第十章　静电场中的导体和电介质

§10-1　静电场中的金属导体

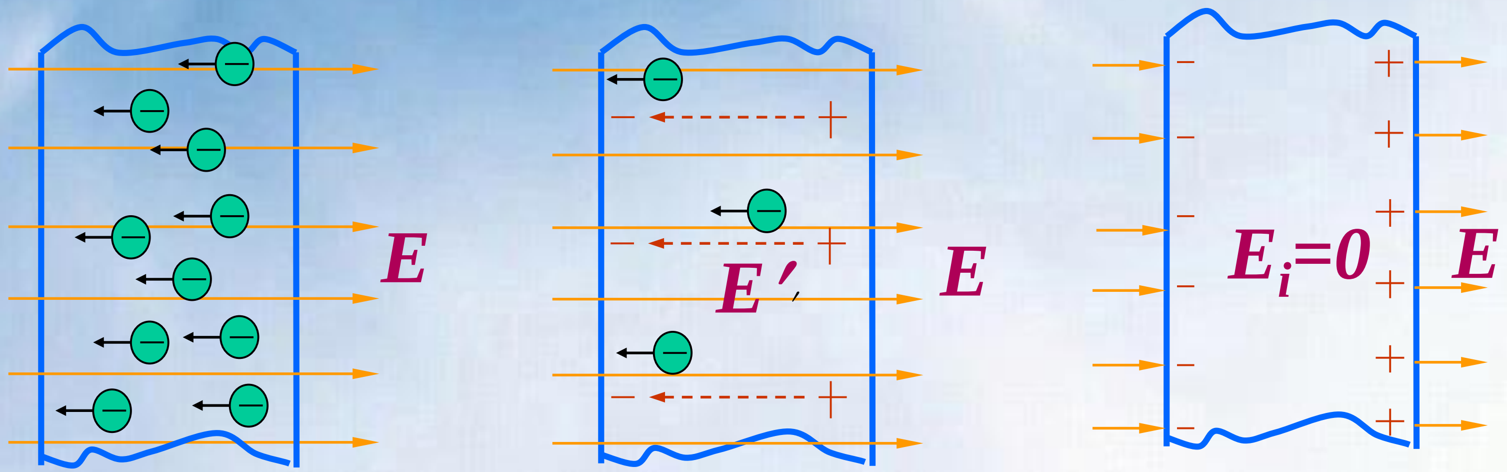
一. 导体的静电平衡

静电感应：导体置于外电场的瞬间（10^{-6}s），导体的两端出现等量异种感应电荷。

导体静电平衡状态：导体内没有任何电荷做宏观的定向运动。

静电平衡的必要条件：导体内任一点的电场强度都等于零。

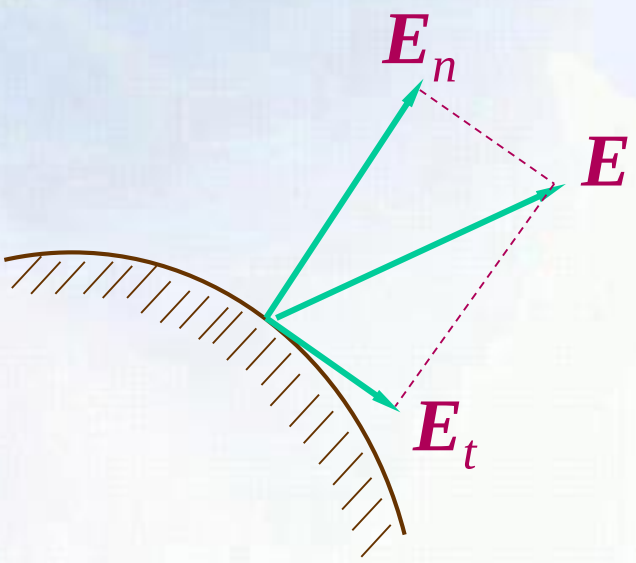
导体的静电平衡



静电平衡条件的推论：①导体内部场强处处为零。②导体是一个等势体，导体表面是一个等势面。③导体表面的场强垂直于导体表面。

1．对于导体内两点PQ，$\boldsymbol{E}$=0，电势差：

$$U_{PQ}=\int_P^Q \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$



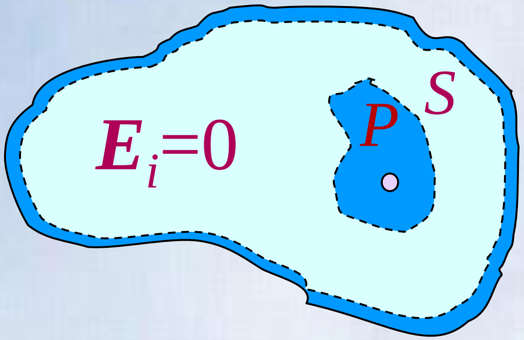
2．对于导体表面上的两点PQ，$\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{dl}$处处垂直，电势差

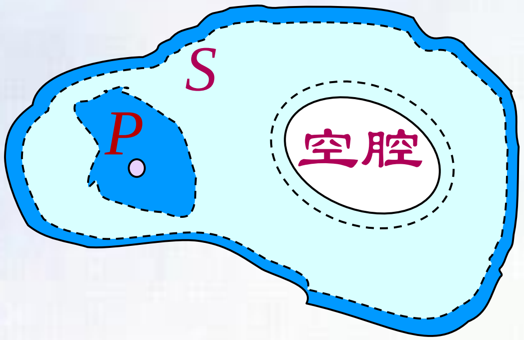
$$\int_P^Q \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$

3．导体表面电场可不为零，但必须与导体表面垂直，若不垂直，存在一$\boldsymbol{E}_t$分量，电荷必有定向移动，如上图所示。

二. 静电平衡时导体上的电荷分布

当带电导体处于静电平衡状态时，导体内部处处没有净电荷存在，电荷只能分布在导体表面上。可用高斯定理证明，见图示：



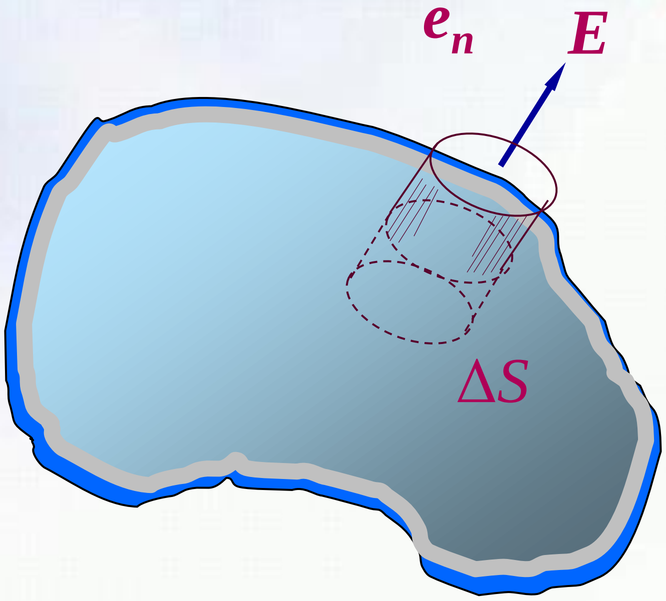


论证导体静电平衡时电荷只能分布在导体表面

用高斯定理求导体表面附近的场强与电荷面密度的关系。

如图做高斯面，由高斯定理得：

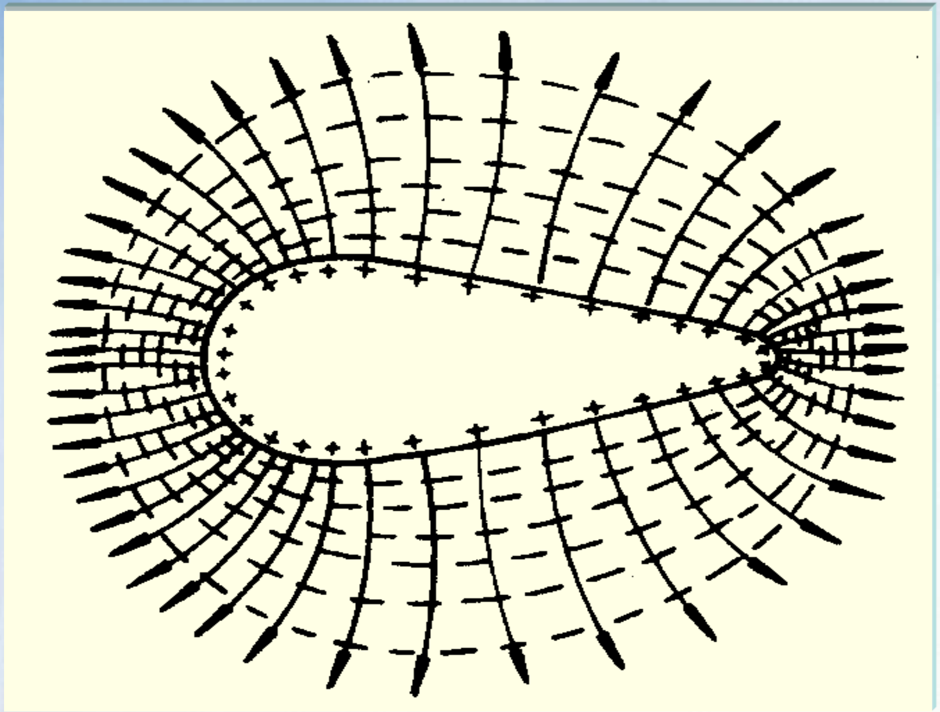
$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{s} = E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}$$



则 $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$，写成矢量式：

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_n}$$

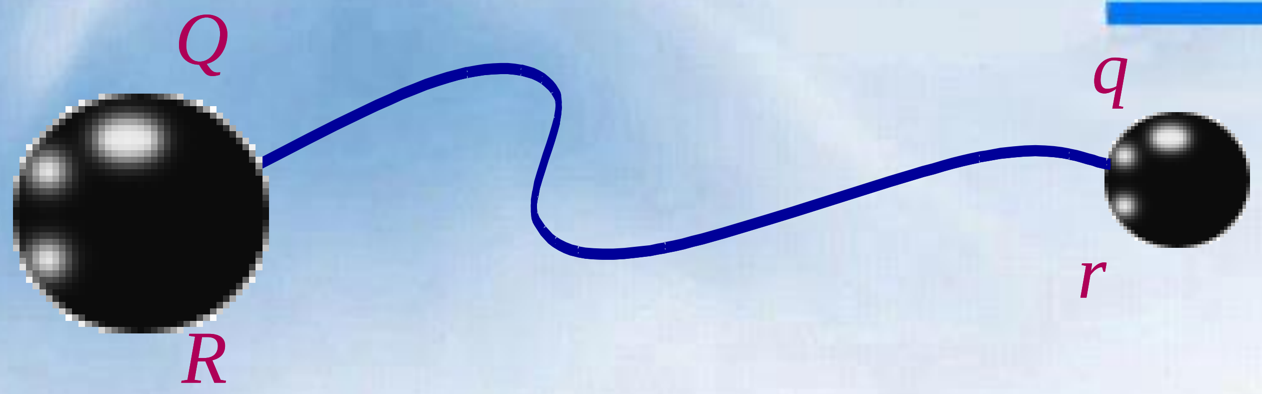
电荷面密度与导体表面曲率的关系



电荷在孤立导体表面上的分布规律：实验表明，电荷在导体表面上的分布规律与导体表面的曲率有关：曲率大，电荷面密度大；曲率小，电荷面密度小；曲率负，电荷面密度更小。

例题1：

两个半径分别为 R 和 r 的球形导体（R > r），用一根很长的细导线连接起来，使这个导体组带电，电势为U，求两球表面电荷与曲率的关系?



