Continuous Functions

Felix Lentze & Dominic Plein

Date: July 10th, 2024

Contents

1 Continuous Functions

Text excerpts remixed from Vladimir A. Zorich - Mathematical Analysis I as well as Stephen Abbott - Understanding Analysis.

Let f be a real-valued function defined in a neighborhood of a point $a \in \mathbb{R}$. In intuitive terms, the function f is continuous at a if its value $f(x)$ approaches the value $f(a)$ that it assumes at the point a itself as x gets nearer to a.

Definition 1 (Continuous at a point)**.** A function $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is *continuous at the point* $a \in D$ if

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : \quad \Big(|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \epsilon \Big) \tag{1}$$

If f is continuous at every point in the domain D, then we say that f is *continuous on* D.

2 Examples

Here, we give a few examples of continuous functions alongside the respective proofs.

2.1 The constant function is continuous

Theorem 1. *Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function given by $f(x) := c$, where $c \in \mathbb{R}$. That is, f is a constant function. Then f is continuous at every point $a \in \mathbb{R}$.*

Proof. Let $a \in \mathbb{R}$ be an arbitrary point where we want to show that f is continuous. Let $\varepsilon > 0$. We choose $\delta = 1 > 0$. Let $x \in \mathbb{R}$. Then:

$$|f(x) - f(a)| = |c - c| = |0| = 0 < \varepsilon.$$

With that, the implication also holds true since its conclusion is always true (as shown above) irregardless of the premise.

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon.$$

Therefore, f is continuous at a. □

2.2 Functions $x \mapsto mx + y_0$ are continuous

Theorem 2. *Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function given by $f(x) := m \cdot x + y_0$, where $m, y_0 \in \mathbb{R}$. Then f is continuous at every point $a \in \mathbb{R}$.*

Proof. Let $a \in \mathbb{R}$ be an arbitrary point where we want to show that f is continuous.

We first consider the simpler case where the slope is 0, that is $\mathbf{m = 0}$. Then our function is given by $f(x) = y_0$ for all $x \in \mathbb{R}$. This is a constant function and we have already shown that constant functions are continuous. Therefore, f is continuous at a when $m = 0$.

Now to the more interesting case where $\mathbf{m \neq 0}$.Let $\varepsilon > 0$. We choose $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$. Since $\epsilon > 0$ and $|m| > 0$, we have $\delta > 0$.

Let $x \in \mathbb{R}$ and $|x - a| < \delta$. Then:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(a)| &= \left|(m \cdot x + y_0) - (m \cdot a - y_0)\right| \\
&= |m \cdot x - m \cdot a| \\
&= |m \cdot (x - a)| \\
&= |m| \cdot |x - a| \\
&< |m| \cdot \delta = |m| \cdot \frac{\varepsilon}{|m|} = \varepsilon
\end{aligned}$$

In the last line, we have used the fact that $|x - a| < \delta$ and then used our definition of δ.

The argument shows that $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, which proves the continuity of f at a. □

2.3 The parabola is continuous

Sei $f(x) = x^2$. Wir beweisen, dass f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist. **Vorbereitende Schritte:**

1. **Definition von δ:**

$$\delta = \min\left(\frac{\epsilon}{2|x|+1}, 1\right)$$

Diese Wahl von δ stellt sicher, dass $\delta > 0$ und $\delta \leq 1$.

2. **Positivität von δ:**

$$0 < \delta$$

Da $\epsilon > 0$ und $2|x| + 1 > 0$, folgt $0 < \frac{\epsilon}{2|x|+1}$. Somit ist $\delta > 0$.

3. **Obere Schranke von δ:**

$$\delta \leq 1$$

Dies folgt direkt aus der Definition von δ.

4. **Weitere obere Schranke von δ:**

$$\delta \leq \frac{\epsilon}{2|x|+1}$$

Auch dies folgt direkt aus der Definition von δ.

5. **Beziehung zwischen $|y|$ und $|x|$:**

$$|y| < |x| + \delta$$

Da $|y| = |x + (y - x)| \leq |x| + |y - x|$ und $|y - x| < \delta$, folgt $|y| < |x| + \delta$.

