Sprawozdanie z listy 1

Maksymilian Neumann

2 kwietnia 2025

1 Hilbert

Celem zadania jest zbadanie dokładności i odporności solvera LP poprzez rozwiązanie klasycznego, źle uwarunkowanego zadania optymalizacji liniowej, w którym występuje macierz Hilberta.

1.1 Model matematyczny

Zbiory i parametry

- $n \in \mathbb{N}$ – wymiar problemu (rozmiar macierzy Hilberta),
- $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ – zbiór indeksów wierszy i kolumn,
- $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}, \quad \forall i, j \in I$ – elementy macierzy Hilberta $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,
- $b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad \forall i \in I$ – współczynniki prawej strony,
- $c_i = b_i, \quad \forall i \in I$ – współczynniki funkcji celu (identyczne z b_i),
- $x^* = (1, 1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$ – rozwiązanie dokładne (teoretyczne).

Zmienne decyzyjne

$$x_i \in \mathbb{R}_+, \quad \forall i \in I$$

Zmienna x_i reprezentuje wartość przypisaną i-temu elementowi wektora decyzyjnego x, przy czym wszystkie zmienne są nieujemne.

Funkcja celu

$$\min \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

Celem jest minimalizacja liniowej funkcji kosztu, przy czym koszt jednostkowy zmiennej x_i równy jest sumie elementów i-tego wiersza macierzy Hilberta.

Ograniczenia

- Równości liniowe:
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad \forall i \in I$$
- Nieujemność zmiennych:
$$x_i \geq 0, \quad \forall i \in I$$

1.2 Opis rozwiązania i metodologia eksperymentu

Model został zaimplementowany w języku **GNU MathProg** (plik `hilbert.mod`) i uruchamiany za pomocą narzędzia `glpsol`. W modelu:

- macierz A, wektor b oraz c są generowane dynamicznie w zależności od parametru n,
- dokładne rozwiązanie $x^* = \mathbf{1}$ jest znane analitycznie,
- rozwiązanie przybliżone $\tilde{x}$ uzyskiwane jest numerycznie przez solver,
- jako miarę dokładności stosujemy błąd względny:
$$\mathrm{err}(n) = \frac{\|\tilde{x} - x^*\|_2}{\|x^*\|_2} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}_i - 1)^2}}{\sqrt{n}}$$

Zadaniem jest określenie maksymalnego rozmiaru n, dla którego rozwiązanie numeryczne zachowuje co najmniej dwucyfrową dokładność, tzn. $\mathrm{err}(n) < 10^{-2}$.

1.3 Wyniki numeryczne

Model rozwiązano dla wartości $n = 6, 7, 8$, a następnie porównano wyniki funkcji celu i obliczono błędy względne.

- **Dla** $n = 6$:
$$\mathrm{err}(6) = 1{,}08 \cdot 10^{-10},$$
$$\sum_{i=1}^{n} c_i\tilde{x}_i = 7{,}8385$$
- **Dla** $n = 7$:
$$\mathrm{err}(7) = 1{,}54 \cdot 10^{-8},$$
$$\sum_{i=1}^{n} c_i\tilde{x}_i = 9{,}2219$$
- **Dla** $n = 8$:
$$\mathrm{err}(8) = 0{,}5141,$$
$$\sum_{i=1}^{n} c_i\tilde{x}_i = 10{,}6059$$

1.4 Wnioski

Macierz Hilberta jest przykładem ekstremalnie źle uwarunkowanej macierzy. Wyniki pokazują, że:

- dla $n = 6$ i $n = 7$ uzyskujemy bardzo wysoką dokładność numeryczną (błąd poniżej 10^{-8}),
- dla $n = 8$ dokładność znacznie spada, błąd przekracza 50%,
- barierą, przy której błędy numeryczne przekraczają akceptowalny poziom dwucyfrowej dokładności, jest $n \approx 7$.

2 Dźwigi

Celem modelu jest optymalne przemieszczanie dźwigów pomiędzy miastami w celu pokrycia zapotrzebowania. W każdym mieście znana jest liczba nadmiarowych i brakujących dźwigów typu I i II. Dźwigi typu II mogą być również użyte jako zamiennik dźwigów typu I (choć z większym kosztem). Transport dźwigów między miastami generuje koszt proporcjonalny do odległości oraz typu sprzętu.