解： 由于两球由导线连接，两球电势相等：

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

得：

$$\frac{Q}{q}=\frac{R}{r}$$

可见，大球所带电量Q比小球q多。
两球的面电荷密度分别为：

$$\sigma_R = \frac{Q}{4\pi R^2} \qquad \sigma_r = \frac{q}{4\pi r^2}$$

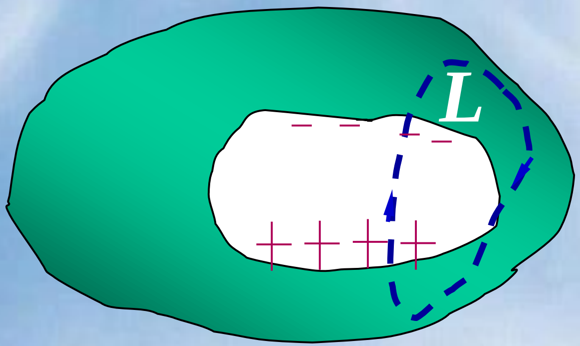
所以：
$$\frac{\sigma_R}{\sigma_r} = \frac{Qr^2}{qR^2} = \frac{r}{R}$$

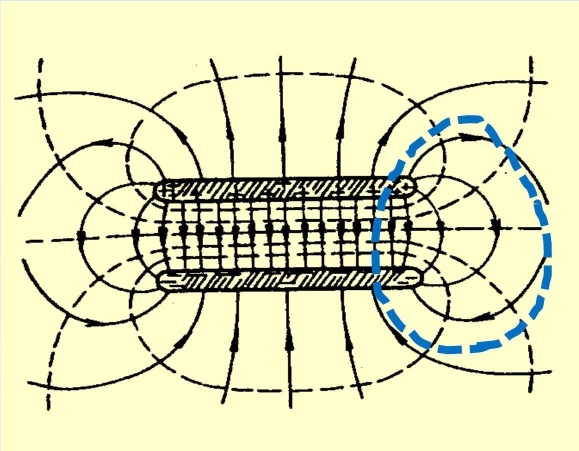
结论：两球电荷面密度与曲率半径成反比， 即与曲率成正比。

三. 空腔导体内外的静电场

在导体内做高斯面可证明，空腔内表面的电荷代数和为零，但不能证明导体空腔内表面有无等量异种电荷，要证明这点，需借助于其他定理。

假设空腔内表面带正负电荷，在空腔内取闭合路径 L 如图，做环路积分：





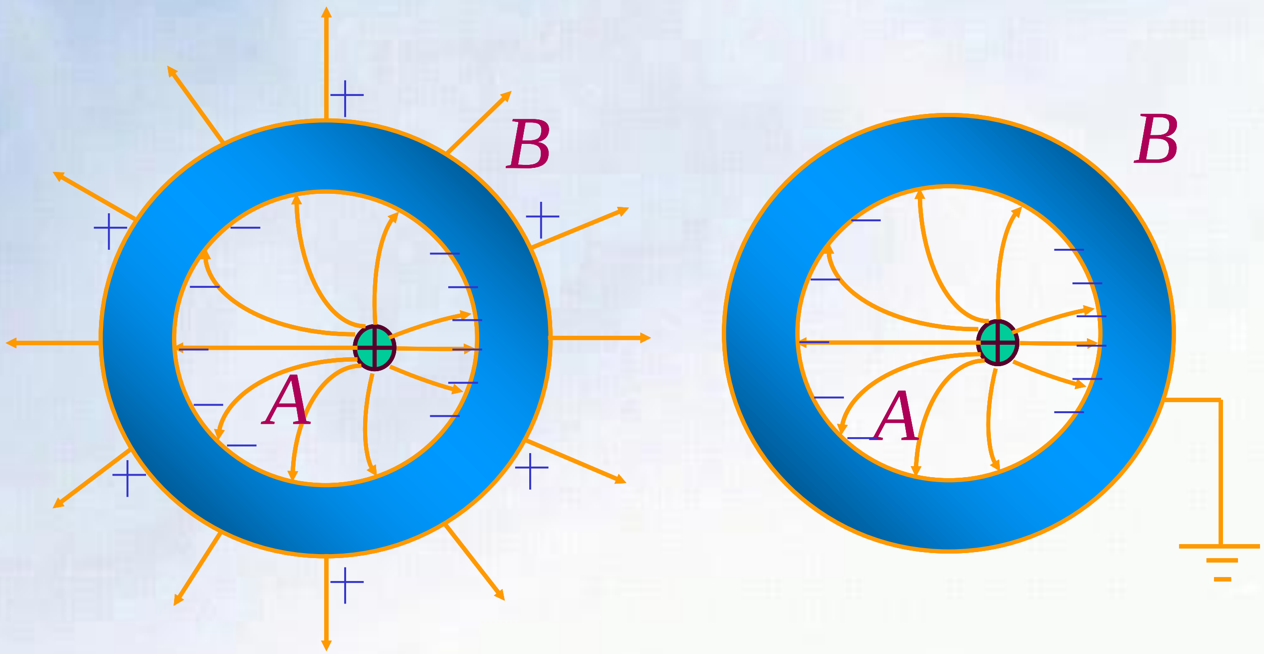
$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{\text{沿电场线}} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{\text{导体内}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

由于在沿电场线一段的线积分不为零，则：

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} \neq 0$ 此式与静电场环路定律矛盾。

结论：空腔导体在外电场中，内表面无净电荷存在，导体内部及空腔内的场强等于零。

导体空腔内有电荷时腔内外的电场分布？



腔内电荷A可激发导体内外表面电荷，但腔内电荷A的位置不能改变导体外表面的电荷分布。
导体外表面接地时，腔内电荷A不会对导体外的物体产生影响。

四．静电屏蔽

利用接地的空腔导体将腔内带电体与外界隔绝的现象。

静电屏蔽特点：（1）外电场不影响空腔导体内部。（2）内电场不影响空腔导体外部。

静电平衡时，导体内无电场，当外电场发生变化时，不会影响空腔导体内部。将金属导体外表面接地，则外表面感应电荷与大地电荷中和，腔内电荷在腔内壁上感应出等量异号电荷，电场仅在腔内，不影响空腔导体外部。

静电屏蔽的应用：（1）高压带电作业，金属丝网制成的均压服；（2）电气设备金属罩接地；（3）人体电信号的提取，信号数量级在 mV、μV，装置、导线用金属丝网屏蔽。

第 二 周

第14章 静电场中的导体和电介质

§14.2， §14.3， §14.4，

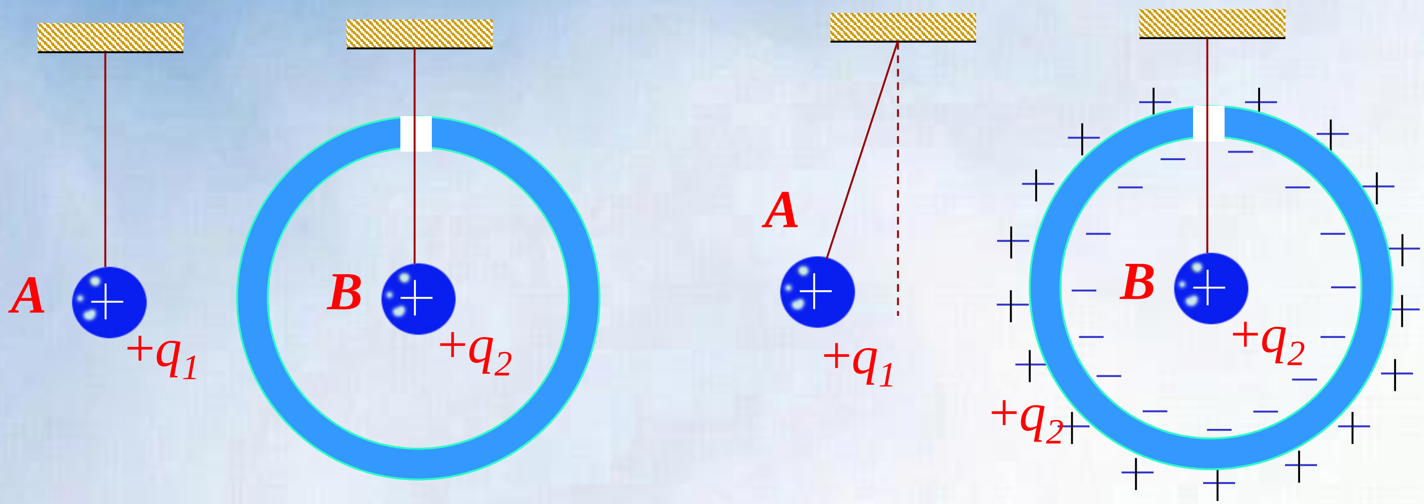
§14.5， §14.6

作业： P258 14-5，14-7，14-13，

14-18，14-20

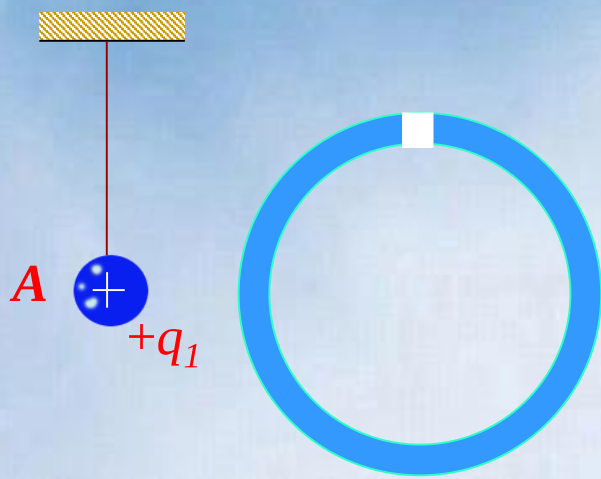
讨论题：静电场中的导体（$+q_1 << +q_2$）

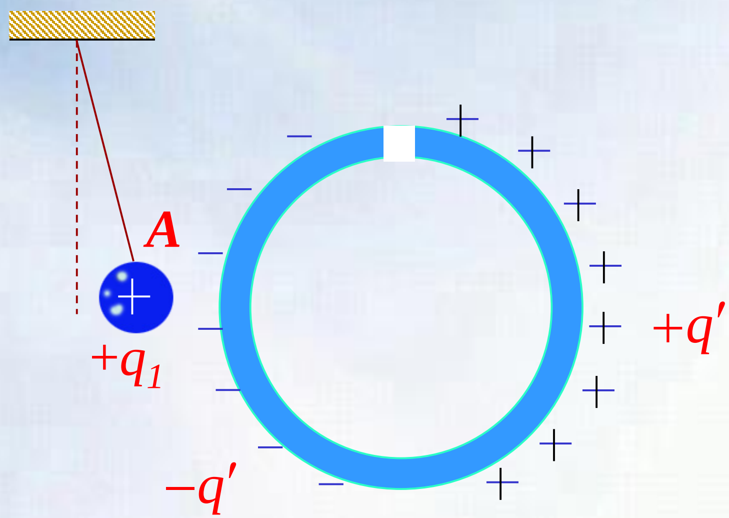
(1) 不带电金属球壳内有带电量为$+q_2$的小球B，外面有带电量为$+q_1$的小球A，则A球受力情况如何？



(1) 解答： B球在球壳内表面感应电荷$-q_2$，则外表面出现感应电荷$+q_2$，B球所带电量$+q_2$与球壳内表面所带电量$-q_2$对外产生电场完全抵消，故A球受到球壳外表面电荷$+q_2$给它的斥力。

