

Continuous Functions

Felix Lentze & Dominic Plein

Date: July 10th, 2024

Contents

1	Continuous Functions	2
2	Examples	3
2.1	The constant function is continuous	3
2.2	Functions $x \mapsto mx + y_0$ are continuous	3
2.3	The parabola is continuous	5
2.4	The hyperbola is continuous	7

1 Continuous Functions

Text excerpts remixed from Vladimir A. Zorich - Mathematical Analysis I as well as Stephen Abbott - Understanding Analysis.

Let f be a real-valued function defined in a neighborhood of a point $a \in \mathbb{R}$. In intuitive terms, the function f is continuous at a if its value $f(x)$ approaches the value $f(a)$ that it assumes at the point a itself as x gets nearer to a .

Definition 1 (Continuous at a point). A function $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is *continuous at the point* $a \in D$ if

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad \left(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon \right) \quad (1)$$

If f is continuous at every point in the domain D , then we say that f is *continuous on* D .

2 Examples

Here, we give a few examples of continuous functions alongside the respective proofs.

2.1 The constant function is continuous

Theorem 1. *Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a function given by $f(x) := c$, where $c \in \mathbb{R}$. That is, f is a constant function. Then f is continuous at every point $a \in \mathbb{R}$.*

Proof. Let $a \in \mathbb{R}$ be an arbitrary point where we want to show that f is continuous. Let $\varepsilon > 0$. We choose $\delta = 1 > 0$. Let $x \in \mathbb{R}$. Then:

$$|f(x) - f(a)| = |c - c| = |0| = 0 < \varepsilon.$$

With that, the implication also holds true:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon.$$

Therefore, f is continuous at a . □

2.2 Functions $x \mapsto mx + y_0$ are continuous

Theorem 2. *Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a function given by $f(x) := m \cdot x + y_0$, where $m, y_0 \in \mathbb{R}$. Then f is continuous at every point $a \in \mathbb{R}$.*

Proof. Let $a \in \mathbb{R}$ be an arbitrary point where we want to show that f is continuous.

We first consider the simpler case where the slope is 0, that is $\mathbf{m} = \mathbf{0}$. Then our function is given by $f(x) = y_0$ for all $x \in \mathbb{R}$. This is a constant function and we have already shown that constant functions are continuous. Therefore, f is continuous at a when $m = 0$.

Now to the more interesting case where $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$. Let $\varepsilon > 0$.

TODO □

1. **Einführung:** Wir beginnen mit der Definition der Funktion $f(y) = a \cdot y + b$ und der Annahme $a \neq 0$. Ziel ist es zu zeigen, dass f an der Stelle x stetig ist.

2. **Einführung der ε -Umgebung:** Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$.

$$\text{Sei } \delta := \frac{\varepsilon}{|a|}.$$

3. **Existenz von δ :** Da $|a| > 0$, folgt $\delta > 0$.

$$0 < \delta := \frac{\varepsilon}{|a|}.$$

4. **Definition der δ -Umgebung:** Wir zeigen nun, dass für alle y mit $|y - x| < \delta$ die Bedingung $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ erfüllt ist.

5. Berechnung der Differenz:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |(a \cdot x + b) - (a \cdot y + b)| \\&= |a \cdot x + b - a \cdot y - b| \\&= |a \cdot x - a \cdot y| \\&= |a \cdot (x - y)| \\&= |a| \cdot |x - y|.\end{aligned}$$

6. Schätzung der Differenz: Da $|x - y| < \delta$ und $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$, erhalten wir:

$$|a| \cdot |x - y| < |a| \cdot \delta = |a| \cdot \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon.$$

7. Abschluss: Somit haben wir gezeigt, dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für $|x - y| < \delta$, was die Stetigkeit von f an x beweist.

2.3 The parabola is continuous

Sei $f(x) = x^2$. Wir beweisen, dass f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist. **Vorbereitende Schritte:**

1. **Definition von δ :**

$$\delta = \min\left(\frac{\epsilon}{2|x|+1}, 1\right)$$

Diese Wahl von δ stellt sicher, dass $\delta > 0$ und $\delta \leq 1$.

2. **Positivität von δ :**

$$0 < \delta$$

Da $\epsilon > 0$ und $2|x| + 1 > 0$, folgt $0 < \frac{\epsilon}{2|x|+1}$. Somit ist $\delta > 0$.

