

第十四章 电磁感应

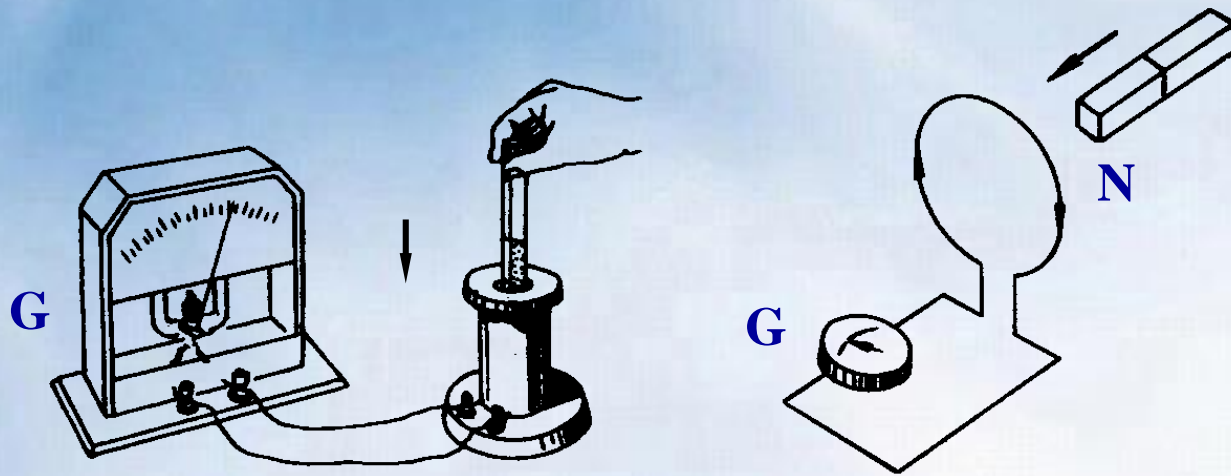
§ 14-1 电磁感应的基本定律

自奥斯特发现电流的磁效应后，许多物理学家致力于其逆效应的研究。1831年，英国物理学家**法拉第**经过十年研究，终于发现了电磁感应现象。

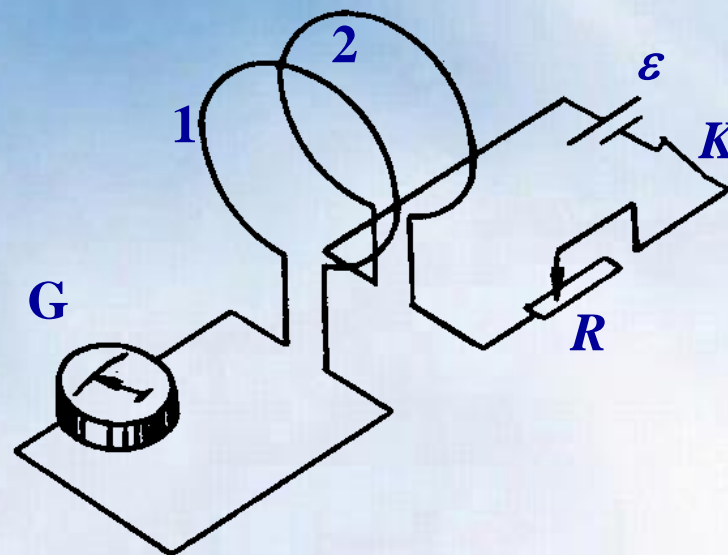
一、法拉第实验



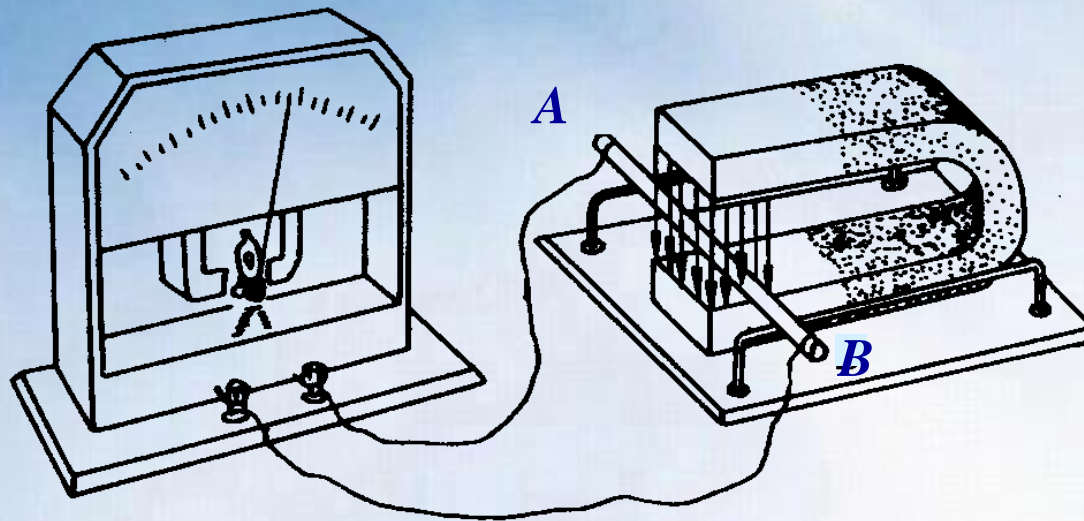
Michael Faraday
1791-1867



磁铁棒与线圈有相对运动时的电磁感应现象



线圈中电流改变时的
电磁感应现象

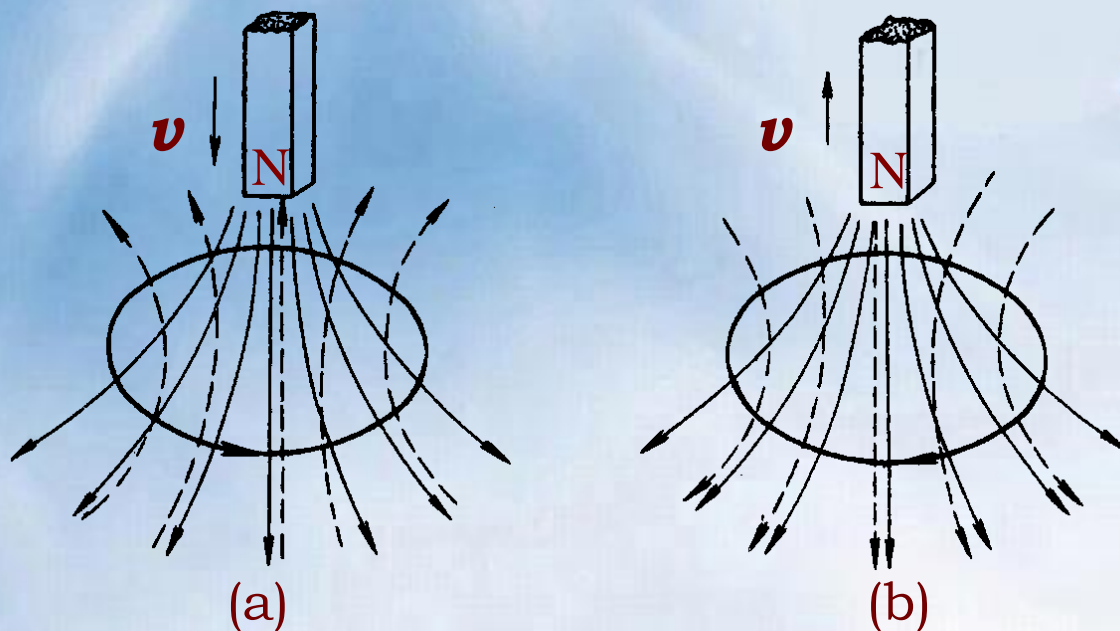


金属棒在磁场中运动
时的电磁感应现象

电磁感应实验现象：当穿过一个闭合导体回路内的磁通量发生变化时，不管这种变化是什么原因引起的，闭合回路中都产生感应电流。

二、楞次定律

1833年，**楞次**得出确定感应电流方向的法则，称为楞次定律：**闭合回路中产生感应电流的方向，总是使它所激发的磁场去阻止原磁通量的变化。**



感应电流的方向判断

楞次定律是能量守恒定律的体现。当磁铁棒接近线圈时，线圈中所激发的感应电流产生斥力阻止铁棒运动，此时外力必须克服此斥力做功。外力所做的功，部分转化为电能。

三、法拉第电磁感应定律

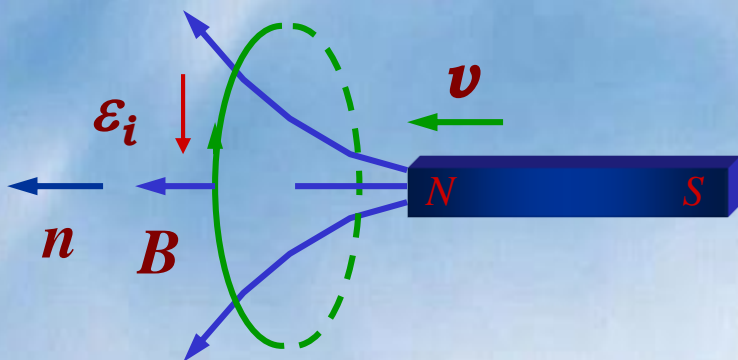
法拉第从实验总结出：通过回路所包围面积的磁通量发生变化时，回路中将产生感应电动势 ε_i ，它正比于磁通量的时间变化率。

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

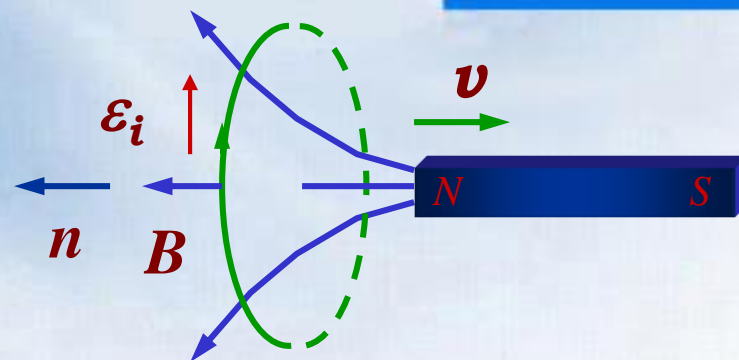
式中负号反映了感应电动势的方向，是楞次定律的数学形式。

确定 ε_i 的符号规则：

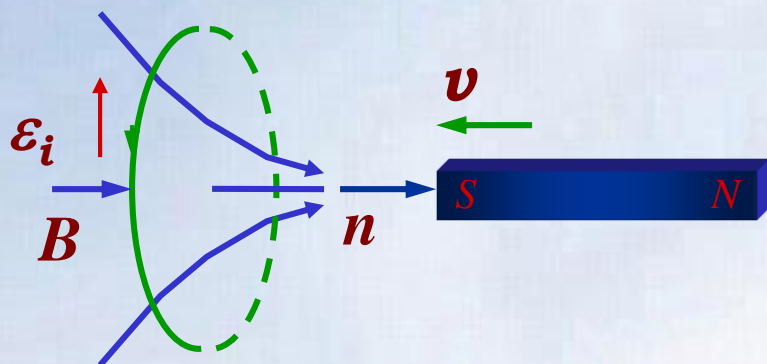
1. 选定一绕行方向为正，用右手法则确定 \mathbf{n} 方向；
2. 依照 \mathbf{n} 方向来确定 Φ 的正负；
3. Φ 的正负确定后，再确定 $d\Phi/dt$ 正负；
4. ε_i 的正负(参考选定的绕行方向)和大小由 $-d\Phi/dt$ 决定。