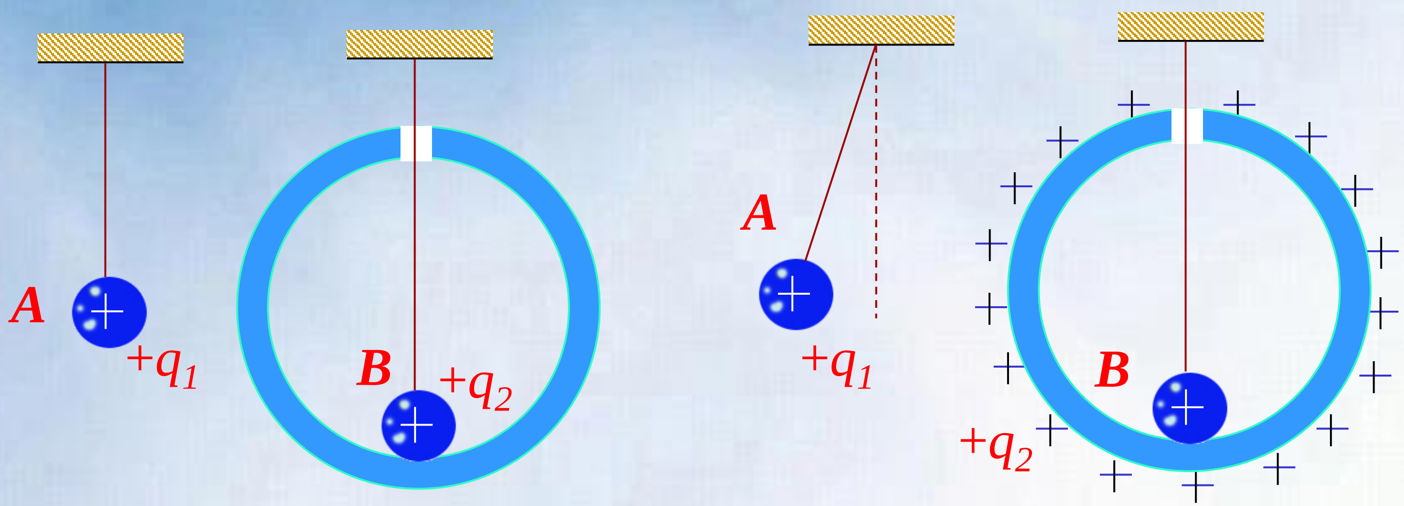
(2) 同上，移去B球，则A球受力情况如何？





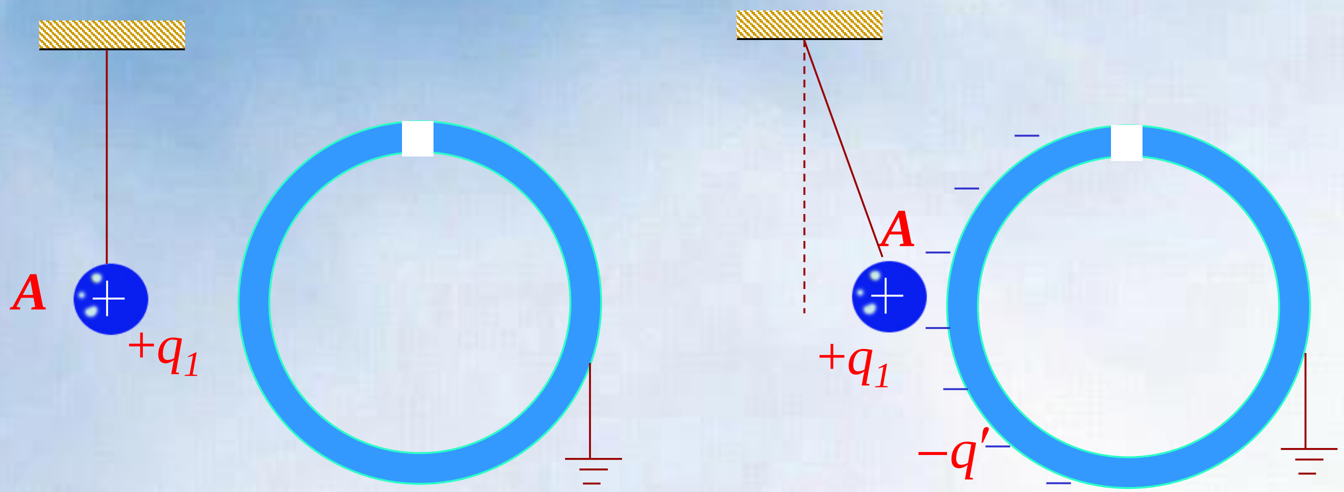
(2) 解答： 在球壳外表面将出现带电量分别为$+q'$和$-q'$的感应电荷。总电荷虽为零，但负电荷靠近A球，而正电荷远离A球，故A球总体上受吸引力。

(3) B球与球壳内表面接触，则A球受力情况如何？



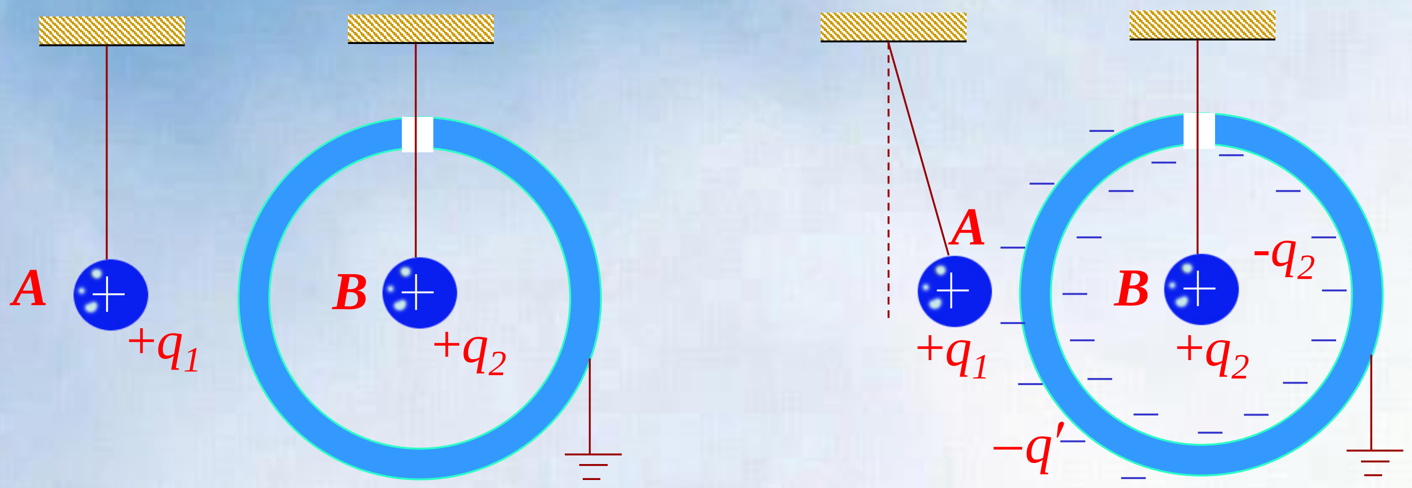
（3）解答： B球与球壳内表面接触，则构成一体，B球所带的电荷$+q_2$全部转移到了球壳外表面。

(4)不带电金属球壳接地，则A球受力情况如何？



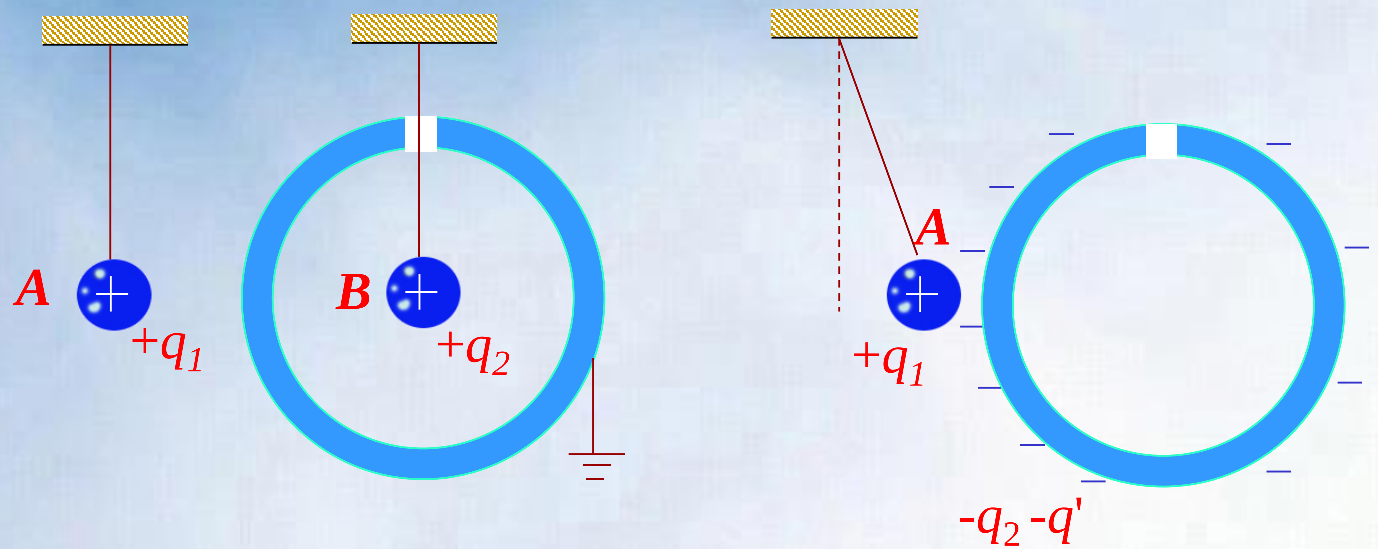
（4）解答： 接地球壳电势为零，球壳表面的正感应电荷与大地所带的负电荷中和，只剩负感生电荷 $-q'$。

(5) 同(4)，但引入B球，则A球受力如何？



（5）解答： 内表面出现感应电荷$-q_2$ ，由于接地，外表面感应电荷仍为 $-q'$。

(6) 在(5)的情况下，先拆地线，再移去B球，则A球受力如何？



（6）解答：拆地线后，球壳所带总电量$-q_2-q'$，B球移去后，这些电荷全部跑到外表面，故A球受吸引力。

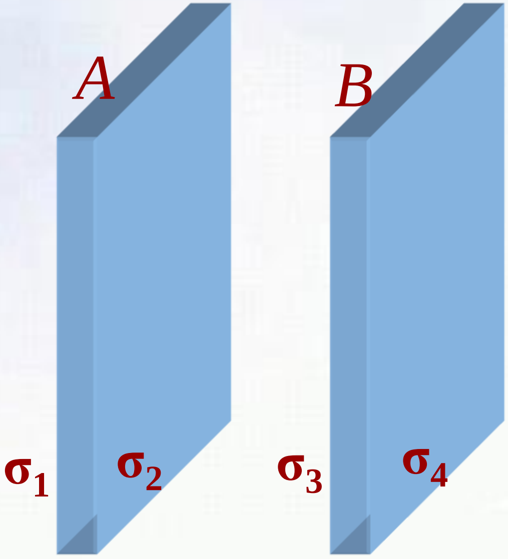
例题2：

一块面积为S的金属大薄平板A，带电量为Q，在其附近平行放置另一块不带电的金属大薄平板B，两板间距远小于板的线度。试求两板表面的电荷面密度，以及周围空间的场强分布。

解：由电荷守恒定律，
根据题意：

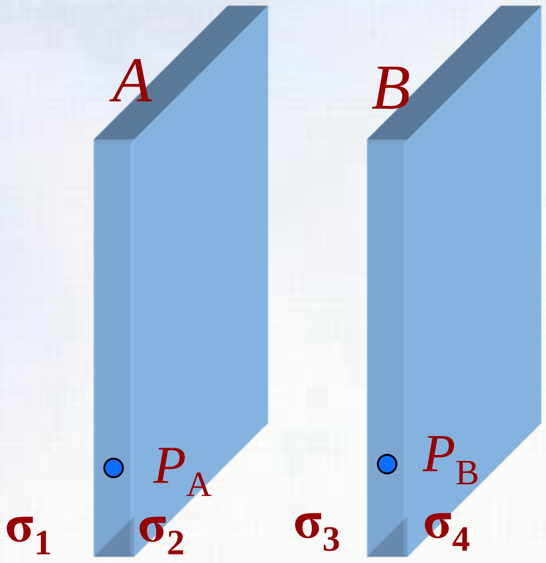
$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{Q}{S} \qquad ①$$

$$\sigma_3 + \sigma_4 = 0 \qquad ②$$



空间任一点的场强是由4个带电平面产生的场强相互叠加。在静电平衡条件下，金属板内场强处处为0，取向右方向为正。

由无限大带电平面的结果可知， σ_1在P_A点引起的场强为$\sigma_1/2\varepsilon_0$，方向向右，其他表面电荷σ_2、σ_3、σ_4，在P_A点引起的场强以此类推，则



$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0 \quad ③$$

对P_B点有：

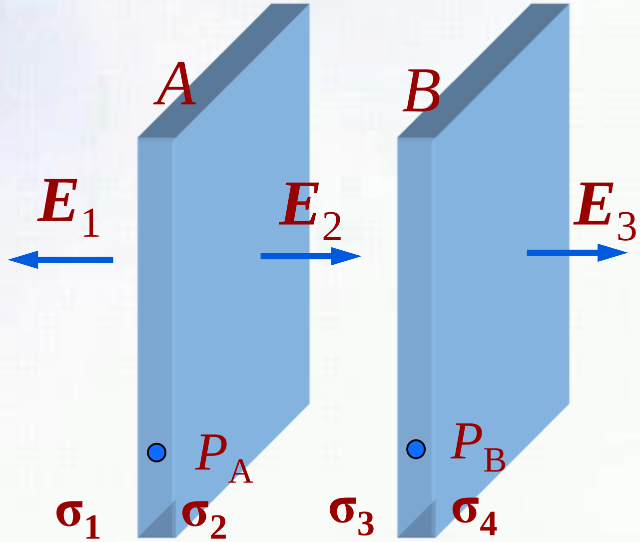
$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0 \qquad ④$$