2.1 Model

Zmienne decyzyjne

- xI_{m_1,m_2} – liczba dźwigów typu I przetransportowanych z miasta m_1 do miasta m_2,
- xII_{m_1,m_2} – liczba dźwigów typu II przetransportowanych z miasta m_1 do miasta m_2,
- $xIItoI_{m_1,m_2}$ – liczba dźwigów typu II z miasta m_1 do miasta m_2, które mają zastąpić dźwigi typu I.

Wszystkie zmienne są nieujemne i wyrażone w jednostkach liczby dźwigów.

Funkcja celu

Minimalizujemy całkowity koszt transportu:

$$\min \sum_{m_1,m_2 \in M} \left[\mathrm{dist}_{m_1,m_2} \cdot xI_{m_1,m_2} + 1.2 \cdot \mathrm{dist}_{m_1,m_2} \cdot (xII_{m_1,m_2} + xIItoI_{m_1,m_2}) \right].$$

Interpretacja: Koszt przetransportowania dźwigu typu II jest o 20% wyższy niż typu I. Minimalizacja tej funkcji pozwala uzyskać najbardziej efektywny ekonomicznie plan relokacji.

Ograniczenia

1. **Dostępność dźwigów w miastach (nadwyżki):**

$$\sum_{m_2 \in M} xI_{m_1,m_2} \leq \mathrm{surpI}_{m_1},$$

$$\sum_{m_2 \in M} (xII_{m_1,m_2} + xIItoI_{m_1,m_2}) \leq \mathrm{surpII}_{m_1}.$$

Interpretacja: Nie można przemieścić więcej dźwigów niż dostępnych w danym mieście.

2. **Pokrycie zapotrzebowania na dźwigi:**

$$\sum_{m_1 \in M} (xI_{m_1,m_2} + xIItoI_{m_1,m_2}) = \mathrm{shortI}_{m_2},$$

$$\sum_{m_1 \in M} xII_{m_1,m_2} = \mathrm{shortII}_{m_2}.$$

Interpretacja: Zapotrzebowanie na dźwigi musi być w pełni pokryte. Dźwigi typu II mogą pokrywać zarówno swój typ, jak i typ I (ale nie odwrotnie).

2.2 Wyniki i interpretacja

Model został rozwiązany z wykorzystaniem solvera GLPK. Otrzymano optymalne wartości zmiennych decyzyjnych xI, xII oraz $xIItoI$, a minimalny koszt transportu wyniósł:

$$\text{TotalCost} = 1175{,}04.$$

Interpretacja rozwiązania

Uzyskany plan relokacji dźwigów przedstawia się następująco:

- **Dźwigi typu I (xI):**
  - Z Opola:
    - 4 do Brzegu,
    - 3 do Koźla.
  - Z Nysy:
    - 5 do Brzegu,
    - 1 do Prudnika.
  - Ze Strzelec Opolskich:
    - 5 do Koźla.
- **Dźwigi typu II (xII):**
  - Z Nysy:
    - 2 do Opola.
  - Z Prudnika:
    - 4 do Strzelec Opolskich,
    - 2 do Koźla,
    - 1 do Raciborza.
- **Dźwigi typu II jako zamiennik typu I ($xIItoI$):**
  - Z Brzegu:
    - 1 dźwig pozostaje w Brzegu jako zamiennik typu I.
  - Z Prudnika:
    - 3 dźwigi pozostają w Prudniku jako zamienniki typu I.

Wnioski

- Model pozwolił na pełne pokrycie zapotrzebowania na dźwigi obu typów przy minimalnym koszcie.
- Zmienna $xIItoI$ została aktywowana tylko tam, gdzie było to opłacalne – pozwala to zminimalizować użycie droższych dźwigów II jako zamienników.
- Koszt transportu dźwigów został zoptymalizowany przy jednoczesnym zachowaniu zgodności z ograniczeniami dostępności i zapotrzebowania.

