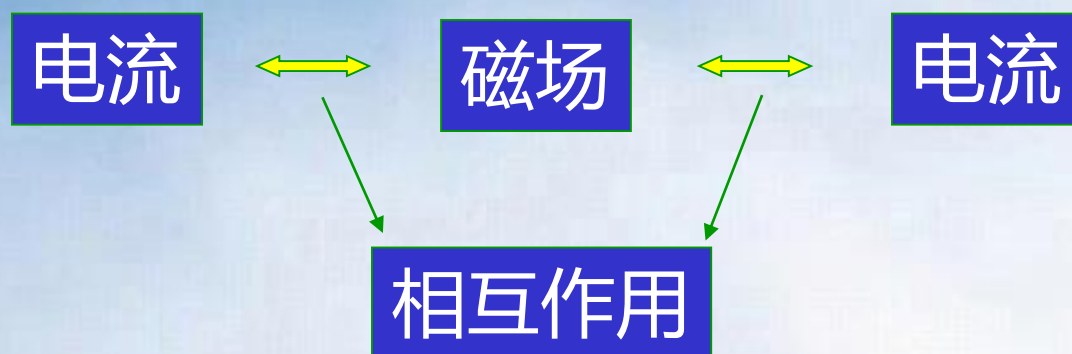


第十二章 稳恒磁场

1819年奥斯特在上课时做一实验，在一通电的细铂丝下平行放置一小磁针，结果发现电流的磁效应。

奥斯特发现的电流磁效应，是科学史上的重大发现。它立即引起了那些懂得它的重要性的价值的人们的注意。在这一重大发现之后，一系列新发现接连出现。两个月后安培发现了电流间的相互作用，阿拉戈制成了第一个电磁铁，施魏格发明了电流计等，安培曾写道：“奥斯特先生已经永远把他的名字和一个新纪元联系在一起了。”

运动电荷形成磁场，磁场也是物质的一种形态。



稳恒电流产生恒定磁场或稳恒磁场。

本章讨论稳恒磁场的基本性质和规律。

§ 12-1 磁场 磁感应强度

一、基本磁现象

磁性：具有吸引铁、镍、钴等物质的特性。

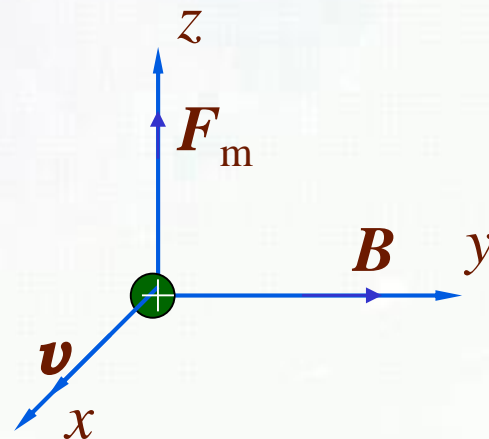
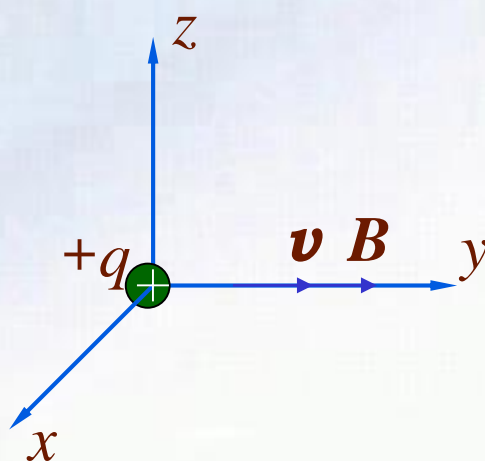
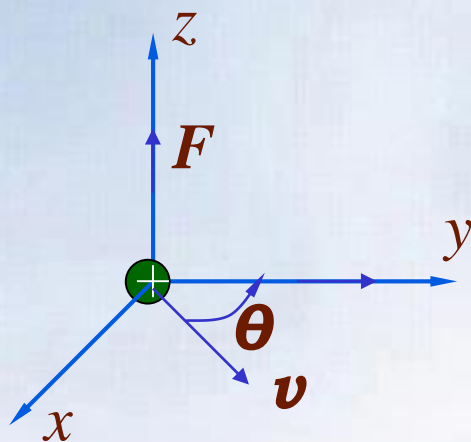
磁极：北极 N ，南极 S ，同性相斥、异性相吸
两磁极的作用力满足平方反比率。

磁现象可归结为运动电荷的相互作用，这种相互作用通过磁场传递。

二、磁感应强度

引入检验电荷 q_0 以速度 \boldsymbol{v} 运动，所受的力为 \boldsymbol{F} ，实验发现：

- ①改变 \boldsymbol{v} 而保持速率不变，发现力 \boldsymbol{F} 总是垂直于 \boldsymbol{v} 。
- ②当 \boldsymbol{v} 在某些方向时， $\boldsymbol{F}=0$ ，定义该方向为磁感应强度 \boldsymbol{B} 的方向。
- ③当 \boldsymbol{v} 垂直于 \boldsymbol{B} 时，力达到极大值 \boldsymbol{F}_{\max} 。



定义: $B = F_{\max} / (qv)$ 。

B 的方向可由 $\mathbf{F}_m \times \mathbf{v}$ 的方向确定, 可用右手螺旋法则确定。

磁感应强度的单位T(特斯拉),

$$1\text{T} = 1\text{N} / (\text{A} \cdot \text{m}) \quad 1\text{T} = 10^4\text{G}(\text{高斯})$$

磁场中运动电荷受力大小 $F = qvB\sin\theta$, 写成矢量式:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

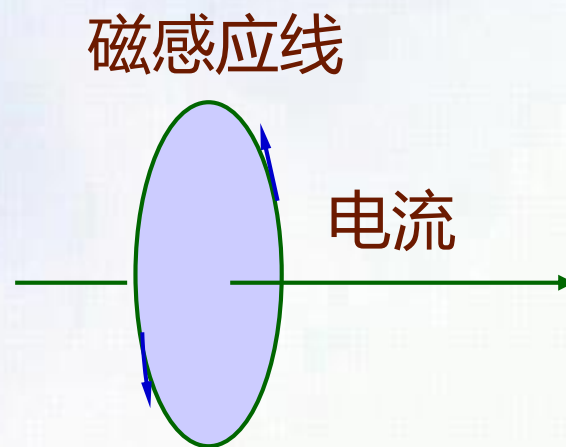
若电场和磁场同时存在, 则电荷受力为:

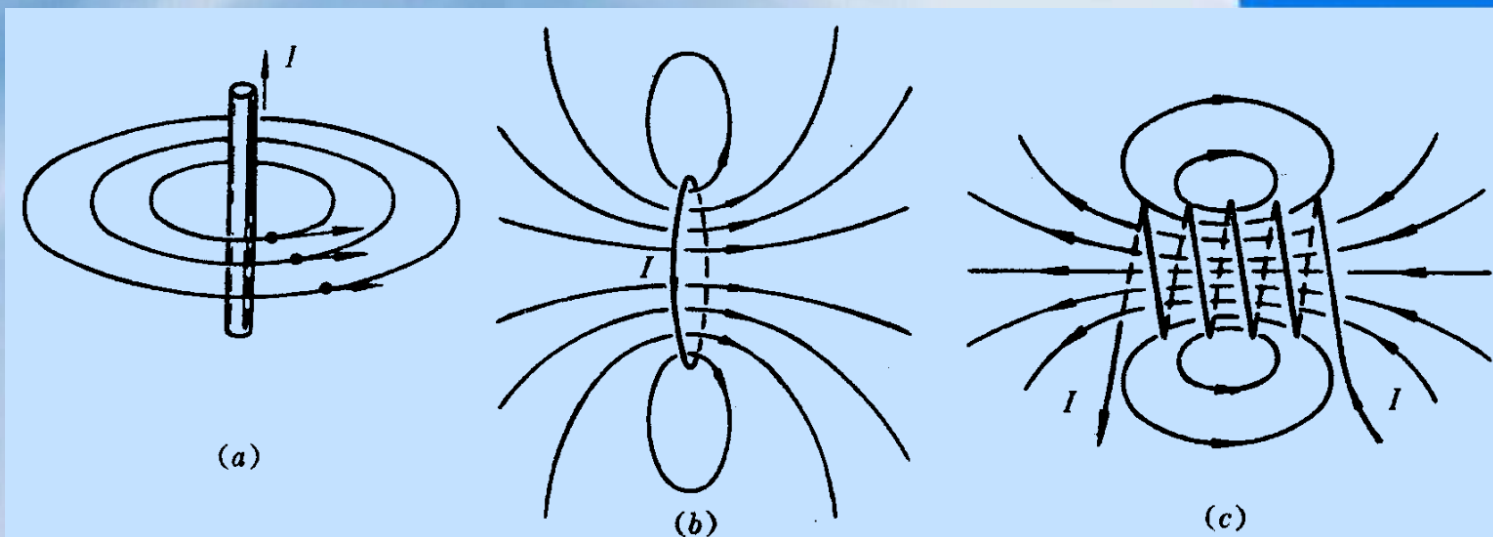
$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

上式是洛伦兹从实验得出的，故称为洛伦兹力。

三、磁感应线

磁感应线：磁感应线上任一点的切线方向和该点的磁场方向一致。磁感应线是闭合曲线，环流方向和电流构成右手螺旋关系。磁场强处，磁感应线密。





几种磁场的磁感应线

磁感应线的特点：①磁感应线为闭合曲线，相应的磁场称涡旋场。②磁感应线的环绕方向与电流方向服从右手螺旋法则。

§ 12-2 毕奥—萨伐尔定律

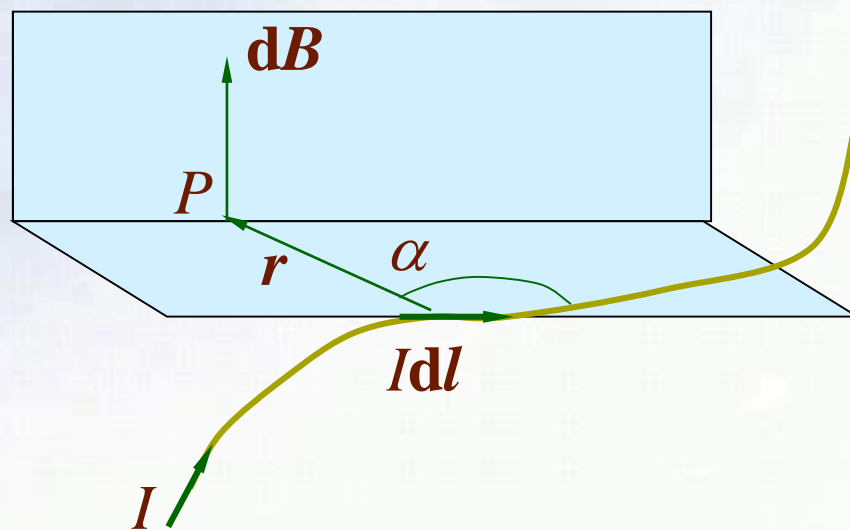
一、毕奥—萨伐尔定律

毕奥和萨伐尔通过实验研究了不同形状导线产生的磁场；拉普拉斯分析他们的实验数据，提出了电流元 $I d\mathbf{l}$ 在空间 P 点激发的磁感应强度公式：

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$$

μ_0 ：真空磁导率



对任意载流导线所激发的总磁感应强度为：

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

二、毕奥—萨伐尔定律的应用

1. 载流长直导线的磁场

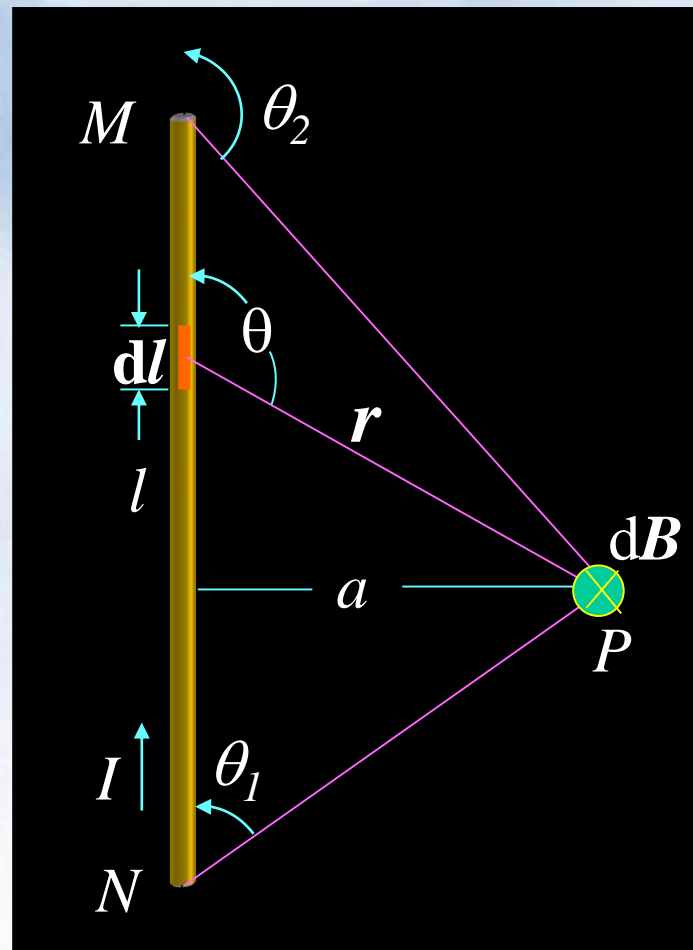
设长 L 的载流直导线 MN ，电流为 I ，求离导线距离为 a 的场点 P 处的磁感应强度：

取电流元 $d\mathbf{l}$ ，按毕奥—萨伐尔定律，电流元在P点的磁感应强度：

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

垂直纸面向内，且各电流元在P点的 $d\mathbf{B}$ 同向，可用标量积分求合场：

$$B = \int_L dB = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2}$$



上式中的变量之间的关系：

$$r = \frac{a}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{a}{\sin \theta}$$

$$l = a \cot(\pi - \theta) = -a \cot \theta, \quad dl = a \csc^2 \theta d\theta$$

将以上关系式代入磁感应强度的积分式：

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

当 $L \gg a$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

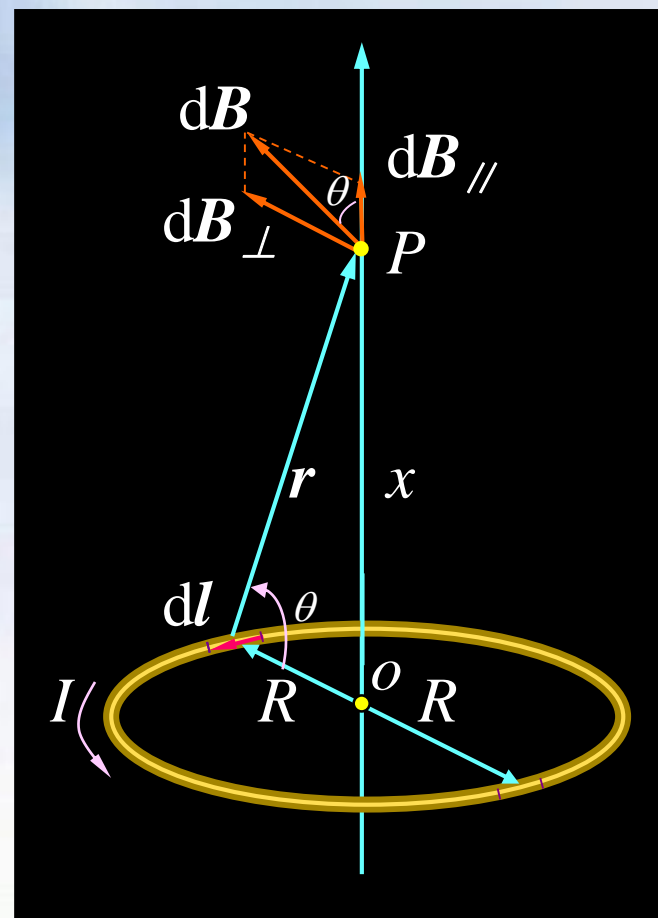
2. 载流圆线圈轴线上的磁场

设圆形线圈半径 R ，通电流 I ，计算轴线上 P 点处的磁感应强度。

电流源 $d\mathbf{l}$ ，在 P 点产生的 $d\mathbf{B}$ 为：

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{l}}{4\pi r^2}$$

$d\mathbf{B}$ 可分解为 $d\mathbf{B}_{//}$ 和 $d\mathbf{B}_{\perp}$



$d\mathbf{B}_\perp$ 分量相互抵消, $d\mathbf{B}_\parallel$ 相互加强:

$$B = \int d\mathbf{B}_\parallel = \int dB \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} \quad \text{代入上式得:}$$

$$B = \int d\mathbf{B}_\parallel = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0 IR}{4\pi(R^2 + x^2)^{3/2}} dl = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

\mathbf{B} 的方向沿OP轴, 与电流方向成右螺旋关系。

讨论两特殊点的情况：

①在圆心O处， $x=0$ ，则： $B(0) = \frac{\mu_0 I}{2R}$

若圆线圈密绕N匝，则： $B(0) = \frac{\mu_0 IN}{2R}$ (半圆弧?)

