,年平均增长率仅为 1.94%,而在中等及较差的自然环境下,年平均增长率则分别为-3.24%,和 3.82%,即它将逐年减少.如果在某自然保护区内开始有 100 只鹤,建立描述其数量变化规律的模型,并作数值计算.

人工孵化是挽救这个濒危物种的措施之一，如果每年人工孵化 5 只鹤放入该保护区，那么在中等自然环境下沙丘鹤的数量将如何变化？
解、设第 K 年的沙丘鹤数量为 X_K,年平均增长率为 r,且 a=1+r,则

$$x_{k+1}=a*x_k$$

函数 M 文件：exf11.m

```
function y=exf11(x0,n,r)
a=1+r;
x(1)=x0;
for k=1:n
    x(k+1)=a*x(k);
end
y=x';
```

命令式 M 文件：ex2t2.m

```
k=[0:20]';
y1=exf11(100,20,0.0194)
y2=exf11(100,20,-0.0324)
y3=exf11(100,20,-0.0382)
round([k,y1,y2,y3])
plot(k,y1,k,y2,':',k,y3,'--');
gtext('r=0.0194');gtext('r=-0.0324');gtext('r=-0.0382');
```

人工孵化 设每年孵化 b 只，则 $x_{k+1}=a\cdot x_k+b$

将函数 M 文件 exf11.m 稍作修改：

```
function y=exf11r(x0,n,r,b)
a=1+r;
x(1)=x0;
for k=1:n
    x(k+1)=a*x(k)+b;
end
y=x';
```

然后在 ex2t2 上增加 y4=exf11r(100,20,-0.0324,5)

2.2 高阶线性常系数差分方程

一年生植物的繁殖

数学建模　记一棵植物秋季产种的平均数为 c，种子能够活过一个冬天的比例为 b，一岁的种子能在春季发芽的比例为 a1，未能发芽但又能活过一个冬天的比例仍为 b，两岁的种子能在春季发芽的比例为 a2，设 c，a1，a2 固定，而 b 可在一定范围内变化，试考察这种植物数量的变化规律。

$$x_1=a_1bcx_0 \quad p=-a_1bc, q=-a_2b(1-a_1)bc$$
$$x_1+px_0=0, x_k+px_{k-1}+qx_{k-2}=0, k=2,3,...$$

C=10 a1=0.5,a2=0.25,b=5

```
function y=exf12(x0,n,b)
c=10;a1=0.5;a2=0.25;
p=-a1*b*c;q=-a2*(1-a1)*c*b^2;
x(1)=x0;
x(2)=-p*x(1);
for k=3:n
    x(k)=-p*x(k-1)-q*x(k-2);
end
y=x';
```

命令式 M 文件：ex2t3.m

```
k=[1:20]';
y1=exf12(100,20,0.18)
y2=exf12(100,20,-0.19)
y3=exf12(100,20,-0.20)
round([k,y1,y2,y3])
plot(k,y1,k,y2,':',k,y3,'--');
gtext('r=0.18);gtext('r=-0.19');gtext('r=-0.20');
```

结论:对于不同的 b,xk 的变化规律有较大区别,如 b=0.2

二、差分方程常用解法与性质分析

1、 常系数线性差分方程的解

方程 $a_0 x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + ... + a_k x_n = b(n)$ （8）

其中 $a_0, a_1, ..., a_k$ 为常数，称方程（8）为常系数线性方程。

又称方程 $a_0 x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + ... + a_k x_n = 0$ （9）

为方程（8）对应的齐次方程。

如果（9）有形如 $x_n = \lambda^n$ 的解，带入方程中可得：

$$a_0 \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + ... + a_{k-1} \lambda + a_k = 0 \qquad (10)$$

称方程（10）为方程（8）、（9）的特征方程。

显然，如果能求出（10）的根，则可以得到（9）的解。

基本结果如下：

（1） 若（10）有 k 个不同的实根，则（9）有通解：

$$x_n = c_1 {\lambda_1}^n + c_2 {\lambda_2}^n + ... + c_k {\lambda_k}^n,$$

（2） 若（10）有 m 重根λ，则通解中有构成项：

$$(\bar{c}_1+\bar{c}_2 n+\ldots+\bar{c}_m n^{m-1})\lambda^n$$

（3）若（10）有一对单复根 $\lambda=\alpha\pm i\beta$，令：$\lambda=\rho e^{\pm i\varphi}$，$\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2},\varphi=\arctan\dfrac{\beta}{\alpha}$，则（9）的通解中有构成项：

$$\bar{c}_1\rho^n\cos\varphi n+\bar{c}_2\rho^n\sin\varphi n$$

（4） 若有 m 重复根：$\lambda=\alpha\pm i\beta$，$\lambda=\rho e^{\pm i\phi}$，则（9）的通项中有构成项：

$$(c_1+\bar{c}_2 n+\ldots+\bar{c}_m n^{m-1})\rho^n\cos\varphi n+(c_{m+1}+\bar{c}_{m+2} n+\ldots+\bar{c}_{2m} n^{m-1})\rho^n\sin\varphi n$$

