Lean Code Documentation

Gegeben sei die Funktion $f(y) = a \cdot y + b$, wobei $a \neq 0$. Wir wollen zeigen, dass f stetig an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ ist. **Schritte im Detail:**

1. **Einführung:** Wir beginnen mit der Definition der Funktion $f(y) = a \cdot y + b$ und der Annahme $a \neq 0$. Ziel ist es zu zeigen, dass f an der Stelle x stetig ist.

2. **Einführung der ε-Umgebung:** Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$.

$$\text{Sei } \delta := \frac{\varepsilon}{|a|}.$$

3. **Existenz von δ:** Da $|a| > 0$, folgt $\delta > 0$.

$$0 < \delta := \frac{\varepsilon}{|a|}.$$

4. **Definition der δ-Umgebung:** Wir zeigen nun, dass für alle y mit $|y - x| < \delta$ die Bedingung $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ erfüllt ist.

5. **Berechnung der Differenz:**

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |(a \cdot x + b) - (a \cdot y + b)| \\ &= |a \cdot x + b - a \cdot y - b| \\ &= |a \cdot x - a \cdot y| \\ &= |a \cdot (x - y)| \\ &= |a| \cdot |x - y|. \end{aligned}$$

6. **Schätzung der Differenz:** Da $|x - y| < \delta$ und $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$, erhalten wir:

$$|a| \cdot |x - y| < |a| \cdot \delta = |a| \cdot \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon.$$

7. **Abschluss:** Somit haben wir gezeigt, dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für $|x - y| < \delta$, was die Stetigkeit von f an x beweist.