②在轴线上远离圆线圈 ($x \gg R$) :

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2x^3} = \frac{\mu_0 IS}{2\pi x^3}$$

上式中 $S=\pi R^2$ 为圆线圈的面积。

载流线圈的磁矩 磁偶极子

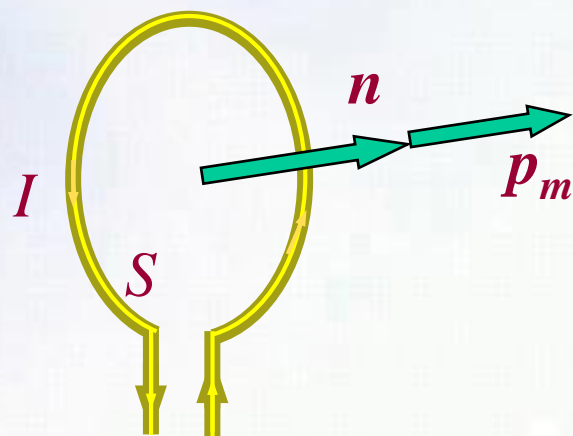
引入磁矩 \mathbf{p}_m 来描述载流线圈的磁性质：

$$\mathbf{p}_m = NIS\mathbf{n}$$

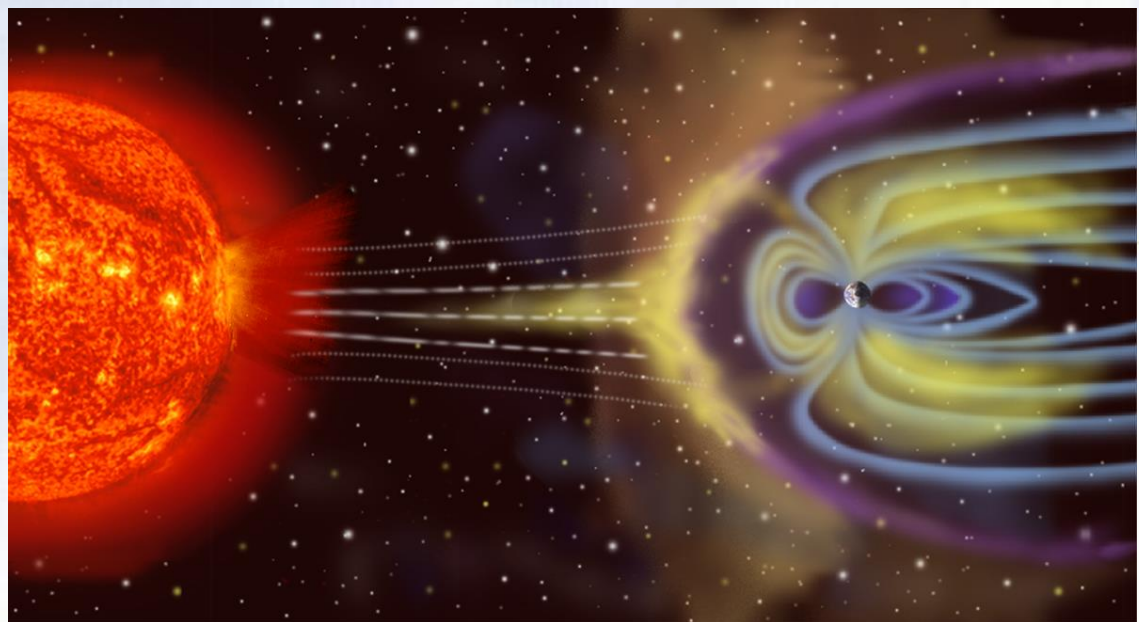
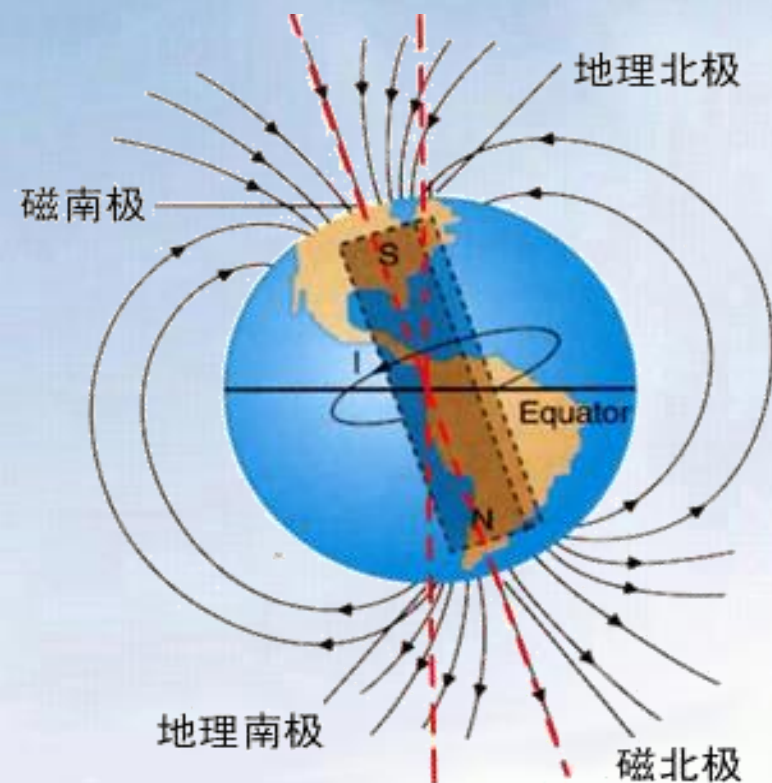
\mathbf{n} 的方向与电流环绕方向呈右手螺旋关系。

引入磁矩概念后，在轴线上远离载流圆线圈的磁场为：

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi x^3}$$



场点到场源的距离远大于线圈尺寸的载流线圈——**磁偶极子**。一般地说，转动的带电球体等效于一个圆形电流，在远处可看成磁偶极子的场，如地球的磁场。



第四周

第15章 电流和磁场

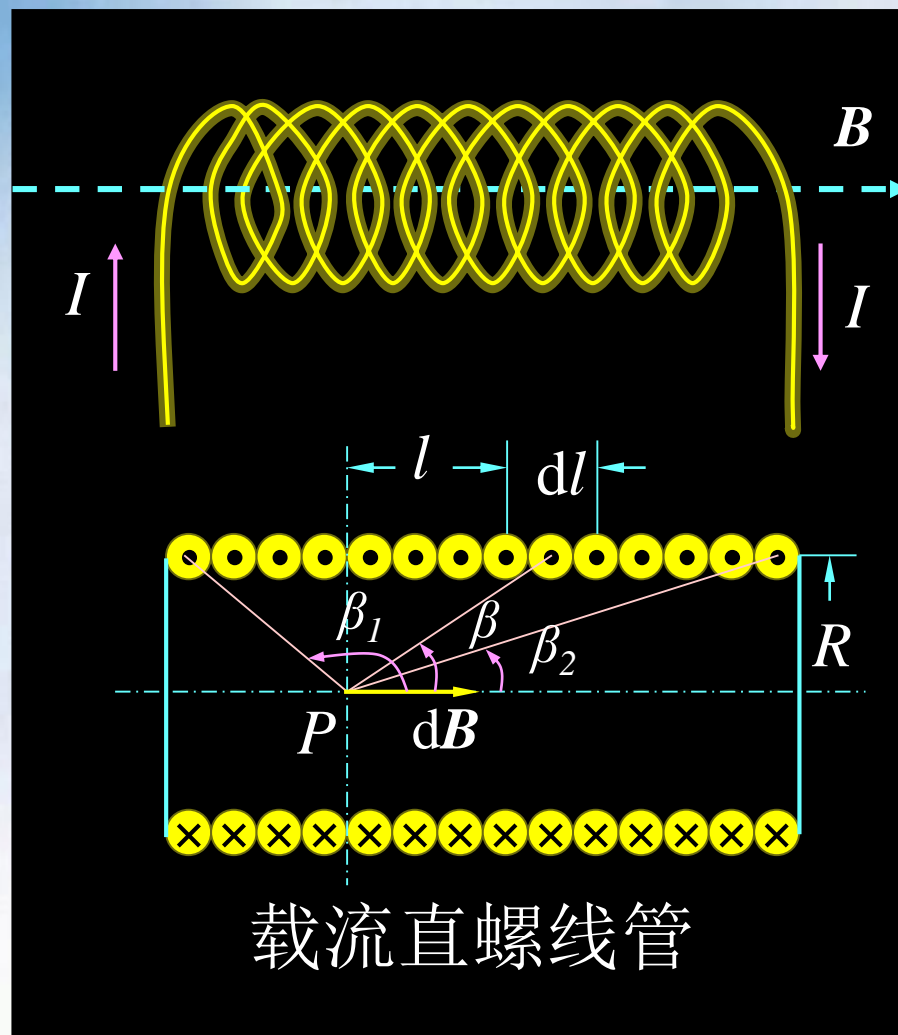
§ 15. 3, § 15. 5, § 15. 6, § 15. 7,
§ 15. 9, § 15. 10 (一般了解)

作业: P285 15-3, 15-5, 15-8,
15-10, 15-11, 15-14

3. 载流直螺线管内部的磁场

计算螺线管内轴线上 P 点的磁感应强度。在螺线管上取 dl ，相当于电流强度 $I n dl$ 的圆电流，它在 P 点产生的磁感应强度的大小为：

$$dB = \frac{\mu_0 I R^2 n dl}{2(R^2 + l^2)^{3/2}}$$



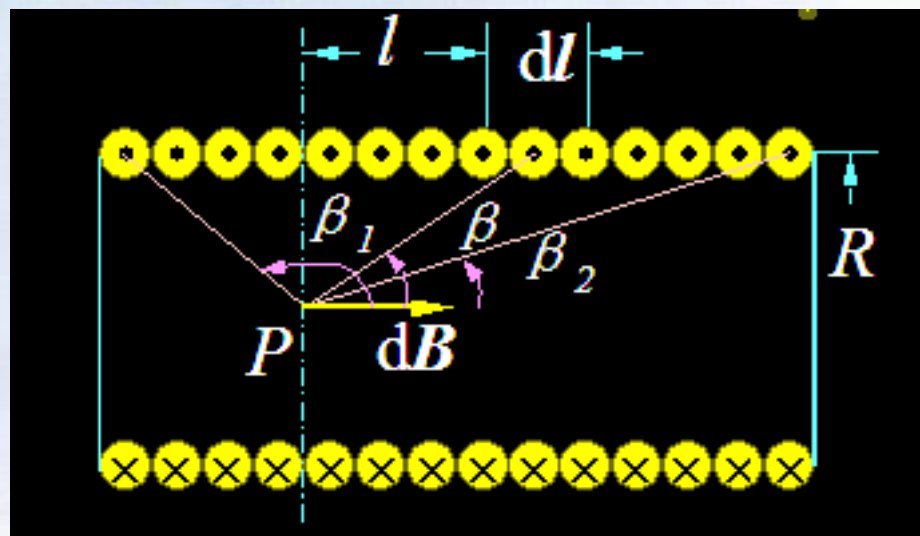
引入变量 β ，它是P点到 dl 所引矢量与轴线间的夹角，由图可知：

$$l = R \cot \beta \quad dl = -R \csc^2 \beta d\beta$$

$$R^2 + l^2 = R^2 \csc^2 \beta$$

代入上式得：

$$dB = -\frac{\mu_0}{2} nI \sin \beta d\beta$$



各圆电流在P点产生的 $d\mathbf{B}$ 方向相同。

整个螺线管在P点产生的磁感应强度为：

$$B = \int dB = -\frac{\mu_0}{2} nI \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta d\beta = \frac{\mu_0}{2} nI (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$

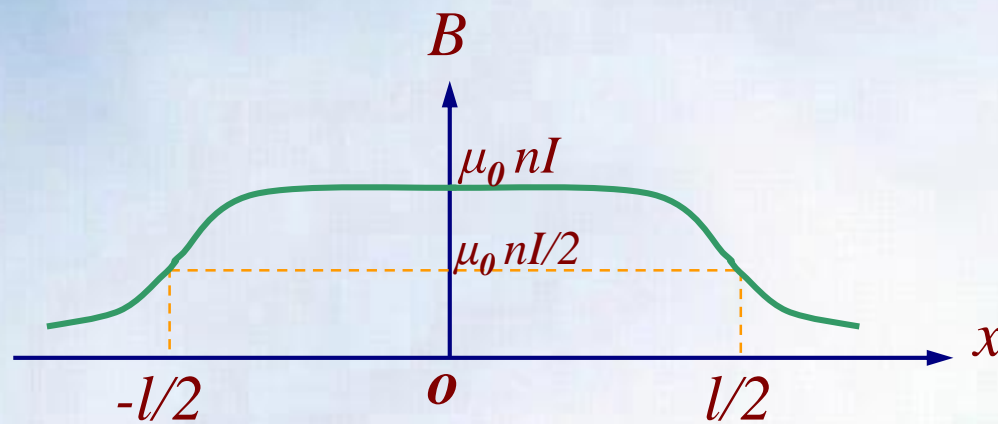
讨论两种特殊情况：

① $L \gg R$ ，此时 $\beta_1 \rightarrow \pi$ ， $\beta_2 \rightarrow 0$ ，于是有：

$$B = \mu_0 nI$$

② 长直螺线管上的两 endpoint， $\beta_1 = \pi/2$ ， $\beta_2 \rightarrow 0$ 或 $\beta_2 = \pi/2$ ， $\beta_1 \rightarrow 0$ ，则：