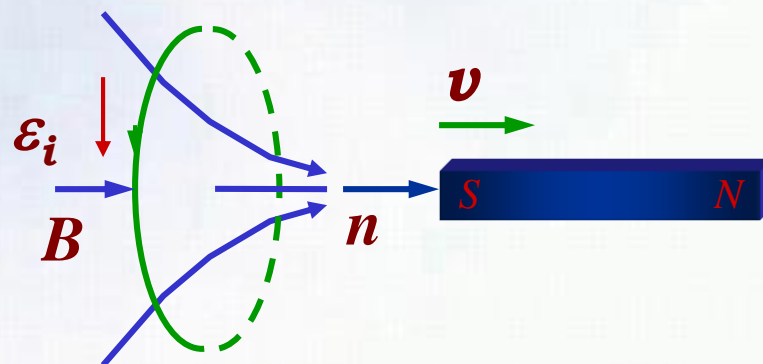
(a) $\Phi(t)$ 为正, $d\Phi/dt > 0$, $\varepsilon_i < 0$



(b) $\Phi(t)$ 为正, $d\Phi/dt < 0$, $\varepsilon_i > 0$



(c) $\Phi(t)$ 为正, $d\Phi/dt > 0$, $\varepsilon_i < 0$



(d) $\Phi(t)$ 为正, $d\Phi/dt < 0$, $\varepsilon_i > 0$

对于N匝线圈，总感应电动势：

通过各匝线圈的磁通量不等：

$$\varepsilon_i = -\left(\frac{d\Phi_1}{dt} + \frac{d\Phi_2}{dt} + \cdots + \frac{d\Phi_N}{dt}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^N \Phi_i\right) = -\frac{d\Psi}{dt}$$

通过各匝线圈的磁通量相等：

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(N\Phi)}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}$$

$\Psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i$ 称为线圈的**全磁通**，磁通量相

等时， $\Psi = N\Phi$ 称为线圈的**磁通匝链数**。

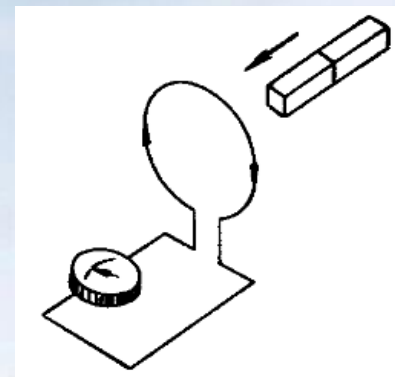
回路中的感应电流：

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{N}{R} \frac{d\Phi}{dt}$$

由于 $I = dq/dt$ ，则：

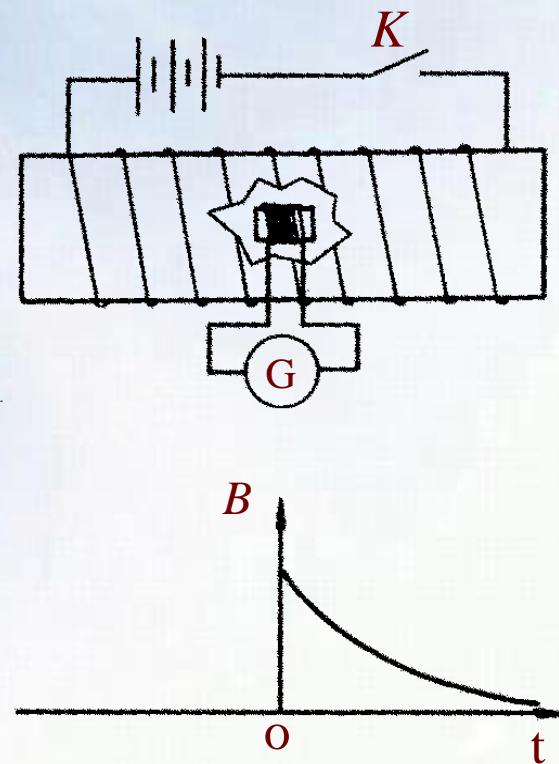
$$q = \int_{t_1}^{t_2} I_i dt = -\frac{N}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{N}{R} (\Phi_1 - \Phi_2)$$