3. **Obere Schranke von δ :**

$$\delta \leq 1$$

Dies folgt direkt aus der Definition von δ .

4. **Weitere obere Schranke von δ :**

$$\delta \leq \frac{\epsilon}{2|x|+1}$$

Auch dies folgt direkt aus der Definition von δ .

5. **Beziehung zwischen $|y|$ und $|x|$:**

$$|y| < |x| + \delta$$

Da $|y| = |x + (y - x)| \leq |x| + |y - x|$ und $|y - x| < \delta$, folgt $|y| < |x| + \delta$.

6. **Beziehung zwischen $|x + y|$ und $|x| + |y|$:**

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Dies ist eine Anwendung der Dreiecksungleichung.

7. **Nichtnegativität von $|x - y|$:**

$$0 \leq |x - y|$$

Da $|x - y|$ der Betrag einer reellen Zahl ist, ist er nicht negativ.

8. **Obere Schranke von $|x - y|$:**

$$|x - y| \leq \delta$$

Da $|y - x| < \delta$, folgt $|x - y| = |y - x| < \delta$.

9. **Beziehung zwischen $|x| + |y|$ und $|x| + (|x| + \delta)$:**

$$|x| + |y| < |x| + (|x| + \delta)$$

Da $|y| < |x| + \delta$, folgt $|x| + |y| < |x| + (|x| + \delta)$.

10. **Beziehung zwischen $2|x| + \delta$ und $2|x| + 1$:**

$$2|x| + \delta \leq 2|x| + 1$$

Da $\delta \leq 1$, folgt $2|x| + \delta \leq 2|x| + 1$.

Beweis:

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir wählen δ als $\delta = \min\left(\frac{\epsilon}{2|x|+1}, 1\right)$. Nach den obigen vorbereitenden Schritten wissen wir, dass $0 < \delta$.

Sei $|y - x| < \delta$. Wir müssen zeigen, dass $|y^2 - x^2| < \epsilon$.

$$\begin{aligned} |y^2 - x^2| &= |(y+x)(y-x)| && \text{(Ringregel)} \\ &= |y+x| \cdot |y-x| && \text{(Absorptionsregel)} \\ &\leq (|x| + |y|) \cdot |y-x| && \text{(Anwendung von Schritt 6)} \\ &\leq (|x| + (|x| + \delta)) \cdot \delta && \text{(Anwendung von Schritt 5 und 8)} \\ &= (2|x| + \delta) \cdot \delta \\ &\leq (2|x| + 1) \cdot \delta && \text{(Anwendung von Schritt 10)} \\ &\leq (2|x| + 1) \cdot \frac{\epsilon}{2|x| + 1} && \text{(Anwendung von Schritt 4)} \\ &= \epsilon && \text{(Feldregel)} \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $|y^2 - x^2| < \epsilon$.

■

2.4 The hyperbola is continuous

Proof. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Wir müssen ein $\delta > 0$ finden, so dass für alle y mit $0 < |y - x| < \delta$ gilt, dass $\left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| < \epsilon$.

Setze $\delta = \min\left(\frac{\epsilon|x|^2}{2}, \frac{|x|}{2}\right)$.

- Da $\epsilon > 0$ und $|x| > 0$, ist $\delta > 0$.

Sei nun y mit $y \neq 0$ und $|y - x| < \delta$ gegeben.

- Zuerst zeigen wir, dass $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{y-x}{xy} \right|$:
$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| &= \left| \frac{y-x}{xy} \right| \\ &= \frac{|y-x|}{|x||y|} \end{aligned}$$

- Da $|y - x| < \delta \leq \frac{|x|}{2}$, folgt $|y| > \frac{|x|}{2}$:

$$\begin{aligned} |y| &= |x + (y - x)| \\ &\geq |x| - |y - x| \\ &> |x| - \frac{|x|}{2} \\ &= \frac{|x|}{2} \end{aligned}$$

- Da $\delta \leq \frac{\epsilon|x|^2}{2}$, folgt:

$$\begin{aligned} \frac{|x-y|}{|x||y|} &< \frac{\delta}{|x| \cdot \frac{|x|}{2}} \\ &= \frac{\delta}{\frac{|x|^2}{2}} \\ &\leq \frac{\frac{\epsilon|x|^2}{2}}{\frac{|x|^2}{2}} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt, dass für alle y mit $y \neq 0$ und $|y - x| < \delta$ gilt, dass $\left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| < \epsilon$.
Daher ist f stetig an x . □