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n I$$

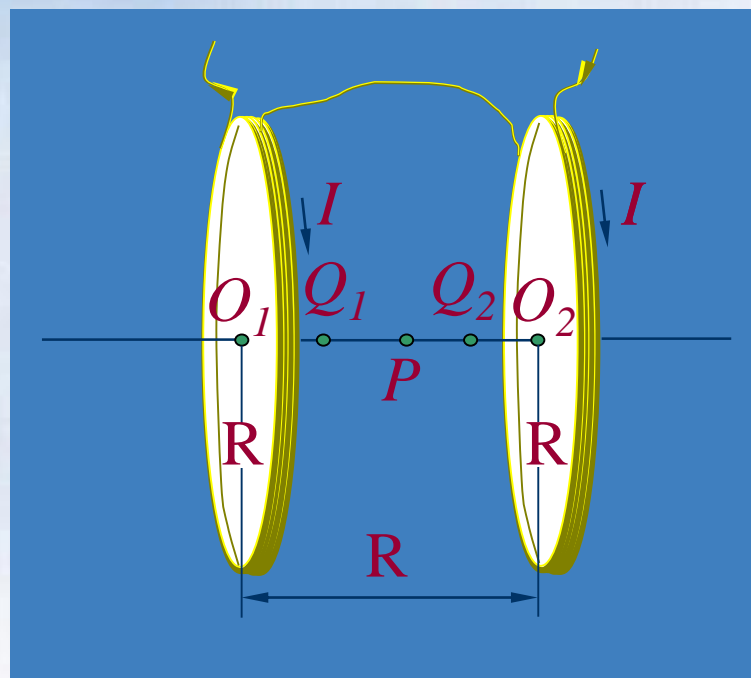


直螺线管轴线上的磁场分布

亥姆霍兹(Helmholtz 1838-1894)线圈。

设两线圈半径 R ，间距也为 R ，各有 N 匝，电流为 I 。两线圈沿轴线上各点的磁场方向均向右。

在圆心 O_1 、 O_2 处磁感应强度相等，大小为：



$$B_o = \frac{\mu_0 NI}{2R} + \frac{\mu_0 NIR^2}{2(R^2 + R^2)^{3/2}} =$$
$$\frac{\mu_0 NI}{2R} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 0.677 \frac{\mu_0 NI}{R}$$

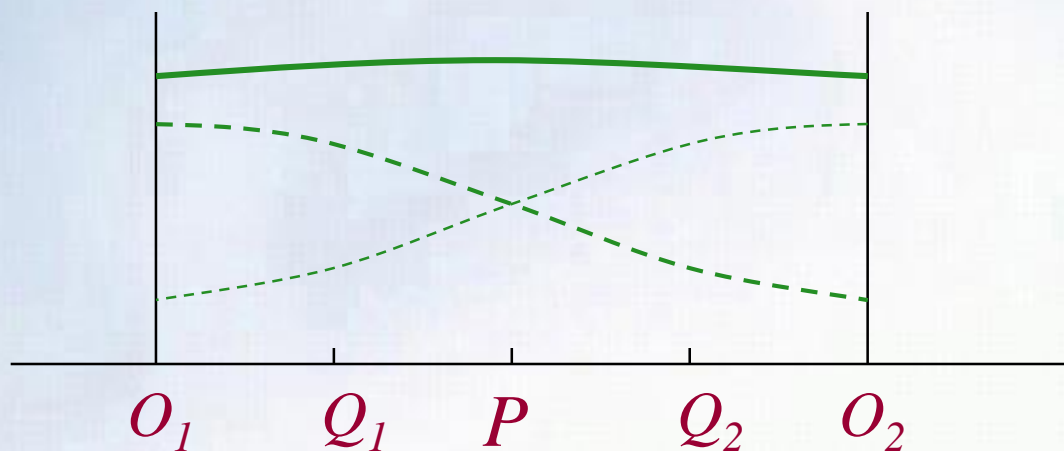
两线圈轴线上中点P处的磁感应强度：

$$B_P = 2 \frac{\mu_0 NIR^2}{2[R^2 + (\frac{R}{2})^2]^{3/2}} = 0.716 \frac{\mu_0 NI}{R}$$

在P点两侧的 Q_1 、 Q_2 两点，磁感应强度为：

$$B_Q = \frac{\mu_0 N I R^2}{2[R^2 + (\frac{R}{4})^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu_0 N I R^2}{2[R^2 + (\frac{3R}{4})^2]^{\frac{3}{2}}} = 0.712 \frac{\mu_0 N I}{R}$$

由此可见，轴线上的磁场基本均匀。



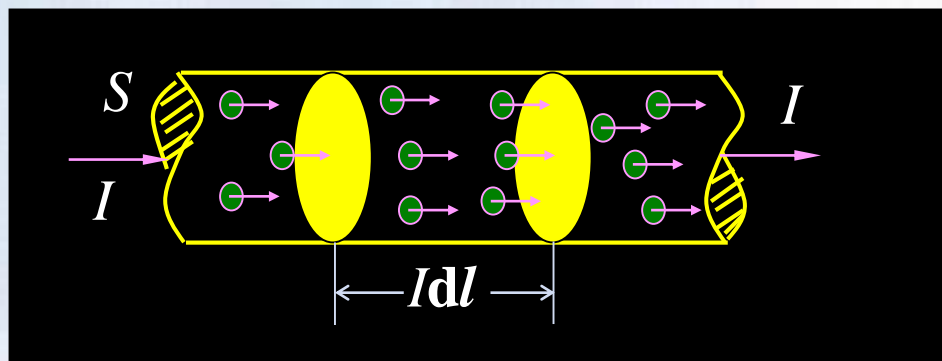


三、运动电荷的磁场

电荷的定向运动形成电流，可从毕奥—萨伐尔定律导出运动电荷的磁场表达式：

设带电粒子数密度 n ，每电荷的带电量 q ，漂移速度 \boldsymbol{v} ，电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ ，导体的截面 S ，则：

$$\boldsymbol{j} = qn\boldsymbol{v}, I = qn\boldsymbol{v}S$$



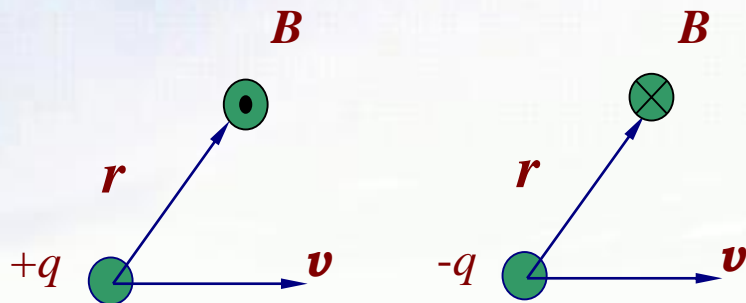
电流元 $I\mathbf{dl}$ 内有带电粒子数 $dN = nSdl$

设 \mathbf{dB} 为这些运动粒子所激发的磁场，则每个粒子所激发的磁场为 \mathbf{B} ($\mathbf{vdl} = \mathbf{vdl}$):

$$\vec{B} = \frac{d\vec{B}}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2 dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qn\mathbf{v}S}{nSdl} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

单电荷电流直接推导: $i d\vec{l} = \frac{q}{dt} d\vec{l} = q \frac{d\vec{l}}{dt} = q\vec{v}$

关于磁场的方向，见下图：

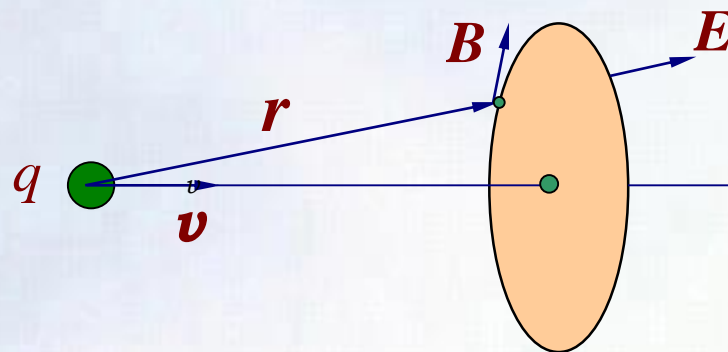


当运动电荷速率 v 接近光速时上式不成立。
运动电荷同时要激发电场，当速度 v 远小于光速时，电场强度仍表示为：

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

将此式代入上式：

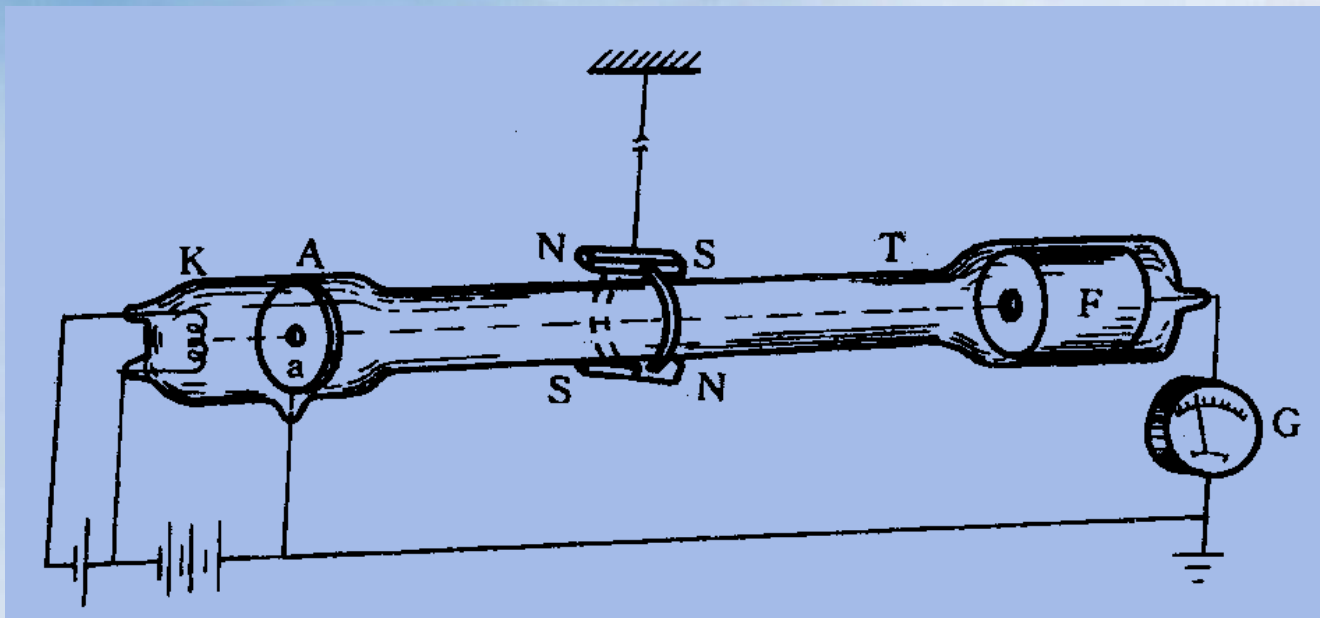
$$\vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{v} \times \vec{E}$$



运动正电荷激发的电场和磁场

说明运动电荷激发的电场和磁场紧密相关。

运动电荷激发磁场的实验验证：



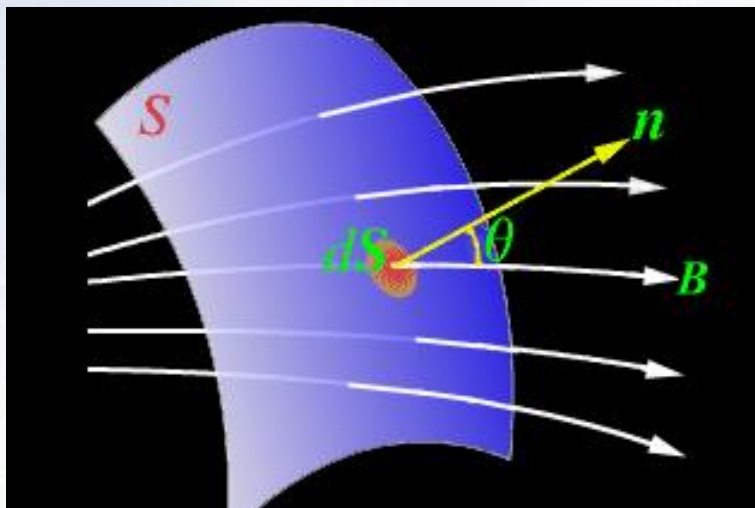
测定电子射线磁场的实验装置简图

§ 12-3 磁场的高斯定律 安培环路定律

一、磁通量

磁通量：通过一给定曲面的总磁感应线数，用 Φ 表示：

如图， dS 与磁感应强度 B 的夹角为 θ ，
则通过 dS 的磁通量为：



$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{或} \quad d\Phi = B \cos \theta dS$$

通过有限曲面 S 的磁通量为：

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

磁通量的单位 $\text{T} \cdot \text{m}^2$ ，叫做韦伯 Wb 。
 $1\text{T} = 1\text{Wb}/\text{m}^2$ 。

二、磁场中的高斯定律

磁感应线是无始无终的闭合线，从一闭合面穿进的磁力线，必从另一处穿出。

对闭合曲面，取外法线方向为正，磁力线从闭合曲面穿出磁通量为正，穿入为负，则对闭合曲面：

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

此式称为磁场中的高斯定理，可从毕奥—萨伐尔定律出发严格证明。

磁场中的高斯定理反映了无源场的特性，电场中的高斯定理反映了有源场的特性。

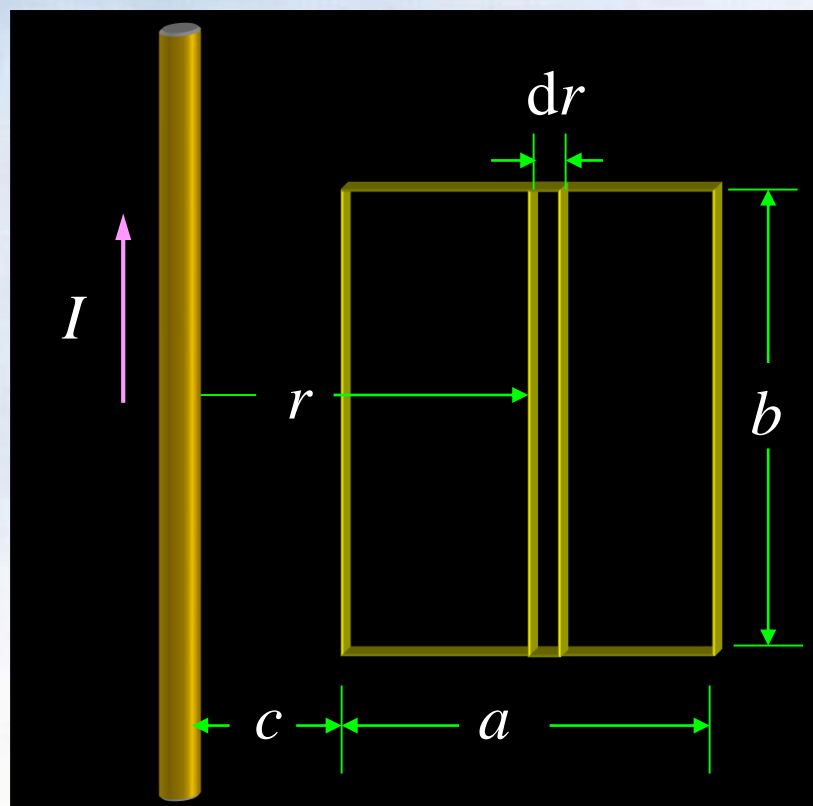
例题 I :

一无限长直导线通有电流 I ，其近旁平行放置一矩形线框，求穿过矩形线框的磁通量？

解： 无限长载流直导线磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

在距导线 r 处取面元 bdr ，则通过此面元的磁通量为：



$$d\Phi_m = B dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} b dr$$

则通过整个矩形线框的总磁通量为：

$$\Phi_m = \int d\Phi_m = \int_c^{a+c} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} b dr = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(\frac{a+c}{c}\right)$$

三、安培环路定律

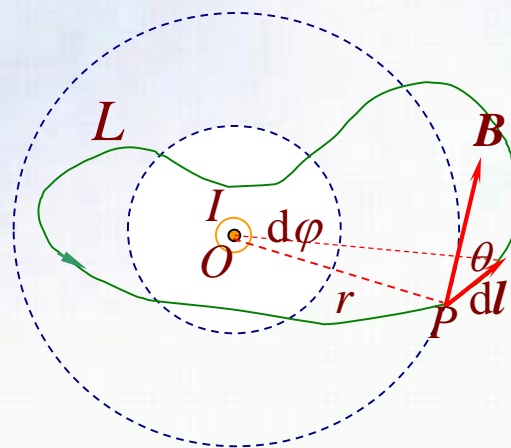
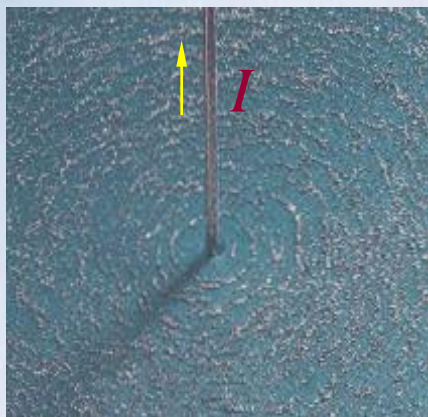
我们在研究静电场时，得到静电场的环流为零；但对磁场而言，由于磁感应线是闭合的， \mathbf{B} 的环流不为零。

