Sei $f(x) = x^2$. Wir beweisen, dass f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.
Vorbereitende Schritte:

1. **Definition von δ:**

$$\delta = \min\left(\frac{\epsilon}{2|x|+1}, 1\right)$$

Diese Wahl von δ stellt sicher, dass $\delta > 0$ und $\delta \leq 1$.

2. **Positivität von δ:**

$$0 < \delta$$

Da $\epsilon > 0$ und $2|x| + 1 > 0$, folgt $0 < \frac{\epsilon}{2|x|+1}$. Somit ist $\delta > 0$.

3. **Obere Schranke von δ:**

$$\delta \leq 1$$

Dies folgt direkt aus der Definition von δ.

4. **Weitere obere Schranke von δ:**

$$\delta \leq \frac{\epsilon}{2|x|+1}$$

Auch dies folgt direkt aus der Definition von δ.

5. **Beziehung zwischen $|y|$ und $|x|$:**

$$|y| < |x| + \delta$$

Da $|y| = |x + (y - x)| \leq |x| + |y - x|$ und $|y - x| < \delta$, folgt $|y| < |x| + \delta$.

6. **Beziehung zwischen $|x + y|$ und $|x| + |y|$:**

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Dies ist eine Anwendung der Dreiecksungleichung.

7. **Nichtnegativität von $|x - y|$:**

$$0 \leq |x - y|$$

Da $|x - y|$ der Betrag einer reellen Zahl ist, ist er nicht negativ.

8. **Obere Schranke von $|x - y|$:**

$$|x - y| \leq \delta$$

Da $|y - x| < \delta$, folgt $|x - y| = |y - x| < \delta$.

9. **Beziehung zwischen $|x| + |y|$ und $|x| + (|x| + \delta)$:**

$$|x| + |y| < |x| + (|x| + \delta)$$

Da $|y| < |x| + \delta$, folgt $|x| + |y| < |x| + (|x| + \delta)$.

10. **Beziehung zwischen $2|x| + \delta$ und $2|x| + 1$:**

$$2|x| + \delta \leq 2|x| + 1$$

Da $\delta \leq 1$, folgt $2|x| + \delta \leq 2|x| + 1$.

Beweis:

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir wählen δ als $\delta = \min\left(\frac{\epsilon}{2|x|+1}, 1\right)$. Nach den obigen vorbereitenden Schritten wissen wir, dass $0 < \delta$.

Sei $|y - x| < \delta$. Wir müssen zeigen, dass $|y^2 - x^2| < \epsilon$.

$$
\begin{aligned}
|y^2 - x^2| &= |(y + x)(y - x)| && \text{(Ringregel)} \\
&= |y + x| \cdot |y - x| && \text{(Absorptionsregel)} \\
&\leq (|x| + |y|) \cdot |y - x| && \text{(Anwendung von Schritt 6)} \\
&\leq (|x| + (|x| + \delta)) \cdot \delta && \text{(Anwendung von Schritt 5 und 8)} \\
&= (2|x| + \delta) \cdot \delta && \\
&\leq (2|x| + 1) \cdot \delta && \text{(Anwendung von Schritt 10)} \\
&\leq (2|x| + 1) \cdot \frac{\epsilon}{2|x| + 1} && \text{(Anwendung von Schritt 4)} \\
&= \epsilon && \text{(Feldregel)}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt, dass $|y^2 - x^2| < \epsilon$.

■