综上所述，由于方程（10）恰有 k 个根，从而构成方程

（9）的通解中必有 k 个独立的任意常数。通解可记为：$\bar{x}_n$

如果能得到方程（8）的一个特解：x_n^*，则（8）必有通解：

$$x_n=\bar{x}_n+x_n^* \qquad (11)$$

（1） 的特解可通过待定系数法来确定。

例如：如果$b(n)=b^n p_m(n), p_m(n)$为 n 的多项式，则当 b 不是特征根时，可设成形如$b^n q_m(n)$形式的特解，其中$q_m(n)$为 m 次多项式；如果 b 是 r 重根时，可设特解：$b^n n^r q_m(n)$，将其代入（8）中确定出系数即可。

2、 差分方程的 z 变换解法

对差分方程两边关于x_n取 Z 变换，利用x_n的 Z 变换 F（z）来表示出x_{n+k}的 Z 变换，然后通过解代数方程求出 F（z），并把 F(z)在 z=0 的解析圆环域中展开成洛朗级数，其系数就是所要求的x_n

例1 设差分方程$x_{n+2}+3x_{n+1}+2x_n=0, x_0=0, x_1=1$，求$x_n$

解：解法 1：特征方程为$\lambda^2+3\lambda+2=0$，有根：$\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$

故：$x_n=c_1(-1)^n+c_2(-2)^n$为方程的解。

由条件$x_0=0,x_1=1$得：$x_n=(-1)^n-(-2)^n$

解法 2：设 F（z）=Z（x_n），方程两边取变换可得：

$$z^2(F(z)-x_0-x_1.\frac{1}{z})+3z(F(z)-x_0)+2F(z)=0$$

由条件 $x_0=0, x_1=1$ 得 $F(z)=\dfrac{z}{z^2+3z+2}$

由 F（z） 在 $|z|>2$ 中解析，有

$$F(z)=z(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2})=\frac{1}{1+\frac{1}{z}}-\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{z^k}-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)\frac{2^k}{z^k}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(1-2^k)z^{-k}$$

所以，$x_n=(-1)^n-(-2)^n$

3、 二阶线性差分方程组

设 $z(n)=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，形成向量方程组

$$z(n+1)=Az(n) \qquad (12)$$

则 $$z(n+1)=A^n z(1) \qquad (13)$$

（13）即为（12）的解。

为了具体求出解（13），需要求出 A^n，这可以用高等代数的方法计算。常用的方法有：

（1）如果 A 为正规矩阵，则 A 必可相似于对角矩阵，对角线上的元素就是 A 的特征值，相似变换矩阵由 A 的特征向量构成：$A=p^{-1}\Lambda p, A^n=p^{-1}\Lambda^n p, \therefore z(n+1)=(p^{-1}\Lambda^n p)z(1)$。

（2）将 A 分解成 $A=\xi\eta^{/}, \xi, \eta$ 为列向量，则有

$$A^n=(\xi.\eta^{/})^n=\xi.\eta^{/}.\xi.\eta^{/}...\xi.\eta \ =(\xi^{/}\eta)^{n-1}.A$$

从而，$z(n+1)=A^n z(1)=(\xi^{/}\eta)^{n-1}.Az(1)$

（3） 或者将 A 相似于约旦标准形的形式，通过讨论 A 的特征值的性态，找出 A^n 的内在构造规律，进而分析解 $z(n)$ 的变化规律，获得它的基本性质。

4、 关于差分方程稳定性的几个结果

（1）k 阶常系数线性差分方程（8）的解稳定的充分必要条件是它对应的特征方程（10）所有的 特征根 $\lambda_i, i=1,2...k$ 满足 $|\lambda_i|<1$

（2）一阶非线性差分方程

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

（14）

（14）的平衡点$\bar{x}$由方程$\bar{x} = f(\bar{x})$决定，

将$f(x_n)$在点$\bar{x}$处展开为泰勒形式：

$$f(x_n) = f'(\bar{x})(x_n - \bar{x}) + f(\bar{x}) \quad （15）$$

故有：$\left|f'(\bar{x})\right| < 1$时，（14）的解$\bar{x}$是稳定的，

$\left|f'(\bar{x})\right| > 1$时，方程（14）的平衡点$\bar{x}$是不稳定的。

例 1：实验题目

由一对兔子开始，一年可以繁殖出多少只兔子？如果一对兔子每个月可以生一对小兔子，兔子在出生两个月后就具有繁殖能力，由一对刚出生一个月的兔子开始，一年内兔子种群数量如何变化。求这个种群的稳定分布和固有增长率。