下面以无限长直导线为例来研究磁感应强度的环流问题：

在垂直于导线的平面内做一闭合曲线，线上任一点的磁感应强度：

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

I 为导线电流，见图：



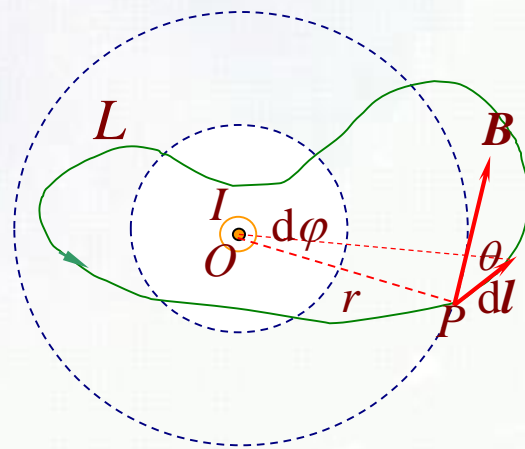
图中 $dl \cos \theta = r d\varphi$

按如图的绕行方向 \mathbf{B} 矢量沿闭合曲线的环路积分为：

$$\begin{aligned}\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint_L B \cos \theta dl = \oint_L B r d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} r d\varphi \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I\end{aligned}$$

当 L 不在垂直于导线的平面，将 $d\mathbf{l}$ 分解为 $d\mathbf{l}_\perp$ 和 $d\mathbf{l}_\parallel$ ，所以：

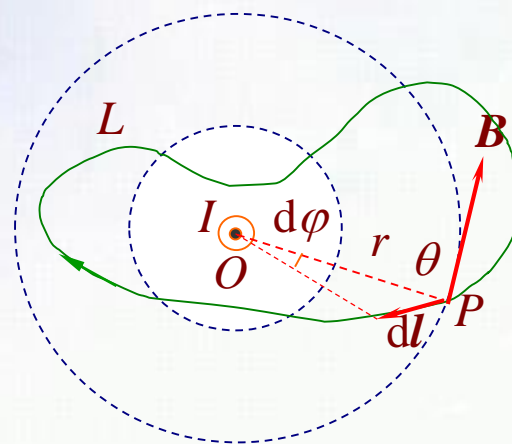
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{B} \cdot (d\vec{l}_\perp + d\vec{l}_\parallel) =$$



$$\begin{aligned}
 &= \oint_L B \cos 90^\circ dl_{\perp} + \oint_L B \cos \theta dl_{\parallel} \\
 &= 0 + \oint_L B r d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I
 \end{aligned}$$

此结果与上式相同。

如果其他条件不变，只改变绕行方向，则：



$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L B \cos \theta dl = \oint_L B r d\varphi$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{-2\pi} d\varphi = -\mu_0 I$$

把上式的负号放入电流中，即 $-\mu_0 I = \mu_0(-I)$

可以认为对闭合曲线的绕行方向而言，电流取负值。

闭合曲线不包围电流时，**B**矢量的环流为：

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{L_2} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

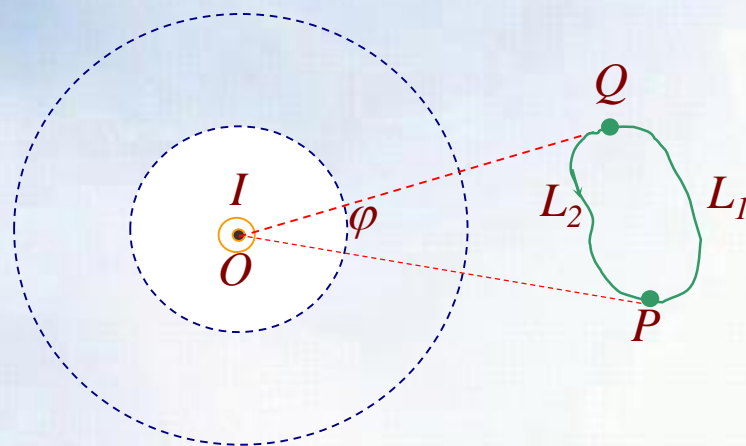
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\int_{L_1} d\varphi + \int_{L_2} d\varphi) = 0$$

闭合曲线不包围电流时， \vec{B} 矢量的环流为零。

在一般情况下：

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

上式称为安培环路定理。表述如下：



在磁场中，沿任何闭合曲线， B 矢量的线积分（或 B 矢量的环流），等于真空的磁导率 μ_0 乘以穿过这个闭合曲线为边界所张任意曲面的各恒定电流的代数和。

环路定律中电流的正负值由右手螺旋法则决定。

环路定律中电流 I 只包括穿过环路的电流，但定理中的磁场是环路内外的电流共同决定的。

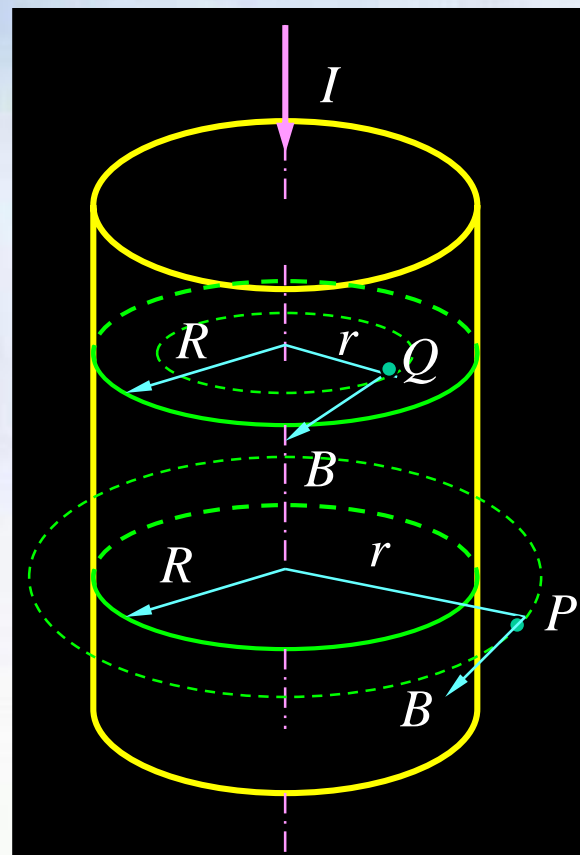
B 矢量的环流不为零，表明磁场不是有势场。

四、安培环路定理的应用

1. 长直圆柱形载流导线内外的磁场

设：圆柱截面半径为 R ，
电流 I 沿轴流动，过P点
（或Q点）取半径为 r 的
磁感应线为积分回路，
则 \mathbf{B} 矢量的环流为：

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B2\pi r$$



当 $r > R$ （图中P点），由环路定律得：

$$B2\pi r = \mu_0 I \quad \text{即：}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

当 $r < R$ （图中Q点），可考虑两种情形：

①电流分布在圆柱形导体表面：

$$B2\pi r = 0 \quad \text{即：} \quad B = 0$$

②电流均匀分布在圆柱形导体的截面上时，穿过积分回路的电流应是：

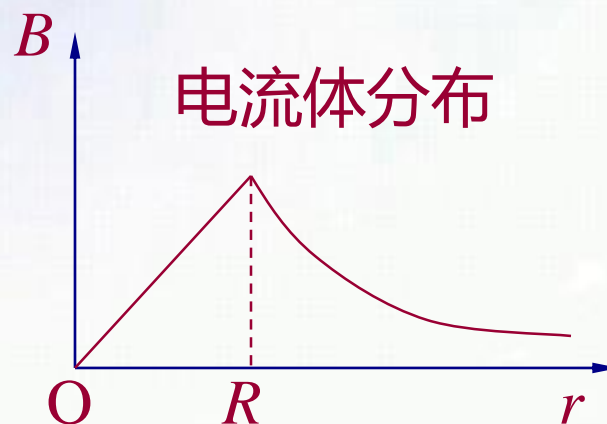
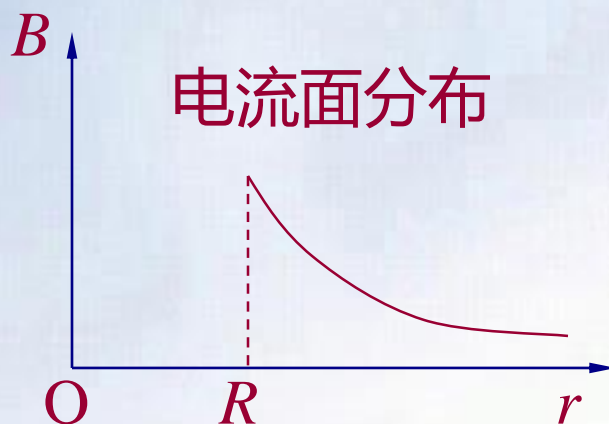
$$\frac{I}{\pi R^2} \pi r^2$$

所以，应用安培环路定律得：

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2$$

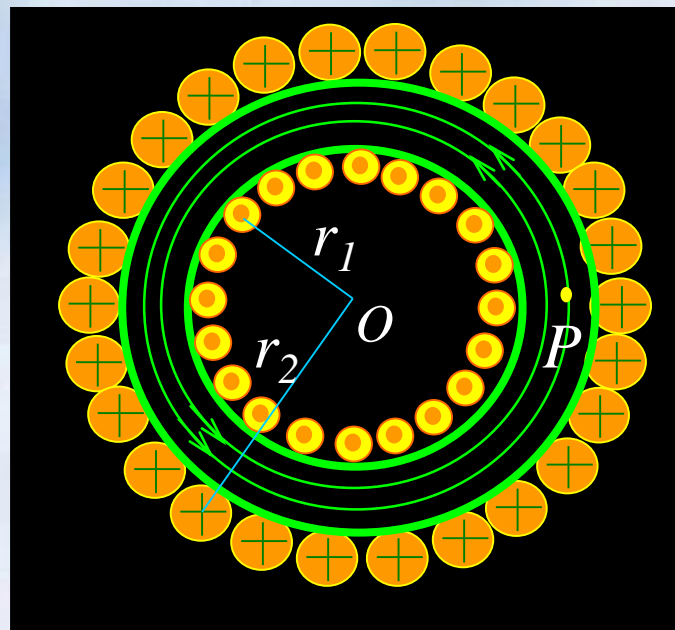
由此可得Q点的磁感应强度为：

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Ir}{R^2}$$



2. 载流螺绕环内的磁场

考虑到对称性，环内磁场的磁感应线都是同心圆，选择通过管内某点P的磁感应线L作为积分环路，则**B**矢量的环流：



$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_L dl = B 2\pi r$$

设环上线圈的总匝数为N，电流为I，由环路定理：

$$B2\pi r = \mu_0 NI$$

计算得P点的磁感应强度为：

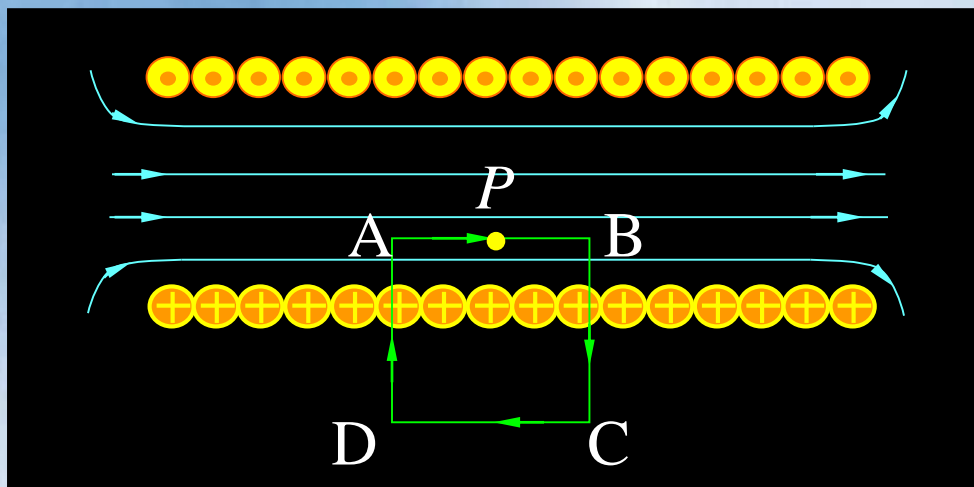
$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

当 $r_2 - r_1$ 远小于环的平均半径 r 时，令 $l = 2\pi r$ ，则：

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} = \mu_0 nI$$

式中 n 为螺绕环单位长度上的匝数， \mathbf{B} 的方向与电流流向成右手螺旋关系。

3. 载流长直螺线管内的磁场



设密绕长螺线管，通电流 I ，计算管内任一点 P 处的磁感应强度。过 P 点做闭合回路 $ABCD$ ， CD 段及 BC 和 DA 在管外部分 $B=0$ ， BC 和 DA 在管内部分，虽然 $B \neq 0$ ，但 $d\mathbf{l}$ 与 \mathbf{B} 垂直， $d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B} = 0$ 。所以 \mathbf{B} 矢量沿 $ABCD$ 的线积分为：

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot AB$$

设螺线管长为 l 共有 N 匝，则单位长度上有 $N/l=n$ 匝线圈。回路 $ABCD$ A包围的总电流为 $ABnI$ ，由安培环路定律：

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot AB = \mu_0 ABnI$$

所以：

$$B = \mu_0 nI$$

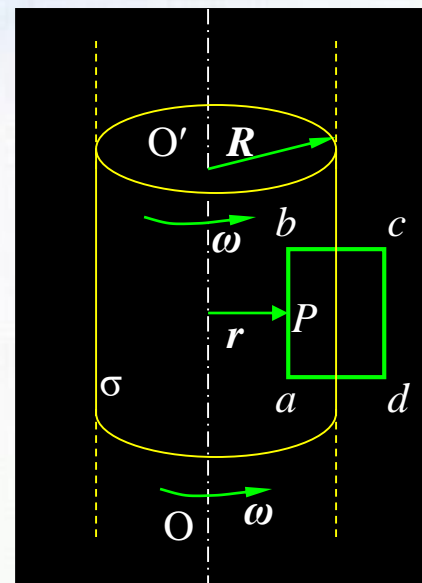
由于矩形回路是任取的， AB 段在管内任何位置时上式均成立，故磁场在管内均匀分布。

例题2：

如图所示，一半径为 R 的无限长非导体圆筒均匀带电，电荷面密度为 σ 。若受到外力矩的作用，圆筒从静止开始以匀角加速度 β 绕 OO' 轴转动，试求 t 时刻圆筒内距转轴 r 处的磁感应强度 B 的大小。

解：圆筒绕 OO' 轴转动相当于长直密绕螺线管，磁场分布具有轴对称性。对密绕螺线管，管内为均匀磁场，管外磁场强度为零。过管内场点 P 做一矩形积分回路 $abcda$ 。

由安培环路定理，有：



$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b B \cos 0^\circ dl + \int_b^c B \cos 90^\circ dl + \int_c^d 0 dl + \int_d^a B \cos 90^\circ dl = B \overline{ab} = \mu_0 \sum I_i$$