流过闭合回路的感生电荷与磁通量变化有关，而与磁通量变化的快慢无关。



例题 I:

有一长直螺线管，在管的中部放置一个与它同轴、面积 $S=6\text{cm}^2$ 、共绕有 $N=10$ 匝、总电阻 $R=2\Omega$ 的小线圈。开始时螺线管内的恒定磁场为 $B_0=0.05\text{T}$ ，切断电源后磁场按指数规律 $B=B_0e^{-t/\tau}$ 下降到零，式中 $\tau=0.01\text{s}$ 。求在小线圈内产生的最大感应电动势 ε_{\max} 及通过小线圈截面的感生电荷量 q 。



解：通过单匝小线圈的磁通量为：

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B_0 S e^{-t/\tau}$$

因此，在小线圈中产生的总磁感应电动势为：

$$\varepsilon_i = \left| N \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{NB_0 S}{\tau} e^{-t/\tau}$$

小线圈内的磁通按指数变化，因而感应电动势也按指数变化，在 $t=0$ 时，电动势最大：

$$\varepsilon_{\max} = \frac{NB_0 S}{\tau} = 0.03V$$

在 $t = 0 \sim \infty$ ，通过小线圈的感生电荷量为

$$\begin{aligned} q &= \int_0^\infty \frac{\mathcal{E}_i}{R} dt = \frac{N}{R} \int \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| dt = \frac{N}{R} \int_{\Phi_0}^0 |d\Phi| = \frac{N}{R} \Phi_0 = \\ &= \frac{N}{R} B_0 S = 1.5 \times 10^{-4} \text{ C} \end{aligned}$$

例题2:

一长直导线中通有变交电流 $I = I_0 \sin \omega t$ ，式中 I 表示瞬时电流， I_0 是电流振幅， ω 是角频率。在长直导线旁平行放置一矩形线圈，线圈平面与直导线在同一平面内，线圈形状参数如图，求任一瞬时线圈中的感应电动势。

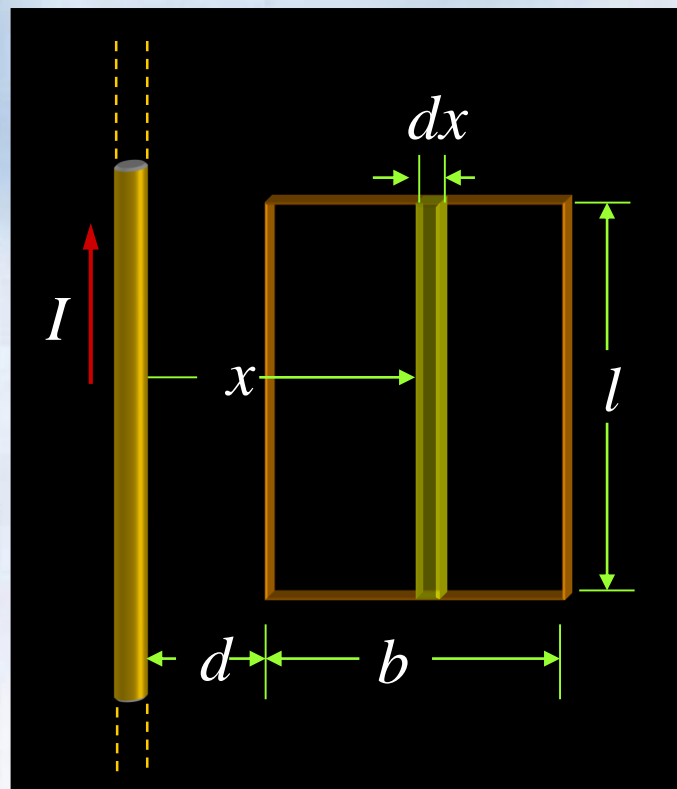
解：在某一瞬时，距直导线为 x 处的磁感应强度为：

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{x}$$

选顺时针方向作为矩形线圈绕行的正向，则通过图中阴影面积 $dS=ldx$ 的磁通量为：

$$d\Phi = B dS = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{x} l dx$$

在该瞬时 t ，通过整个线圈的磁通量为：



$$\Phi = \int d\Phi = \int_d^{d+b} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{x} l dx = \frac{\mu_0 l I_0 \sin \omega t}{2\pi} \ln\left(\frac{d+b}{d}\right)$$

由于电流随时间变化，磁通量也随时间变化，故线圈内的磁感应电动势为：

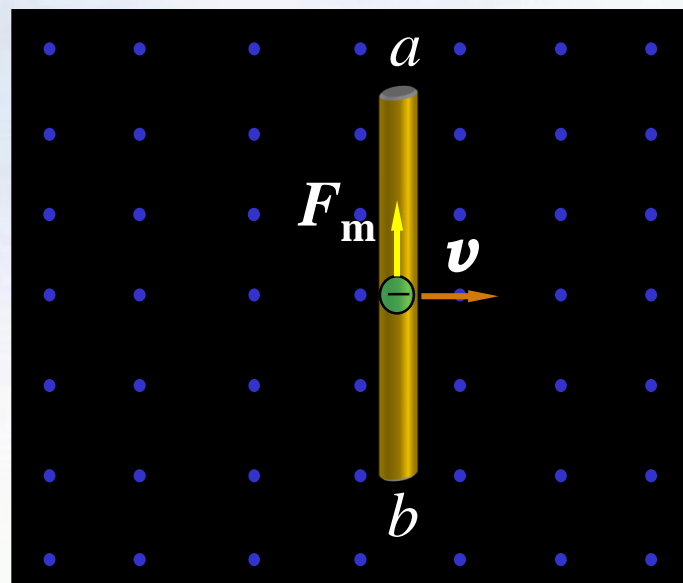
$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 l I_0 \omega}{2\pi} \ln\left(\frac{d+b}{d}\right) \cos \omega t$$

§ 14-2 动生电动势

由磁通量变化产生的感应电动势，可分为磁感应强度变化引起，和导体在磁场中运动或回路的形状、位置的变动而引起。前者称感生电动势，后者称动生电动势。

导体棒在磁场中运动，棒内电子也随之运动，受洛仑兹力（如图）：

$$\vec{F}_m = -e\vec{v} \times \vec{B}$$



在此力作用下，电子向 a 端聚集，形成 $b \rightarrow a$ 方向的电场。当电子受此电场力作用与洛仑兹力作用达到平衡时，棒内电子不再发生宏观流动。引入非静电场：

$$\vec{E}_K = \vec{F}_m / (-e) = \vec{v} \times \vec{B}$$

E_K 的量值为单位正电荷所受的非静电力。导体在磁场中运动时，导体棒相当于电源，此电源中的非静电力为洛仑兹力，其非静电场强用 E_K 表示。

由电动势定义，导体棒上的动生电动势为：

$$\mathcal{E}_i = \int_{-}^{+} \vec{E}_K \cdot d\vec{l} = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = Bvl$$

在一般情况下，磁场可不均匀、导体各线元速度可不同、磁场与运动速度可以不垂直等，因而动生电动势可表示为：

$$d\mathcal{E}_i = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

整个导体中的电动势：

$$\mathcal{E}_i = \int d\mathcal{E}_i = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