3 Rafineria

Celem niniejszego modelu jest optymalizacja produkcji trzech rodzajów paliw (silnikowych, domowych oraz ciężkich) w rafinerii przy wykorzystaniu mieszanek dwóch gatunków ropy naftowej. Model uwzględnia proces destylacji i krakingu oraz ograniczenia związane z jakością (zawartością siarki) i zapotrzebowaniem na produkty końcowe.

3.1 Model

Zbiory:

- C – zbiór dostępnych typów ropy (np. $C = \{\mathrm{b1}, \mathrm{b2}\}$),
- $\mathcal{O}$ – zbiór zastosowań frakcji olejowej po destylacji $(\mathrm{home}, \mathrm{heavy})$,
- $\mathcal{D}$ – zbiór zastosowań destylatu $(\mathrm{heavy}, \mathrm{crack})$.

Parametry:

- costB_c – koszt zakupu ropy typu $c \in C$,
- costDist – koszt destylacji 1 tony surowca,
- costCrack – koszt krakingu 1 tony destylatu,
- $\mathrm{fracMotor}_c$, $\mathrm{fracHome}_c$, $\mathrm{fracDist}_c$, $\mathrm{fracHeavy}_c$ – udziały frakcji uzyskanych z destylacji ropy c,
- fracCrMotor, fracCrHome, fracCrHeavy – udziały frakcji uzyskanych z krakingu destylatu,
- $\mathrm{DemandMotor}, \mathrm{DemandHome}, \mathrm{DemandHeavy}$ – minimalne zapotrzebowanie na paliwa,
- sLimitHome – maksymalny dopuszczalny udział siarki w paliwie domowym,
- $\mathrm{sHomeCrude}_c$, $\mathrm{sHomeCrudeCr}_c$ – zawartość siarki w paliwach domowych uzyskanych odpowiednio z destylacji i z krakingu ropy c.

Zmienne decyzyjne:

- $b_c \geq 0$ – ilość ropy typu $c \in C$ zakupionej do produkcji,
- $y_{p,c} \geq 0$ – ilość frakcji olejowej z ropy c przydzielonej do produktu $p \in \mathcal{O}$,
- $d_{p,c} \geq 0$ – ilość destylatu z ropy c przydzielonego do produktu $p \in \mathcal{D}$.

Funkcja celu:

$$\min \quad \sum_{c \in C} [(\mathrm{costB}_c + \mathrm{costDist}) \cdot b_c + \mathrm{costCrack} \cdot d_{\mathrm{crack},c}]$$

Interpretacja: Minimalizujemy całkowity koszt produkcji, uwzględniający zakup surowca oraz jego przetworzenie.

Ograniczenia:

1. Bilans frakcji olejowej:

$$\text{fracHome}_c \cdot b_c = \sum_{p \in \mathcal{O}} y_{p,c} \quad \forall c \in C$$

2. Bilans destylatu:

$$\text{fracDist}_c \cdot b_c = \sum_{p \in \mathcal{D}} d_{p,c} \quad \forall c \in C$$

3. Zapotrzebowanie na paliwa silnikowe (benzyna):

$$\sum_{c \in C} (\text{fracMotor}_c \cdot b_c + \text{fracCrMotor} \cdot d_{\text{crack},c}) \geq \text{DemandMotor}$$

4. Zapotrzebowanie na paliwo domowe:

$$\sum_{c \in C} (y_{\text{home},c} + \text{fracCrHome} \cdot d_{\text{crack},c}) \geq \text{DemandHome}$$

5. Zapotrzebowanie na paliwo ciężkie:

$$\sum_{c \in C} (\text{fracHeavy}_c \cdot b_c + y_{\text{heavy},c} + d_{\text{heavy},c} + \text{fracCrHeavy} \cdot d_{\text{crack},c}) \geq \text{DemandHeavy}$$

6. Zawartość siarki w paliwie domowym:

$$\sum_{c \in C} (\text{sHomeCrude}_c \cdot y_{\text{home},c} + \text{sHomeCrudeCr}_c \cdot \text{fracCrHome} \cdot d_{\text{crack},c}) \\ \leq \text{sLimitHome} \cdot \sum_{c \in C} (y_{\text{home},c} + \text{fracCrHome} \cdot d_{\text{crack},c})$$