分析系统可知，积分回路所包围的电流代数数和为：

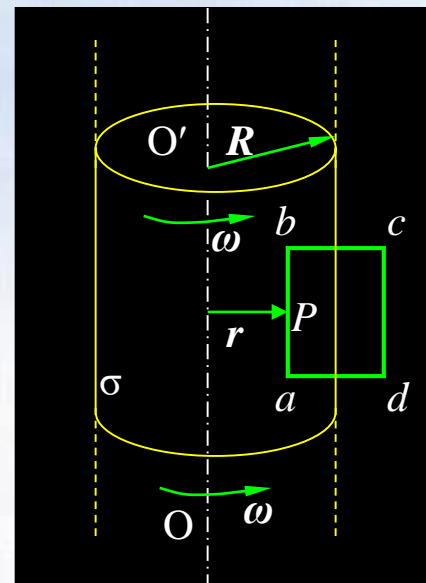
$$\begin{aligned} \sum I_i &= \sigma(\omega R \Delta t \cdot \overline{ab}) / \Delta t \\ &= \sigma(\omega R \cdot \overline{ab}) \end{aligned}$$

由题意可知

$$\omega = \omega_0 + \beta t, \quad t = 0 \text{ 时}, \quad \omega_0 = 0$$

则：

$$\omega = \beta t$$



所以
$$\sum I_i = \sigma(\beta t R \cdot \overline{ab})$$

因此
$$\overline{Bab} = \mu_0 \sum I_i = \mu_0 \sigma(\beta t R \cdot \overline{ab})$$

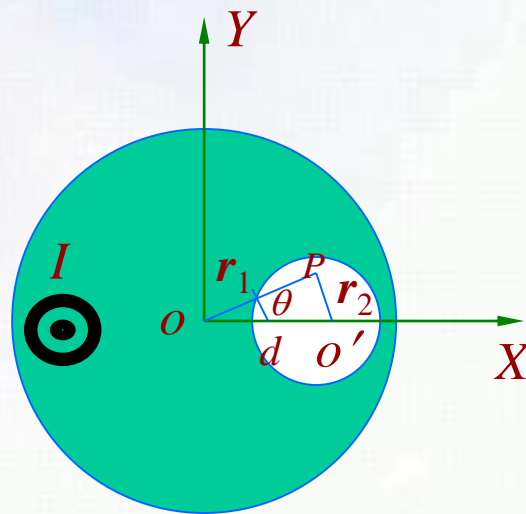
即得
$$B = \mu_0 \sigma \beta t R$$

B的方向根据 σ 的情况决定。由结果分析可知，圆筒内部的磁场***B***与 r 无关，磁场均匀分布。

例题3 :

一半径为 R 的无限长圆柱形导体，在其中距其轴线为 d 处挖去一半径为 r ($2r < R$)、轴线与大圆柱形导体平行的小圆柱，形成圆柱形空腔，导体中沿轴均匀通有电流 I ，如图(a)所示。试求空腔内的磁感应强度 B 。

解：取坐标系 XOY ，如图(a)所示。由于空腔的存在，不能直接用安培环路定理求解。小圆柱空腔表示其中通过的电流等于0，这可以等效成空腔中同时存在两个等值反向的电流，因此可采用补偿法求解。将空腔部分等效成同时存在着电流密度为 j 和 $(-j)$ 的电流，



图(a)

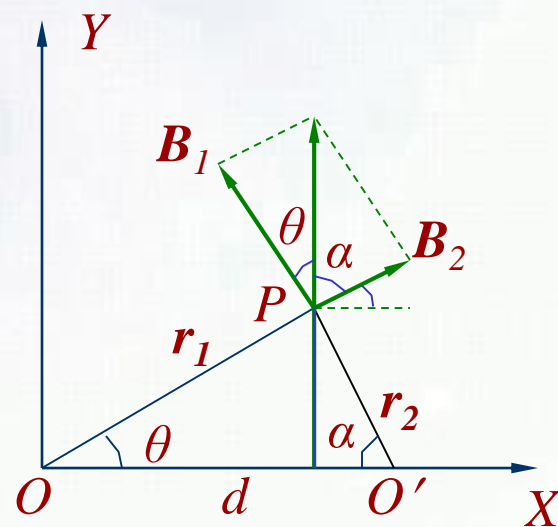
空腔中任意一点的磁场为通有电流密度 j 半径为 R 的大圆柱体，和通有反向电流密度 $(-j)$ 半径为 r 的小圆柱体产生的磁场的矢量和，即

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

取空腔中任意一点 P ， $\overline{OP} = r_1$ ， $\overline{O'P} = r_2$

由于半径为 R 和半径为 r 的长圆柱体产生的磁场具有轴对称性，故可根据安培环路定理，有

$$B_1 = \frac{\mu_0 j \pi r_1^2}{2\pi r_1} = \frac{\mu_0 r_1}{2} j$$



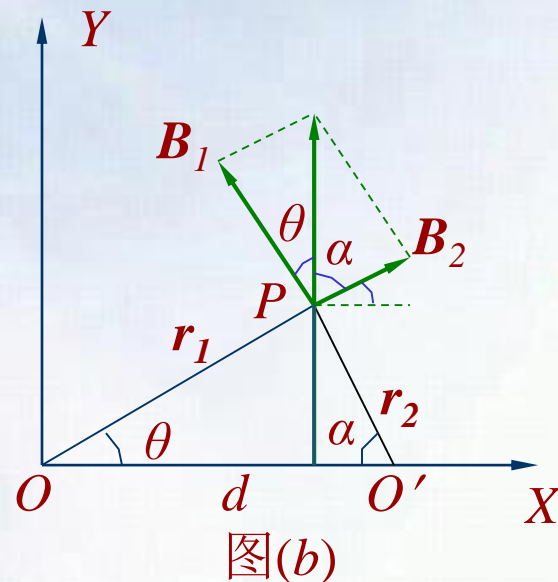
图(b)

上式中 $j = \frac{I}{\pi(R^2 - r^2)}$ 所以

$$B_1 = \frac{\mu_0 I r_1}{2\pi(R^2 - r^2)}$$

同理可得

$$B_2 = \frac{\mu_0 r_2}{2} j = \frac{\mu_0 I r_2}{2\pi(R^2 - r^2)}$$



B_1 和 B_2 方向根据右手法则确定，如图(b)所示。

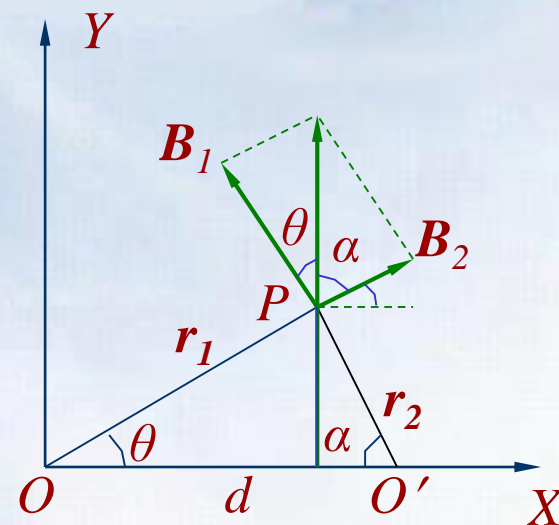
将 B_1 ， B_2 在X，Y轴上投影，其分量为：

$$B_{1x} = -B_1 \sin \theta = -\frac{\mu_0}{2} j r_1 \sin \theta$$

$$B_{1y} = B_1 \cos \theta = \frac{\mu_0}{2} j r_1 \cos \theta$$

$$B_{2x} = B_2 \sin \alpha = \frac{\mu_0}{2} j r_2 \sin \alpha$$

$$B_{2y} = B_2 \cos \alpha = \frac{\mu_0}{2} j r_2 \cos \alpha$$



图(b)

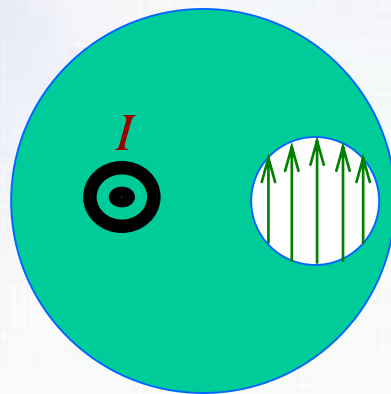
P 点的磁感应强度 \mathbf{B} 的两个正交分量为:

$$B_x = B_{1x} + B_{2x} = \frac{\mu_0 j}{2} (r_2 \sin \alpha - r_1 \sin \theta) = 0$$

$$B_y = B_{1y} + B_{2y} = \frac{\mu_0 j}{2} (r_2 \cos \alpha + r_1 \cos \theta) = \frac{\mu_0 j}{2} d$$

结果表明， P 点的磁感应强度 \boldsymbol{B} 的大小为一常量，方向垂直于 OO' 之间的连线 d ，即在 Y 轴正方向，所以空腔中的磁场为匀强磁场：

$$B = \frac{\mu_0 I d}{2\pi(R^2 - r^2)}$$



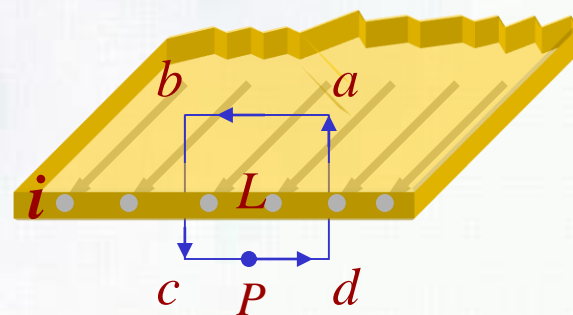
图(c)

例题4：

无穷大平行平面上有均匀分布的面电流，面电流密度为*i*，*i*的方向为电流流动的方向（*i*为垂直于电流方向上单位长度的电流强度），求此平面外的磁感应强度*B*的大小。

解：由于平板无穷大，所以平板外任一点的磁感应强度*B*都与平板平行。在垂直于*i*的一环路abcda，由安培环路定理：

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

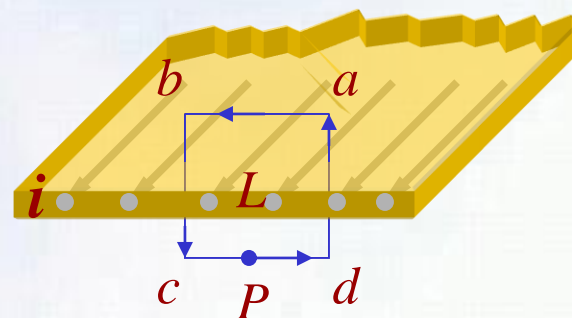


$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2BL$$

又:

$$\mu_0 \sum I = \mu_0 iL, \text{ 所以 } B = \frac{\mu_0 i}{2}$$

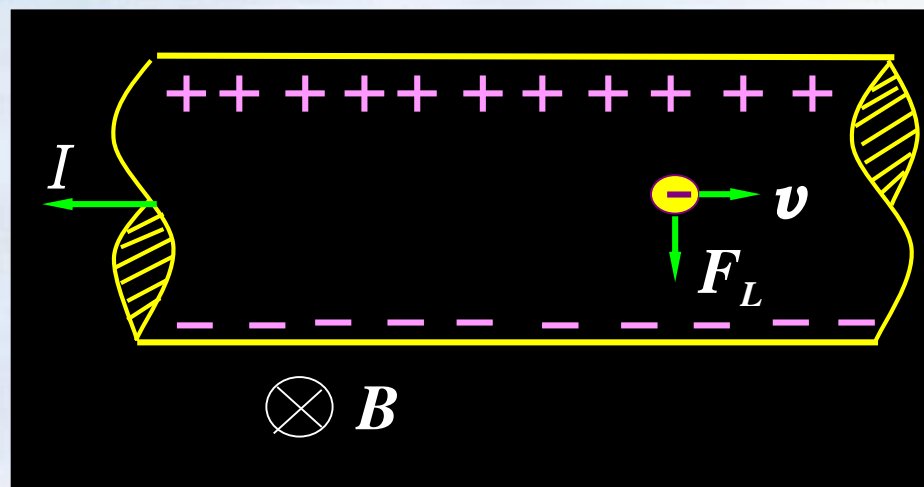


§ 12-4 磁场对电流的作用

一、安培力

实验指出，载流导线在磁场中将受到力的作用，称这种力为安培力。

在载流导线上任取一电流元，所在处的磁感应强度为 \boldsymbol{B} ，方向垂直纸面向里。



电流元中的电子受洛伦兹力：

$$\vec{F}_L = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

设电子数密度为 n ，电流元 $I d\vec{l}$ 中的电子数为：
 $dN = nS dl$ ，则电流元所受的安培力：

$$d\vec{F} = dN \vec{F}_L = -nS dl e \vec{v} \times \vec{B} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

式中 $I = envS$ ，上式称为安培定律。对于任意形状的载流导线，安培定律可写成：

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int_L I d\vec{l} \times \vec{B}$$

单电子电流直接推导：

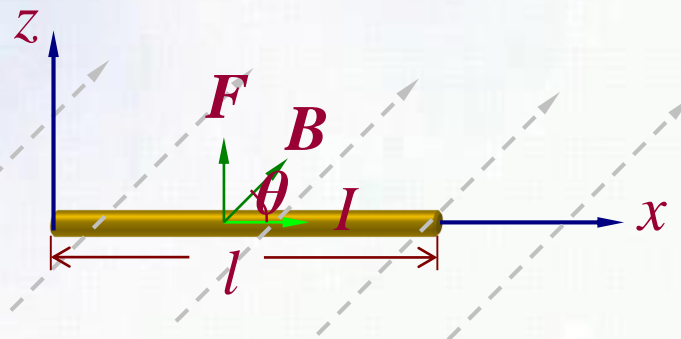
$$-e\vec{v} = -e \frac{d\vec{l}'}{dt} = \frac{e}{dt} d\vec{l} = I d\vec{l}$$

例题5：

求均匀磁场中一段长直导线所受的安培力？

设导线长 l ，电流 I ，置于磁感应强度 \mathbf{B} 中，导线与 \mathbf{B} 的夹角为 θ ，见下图，长直导线各段受力都朝Z轴：

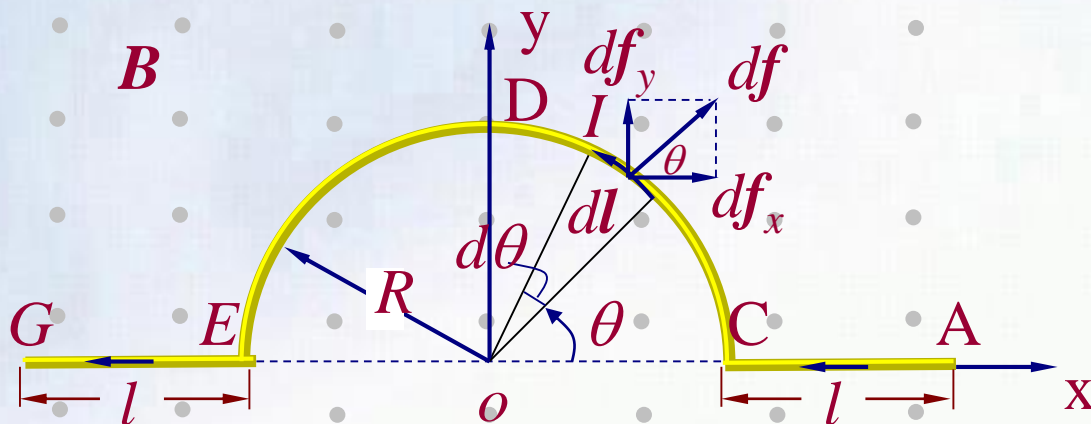
$$\begin{aligned} F &= \int dF = \int_0^l IdlB \sin \theta \\ &= IB \sin \theta \int_0^l dl = IlB \sin \theta \end{aligned}$$