解上述4个方程，可得：

$$\sigma_1=\frac{Q}{2S} \qquad \sigma_2=\frac{Q}{2S} \qquad \sigma_3=-\frac{Q}{2S} \qquad \sigma_4=\frac{Q}{2S}$$

因此，空间各点场强分别为：

$$E_1=E_2=E_3=2\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{2S}$$

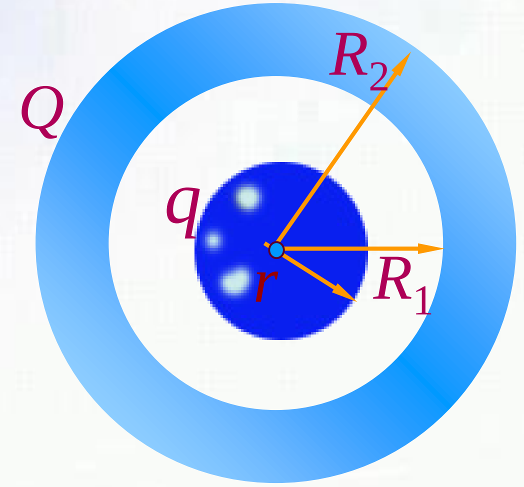


方向如图所示。

例题3：

在内外半径分别为R_1和R_2的导体球壳内，有一个半径为r的导体小球，小球与球壳同心，让小球与球壳分别带上电荷量q和Q。试求：
(一) 小球的电势U_r，球壳内、外表面的电势；(二) 两球的电势差；(三) 若球壳接地，再次求小球与球壳的电势差。

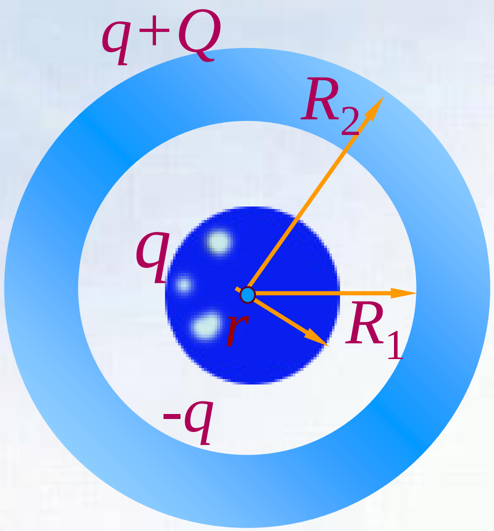
解：小球在球壳内外表面感应出电荷$-q$、q。球壳外总电荷为$q+Q$，则由电势叠加原理：



（1） $$U_r=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r}-\frac{q}{R_1}+\frac{q+Q}{R_2}\right)$$

$$U_{R_1}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R_1}-\frac{q}{R_1}+\frac{q+Q}{R_2}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q+Q}{R_2}$$



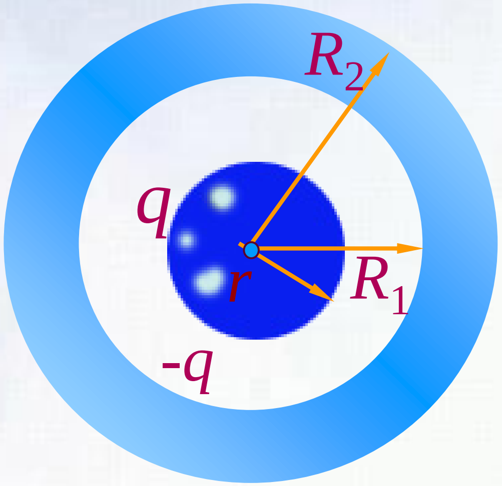
$$U_{R_2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R_2}-\frac{q}{R_2}+\frac{q+Q}{R_2}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q+Q}{R_2}$$

球壳内外表面的电势相等。

（2）两球的电势差

$$U_r - U_{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} - \frac{q}{R_1}\right)$$

（3）外壳接地时的各量



$$U_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} - \frac{q}{R_1}\right)$$

$$U_{R_2} = U_{R_1} = 0$$

$$U_r - U_{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} - \frac{q}{R_1}\right)$$

§10-2 电容 电容器

一. 孤立导体的电容

一个孤立导体的电势U与所带电荷量q呈线性关系，其比值称为孤立导体的电容。

孤立球形导体的电容：

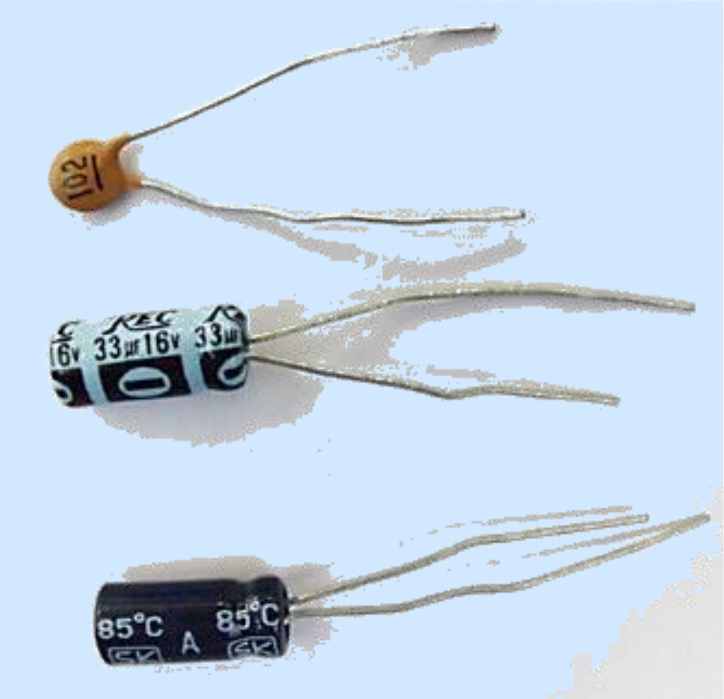
$$C=\frac{q}{U}=4\pi\varepsilon_0 R,\quad U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$$

单位：法[拉] $1\mathrm{F}=10^{6}\mu\mathrm{F}=10^{12}\mathrm{pF}$

二. 电容器的电容

电容器：是两个导体组成的系统，用来储存电荷和电能。符号：⊣⊢ **电容器电容定义：**

$$C=\frac{Q}{U_A-U_B}$$

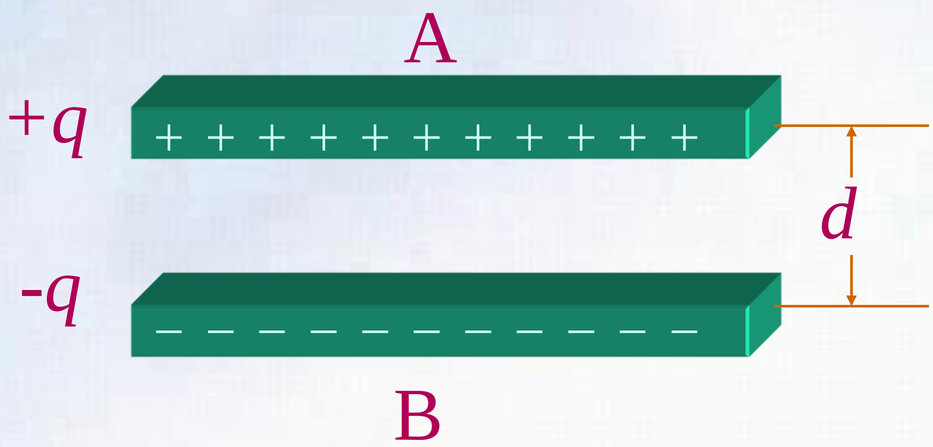


Q为任一导体所带电量值，U_A-U_B为两导体间的电势差。

三、电容器电容的计算

1. 平行板电容器

两极板面积S，间距d，分别带电荷$+q$和$-q$，忽略边缘效应，



$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

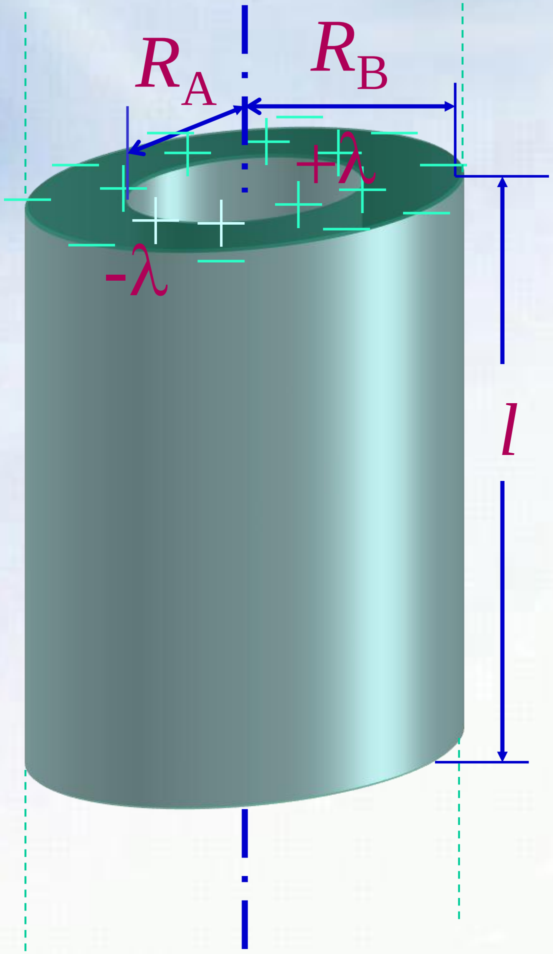
$$U_A-U_B=Ed=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d=\frac{qd}{\varepsilon_0 S}$$

$$C=\frac{q}{U_A-U_B}=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

电容大小仅由材料几何结构决定。

2. 圆柱形电容器

两同轴金属圆柱面，内、外柱面半径R_A、R_B，内外柱面线电荷密度为$+\lambda$、$-\lambda$。长$l >> (R_B-R_A)$，忽略边缘效应，即“无限长”，由高斯定理得：



$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

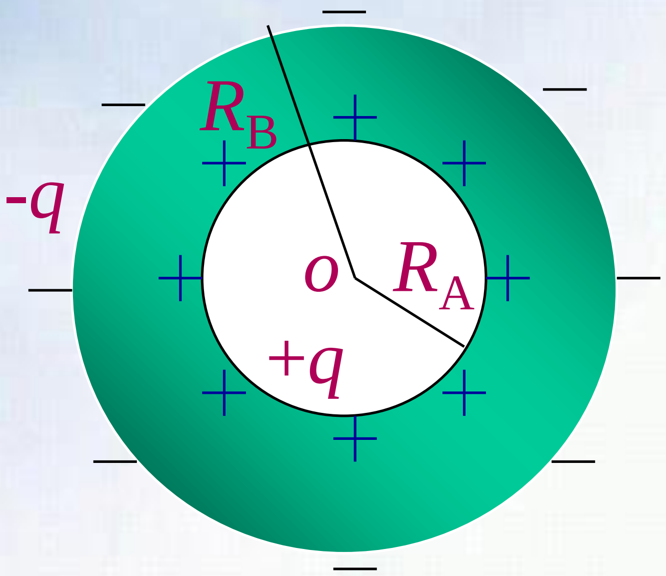
$$U_A-U_B=\int_{R_A}^{R_B}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{R_A}^{R_B}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_B}{R_A}$$

$$C=\frac{Q}{U_A-U_B}=\frac{\lambda l}{U_A-U_B}=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(R_B/R_A)}$$

3. 球形电容器

两同心金属球壳半径分别为R_A、R_B，电荷分别为$+q$、 $-q$



$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

$$U_A - U_B = \int_{R_A}^{R_B} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{R_A}^{R_B} E dr = \int_{R_A}^{R_B} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)$$

$$C = \frac{q}{U_A - U_B} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_B R_A}{(R_B - R_A)}$$