3.2 Wyniki i interpretacja

Model został rozwiązany przy użyciu solvera GLPK. Uzyskano następujące optymalne wartości zmiennych:

Zakupione ilości ropy:

$$b_{\text{b1}} = 1\,026\,030{,}37 \text{ ton}, \\ b_{\text{b2}} = 0.$$

Alokacja frakcji olejowej:

$$y_{\text{home,b1}} = 381\,561{,}82 \text{ ton}, \qquad y_{\text{heavy,b1}} = 28\,850{,}33 \text{ ton}.$$

Alokacja destylatu:

$$d_{\text{crack,b1}} = 92\,190{,}89 \text{ ton}, \qquad d_{\text{heavy,b1}} = 61\,713{,}67 \text{ ton}.$$

Wartość funkcji celu:

$$\text{TotalCost} = 1\,345\,943\,600{,}87\ \$.$$

Interpretacja:

- Produkcja opiera się wyłącznie na ropie `b1`, co wynika z jej większej opłacalności,
- Ropa `b2` nie została wykorzystana,
- Część destylatu z `b1` została poddana krakingowi, reszta zasiliła produkcję paliwa ciężkiego,
- Model spełnił wszystkie ograniczenia dotyczące zapotrzebowania i zawartości siarki,
- Koszt całkowity optymalnej strategii wynosi około 1,35 mld $.

4 Plan Zajęć

Celem zadania jest optymalne zaplanowanie harmonogramu zajęć oraz udziału w co najmniej jednym slotcie treningowym dla studenta, przy uwzględnieniu ograniczeń organizacyjnych oraz preferencji dotyczących poszczególnych grup.

4.1 Model matematyczny

Zbiory:

- S – zbiór przedmiotów (np. Algebra, Fizyka),
- G – zbiór grup zajęciowych dostępnych dla każdego przedmiotu,
- D – zbiór dni tygodnia (np. Pon, Wt, ...),
- $\mathcal{T} \subseteq D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ – zbiór slotów treningowych, określonych jako trójki $(d, \text{start}, \text{end})$.

Parametry:

- $\text{pref}_{s,g} \in \mathbb{N}$ – wartość preferencji grupy g dla przedmiotu s,
- $\text{day}_{s,g} \in D$ – dzień, w którym odbywają się zajęcia grupy g z przedmiotu s,
- $\text{start}_{s,g}, \text{end}_{s,g} \in \mathbb{R}$ – godzina rozpoczęcia i zakończenia zajęć,
- $\text{daily\_limit} \in \mathbb{R}_+$ – maksymalna dopuszczalna liczba godzin zajęć dziennie,
- $\text{lunch\_start}, \text{lunch\_end} \in \mathbb{R}$ – przedział czasu przeznaczony na przerwę obiadową,
- $\text{lunch\_duration} \in \mathbb{R}_+$ – wymagany minimalny czas wolny w czasie przerwy obiadowej,
- $\text{overlap}_{s_1,g_1,s_2,g_2} \in \{0,1\}$ – parametr przyjmujący 1, jeśli zajęcia (s_1, g_1) i (s_2, g_2) kolidują czasowo w tym samym dniu, 0 w przeciwnym przypadku,
- $\text{lunch\_overlap}_{s,g} \in \mathbb{R}_+$ – liczba godzin zajęć (s, g), które pokrywają się z przerwą obiadową.

Zmienne decyzyjne:

- $x_{s,g} \in \{0,1\}$ – zmienna binarna, przyjmuje 1 jeśli grupa g została wybrana dla przedmiotu s, 0 w przeciwnym razie,
- $t_{(d,st,en)} \in \{0,1\}$ – zmienna binarna, równa 1 jeśli slot treningowy (d, st, en) został wybrany.

Funkcja celu:

$$\max \sum_{s\in S} \sum_{g\in G} \text{pref}_{s,g} \cdot x_{s,g}$$

Interpretacja: Maksymalizujemy sumę preferencji studentów wynikającą z wyboru grup o możliwie najwyższej ocenie.