若导体构成回路，且整个回路均有运动，则：

$$\mathcal{E}_i = \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

二、洛仑兹力做功问题的讨论

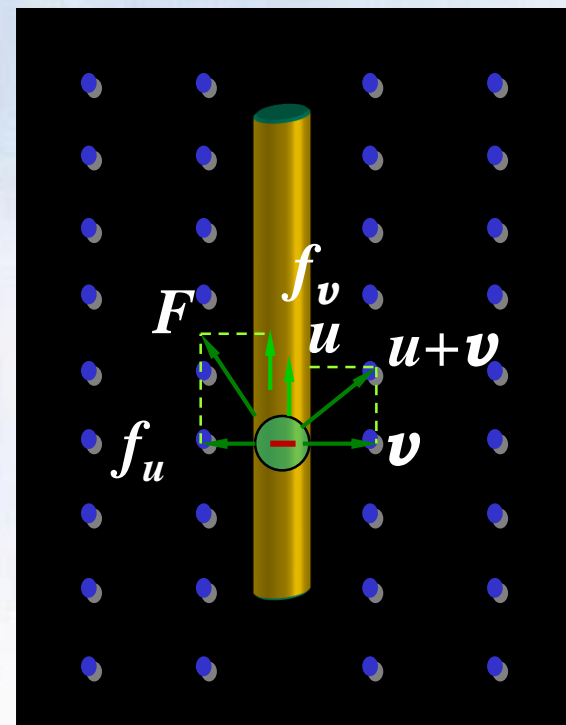
洛仑兹力恒与电荷运动方向垂直，因而不做功，而动生电动势是由于洛仑兹力移动单位正电荷产生的，似乎又做功，如何解释这矛盾？

如图，洛仑兹力使电子获得速度 \mathbf{u} ，因此实际电子的运动速度为 $(\mathbf{v} + \mathbf{u})$ ，所受的总洛仑兹力为：

$$\vec{F} = -e(\vec{v} + \vec{u}) \times \vec{B}$$

上式表明洛仑兹力与 $(\mathbf{v} + \mathbf{u})$ 垂直，对电子不做功。但其中的分力：

$$\vec{f}_v = -e(\vec{v} \times \vec{B})$$



f_v 对电子做正功，形成动生电动势。而另一分力：

$$\vec{f}_u = -e(\vec{u} \times \vec{B})$$

此力对电子做负功。由于 f_u 方向与棒的运动方向相反，阻碍导体运动，而要保持导体运动，必须提供外力，此外力正是另一个分力 f_v 的来源。

洛伦兹力总体上不做功，它只是通过一个分力做负功迫使外界提供能量，而通过另一个分力做正功，将部分外界提供的能量转化为电能。

三、动生电动势的计算

①按定义计算:

$$\mathcal{E}_i = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

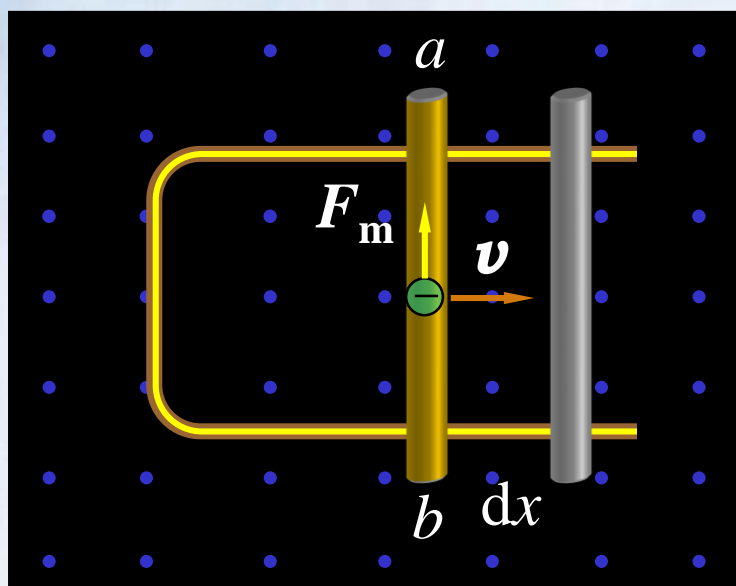
动生电动势的方向:

$$\mathcal{E}_i > 0 \quad a \rightarrow b, \quad \mathcal{E}_i < 0 \quad b \rightarrow a。$$

②按法拉第电磁感应定律计算:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

方法②一般用于闭合回路，若对导体棒运动这样的不闭合回路，需做辅助线构成假想回路(一般取导体棒扫过区域的固定边界线)。



计算动生电动势的具体步骤

1. 首先，沿运动导线假定一个电动势的指向；
2. 按电动势的指向，在导线上任取一个线元矢量 $d\mathbf{l}$ ；
3. 根据线元 $d\mathbf{l}$ 的速度 \mathbf{v} 和该处的磁感强度 \mathbf{B} 以及两者之间小于 180° 的夹角 θ ，按矢积的定义，求 $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 。
 $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 仍是一个矢量，其大小为 $v B \sin \theta$ ；方向按右手螺旋法则确定；
4. 设矢量 $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 与 $d\mathbf{l}$ 之间小于 180° 的夹角为 β ，则按标积的定义， $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ 乃是一个标量，其值即为线元 $d\mathbf{l}$ 上的动生电动势，即

$$d\varepsilon_i = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = (vB \sin \theta) dl \cos \beta \quad (a)$$

5. 最后，按电动势的指向对上式(a)进行积分，得整个运动导线上的动生电动势，即

$$\varepsilon_i = \int_a^b vB \sin \theta \cos \beta dl \quad (b)$$

6. 根据求出的动生电动势 ε_i 的正、负，判定其指向。若 $\varepsilon_i > 0$ ，其指向与事先假定的指向一致；若 $\varepsilon_i < 0$ ，其指向则与假定的指向相反。

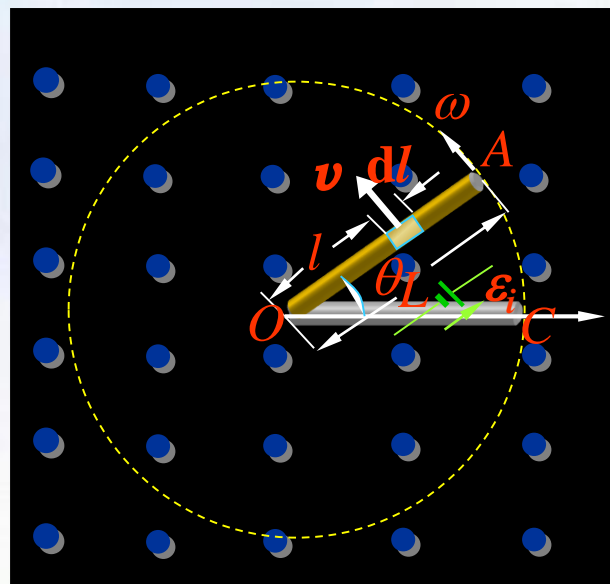
例题3:

在均匀磁场 ($B=1.0\times 10^{-2}\text{T}$) 中, 有 $L=0.5\text{m}$ 的铜棒逆时针方向绕O轴转动, 转速为50转/秒。求铜棒中的动生电动势, 以及OA之间的电势差。

解: ①先用电动势定义式计算:

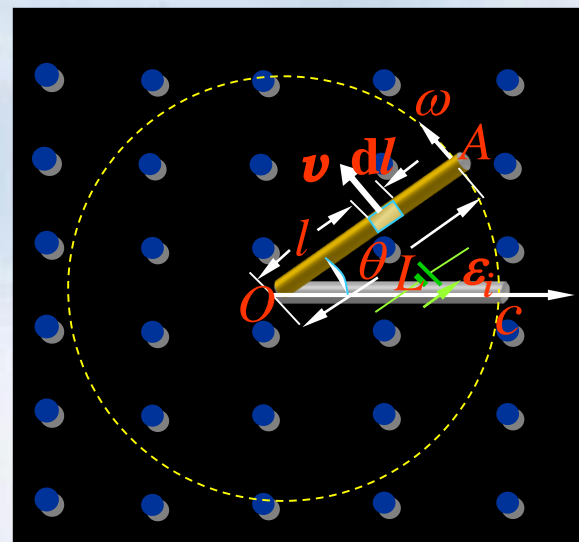
选OA为电动势的指向, 取线元 $d\vec{l}$, 速度 $\vec{v}=l\omega$, 故 $d\vec{l}$ 中的动生电动势为:

$$d\varepsilon_i = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = vBdl$$



整个铜棒上的电动势为：

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \int_O^A d\varepsilon_i = \int_0^L B\omega l dl = \frac{1}{2}\omega BL^2 \\ &= \frac{2\pi \times 50 \times 0.01 \times (0.5)^2}{2} = 0.39(V)\end{aligned}$$



由于 $\varepsilon_i > 0$ ，所以其方向为 $O \rightarrow A$ 。断路时电源两端的电势差就是电动势，故：

$$U_{OA} = U_O - U_A = -\varepsilon_i = -0.39(V)$$

②按法拉第电磁感应定律计算：

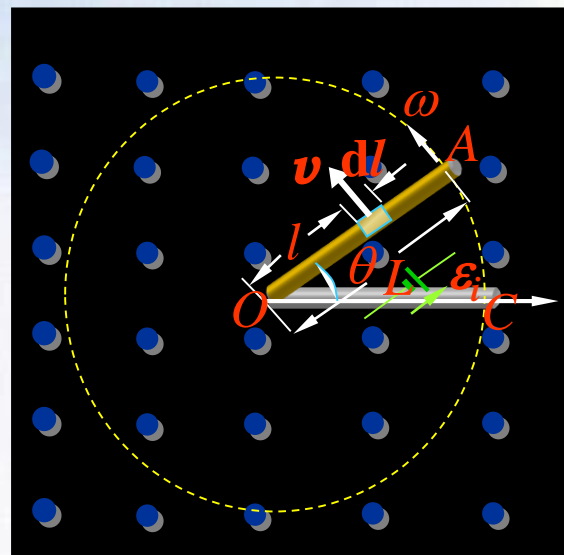
设棒从OC位置运动至OA位置，扇形闭合回路OCA的面积 $S = L^2 \theta / 2$ ，在t时刻穿过回路(默认方向: $A \rightarrow O \rightarrow C$)所围面积的磁通量：

$$\Phi = B \cdot S = B \frac{L^2}{2} \theta$$

则动生电动势：

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left[B \cdot \frac{L^2}{2} \theta \right] = -\frac{1}{2} \omega B L^2$$

此结果与解①的结果相同。



如果是铜盘转动，可把铜盘想象成无数根铜棒并联组成，由于是并联，铜盘边缘与中心的电势差与每根铜棒的电势差相同。

第七周

第16章 电磁感应

§ 16.3, § 16.4, § 16.5, § 16.6(一般了解), § 16.7, § 16.8, § 16.9(一般了解), § 16.10

作业: P435 16-10, 16-12, 16-14
* 16-15, 16-26

例题4:

在磁场中转动线圈的感应电动势：发电机

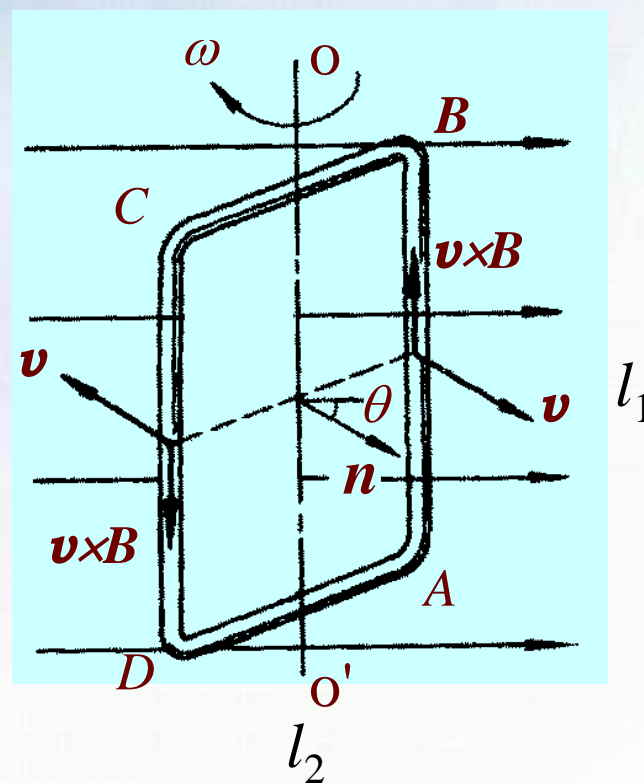
按法拉第电磁感应定律计算：

线圈平面的法线与 \mathbf{B} 之间的夹角为 θ 时的磁通量为：

$$\Phi = BS \cos \theta \quad \text{则:}$$

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = NBS \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{式中: } \frac{d\theta}{dt} = \omega$$



$$\varepsilon_i = NBS \omega \sin \omega t$$

令: $\varepsilon_0 = NBS \omega$ 则:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 \sin \omega t$$

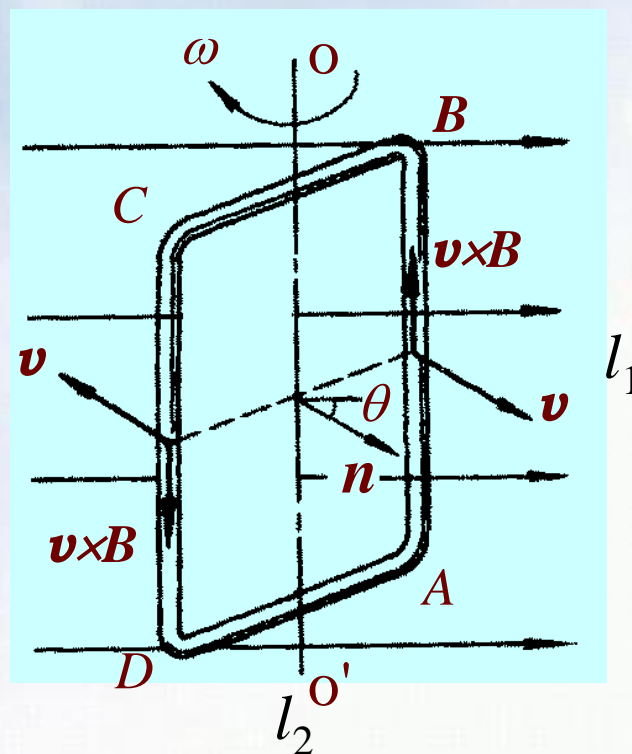
用电动势定义式计算:

当 \mathbf{n} 与 \mathbf{B} 的夹角为 θ 时, $\theta = \omega t$

$$\vec{E}_K = \vec{v} \times \vec{B}$$

对于AB段和CD段有:

$$E_{K_{AB}} = vB \sin \theta = E_{K_{CD}} = vB \sin(\pi - \theta)$$



设 $AB=CD=l_1$, $BC=DA=l_2$, \mathbf{E}_K 沿ABCD的线积分为:

$$\varepsilon_i = N \oint \vec{E}_K \cdot d\vec{l} = 2Nl_1 E_K = 2Nl_1 v B \sin \theta$$

又AB、CD段的线速度为 $v = \omega l_2 / 2$, 代入上式得:

$$\varepsilon_i = Nl_1 l_2 \omega B \sin \omega t = NSB \omega \sin \omega t = \varepsilon_0 \sin \omega t$$

