Stetigkeit der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$

Wir möchten zeigen, dass die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ stetig ist. Das bedeutet, dass für jedes $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ die Funktion f an der Stelle c stetig ist.

Beweis:

Sei $c \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$. Wir müssen zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle x mit $|x - c| < \delta$ gilt:

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{c} \right| < \varepsilon.$$

Wahl von δ:

Betrachten wir die Differenz:

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{c} \right| = \left| \frac{c - x}{xc} \right| = \frac{|c - x|}{|x||c|}.$$

Wir möchten, dass diese Differenz kleiner als ε ist:

$$\frac{|c - x|}{|x||c|} < \varepsilon.$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit $|x||c|$, erhalten wir:

$$|c - x| < \varepsilon |x||c|.$$

Da $|x|$ für x nahe bei c ungefähr $|c|$ ist, können wir annehmen, dass $|x| \geq \frac{|c|}{2}$, wenn $|x - c|$ hinreichend klein ist. Dies folgt, weil x nahe bei c sein muss, wenn $|x - c| < \delta$ für ein geeignetes δ.

Setzen wir dies ein:

$$|c - x| < \varepsilon |c| \cdot \frac{|c|}{2} = \frac{\varepsilon |c|^2}{2}.$$

Um dies zu gewährleisten, wählen wir:

$$\delta = \min \left(1, \frac{\varepsilon |c|^2}{2} \right).$$

Überprüfung:

Sei x ein beliebiges Element mit $0 < |x - c| < \delta$. Dann gilt:

$$|x - c| < \frac{\varepsilon |c|^2}{2}.$$

Da $|x| \geq \frac{|c|}{2}$, haben wir:

$$\frac{|c-x|}{|x||c|} \leq \frac{|c-x|}{\frac{|c|}{2}|c|} = \frac{2|c-x|}{|c|^2}.$$

Daher folgt:

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| = \frac{|c-x|}{|x||c|} \leq \frac{2|c-x|}{|c|^2} < \frac{2}{|c|^2} \cdot \frac{\varepsilon|c|^2}{2} = \varepsilon.$$

Somit haben wir gezeigt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $|x-c| < \delta$ impliziert:

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| < \varepsilon.$$

Daraus folgt, dass $f(x) = \frac{1}{x}$ an der Stelle c stetig ist.