例题6：

如图所示，一根弯曲导线通有电流 I ，弯曲部分是半径为 R 的半圆，两端直线部分的长度均为 l ，载流导线位于与匀强磁场垂直的平面内，求作用在导线上的安培力。

解：取坐标 xoy ，由安培定律，两端直线受力：



$$F_{AC} = F_{EG} = I l B \hat{y}$$

在圆弧形导线上取电流元： $I d\vec{l}$ ，此电流元所受安培力为： $d\vec{f} = I d\vec{l} \times \vec{B}$ 此力可分解为 df_x 和 df_y ，由对称性可知，各电流元水平分量之和为零，而垂直分量为：

$$F_{CE} = \int df_y = \int_0^\pi (IR d\theta B) \sin \theta = 2IBR$$

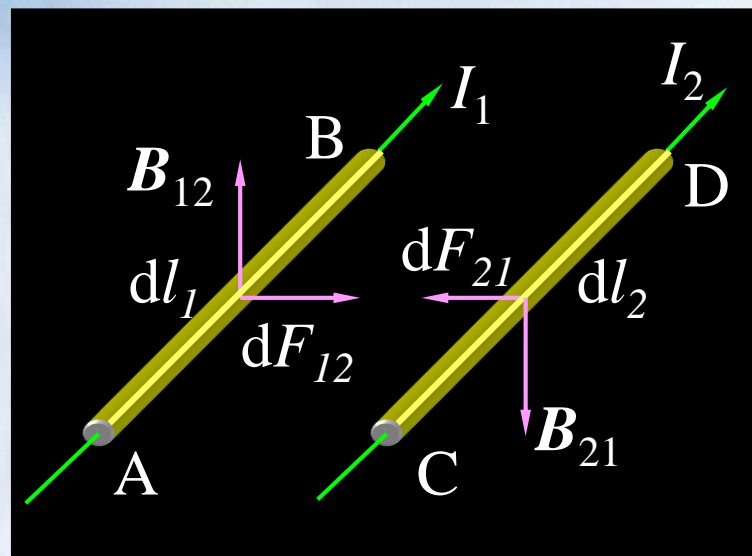
作用在整个导线上的力：

$$\vec{F} = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{EG} + \vec{F}_{CE} = 2(l + R)IB\hat{y}$$

二、平行长直载流导线间的相互作用力

相距为 d 的无限长直导线，电流分别为 I_1 、 I_2 ，导线2上的电流元受力为：

$$dF_{21} = B_{21} I_2 dl_2 \sin \theta$$



$$B_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$dF_{21} = B_{21} I_2 dl_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} dl_2$$

单位长度受力：

$$\frac{dF_{21}}{dl_2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} = \frac{dF_{12}}{dl_1}$$

安培定义：真空中相距为1m的无限长直细导线，载有相等的电流，若每米导线上受力正好为 $2 \times 10^{-7} \text{N}$ ，则导线内电流定义为1A。

第五周

第15章 电流和磁场 § 15. 11

第19章 带电粒子在电场和磁场中的运动

§ 19. 1, § 19. 4, § 19. 5,

§ 19. 2(一般了解), § 19. 3(一般了解)

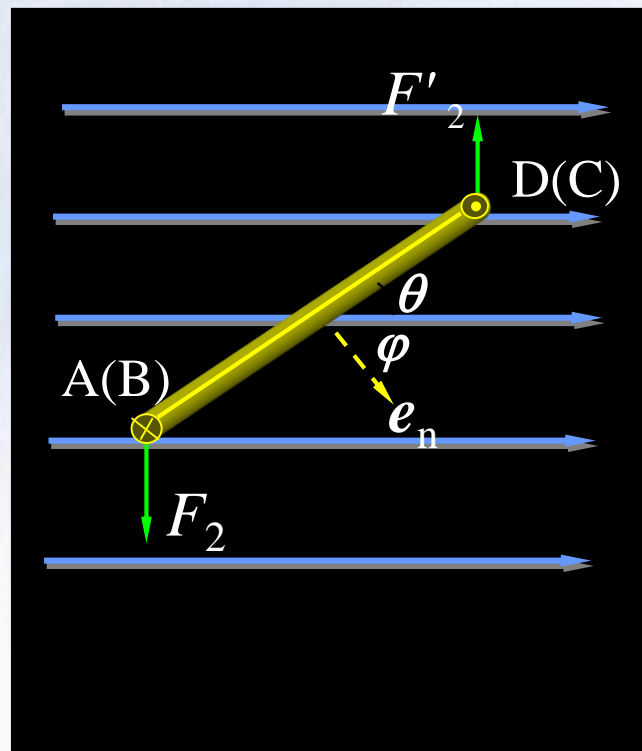
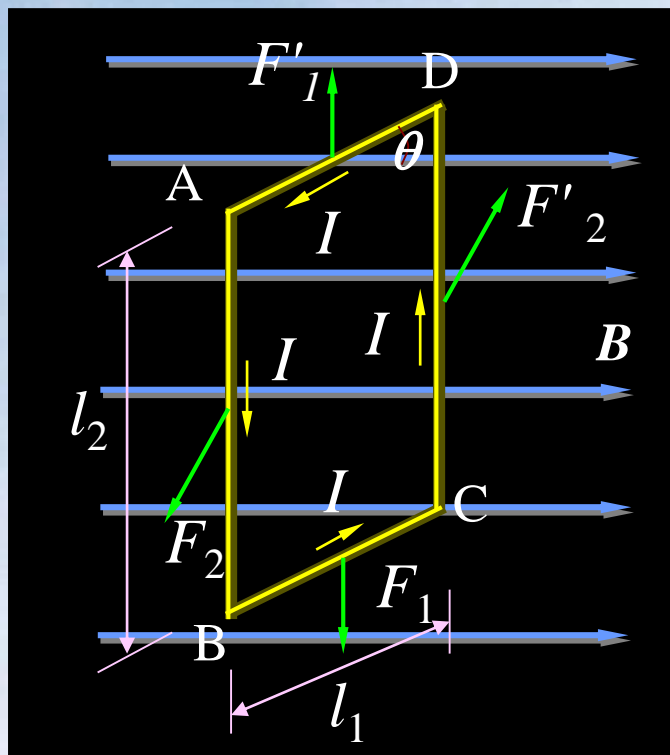
第16章 物质中的磁场 § 16. 1, § 16. 2

作业: P289 15-19, 15-22*

* P352 19-1, 19-2, 19-9, 19-10

三、磁场对平面载流线圈的作用 &

磁场中刚性长方形载流线圈，边长 l_1 、 l_2 ，线圈平面与磁场成 θ 。根据安培定律，导线BC、AD受力为：



$$F_1 = BIl_1 \sin \theta$$

$$F_1' = BIl_1 \sin(\pi - \theta) = BIl_1 \sin \theta$$

以上两力大小相等，方向相反，相互抵消。

导线AB、CD所受的磁力分别为：

$$F_2 = F_2' = BIl_2$$

此两力大小相等，方向相反，但作用力不在同一直线上，形成一力偶，力臂 $l_1 \cos \theta$ ，作用在线圈上的力偶矩为：

$$M = F_2 l_1 \cos \theta = BIl_1 l_2 \cos \theta = BIS \cos \theta$$

式中 $S=l_1 l_2$ ，由于 $\varphi+\theta=\pi/2$ ，则：

$$M = BIS \sin \varphi$$

如线圈有 N 匝，则：

$$M = NBIS \sin \varphi = \left| \vec{p}_m \right| B \sin \varphi$$

$P_m=NIS$ 为载流线圈的磁矩，上式写成矢量式：

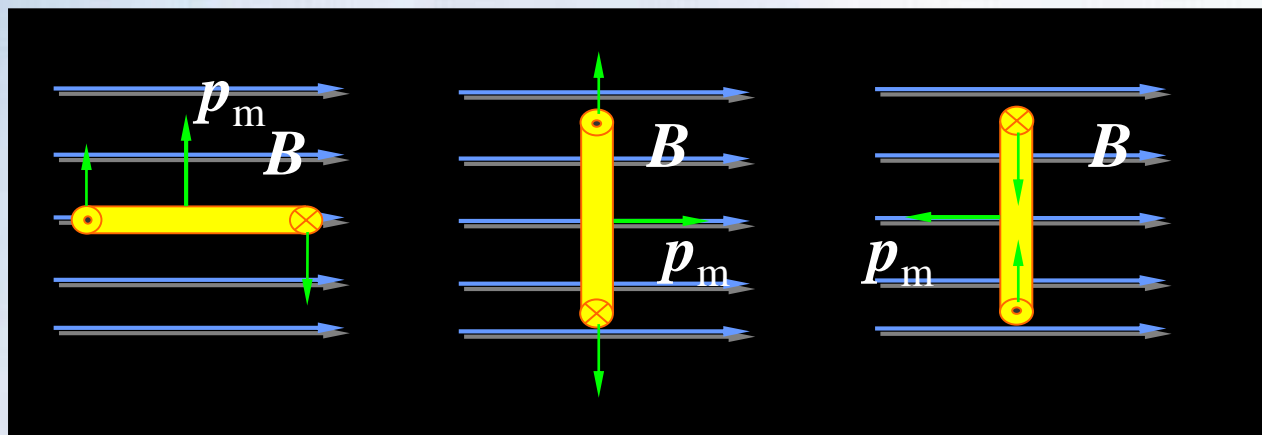
$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$

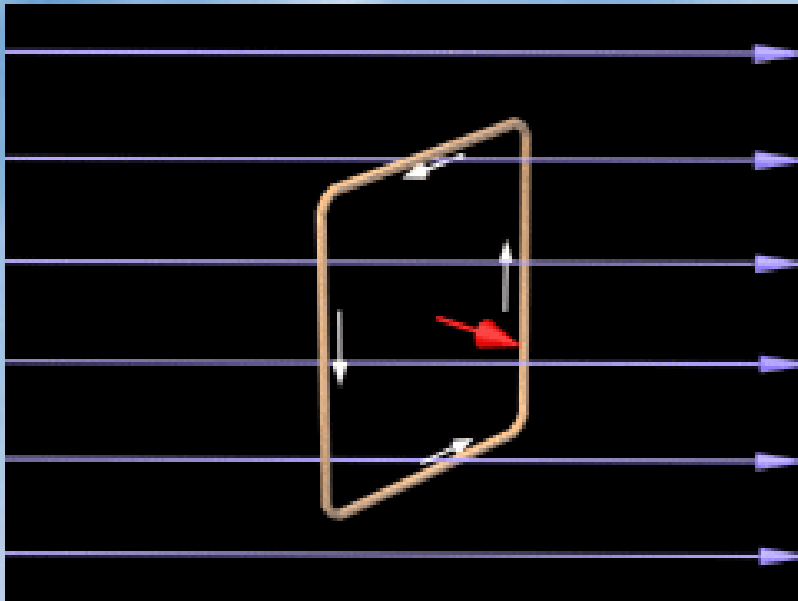
上式虽从矩形线圈推得，但可证明它对均匀磁场中任意形状的平面载流线圈都适用。

讨论几种特殊情况：

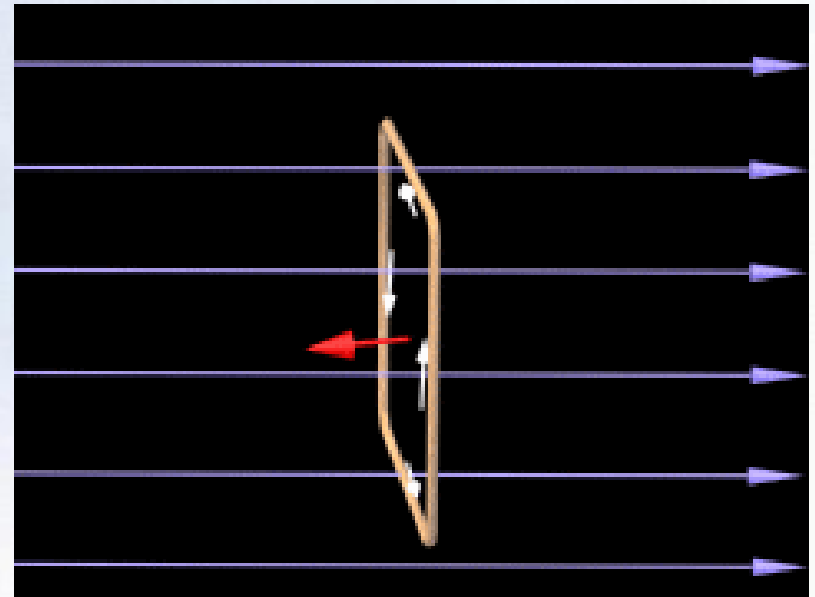
$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$

- ①当 \vec{p}_m 与 \vec{B} 的夹角 $\varphi = \pi/2$ 时， \vec{M} 最大。
- ②当 $\varphi = 0$ 时， $\vec{M} = 0$ ，线圈处于稳定平衡。
- ③当 $\varphi = \pi$ 时， $\vec{M} = 0$ ，但线圈处于不稳定平衡状态。





载流线圈的稳定平衡

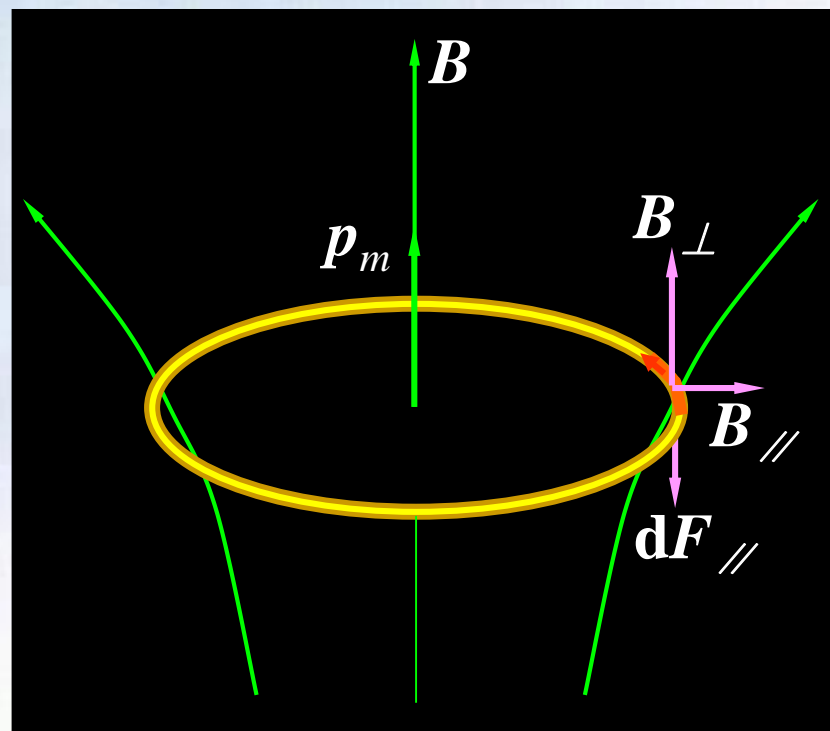


载流线圈的不稳定平衡

均匀磁场中载流线圈所受合力为零。

在非均匀磁场中载流线圈所受合力和合力矩可能都不为零，这样除转动外还要有平动。

例如：磁矩为 \mathbf{p}_m 线圈在辐射形磁场中，电流元受磁场 \mathbf{B}_\perp 的作用力被线圈弹力抵消；而受 \mathbf{B}_\parallel 的作用力竖直向下，线圈将向磁场较强处移动。



四、磁力做功 *

1. 载流导线在磁场中运动时磁力所做的功

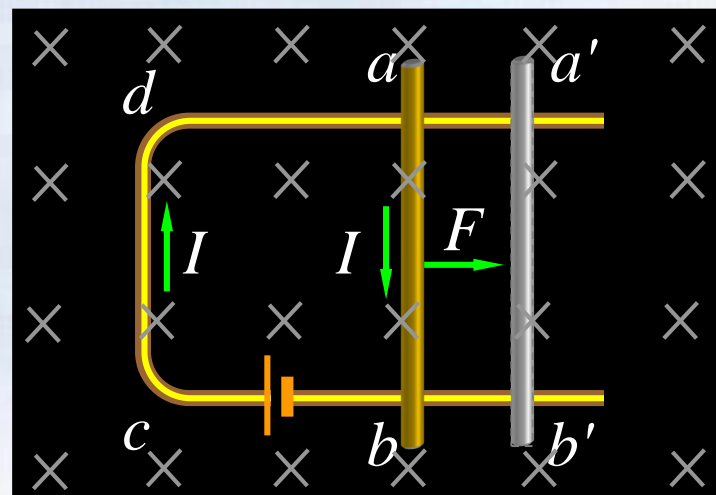
载流回路中可滑动导线 ab 受力为: $F = B I l$

从 ab 滑动到 $a'b'$ 时, 磁力做功:

$$A = F \overline{aa'} = B I l \overline{aa'}$$

滑动前后磁通量的变化:

$$\Phi_0 = B l \overline{da} \rightarrow \Phi_t = B l \overline{da'} \quad \Delta\Phi = B l \overline{aa'}$$