当$R_B >> R_A$时，即外壳趋向无限远，$R_B \to \infty$，

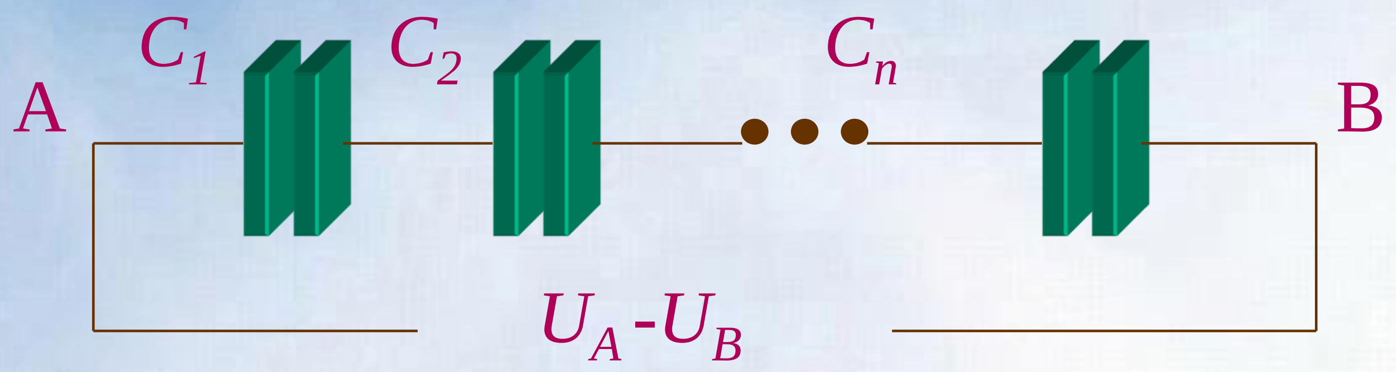
$C \to 4\pi\varepsilon_0 R_A$，为内壳孤立导体球电容。

四、电容器的串联和并联

电容器的性能指标： 电容量、耐压。

等值电容： 多个电容器连接后，它们所带电量与两端电势差之比，称为它们的等值电容。

串联：有C_1、C_2、…C_n，相应电势差为U_1、U_2…U_n，每极板电量Q，总电势差$U_A-U_B= U_1+U_2…+U_n$

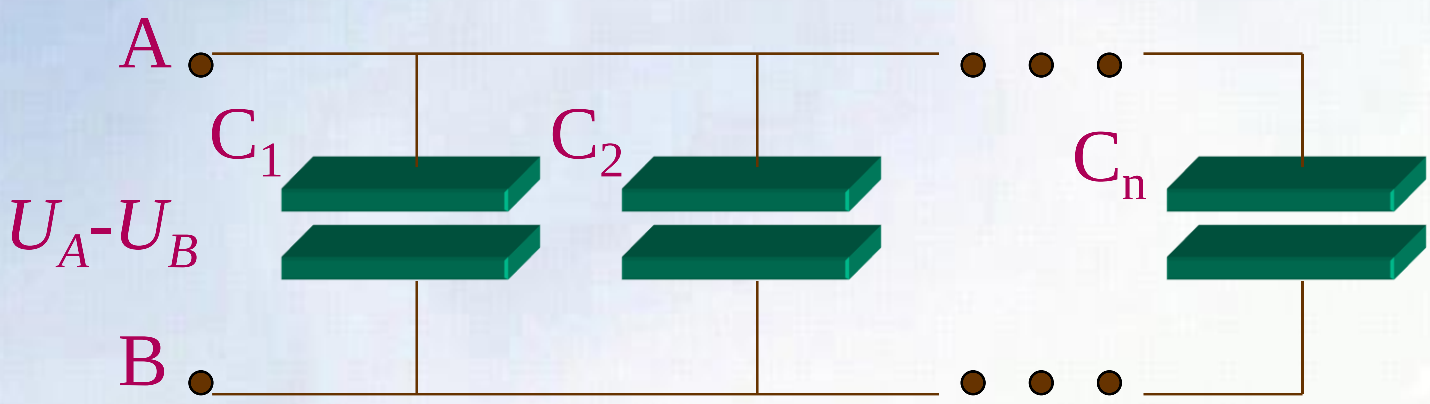


$$\frac{1}{C}=\frac{U_A-U_B}{Q}=\frac{U_1+U_2+\cdots+U_n}{Q}$$

$$=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}$$

串联：电容减小，耐压增加。

并联： 有 C_1、C_2、…C_n，相应电量为 q_1、q_2…q_n，总电量为 $Q = q_1+q_2+\ldots+q_n$，电势差为 U_A-U_B



$$C=\frac{Q}{U_A-U_B}=\frac{q_1+q_2+\cdots+q_n}{U_A-U_B}$$
$$=C_1+C_2+\cdots+Cn$$

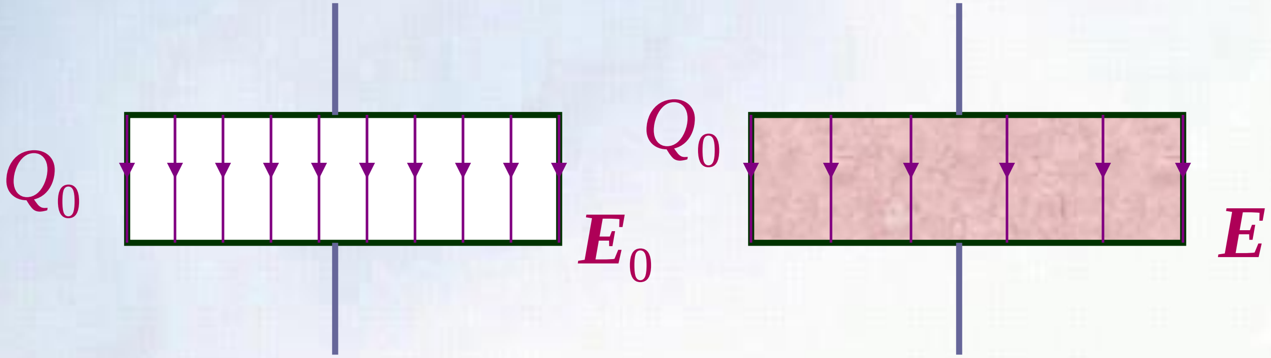
并联增加总电容，耐压值等于其中最低的耐压值。

§10-3　静电场中的电介质

电介质： 电的非导体，绝缘介质。在外电场中对电场有影响，静电平衡时，内部场强不为零。

一、电介质对电场的影响

对平行板电容器做实验：



电介质对电场的影响

充电后 $Q_0 = U_0 C_0$； 断电后， 插入电介质，实验发现电势差变为$U<U_0$，$U \propto U_0$。其比例常数写成 ε_r，称为电介质的相对介电常数（或相对电容率），定义真空中 $\varepsilon_r = 1$。

断电后电荷Q_0不变，电容为原来的 ε_r 倍：

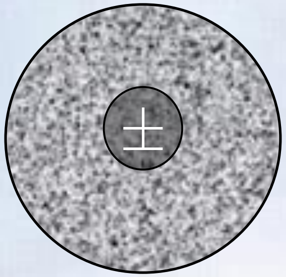
$$U = \frac{U_0}{\varepsilon_r} \quad , \quad C = \frac{Q_0}{U} = \frac{\varepsilon_r Q_0}{U_0} = \varepsilon_r C_0$$

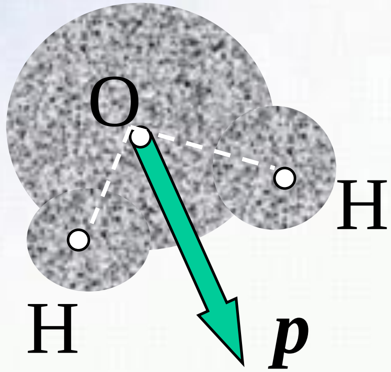
场强减小：

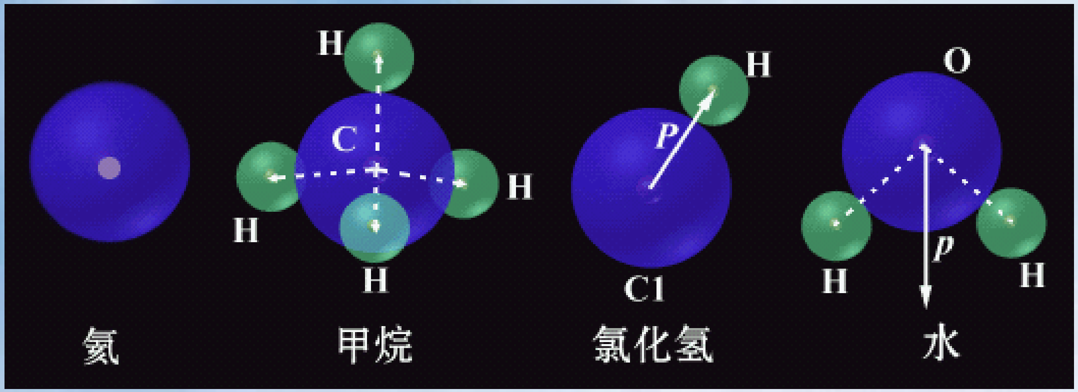
$$E = \frac{U}{d} = \frac{U_0}{\varepsilon_r d} = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

二、电介质的极化

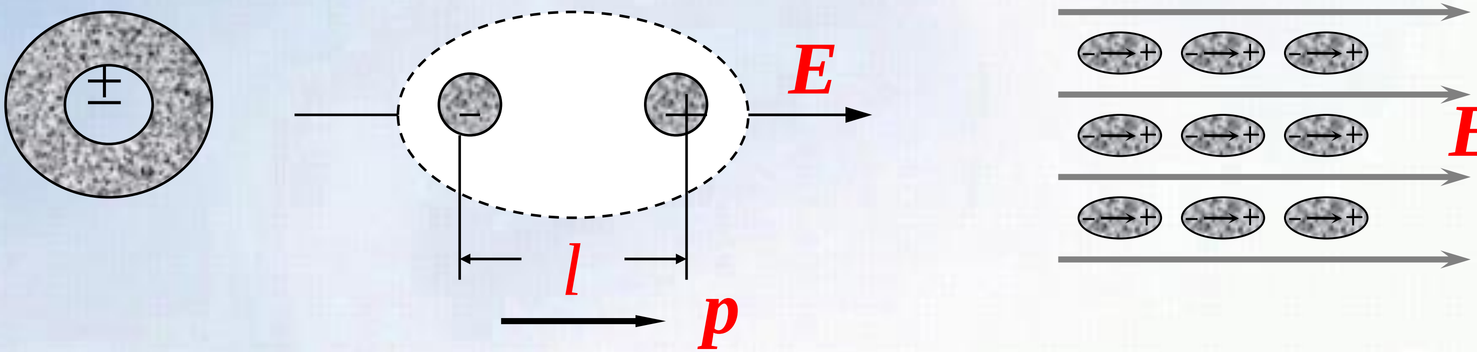
有极分子和无极分子： 原子的**正负电中心**重合，每个原子的电偶极矩为零。几个原子构成分子时，正负电中心可重合，可不重合，前者称**无极分子**，后者称**有极分子**。对有极分子，正负电荷中心组成**等效分子电偶极矩** $\boldsymbol{p}$，对大量分子的等效电偶极矩之和 $\sum \boldsymbol{p}=0$。对无极分子 $\boldsymbol{p}=0$。



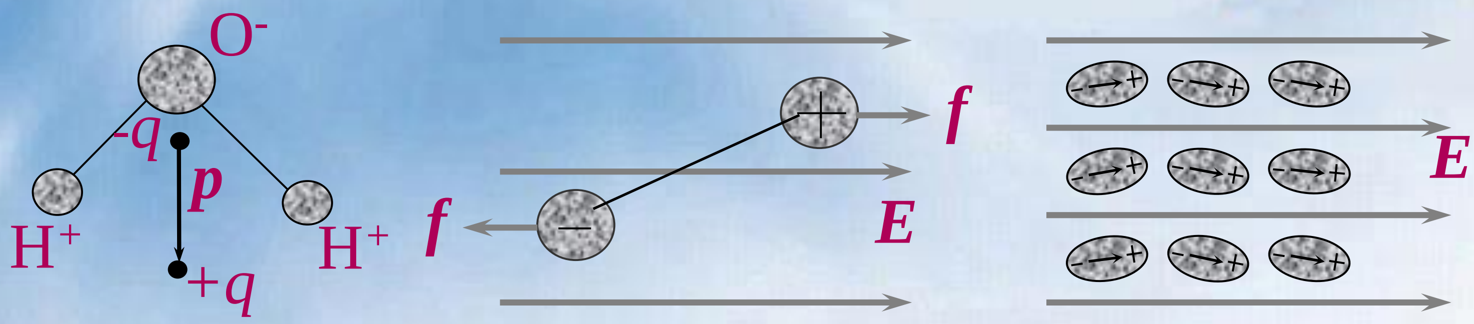




无极分子与有极分子的极化:



