Proof. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Wir müssen ein $\delta > 0$ finden, so dass für alle y mit $0 < |y - x| < \delta$ gilt, dass $\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| < \epsilon$.

Setze $\delta = \min\left(\frac{\epsilon|x|^2}{2}, \frac{|x|}{2}\right)$.

- Da $\epsilon > 0$ und $|x| > 0$, ist $\delta > 0$.

Sei nun y mit $y \neq 0$ und $|y - x| < \delta$ gegeben.

- Zuerst zeigen wir, dass $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y-x}{xy}\right|$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| &= \left|\frac{y-x}{xy}\right| \\ &= \frac{|y-x|}{|x||y|}\end{aligned}$$

- Da $|y - x| < \delta \leq \frac{|x|}{2}$, folgt $|y| > \frac{|x|}{2}$:

$$\begin{aligned}|y| &= |x + (y - x)| \\ &\geq |x| - |y - x| \\ &> |x| - \frac{|x|}{2} \\ &= \frac{|x|}{2}\end{aligned}$$

- Da $\delta \leq \frac{\epsilon|x|^2}{2}$, folgt:

$$\begin{aligned}\frac{|x-y|}{|x||y|} &< \frac{\delta}{|x| \cdot \frac{|x|}{2}} \\ &= \frac{\delta}{\frac{|x|^2}{2}} \\ &\leq \frac{\frac{\epsilon|x|^2}{2}}{\frac{|x|^2}{2}} \\ &= \epsilon\end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt, dass für alle y mit $y \neq 0$ und $|y - x| < \delta$ gilt, dass $\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| < \epsilon$. Daher ist f stetig an x. $\square$