得到同样的结果。

BC及DA段电动势? $(\vec{v} \times \vec{B}) \perp \overrightarrow{BC}$

§ 14-3 感生电动势 涡旋电场

一、感生电动势

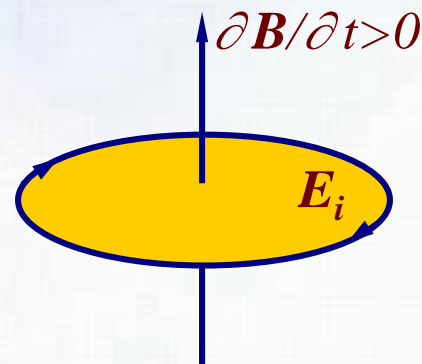
Maxwell假设：不论空间有无导体存在，变化的磁场总是在其周围激发一种电场，这种电场具有涡旋性，称为感生电场或涡旋电场。

法拉第电磁感应定律可表示为：

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

二、涡旋电场的性质

- ① 从场的观点看，涡旋电场可在任意有变化磁场的空间存在，而不依赖于是否有导体存在。
- ② 当有导体存在时，显示出感应电流。
- ③ 感生电场是有旋场，与 $\partial \mathbf{B} / \partial t$ 的方向如图所示。



三、感生电动势的计算

- ① 按法拉第电磁感应定律计算；

②若磁场分布具有对称性，可先求出 \mathbf{E}_i ，再按公式

$$\mathcal{E} = \int_a^b \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$$

计算一段导体 ab 上的感生电动势。

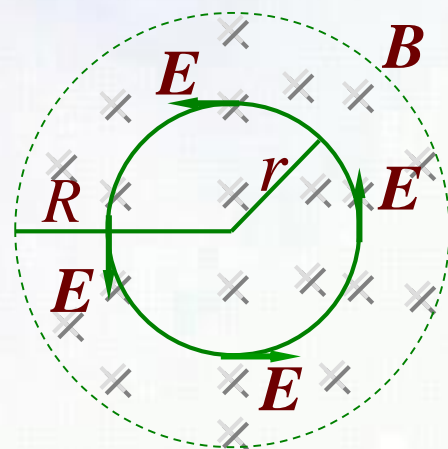
例题5:

在半径为 R 的圆柱形空间存在着均匀磁场，如图所示。当此磁场正以 dB/dt 的速率增大时，求圆柱体内外涡旋电场的分布？

解：由磁场变化的对称性，涡旋电场也具对称性。取同轴圆周为积分回路 L ，顺时针为绕行正向， \vec{n} 与 \vec{B} 同向。

由式：

$$\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$



(1) $r < R$ 的区域 $E_i \cdot 2\pi r = -\frac{dB}{dt} \cdot \pi r^2$

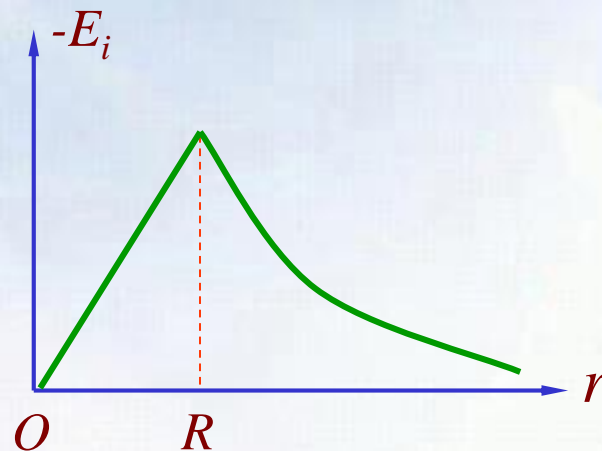
$$E_i = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

负号“-”表示 E_i 的方向与回路绕行方向相反。

(2) $r > R$ 的区域，因磁场集中在圆柱体内，故有：

$$E_i \cdot 2\pi r = -\frac{dB}{dt} \cdot \pi R^2$$

$$E_i = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$



例题6:

若在上题的变化磁场中放置一长为 L 的细棒 ab ，与圆心 o 的垂直距离为 h ，求棒 ab 上的感生电动势。

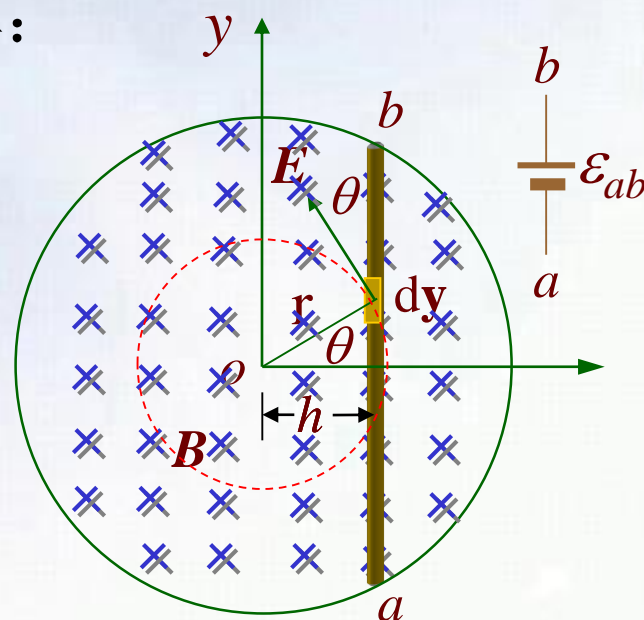
解：(1)利用感生电动势定义求解：

$r < R$ 的区域

$$E_i = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

方向如图；

在棒上任取一线元 dy ，与 E_i 的夹角为 θ ， dy 的感生电动势为：

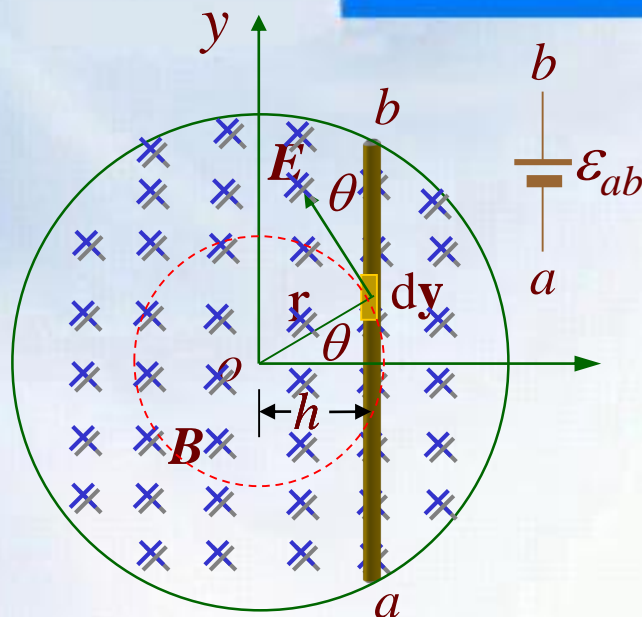


$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_i &= \vec{E}_i \cdot d\vec{y} = E_i \cos \theta \cdot dy \\
 &= \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \frac{h}{r} dy = \frac{h}{2} \frac{dB}{dt} dy
 \end{aligned}$$

于是棒 ab 上的感生电动势为：

$$\varepsilon_i = \int_a^b d\varepsilon_i = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{h}{2} \frac{dB}{dt} \cdot dy = \frac{hL}{2} \frac{dB}{dt}$$