无极分子的极化



有极分子的极化

电介质的极化：电介质在外场中，在与外场$\boldsymbol{E}_0$的垂直的表面层里出现正负电荷层，这些电荷不能自由移动，称为**束缚电荷**或**极化电荷**。这种现象称为**电介质的极化**。无极分子的极化称为**位移极化**，有极分子的极化称为**取向极化**。

三、电极化强度矢量 极化电荷面密度

单位体积内分子电偶极矩的矢量和

$$\vec{P}=\frac{\sum \vec{p}}{\Delta V}$$

称为**电极化强度矢量。**

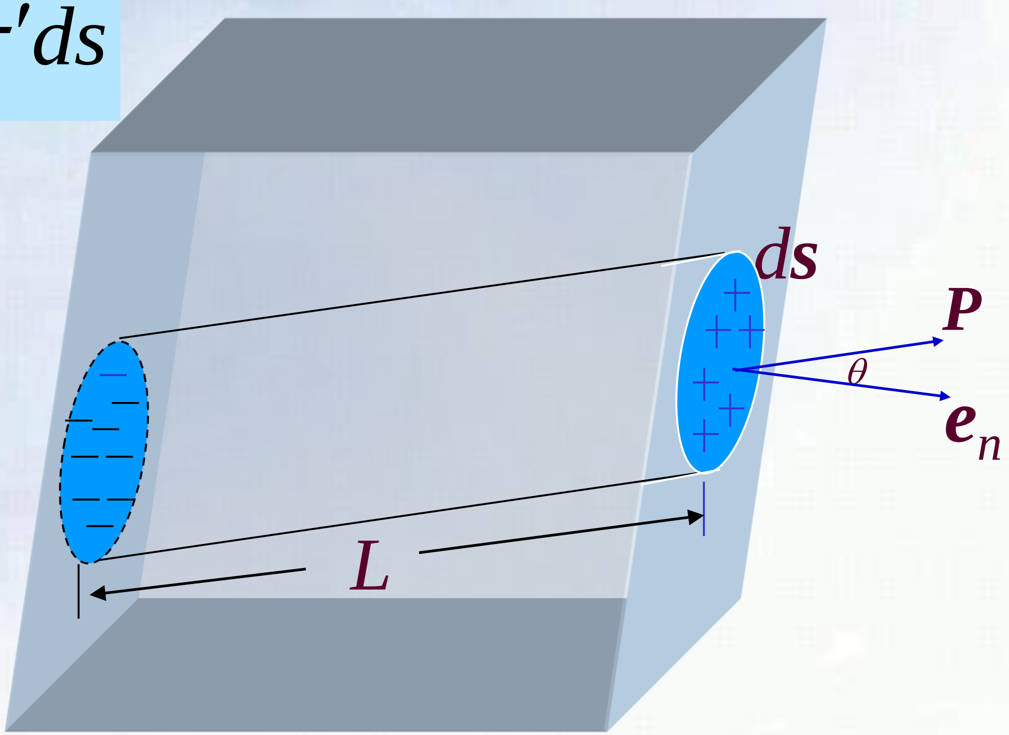
实验表明，对大多数各向同性电介质：

$$\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}$$

式中χ_e 称为介质的电极化率。

电极化强度矢量与极化电荷面密度之间的关系：斜柱体内分子的电偶极矩之和为

$$\left|\sum \vec{p}\right| = L \bullet dq = L\sigma' ds$$



斜柱体的体积为：

$$dV = dsL\cos\theta$$

电极化强度矢量 **P** 的大小为：

$$\left|\vec{P}\right| = \frac{\left|\sum \vec{p}\right|}{dV} = \frac{\sigma'}{\cos\theta}$$

所以

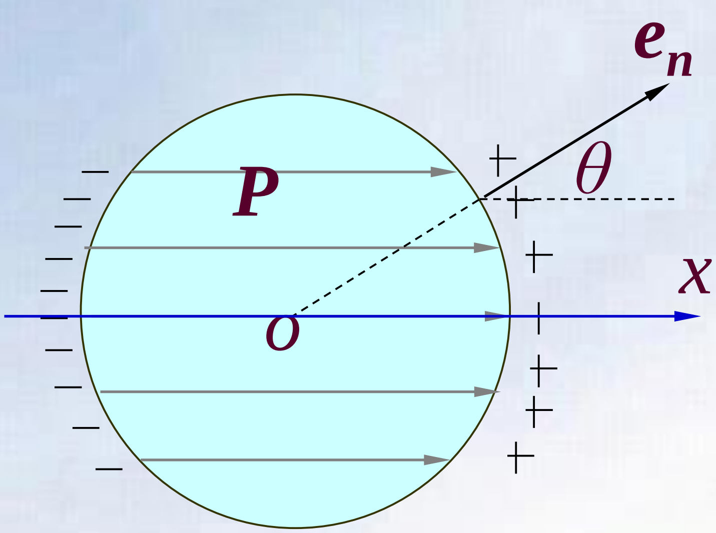
$$\sigma' = \left|\vec{P}\right|\cos\theta = P_n = \vec{P}\cdot\vec{e}_n$$

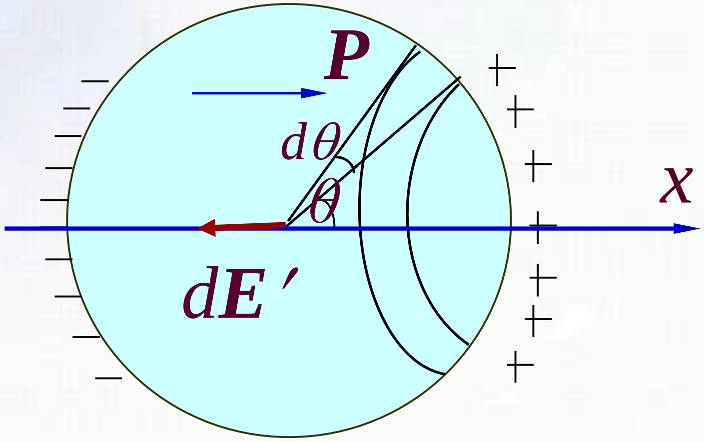
电介质极化时的极化电荷面密度等于极化强度沿外法线方向的分量值。

上面讨论仅对均匀介质而言，对不均匀介质还可能出现极化电荷体密度。

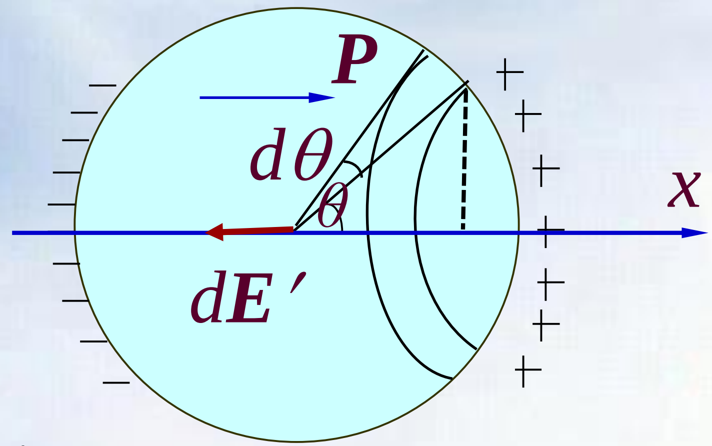
例题4：

一个半径为R的电介质球被均匀极化后，已知电极化强度为$\boldsymbol{P}$，求：(1)电介质球表面上极化面电荷的分布；(2)极化面电荷在电介质球心处所激发的场强？





解：（1）由于 $\sigma' = P\cos\theta$



在右半球，$|\theta| < \dfrac{\pi}{2}$，$\sigma'$ 为正

在左半球，$|\theta| > \dfrac{\pi}{2}$，$\sigma'$ 为负

在两球分界面上，$|\theta| = \dfrac{\pi}{2}$，$\sigma' = 0$

在轴线两端 $\theta = 0$ 或 π，σ' 绝对值最大

（2）在球面上θ→ θ+dθ 之间的环带上的

极化电荷为：

$$dq' = \sigma' \cdot 2\pi R \sin\theta \cdot R d\theta = P 2\pi R^2 \sin\theta \cos\theta d\theta$$

此电荷在球心处所激发的场强：

$$dE' = \frac{dq'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta = \frac{P}{2\varepsilon_0}\sin\theta\cos^2\theta d\theta$$

方向沿X轴的负方向。整个球面上的极化电荷在球心处所激发的总场强为：

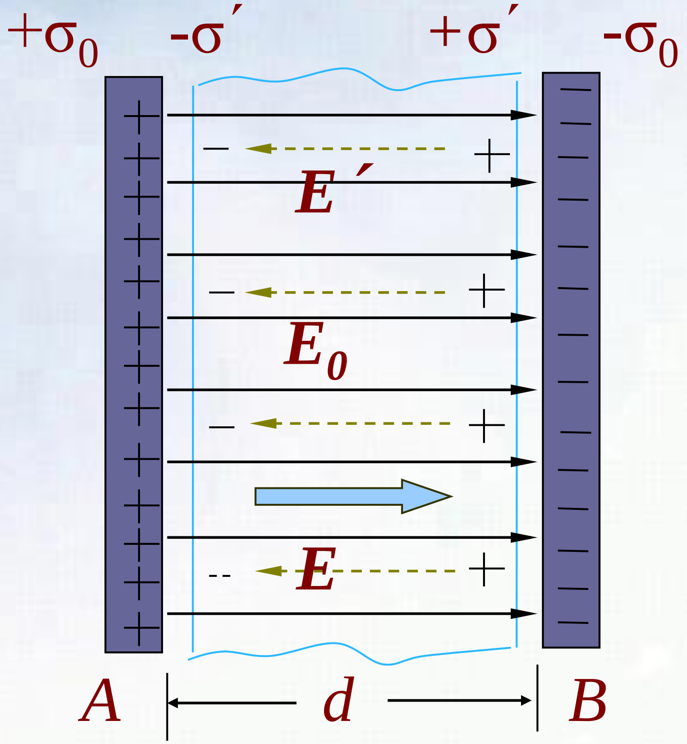
$$E' = \int dE' = \int_0^{\pi} \frac{P}{2\varepsilon_0}\sin\theta\cos^2\theta d\theta = \frac{P}{3\varepsilon_0}$$

§10-4 电介质中的静电场的基本定理

一、电介质中的场强

$\boldsymbol{E}_0$ 表示自由电荷激发的电场，$\boldsymbol{E}'$ 表示极化电荷激发的电场，介质中的合场强：

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}'$$



对充满极化率为χ_e 的电介质的无限大平行板电容器，设自由电荷密度为$\pm\sigma_0$，介质表面的束缚电荷密度 $\pm\sigma'$

自由电荷的场强： $|E_0| = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$

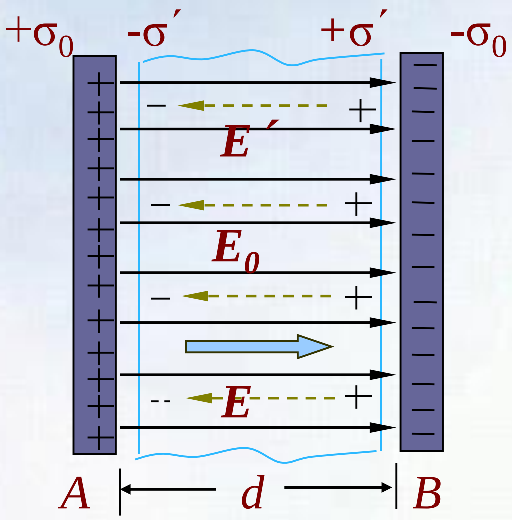
束缚电荷的场强： $|E'| = \dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}$