6. **Beziehung zwischen $|x + y|$ und $|x| + |y|$:**

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Dies ist eine Anwendung der Dreiecksungleichung.

7. **Nichtnegativität von $|x - y|$:**

$$0 \leq |x - y|$$

Da $|x - y|$ der Betrag einer reellen Zahl ist, ist er nicht negativ.

8. **Obere Schranke von $|x - y|$:**

$$|x - y| \leq \delta$$

Da $|y - x| < \delta$, folgt $|x - y| = |y - x| < \delta$.

9. **Beziehung zwischen $|x| + |y|$ und $|x| + (|x| + \delta)$:**

$$|x| + |y| < |x| + (|x| + \delta)$$

Da $|y| < |x| + \delta$, folgt $|x| + |y| < |x| + (|x| + \delta)$.

10. **Beziehung zwischen $2|x| + \delta$ und $2|x| + 1$:**

$$2|x| + \delta \leq 2|x| + 1$$

Da $\delta \leq 1$, folgt $2|x| + \delta \leq 2|x| + 1$.

Beweis:

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir wählen δ als $\delta = \min\left(\frac{\epsilon}{2|x|+1}, 1\right)$. Nach den obigen vorbereitenden Schritten wissen wir, dass $0 < \delta$.

Sei $|y - x| < \delta$. Wir müssen zeigen, dass $|y^2 - x^2| < \epsilon$.

$$
\begin{aligned}
|y^2 - x^2| &= |(y+x)(y-x)| && \text{(Ringregel)} \\
&= |y+x| \cdot |y-x| && \text{(Absorptionsregel)} \\
&\leq (|x| + |y|) \cdot |y-x| && \text{(Anwendung von Schritt 6)} \\
&\leq (|x| + (|x| + \delta)) \cdot \delta && \text{(Anwendung von Schritt 5 und 8)} \\
&= (2|x| + \delta) \cdot \delta \\
&\leq (2|x| + 1) \cdot \delta && \text{(Anwendung von Schritt 10)} \\
&\leq (2|x| + 1) \cdot \frac{\epsilon}{2|x|+1} && \text{(Anwendung von Schritt 4)} \\
&= \epsilon && \text{(Feldregel)}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt, dass $|y^2 - x^2| < \epsilon$.

$\blacksquare$

2.4 The hyperbola is continuous

Proof. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Wir müssen ein $\delta > 0$ finden, so dass für alle y mit $0 < |y - x| < \delta$ gilt, dass $\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| < \epsilon$.

Setze $\delta = \min\left(\frac{\epsilon|x|^2}{2}, \frac{|x|}{2}\right)$.

- Da $\epsilon > 0$ und $|x| > 0$, ist $\delta > 0$.

Sei nun y mit $y \neq 0$ und $|y - x| < \delta$ gegeben.

- Zuerst zeigen wir, dass $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y-x}{xy}\right|$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| &= \left|\frac{y - x}{xy}\right| \\ &= \frac{|y - x|}{|x||y|}\end{aligned}$$

- Da $|y - x| < \delta \leq \frac{|x|}{2}$, folgt $|y| > \frac{|x|}{2}$:

$$\begin{aligned}|y| &= |x + (y - x)| \\ &\geq |x| - |y - x| \\ &> |x| - \frac{|x|}{2} \\ &= \frac{|x|}{2}\end{aligned}$$

- Da $\delta \leq \frac{\epsilon|x|^2}{2}$, folgt:

$$\begin{aligned}\frac{|x - y|}{|x||y|} &< \frac{\delta}{|x| \cdot \frac{|x|}{2}} \\ &= \frac{\delta}{\frac{|x|^2}{2}} \\ &\leq \frac{\frac{\epsilon|x|^2}{2}}{\frac{|x|^2}{2}} \\ &= \epsilon\end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt, dass für alle y mit $y \neq 0$ und $|y - x| < \delta$ gilt, dass $\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| < \epsilon$. Daher ist f stetig an x. □