实验内容

解 假设

（a）兔子每经过一个月底就增加一个月龄；

（b）月龄大于等于 2 的兔子都具有繁殖能力；

（c）具有繁殖能力的兔子每一个月一定生一对兔子；

（d）兔子不离开群体（不考虑死亡）

记第 n 个月初的幼兔（一月龄兔）数量为 a_0(n），成兔（月龄大于等于 2）数量为 a_1(n），则兔子总数为 a(n)= a_0(n）+a_1(n），平衡关系为：

$$\begin{cases} \text{本月初幼兔数量} = \text{上月初成兔数量} \\ \text{本月初成兔数量} = \text{上月初成兔数量} + \text{上月初幼兔数量} \end{cases}$$

建立模型：

$$\begin{cases} a_0(n) = a_1(n-1) \\ a_1(n) = a_0(n-1) + a_1(n-1) \\ a_0(1) = 1, a_1(1) = 0 \end{cases}$$

这个一阶差分方程的矩阵表达式为

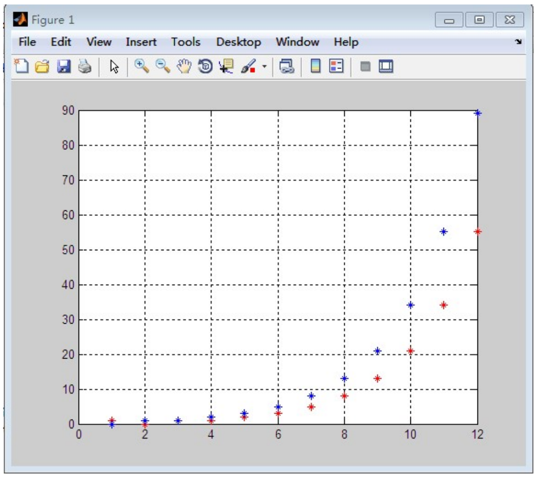
$$a(n) = Aa(n-1)$$

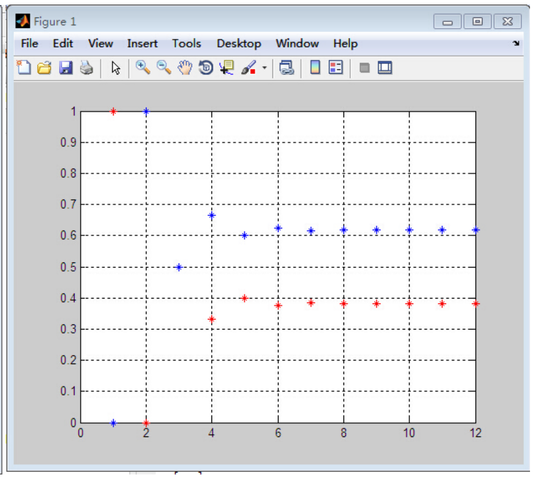
其中

$$a(n) = \begin{pmatrix} a_0(n) \\ a_1(n) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

利用迭代方法求数值解，也就是按时间步长法仿真种群增长的动态过程，模拟幼兔和成兔占整体比例随时间的变化。

```
>>  a=[0  1;1  1];
  x=[1  0]’;
for  k=2:12
y=a*x(:,k-1);
x=[x  y];
end
  zz=repmat(sum(x),[2  1]);
z=x./zz;
t=1:12;
>>  plot(t,x(1,:),’r*’,t,x(2,:),’b*’),grid;
>>  plot(t,z(1,:),’r*’,t,z(2,:),’b*’),grid;
```





由数值模拟结果可见，兔子数量递增，但是幼兔和成兔在种群中所占比例很快会趋于一个极限。由线性差分方程的定性理论可知，这个极限就是对应于差分方程系数矩阵 A 主特征值得归一化特征向量。因为 A 是非负矩阵，由矩阵理论知，A 主特征值是正实数，是最大的特征值。

```
>>  [v,d]=eig(a)
v  =
      -0.8507          0.5257
        0.5257          0.8507
        d  =
              -0.6180          0
                0          1.6180
>>  max(max(d))
ans  =
        1.6180
>>  v(:,2)/sum(v(:,2))
ans  =          0.3820
        0.6180
```

由数值计算可知，系数矩阵模 A 最大的特征值 r=1.618，生物上称之为种群的内禀增长率，是个大于一的实数。因此种群数量随时间递增。相应的归一化的特征

向量的两个分量0.382和0.618正是幼兔和成兔在种群中所占比例趋近的稳定值，生物上称之为种群的稳定分布。

从这个例子的讨论可见，数值模拟能帮我们对系统的变化有更直观的认识。但是只有通过计算方程组系数矩阵的特征值和特征向量，运用差分方程定性分析才能对解得渐进性质给出确定的结论。