合电场的场强为：

$$E = E_0 - E' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

介质中的电极化强度 $P=\chi_e\varepsilon_0 E$ ，又 $\sigma'=P$ 代入上式:

$$E = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0} = E_0 - \chi_e E$$



$$\boxed{E = \frac{E_0}{1+\chi_e}}$$

电介质内部的场强 E 是场强 E_0 的 $\dfrac{1}{1+\chi_e}$ 倍

平行板电容器两极板间的电势差:

$$U = Ed = \frac{E_0 d}{1+\chi_e} = \frac{\sigma_0 d}{\varepsilon_0(1+\chi_e)}$$

设极板的面积为S，总电荷量$q=\sigma_0 S$，按电容器的定义：

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S(1+\chi_e)}{d} = (1+\chi_e)C_0$$

插入电介质，电容为原来的 ε_r 倍，由上式可知：

$$\boxed{\varepsilon_r \equiv 1+\chi_e} \qquad \boxed{\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0 = (1+\chi_e)\varepsilon_0}$$

ε称为介电常数或电容率。

ε，ε_r，χ_e 三者得一可求出其他两个。

从 $E=\dfrac{E_0}{1+\chi_e}$ 式可知：$E=\dfrac{E_0}{\varepsilon_r}=\dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0}=\dfrac{\sigma_0}{\varepsilon}$

将此关系代入 $E=E_0-E'=\dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}-\dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}$

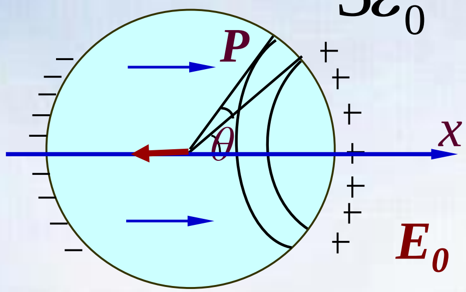
$$\sigma'=\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\sigma_0=\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\sigma_0$$

从 $\sigma'=P=\varepsilon_0\chi_e E$，也可求得σ'

例5：介质球被极化后球心的合场强？

极化电荷在球心所激发的场强：$\vec{E}' = -\dfrac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$

合场强：$E = E_0 - \dfrac{P}{3\varepsilon_0}$



因 $P = \chi_e \varepsilon_0 E$ 代入上式：

$$E = E_0 - \frac{\chi_e}{3} E \quad \text{即：} \quad E = \frac{3}{\varepsilon_r + 2} E_0$$

由于 $\varepsilon_r + 2 > 3$，故电介质内的场强是减弱的。

在介质球外部，靠近上下区域，合场强减弱，靠近左右区域，合场强增强。

二、有电介质时的高斯定理　电位移矢量*D*

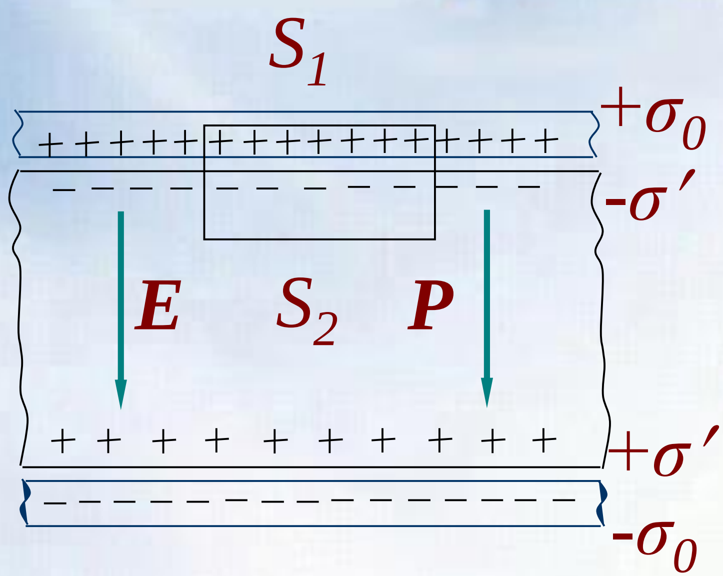
极化电荷与自由电荷一样，它所激发的还是静电场。环路定理仍然成立：

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

高斯定理也仍然成立：

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum q_0 + \sum q'\right)$$

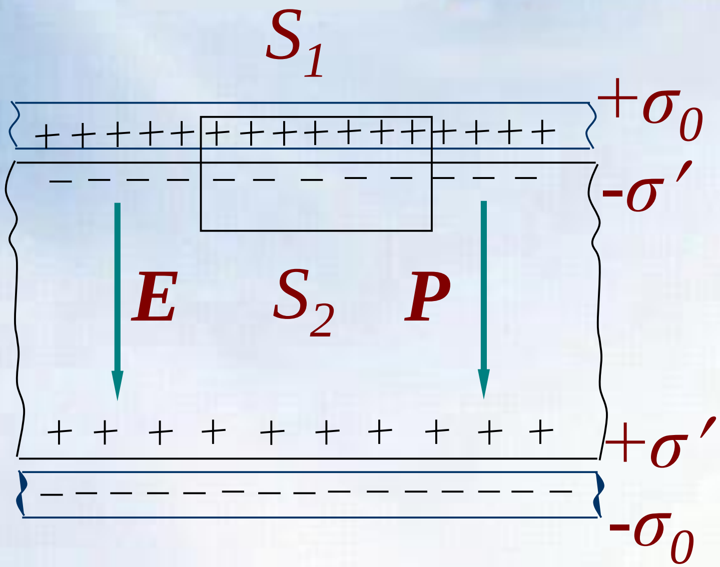
上式中极化电荷的分布比较复杂，它与***E***相互关联，一般无法预知。图示为平行板电容器，在介质和金属板间做圆柱体高斯面，得：



$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_0 S_1 - \sigma' S_2)$$

$$\oint\!\!\!\oint_{S} \vec{P}\cdot d\vec{s} = \iint_{S_2} \vec{P}\cdot d\vec{s}$$

$$= PS_2 = \sigma' S_2$$



将此式代入高斯定理：

$$\oint\!\!\!\oint_{S} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma_0 S_1 - \frac{1}{\varepsilon_0}\oint\!\!\!\oint_{S} \vec{P}\cdot d\vec{s}$$

上式化简：

$$\oiint_S (\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}) \cdot d\vec{s} = \frac{q_0}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{s} = q_0$$

定义电位移矢量： $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

有电介质时的高斯定理为：

$$\boxed{\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = q_0}$$

上式虽然从平行板电容器推得，
但它是普遍适用，是静电场的基本定理之一。

引进电位移线：1. 电位移线上每一点的切线方向和该点的电位移$\boldsymbol{D}$的方向相同；2. 垂直于电位移线的单位面积上通过的电位移线数等于该点的电位移$\boldsymbol{D}$的量值。

电介质中的高斯定理：通过电介质中任一闭合曲面的电位移通量等于该面所包围的自由电荷量的代数和。

$\boldsymbol{D}$的单位是C/m^2。

对电位移矢量***D***的几点说明：

1.电位移矢量没有明显的物理意义；

2.通过闭合曲面的电位移通量只与自由电荷有关；

3.电位移矢量决定于自由电荷与极化电荷的分布；

4.电位移矢量的定义式对各向同性和各向异性的介质都适用。

D, ***E***, ***P*** 三矢量之间的关系

对各向同性的介质：$\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}$，代入电位移矢量的定义式：

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}}$$

上式在各向异性的介质中并不适用，因为**D**，**E**，**P**三量的方向可能不同。

例题6：

一半径为R的金属球，带有电荷q_0，浸埋在均匀"无限大"电介质中（介电常数为ε），求球外任一点的场强及极化电荷分布？

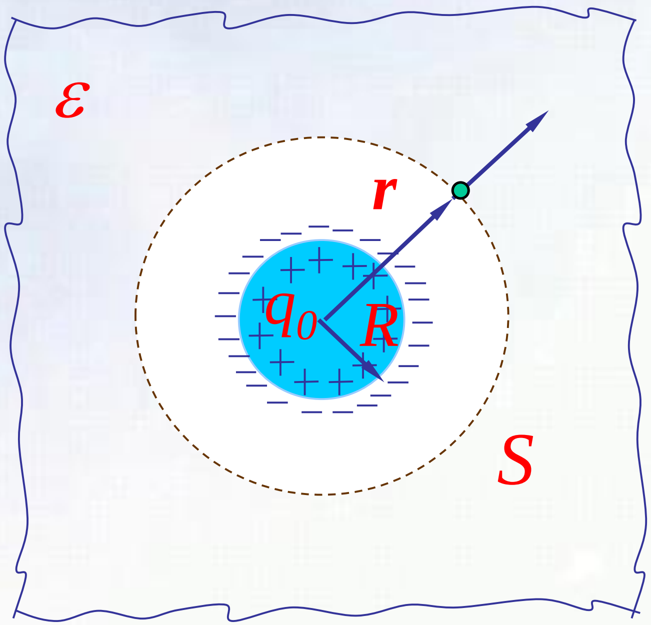
解： 由题意可知，介质中的电场具有球对称性，则由高斯定理：

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = D4\pi r^2 = q_0$$

所以 $$D = \frac{q_0}{4\pi r^2}$$

写成矢量式为：

$$\boxed{\vec{D} = \frac{q_0}{4\pi r^2}\hat{r}}$$



因 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$，则场强为：

$$\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon}=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{r}=\frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$$

电极化强度矢量 $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$

$$\vec{P}=\frac{q_0}{4\pi r^2}\hat{r}-\varepsilon_0\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{r}$$

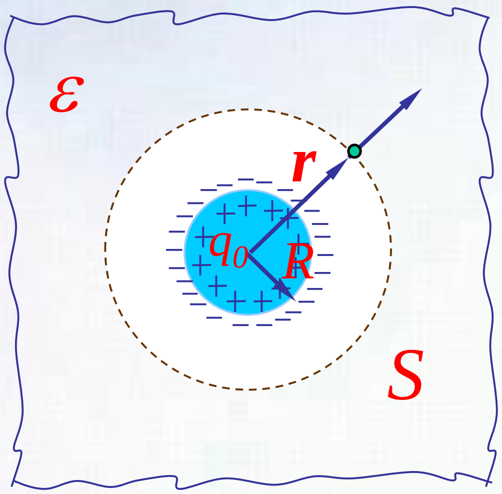
$$=\frac{q_0}{4\pi r^2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\hat{r}$$

$$\hat{r}=\frac{\vec{r}}{r}$$

紧贴金属球的介质极化面电荷密度 $\sigma' = \vec{P}\cdot\vec{e}_n$

$\vec{e}_n$ 是介质外法线方向的单位矢量, 与**r**反向：

$$\sigma' = -\frac{q_0}{4\pi R^2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$



自由电荷与极化电荷的总量为：

$$q_0 - q_0\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right) = \frac{q_0}{\varepsilon_r}$$

由于总电荷量减小到自由电荷量的$1/\varepsilon_r$，介质中的场强减小为真空时的$1/\varepsilon_r$倍。

第 三 周

第14章 静电场中的导体和电介质

§14.6， §14.7

第15章 电流和磁场

§15.1， §15.2， §15.3， §15.4，

§15.6， §15.8

作业： P260 14-22，14-23

* P285 15-1，15-4，15-9

例题7：

平行板电容器两极板面积S，充有两层电介质，介电常数分别为ε_1 、 ε_2，厚度分别为d_1、 d_2 ，电容器两极板上自由电荷面密度为±σ。求解（1）在各层电介质内的电位移矢量和场强；（2）电容器的电容。