(2)用法拉第电磁感应定律求解：



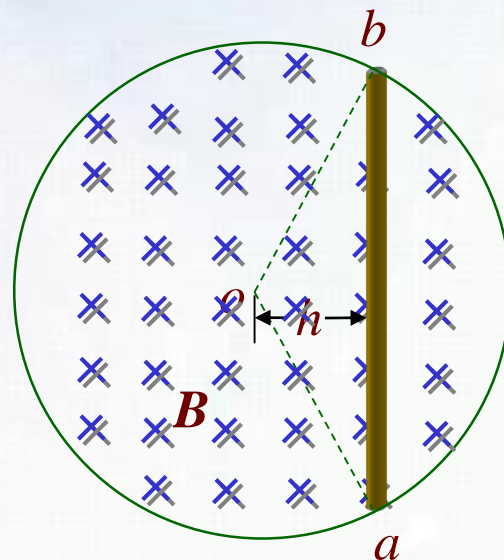
作辅助线 oa 、 ob 构成假想回路 $obao$ 。由于 E_i 为同心圆， ao 、 bo 段上 E_i 垂直于 $d\mathbf{l}$ ，故在辅助线上的感生电动势为零。回路 $obao$ 上的感生电动势即为 ba 段 ε_i ，穿过回路所包围面积的磁通量为：

$$\Phi = BS = B \cdot \frac{1}{2} hL = \frac{1}{2} BhL$$

则：

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{hL}{2} \frac{dB}{dt}$$

与回路方向相反，即 ε_i 的方向为 $a \rightarrow b$ 。

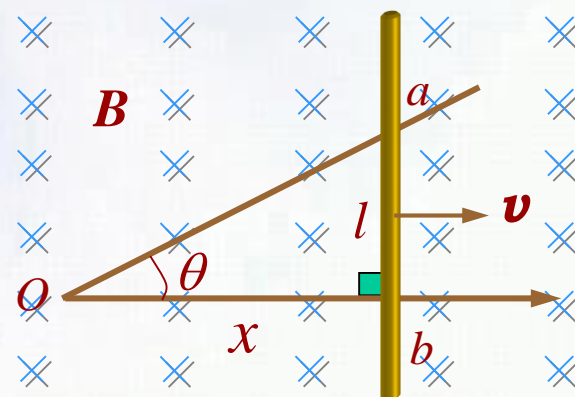


例题7:

如图所示，在均匀磁场中有一金属框架 $oabo$ ， ab 边以速率 v 作平行于 x 轴的匀速滑动，已知 $\angle aob = \theta$ ， $ab \perp Ox$ ，磁场随时间变化规律为 $B = t^2/2$ 。试求任意时刻 t 金属框中感应电动势的大小和方向。

解：由于 \mathbf{B} 随时间变化，同时 ab 导线切割磁力线，故回路中既存在感生电动势，又存在动生电动势。

由法拉第电磁感应定律可知， t 时刻金属框中感应电动势的大小为（取绕行方向为 $oabo$ ）：



$$\begin{aligned}\varepsilon &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(BS)}{dt} = -B\frac{dS}{dt} - S\frac{dB}{dt} \\ &= -B\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}lx\right) - \frac{1}{2}lx\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}t^2\right) = \varepsilon_{\text{动}} + \varepsilon_{\text{感}}\end{aligned}$$

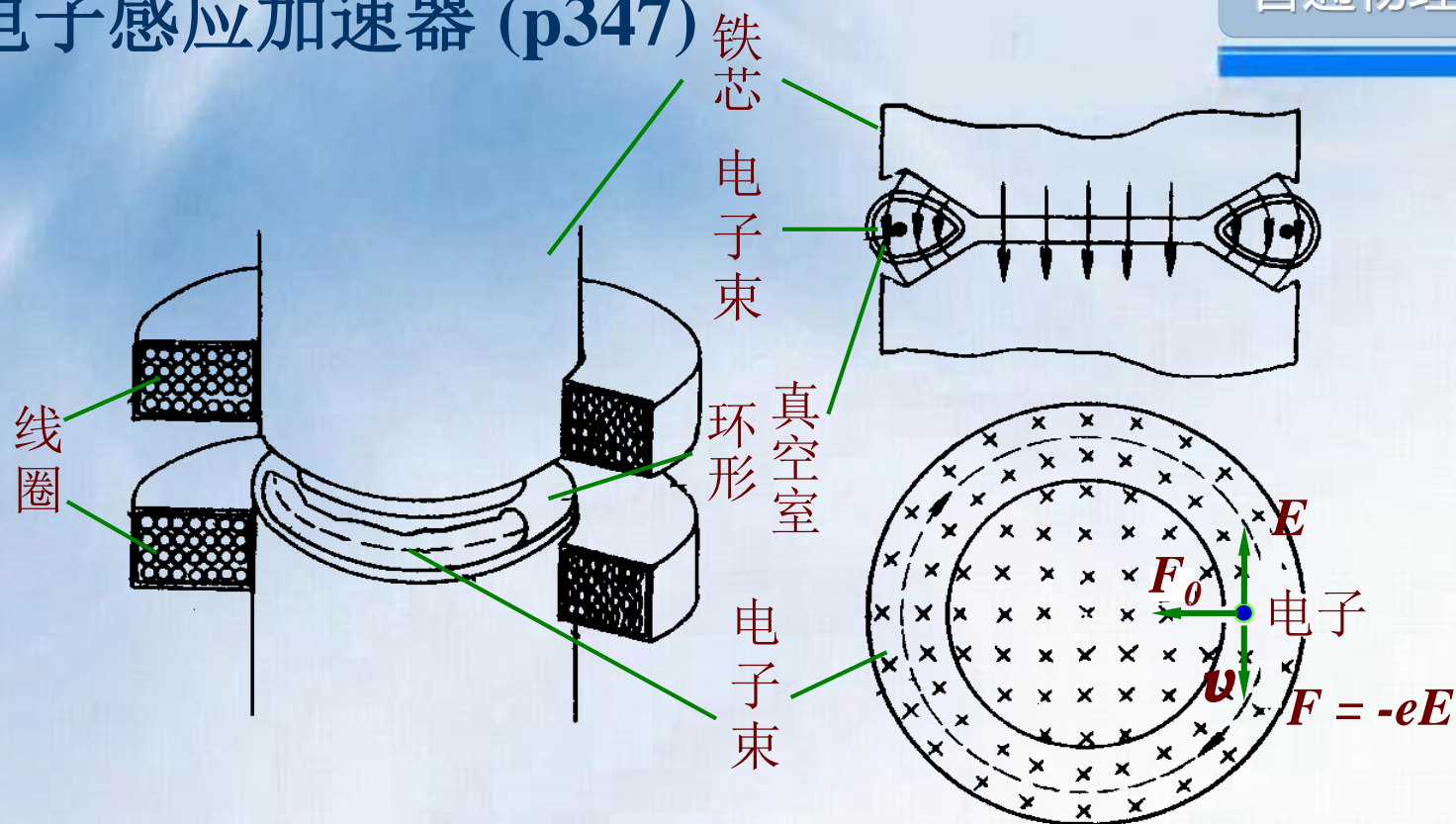
将 $x = vt$, $l = x \tan \theta = vt \tan \theta$ 代入上式, 则

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}t^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2 t^2 \tan \theta\right) - \frac{1}{2}v^2 t^2 \tan \theta \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}t^2\right) = -v^2 t^3 \tan \theta$$

方向与绕行方向 $oabo$ 相反。

注释: 对于这类问题, 既可直接用法拉第电磁感应定律求解总的感应电动势, 也可分别计算动生电动势和感生电动势: 即假设磁场不变化, 金属棒切割磁场线, 求 $\varepsilon_{\text{动}}$; 再假设金属棒不动, 由磁场变化, 求 $\varepsilon_{\text{感}}$ 。最后求出总的感应电动势。

电子感应加速器 (p347)