因而：

$$A = I \Delta \Phi$$

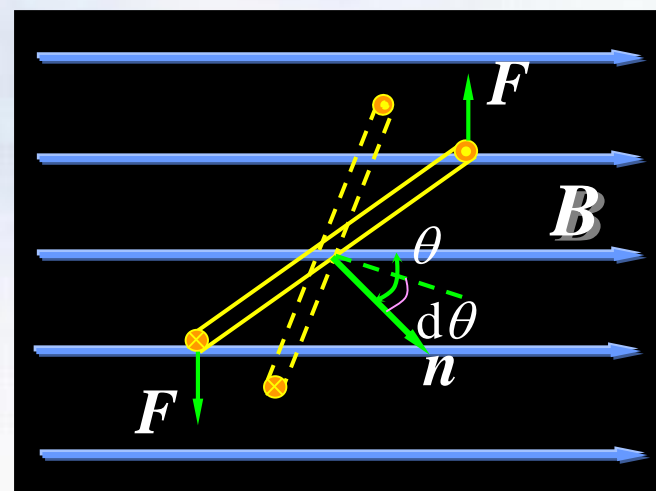
磁力所做的功等于电流乘以磁通量的变化。

2. 载流线圈在匀强磁场中转动时磁力所做的功

当线圈法线 \boldsymbol{n} 与 \boldsymbol{B} 成 θ 角时，磁力矩：

$$M = -BIS \sin \theta$$

线圈转过 $d\theta$ 角时，磁力做功：



$$\begin{aligned}dA &= Md\theta = -IBS \sin \theta d\theta \\ &= Id(BS \cos \theta) = Id\Phi\end{aligned}$$

当线圈从 θ_1 转到 θ_2 时，磁力做的总功：

$$A = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} Id\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi$$

例题7：

半径为 R 的圆形线圈，通以电流 I ，并放置在均匀磁场中，磁感应强度的大小为 B ，方向沿 y 轴正向并与线圈平面平行。试证明线圈所受对 z 轴的力矩为 BIS 。

解：在圆弧上取电流元 Idl ，该电流元所受受力的大小为：

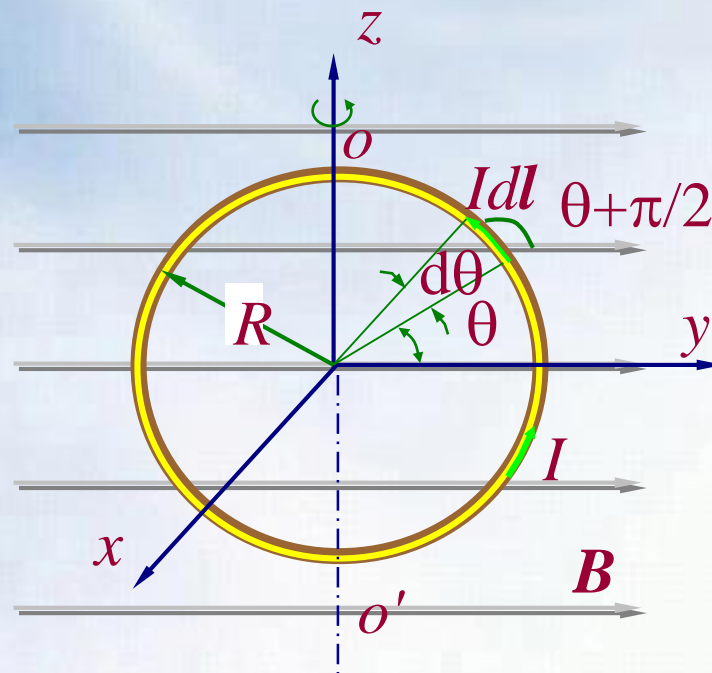
$$dF = Idl \cdot B \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

方向沿x轴负向，其力矩为：

$$dM = ydF =$$

$$yIdl \cdot B \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = yIBdl \cos \theta$$

上式中 $y = R \cos \theta$ ， $dl = Rd\theta$ 代入上式得：



$$dM = BIR^2 \cos^2 \theta d\theta$$

线圈右半部分所受合力矩大小为：

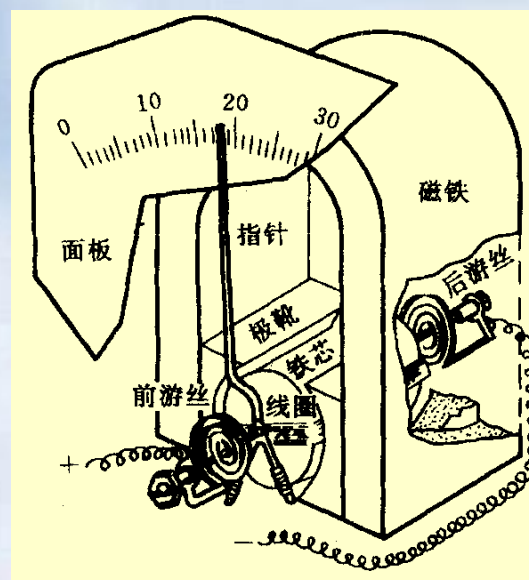
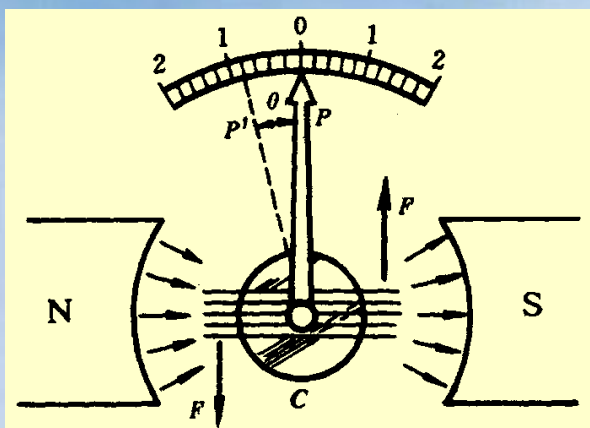
$$M_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} BIR^2 \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} BI\pi R^2$$

方向沿z轴正向，同理线圈左半部受力与右半部相同，但方向相反。整个线圈所受力矩大小：

$$M = 2M_1 = BI\pi R^2 = BIS$$

例题8：

磁电式电流计



永久磁铁的磁场均匀地沿径向分布，空气间隙放一可绕固定轴转动的线圈，轴的两端各有一游丝，其上固定一指针。通电时，线圈所受的力矩 M 的大小为（线圈平面的法向总与磁场方向垂直）：

$$M = NBIS$$

线圈在此力矩作用下转动时，游丝卷紧，产生的反力矩与转角成正比：

$$M' = k\theta$$

两力矩平衡时： $NBIS = k\theta$

$$I = \frac{k}{NBS} \theta = K\theta, \quad K = \frac{k}{NBS} \quad \text{为恒量。}$$

线圈转角与电流成正比，此即磁电式电流计工作原理。

若在电流计中通一脉冲电流，电流计怎样偏转？

设脉冲持续时间 t_0 ，线圈将受一冲量矩作用：

$$G = \int_0^{t_0} M dt = \int_0^{t_0} NBIS dt = NBS \int_0^{t_0} I dt = NBSq$$

$\int_0^{t_0} I dt = q$ 为脉冲电流通过时的总电量。

由于 t_0 极短，脉冲通过后，线圈获得一角速度 ω_0 ，按定轴转动角动量定理：

$$G = J\omega_0 - 0$$

J 为线圈的转动惯量，设线圈的最大偏转角为 θ ，由机械能守恒定律，线圈的初动能将转变为游丝的弹性势能：

$$\frac{1}{2}k\theta^2 = \frac{1}{2}J\omega_0^2$$

合并以上三式，得：

$$q = \frac{\sqrt{kJ}}{NBS} \theta$$

此即冲击电流计的工作原理。

例题9：

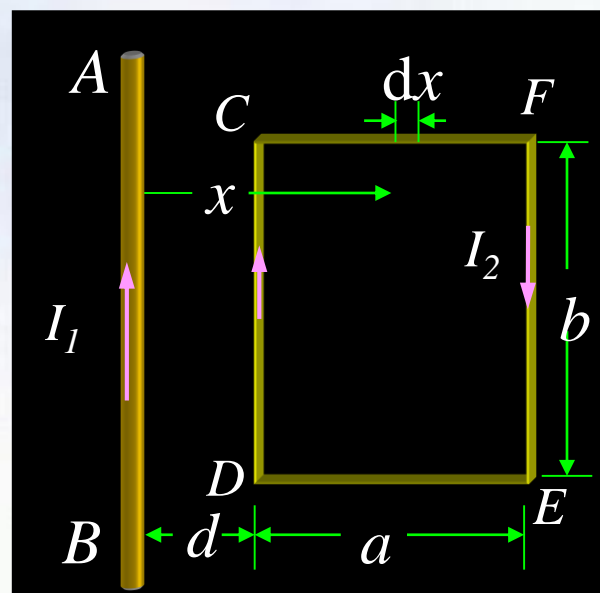
如图所示，无限长直导线 AB 内通有电流 I_1 ，与其共面的有一矩形线框 $CDEF$ ，通有电流 I_2 。 CD 、 EF 均平行于 AB 。 CF 长为 a ， EF 长为 b ， AB 与 CD 间距为 d 。试求 (1) 矩形线框 $CDEF$ 各边所受直导线的磁场力； (2) 矩形线框所受到的磁场合力。

解： (1) 根据安培力公式

$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ ，可求：

$$F_{CD} = I_2 b B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi d}$$

其方向垂直于 CD 向左。



$$F_{EF} = I_2 b B_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi(a+d)}$$

其方向垂直于 EF 向右。

对于 CF 段，由于 CF 边上各点的 \mathbf{B} 不相同，所以在其上取电流元 $I_2 dx$ ，积分可得

$$F_{CF} = F_{DE} = \int_d^{a+d} B I_2 dx = \int_d^{a+d} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{a+d}{d}$$

F_{CF} 的方向垂直 CF 向上， F_{DE} 的方向垂直 DE 向下。

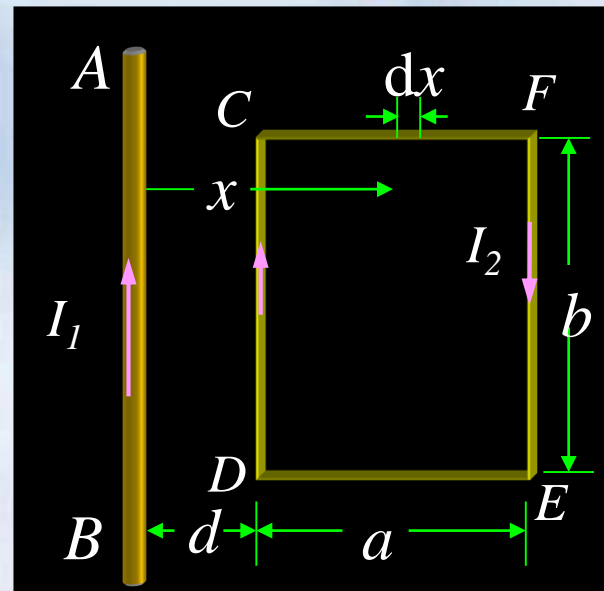
(2) 由(1)中的结果，可求得作用于矩形线框上的合力为

$$F = F_{CD} - F_{EF}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{a+d} \right)$$

由于 $F > 0$ ，则可知合力 F 与 F_{CD} 方向相同，向左。

例题10：

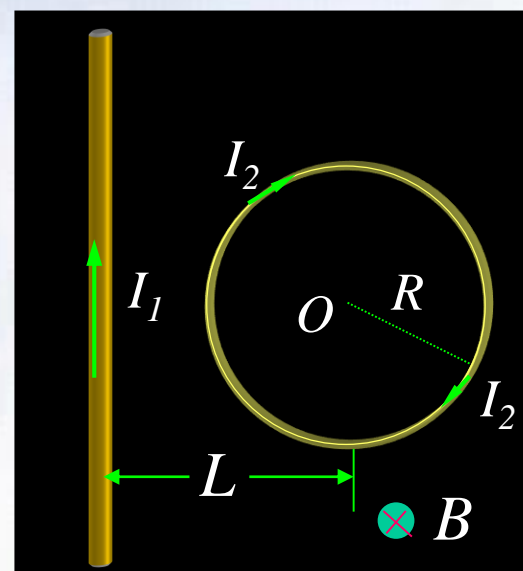


如图所示，无限长直导线中载有电流 I_1 ，在它旁边与其共面的半径为 R 的圆形线圈中载有电流 I_2 。圆心到导线的距离为 L ，两电流的方向如图所示。试求无限长直导线对圆线圈的磁场力。

解：

对圆线圈来说，由 I_1 激发的磁场的方向均垂直纸面向里，因而圆线圈各电流所受磁场力均沿径向向外。

分析可知，圆线圈上各电流元所受磁场力的y分量之和为零。因此只需计算x分量之和即可。

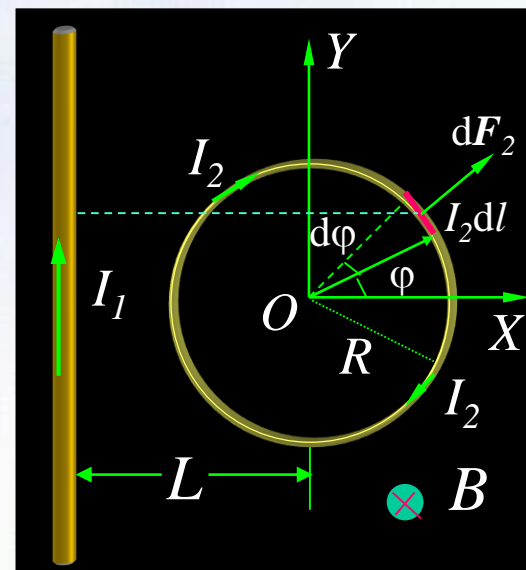


在圆线圈中任取电流 $I_2 d\mathbf{l}$ ，它所受安培力 $d\mathbf{F}_2$ 的方向沿径向向外，大小为

$$dF_2 = I_2 dl B = I_2 R d\varphi \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(L + R \cos \varphi)}$$

$d\mathbf{F}_2$ 的 x 分量为

$$\begin{aligned} dF_{2x} &= dF_2 \cos \varphi \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 R \cos \varphi d\varphi}{2\pi(L + R \cos \varphi)} \end{aligned}$$



故圆线圈所受作用力为

$$F_2 = F_{2x} = \int dF_{2x} = 2 \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{(L + R \cos \varphi)}$$

式中：

$$\int_0^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{(L + R \cos \varphi)} = \frac{\pi}{R} \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 - R^2}} \right)$$

代入上式，得

$$F_2 = F_{2x} = \mu_0 I_1 I_2 \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 - R^2}} \right)$$

因此：

$$\vec{F}_2 = F_{2x} \hat{x} = \mu_0 I_1 I_2 \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 - R^2}}\right) \hat{x}$$

由于 $L > \sqrt{L^2 - R^2}$

故 $F_2 < 0$ ，即 \mathbf{F}_2 与 \mathbf{i} 反向，指向无限长直导线， \mathbf{F}_2 为吸引力。

§ 12-5 带电粒子在电场和磁场中的运动

带电粒子在电场与磁场存在时的运动方程：

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

考虑到相对论效应后：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right) = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