Ograniczenia:

1. **Wybór jednej grupy dla każdego przedmiotu:**

$$\sum_{g \in G} x_{s,g} = 1 \quad \forall s \in S$$

2. **Brak konfliktów czasowych:**

$$x_{s_1,g_1} + x_{s_2,g_2} \leq 1 \quad \forall s_1, s_2 \in S,\ g_1, g_2 \in G : \text{overlap}_{s_1,g_1,s_2,g_2} = 1$$

3. **Limit godzin dziennie:**

$$\sum_{s \in S} \sum_{g \in G:\text{day}_{s,g}=d} (\text{end}_{s,g} - \text{start}_{s,g}) \cdot x_{s,g} \leq \text{daily\_limit} \quad \forall d \in D$$

4. **Zachowanie przerwy obiadowej:**

$$\sum_{s \in S} \sum_{g \in G:\text{day}_{s,g}=d} \text{lunch\_overlap}_{s,g} \cdot x_{s,g} \leq (\text{lunch\_end} - \text{lunch\_start}) - \text{lunch\_duration} \quad \forall d \in D$$

5. **Brak kolizji ze slotami treningowymi:**

$$t_{(d,st,en)} + x_{s,g} \leq 1 \quad \forall (d, st, en) \in \mathcal{T}, \forall s, g : \text{day}_{s,g} = d \wedge [\text{start}_{s,g}, \text{end}_{s,g}] \cap [st, en] \neq \emptyset$$

6. **Co najmniej jeden slot treningowy:**

$$\sum_{(d,st,en) \in \mathcal{T}} t_{(d,st,en)} \geq 1$$

Dodatkowe ograniczenia (wariant 2):

- Zajęcia tylko w dni robocze z wykluczeniem środy i piątku:

$$x_{s,g} = 0 \quad \forall s, g : \text{day}_{s,g} \in \{\text{Sr}, \text{Pt}\}$$

- Odrzucenie grup o preferencjach mniejszych niż 5:

$$x_{s,g} = 0 \quad \forall s, g : \text{pref}_{s,g} < 5$$

4.2 Wyniki i interpretacja

Model został uruchomiony w dwóch wariantach:

1. bez dodatkowych ograniczeń,
2. z dodatkowymi ograniczeniami:
   - zajęcia mogą się odbywać tylko w poniedziałki, wtorki i czwartki,
   - wykluczono grupy o preferencji mniejszej niż 5.

Wariant 1 – bez dodatkowych ograniczeń

Dla każdego przedmiotu wybrano najbardziej preferowaną możliwą grupę:

- **Algebra:** grupa 3,
- **Analiza:** grupa 2,
- **Fizyka:** grupa 4,
- **Chemia Min.:** grupa 1,
- **Chemia Org.:** grupa 2.

Łączna suma preferencji wyniosła:

$$\text{TotalPref} = 37.$$

Wszystkie ograniczenia zostały spełnione, w tym:

- brak konfliktów czasowych między zajęciami,
- zachowanie dziennego limitu godzin,
- zapewnienie przerwy obiadowej,
- uczestnictwo w co najmniej jednym slotcie treningowym.

Wariant 2 – z dodatkowymi ograniczeniami

Po wprowadzeniu dodatkowych warunków harmonogram uległ zmianie. Wybrane grupy:

- **Algebra:** grupa 1,
- **Analiza:** grupa 4,
- **Fizyka:** grupa 2,
- **Chemia Min.:** grupa 3,
- **Chemia Org.:** grupa 2.

Łączna suma preferencji spadła do:

$$\text{TotalPref} = 28.$$

Pomimo ograniczenia liczby dostępnych dni i wykluczenia mniej preferowanych grup:

- znaleziono poprawny plan zajęć,
- nadal udało się uniknąć konfliktów i spełnić wszystkie ograniczenia organizacyjne,
- utrzymano uczestnictwo w co najmniej jednym niekolidującym treningu.

Wnioski

Porównanie obu wariantów pokazuje kompromis między elastycznością planowania a wymaganiami organizacyjnymi i jakościowymi. Dodatkowe ograniczenia zmniejszają możliwą sumę preferencji, ale pozwalają na lepsze dopasowanie planu do wymagań zewnętrznych, takich jak dni wolne lub minimalna jakość zajęć.