解： （1）在两交界面处做高斯闭合面S_1

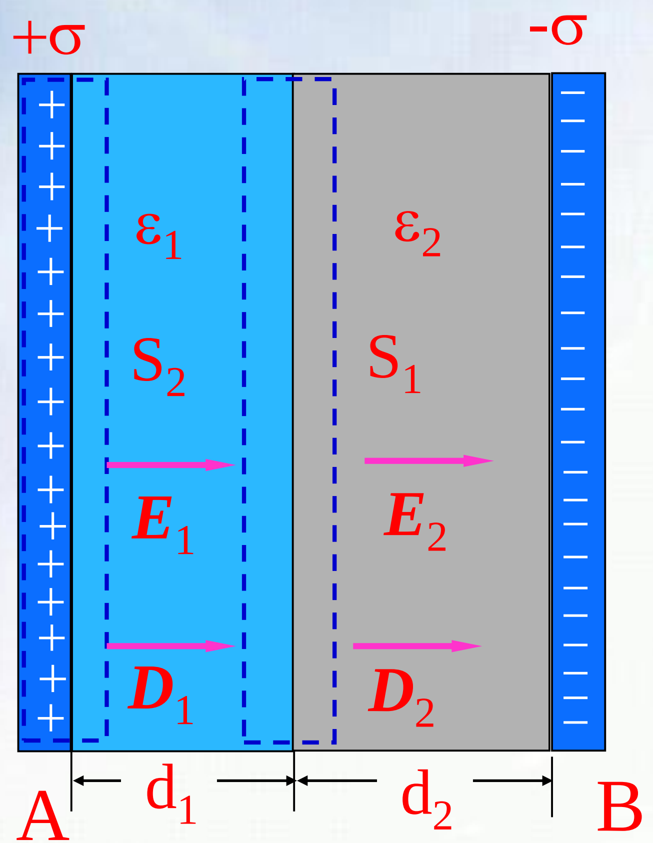
$$\oiint_{S_1} \vec{D}\cdot d\vec{s} = -D_1 S + D_2 S = 0$$

所以 $D_1 = D_2$

由于 $D_1 = \varepsilon_1 E_1 \qquad D_2 = \varepsilon_2 E_2$

所以：

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}$$



在介质与金属板内做一高斯闭合面S_2，由高斯定理可得：

$$\oiint_{S_2} \vec{D}\cdot d\vec{s} = D_1 S = S\sigma \qquad D_1 = \sigma = D_2$$

则可求得电场强度：

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} \qquad E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}$$

D、***E*** 方向均向右。

（2）正负两极板*A*、*B*的电势差为：

$$U_A - U_B = E_1 d_1 + E_2 d_2$$

$$= \sigma\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}\right) = \frac{q}{S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}\right)$$

按电容的定义式： $C = \dfrac{q}{U_A - U_B} = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d_1/\varepsilon_{r1} + d_2/\varepsilon_{r2}}$

可推广到多层介质的情况，即分母 $\sum_i d_i/\varepsilon_{ri}$

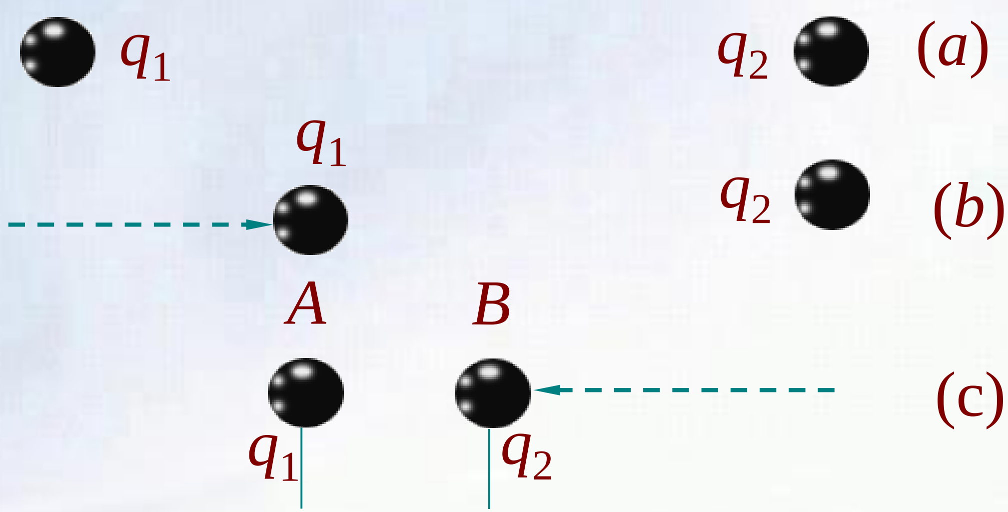
§10-6 静电场的能量

一、点电荷间的相互作用能

（a）q_1，q_2相距无限远，相互作用能为0。

（b）q_1从负无穷远移至A点，相互作用能为0。

（c）q_2从正无穷远移至B点，外力克服q_1的电场力做功为：



$$A_w = -A_E = -q_2(U_\infty - U_2) \qquad U_\infty = 0$$

$$A_w = q_2 U_2 = q_2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

若先将q_2移至B点，再将q_1移至A点，外力克服q_2的电场力做功为：

$$A_w = q_1 U_1 = q_1 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

外力做功等于两电荷相互作用的能量：

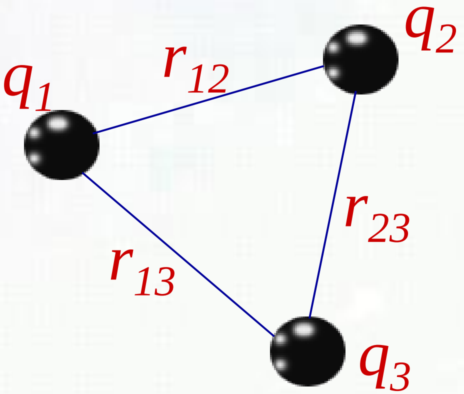
$$W = A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$ 有对称性，上式写成：

$$W = \frac{1}{2}q_1\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r} + \frac{1}{2}q_2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r} = \frac{1}{2}q_1U_1 + \frac{1}{2}q_2U_2$$

考虑三个点电荷系统形成的情况：

$$A_1 = 0 \qquad A_2 = q_2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}}$$

$$A_3 = q_3\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{23}}\right)$$



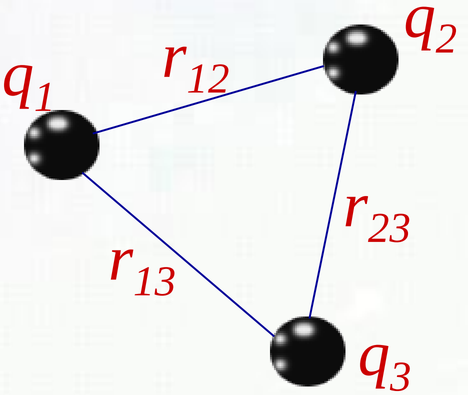
$$W = A_1 + A_2 + A_3$$

$$= q_2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}} + q_3\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{23}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[q_1\left(\frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}}\right) + q_2\left(\frac{q_1}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{23}}\right) + q_3\left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right)\right]$$

$$W = \frac{1}{2}q_1U_1 + \frac{1}{2}q_2U_2 + \frac{1}{2}q_3U_3$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} q_iU_i$$



将三个点电荷系统推广至n个点电荷：

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_iU_i$$

二、电荷连续分布时的静电能

电荷体分布时的静电能：

$$W=\frac{1}{2}\iiint_V U dq=\frac{1}{2}\iiint_V U\rho dV$$

电荷面分布时的静电能：

$$W=\frac{1}{2}\iint_S U\sigma dS$$

式中U是所有电荷在体元或面元处所激发的电势。以上两式包含带电体各部分电荷之间的相互作用能—静电能。

电容器所带的静电能：

设一电容器极板间已带电±q，此时两极板电势差为 $U'_A-U'_B$，现把+dq由B板移至A板，B板增加-dq，外力克服电场力做功为

$$dA = (U'_A - U'_B)dq = \frac{q}{C}dq$$

外力所做的总功：

$$A = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

因而电容器所带的静电能：

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}C(U_A - U_B)^2 = \frac{1}{2}Q(U_A - U_B) = \frac{Q}{2}U_A + \frac{-Q}{2}U_B$$

三、静电场的能量

变化的电磁场可以脱离电荷而单独存在说明静电场能量的携带者是电场而不是电荷。

将 $U_{AB}=Ed$，$C=\varepsilon\dfrac{S}{d}$ 代入电容器静电能公式：

$$W=\frac{1}{2}CU_{AB}{}^{2}=\frac{1}{2}\varepsilon E^{2}Sd=\frac{1}{2}\varepsilon E^{2}V$$

则可引进电场能量密度：

$$w_e = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon} = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$$

上式虽然从均匀电场得出的，但其具有普遍性，对任意变化静电场都适用。对于任意一个带电体，可由电场能量密度计算它的总静电能：

$$W = \iiint_V w_e dV = \iiint_V \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}dV$$

例题8：

计算均匀带电球体的静电能，设球的半径为R，所带电量为q，球外为真空。

解：（1）用式 $W=\frac{1}{2}\iiint_V \rho U dV$ 来计算。

已知电荷体密度为：$\rho=\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

均匀带电球体所激发的电场分布为：

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{R^3}\vec{r} & (r<R)\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^3}\vec{r} & (r>R)\end{cases}$$

于是，离球心 $r(r<R)$ 处的电势为：

$$U=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_r^R\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^3}\vec{r}\cdot d\vec{r}+\int_R^{\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}\cdot d\vec{r}$$

$$=\frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R}-\frac{qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

由此可得带电球体的静电能为：

$$W=\frac{1}{2}\iiint\limits_V \rho U dV=$$

$$\frac{1}{2}\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\int_0^R\left(\frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R}-\frac{qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\right)4\pi r^2 dr$$

$$=\frac{3}{20}\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 R}$$

(2) 用式 $W=\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint\limits_V E^2 dV$ 来计算。能量分布

在整个空间，用场强代入，即可得：

$$W=\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_V E^2 dV=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^R\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qr}{R^3}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$+\frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^\infty\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

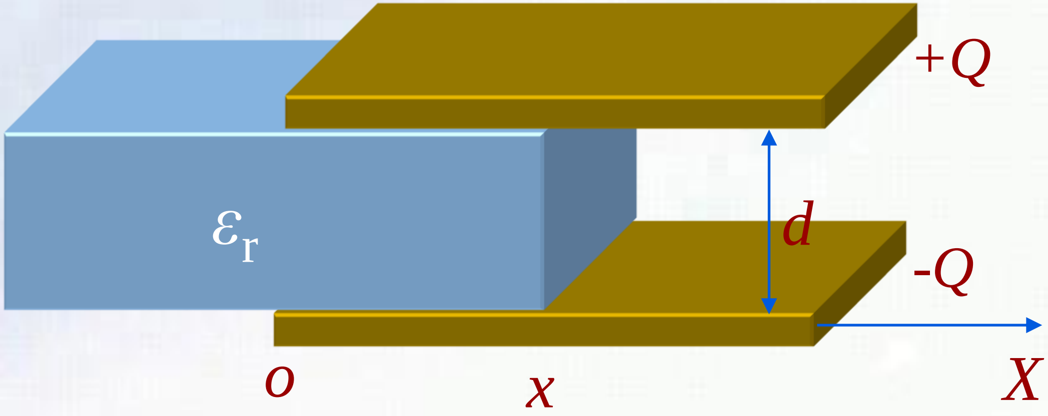
$$=\frac{q^2}{40\pi\varepsilon_0 R}+\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}=\frac{3}{20}\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 R}$$

两种方法计算结果相同。

例题9：

平行板电容器的极板是边长为a的正方形，间距为d，两板带电$\pm Q$。如图所示，把厚度为d、相对介电常量为ε_r的电介质板插入一半。试求电介质板所受电场力的大小及方向。

解：选取坐标系oX，如图所示，当介质插入x距离时，电容器的电容为



$$C(x)=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r xa}{d}+\frac{\varepsilon_0(a-x)a}{d}=\frac{\varepsilon_0 a}{d}[a+(\varepsilon_r-1)x]$$

此时，电容器的静电能为

$$W(x)=\frac{Q^2}{2C}=\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 a[a+(\varepsilon_r-1)x]}$$

而电介质未插入时，电容器的静电能为

$$W_0=\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 a^2}$$

当电介质移动dx时，电场力$\boldsymbol{F}$对电介质板所作的功等于电容器静电能的减少： $Fdx = -dW(x)$

$$F = -\frac{dW(x)}{dx} = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q^2 d}{2\varepsilon_0 a[a + (\varepsilon_r - 1)x]^2}$$

插入一半时，$x=a/2$，则

$$F(\frac{a}{2}) = \frac{2(\varepsilon_r - 1)Q^2 d}{\varepsilon_0 a^3(\varepsilon_r + 1)^2}$$

由$\varepsilon_r > 1$，电场力$\boldsymbol{F}(a/2)$是沿X轴的正方向，即指向电容器内部。