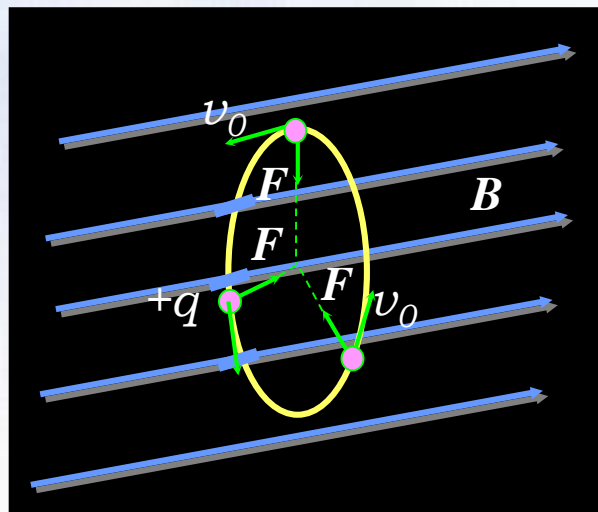
一、带电粒子在磁场中的运动

带电粒子可能以三种不同状态入射磁场：

1. \boldsymbol{v}_0 、 \boldsymbol{B} 相互平行，粒子做匀速直线运动

2. \boldsymbol{v}_0 垂直于 \boldsymbol{B} 入射，
洛伦兹力 $F = qv_0B$
起向心力的作用，因此：

$$qv_0B = m \frac{v_0^2}{R}$$

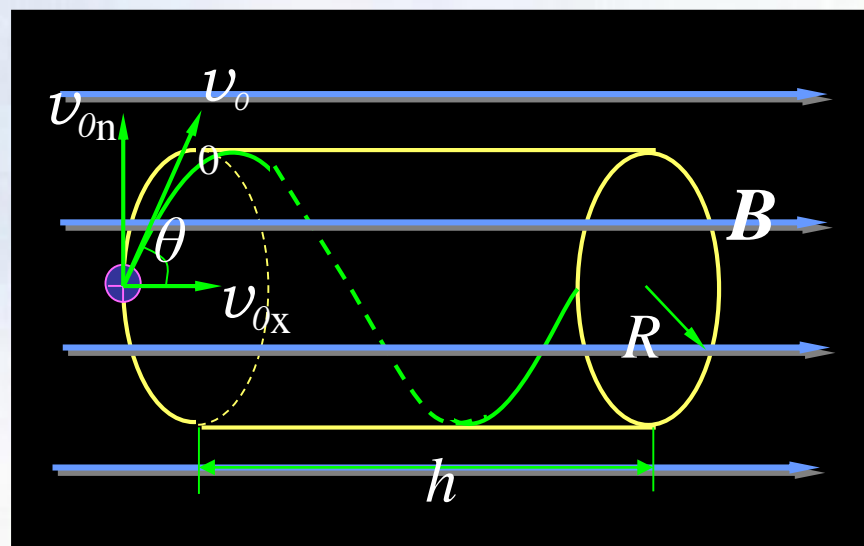


$$R = \frac{mv_0}{qB}$$

上式中 R 为粒子的圆形轨道半径。 q/m 称为荷质比。粒子绕轨道一周所需时间：

$$T = \frac{2\pi R}{v_0} = \frac{2\pi m}{qB}$$

3. \mathbf{v}_0 、 \mathbf{B} 成 θ 角，
可把 \mathbf{v}_0 分解成平行分量
 $v_{0x} = v_0 \cos\theta$ 和垂直分量
 $v_{0n} = v_0 \sin\theta$



带电粒子的运动轨道为一螺旋线，螺旋半径为：

$$R = \frac{mv_{0n}}{qB}$$

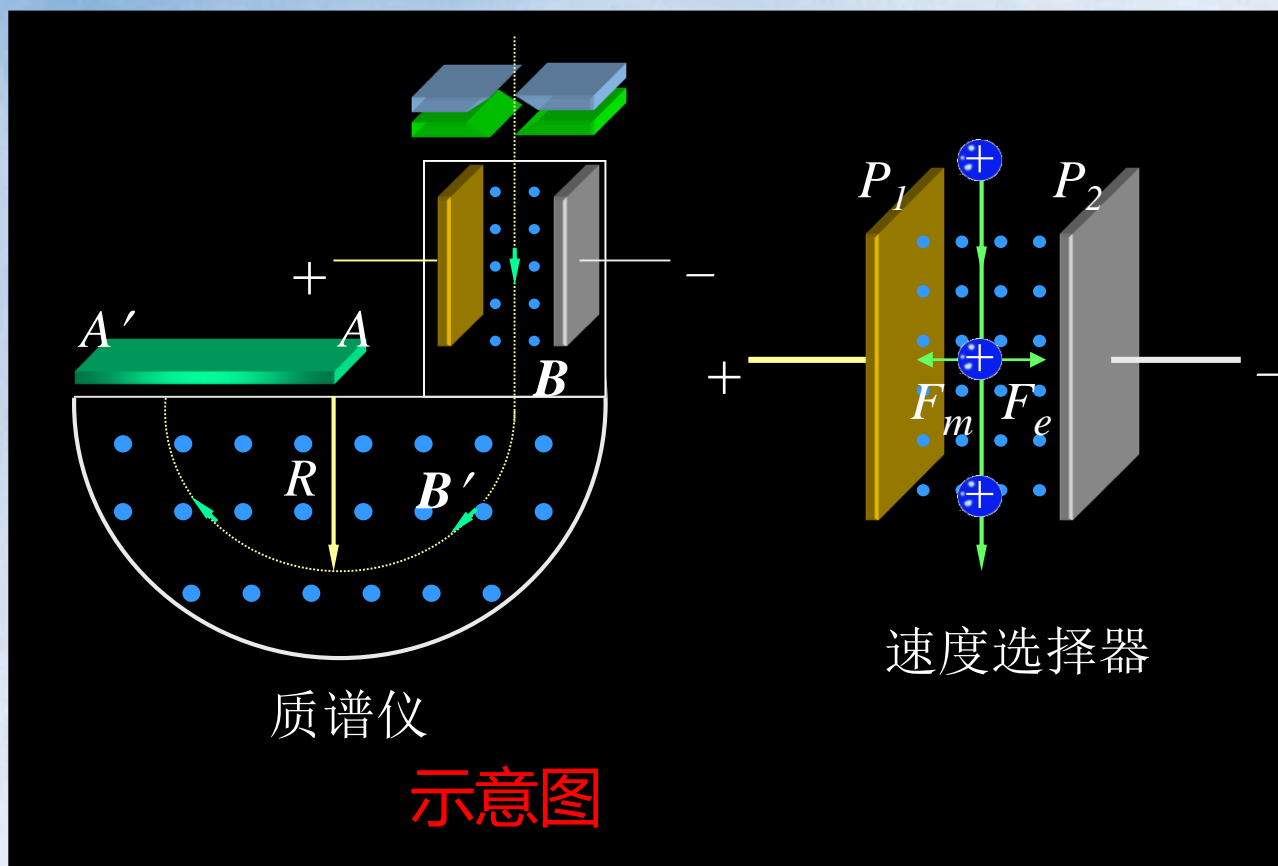
螺距为：

$$h = v_{0x}T = v_{0x} \frac{2\pi R}{v_{0n}} = v_{0x} \frac{2\pi m}{qB}$$

二、带电粒子在磁场中运动的应用

1. 质谱仪

利用磁场和电场的组合把电荷相同但质量不同的粒子分离开来的一种仪器。



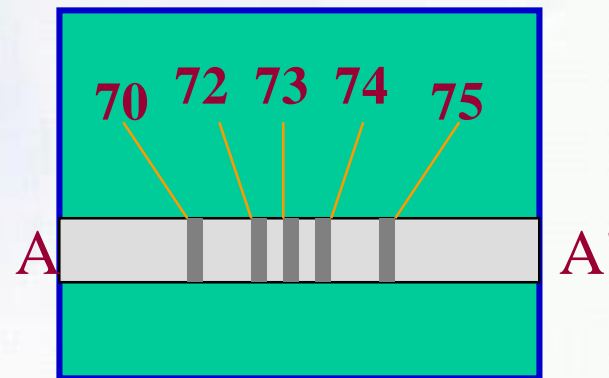
速度选择器原理：

$$qvB = qE, \quad v = \frac{E}{B}$$

粒子进入感应区后，做圆周运动，有：

$$\frac{q}{m} = \frac{v}{RB'} = \frac{E}{RBB'}$$

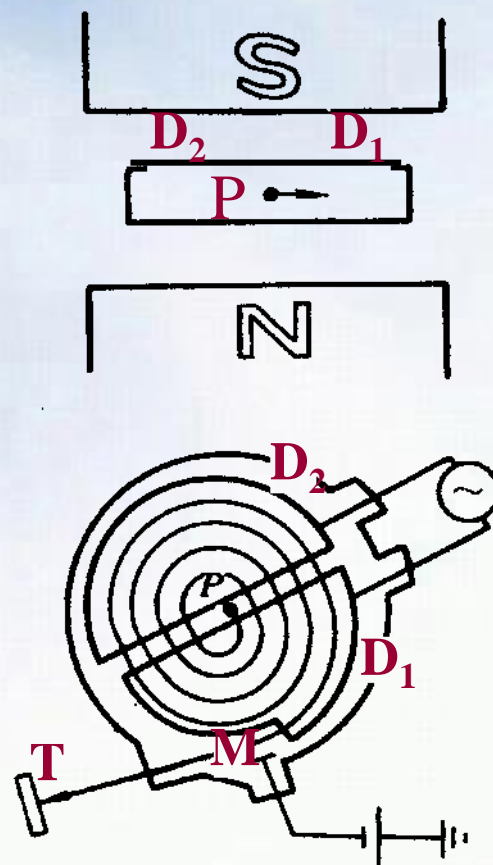
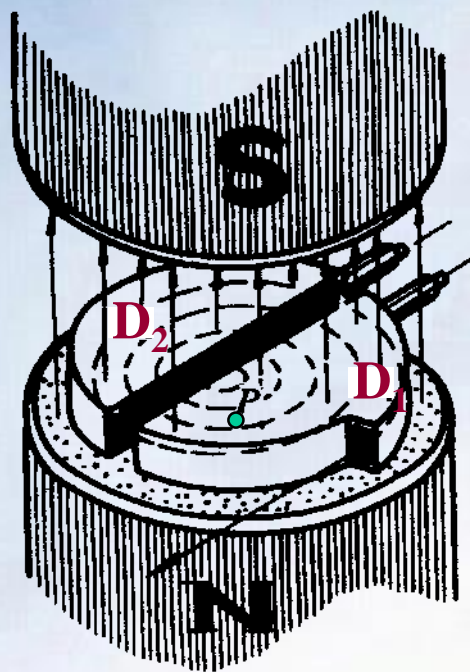
上式中R、E、B、B'均可测量，故荷质比可确定。



锆的质谱

2. 回旋加速器

利用电场和磁场的联合作用，用多次加速获取高能粒子的装置。



通有高频电压的两个*D*形铜盒电极置于均匀强磁场中，粒子在两盒缝隙中加速，进入半盒内电子的回旋半径：

$$R = \frac{mv}{qB}$$

电子在两半盒内的回旋时间：

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

如果加速器的电场振荡频率为： $\nu = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$

粒子到达缝隙时，会被反复加速，最后引出的半径为 R ，则：

$$v = \frac{q}{m} BR$$

而粒子的动能为：

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2}{2m}B^2R^2$$

上式表明，只要回旋半径足够大，就能获得足够大的能量。

3. 同步回旋加速器

由于相对论效应，使得回旋加速器不能无限增大半径来获取能量，当粒子速度接近光速时，粒子的质量：

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

两半盒内运动粒子所需的时间：

$$T = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi m_0}{qB \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

为保证电子通过间隙时能够加速，则要求：

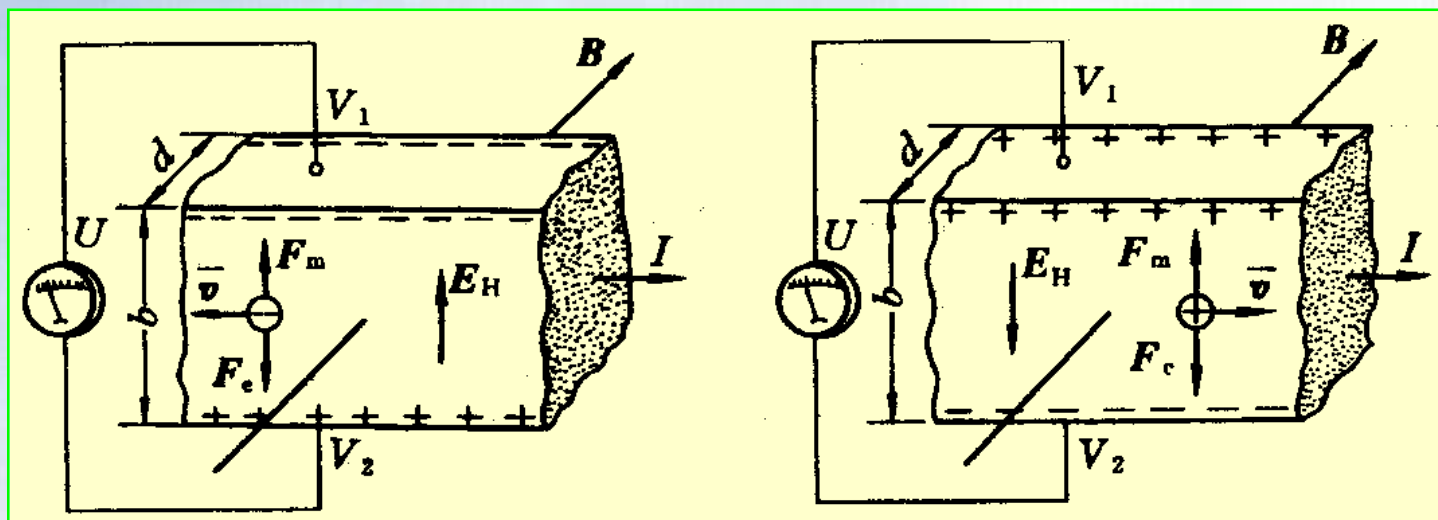
$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{qB}{2\pi m_0} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

式中 q 、 B 不变，通过改变高频电压频率来达到上式的平衡，称为同步加速器。

三、霍耳效应

1879年E.C.Hall首先观察到此效应。

将载流导体薄板垂直置于磁场中，在垂直于磁场与电流方向的上、下两端出现微弱的电势差。



实验结果：霍耳电势差与I、B成正比，与薄板沿B方向的厚度d成反比：

$$V_1 - V_2 \propto \frac{IB}{d} \quad \text{或写成} \quad U = V_1 - V_2 = R_H \frac{IB}{d}$$

式中 R_H 称为霍耳系数。

霍耳效应是由于导体中的载流子在磁场中受洛伦兹力的作用，发生横向漂移的结果。导体中的自由电子受洛伦兹力为：

$$F_m = e\vec{v}B$$

横向漂移的结果产生电荷积累，进而产生附加电场，称为霍耳电场。电子受电场力为：

$$F_e = eE_H$$

达到动态平衡时：

$$eE_H = e\bar{v}B \quad \text{或} \quad E_H = \bar{v}B$$

霍耳电势差：

$$V_1 - V_2 = -E_H b = -\bar{v}Bb$$

电流： $I = ne\bar{v}db$ 代入 $\bar{v}b = \frac{I}{neb}$ 得：

$$U = V_1 - V_2 = -\frac{IB}{ned}$$

对于正电荷:

$$U = V_1 - V_2 = \frac{IB}{nqd}$$

比较以上各式, 霍耳系数为:

$$R_H = -\frac{1}{ne} \quad \text{或} \quad R_H = \frac{1}{nq}$$