电子感应加速器由圆柱形电磁铁、环形真空室和电子枪组成。低频交变电流激发磁场，交变磁场又激发涡旋电场，使沿切线方向进入真空室的电子加速。

设电子在运动轨道处的磁感应强度为 B_R ，电子在洛仑兹力作用下作圆周运动，则

$$m \frac{v^2}{R} = e v B_R \rightarrow m v = e R B_R$$

又因变化磁场的轴对称性，可证明涡旋电场为：

$$E_i = \frac{R}{2} \frac{d\bar{B}}{dt}$$

\bar{B} 为轨道所围面积内的平均磁感应强度，电子在涡旋电场作用下，产生切向加速，按牛顿定律：

$$\frac{d(mv)}{dt} = eE_i = \frac{eR}{2} \frac{d\bar{B}}{dt}$$

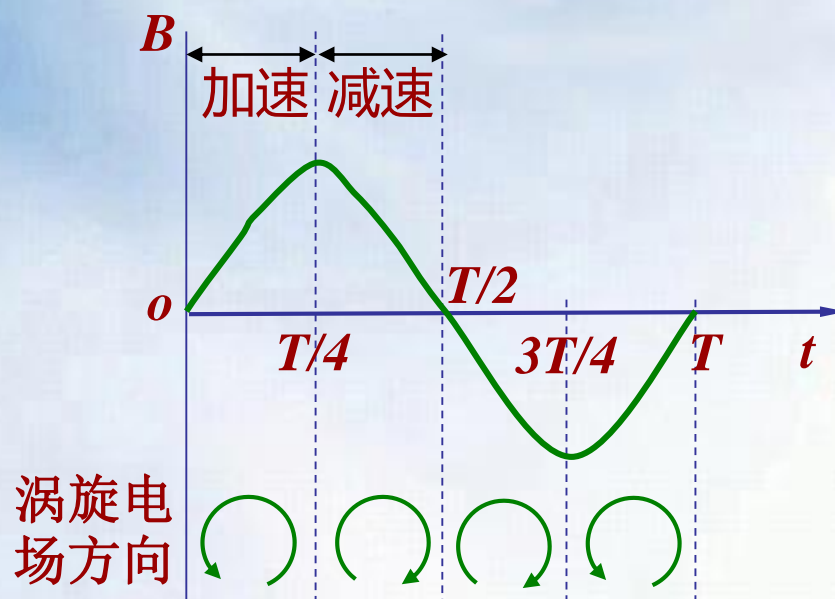
又，对圆周运动方程求导：

$$\frac{d(mv)}{dt} = eR \frac{dB_R}{dt}$$

比较以上两式得，电子在环形轨道上作加速运动的条件为：

$$B_R = \frac{1}{2} \bar{B}$$

对于正弦交变磁场，
只有第一和第四个1/4
周期中电子才能被加速，
而第二个1/4周期
洛伦兹力作为向心力
方向相背。因而只有
第一个1/4周期电子才
被加速。



尽管时间很短，但电子还是能被加速几十万圈，从而使运动速度被加速到接近光速。

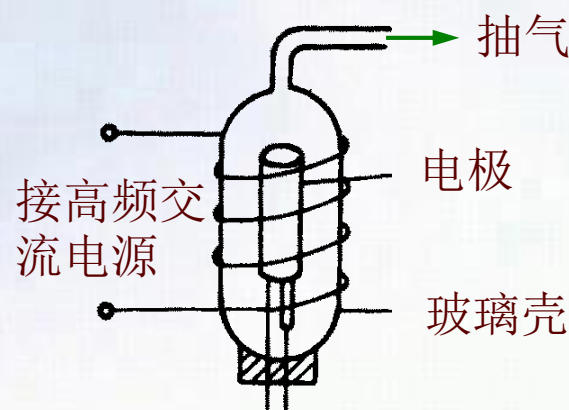
四、涡电流 *

大块金属导体处在变化磁场中，金属内部将产生涡旋状的电流，称为涡电流。

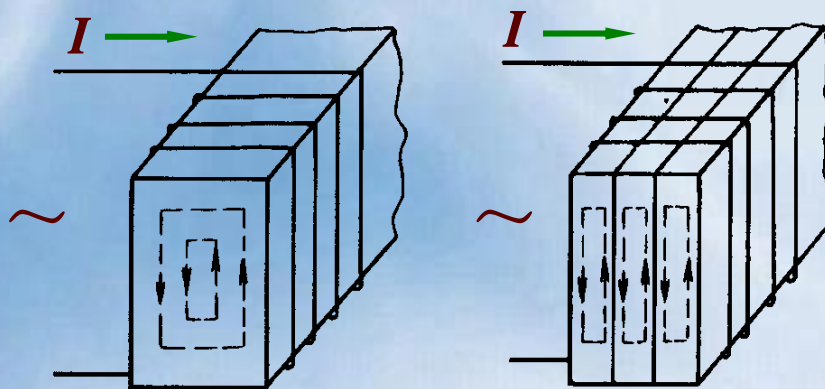
1. 热效应 由于大块导体电阻小，电流大，容易产生大量的焦耳热。感应加热有许多应用：



高频炉

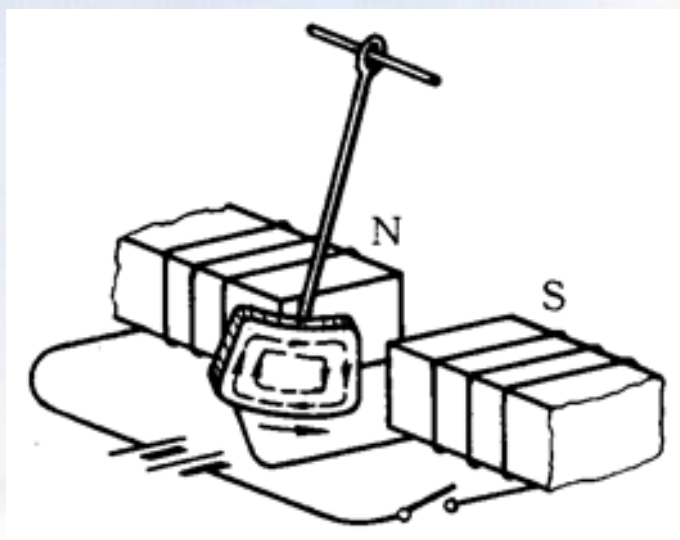


高频抽气

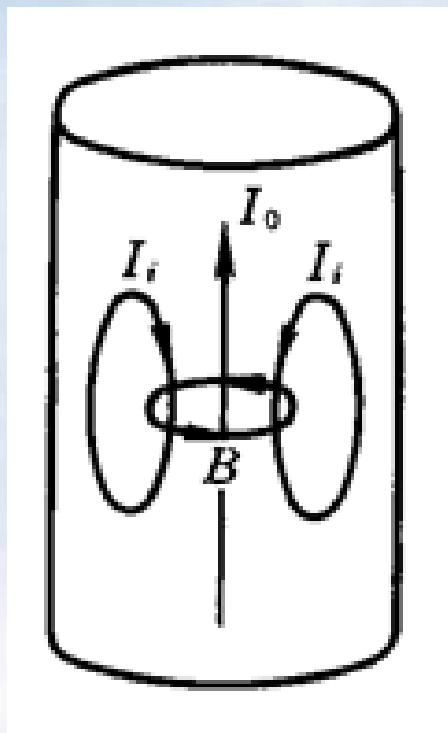


变压器铁芯中的涡流

2. 机械效应 感应电流在反抗引起感应电流的原因时，会产生机械效应，可用作**电磁阻尼**。



3. 趋肤效应 在高频电路中，由于涡流，使导体横截面上的电流分布趋于导体表面附近的现象。



§ 14-4 自感与互感

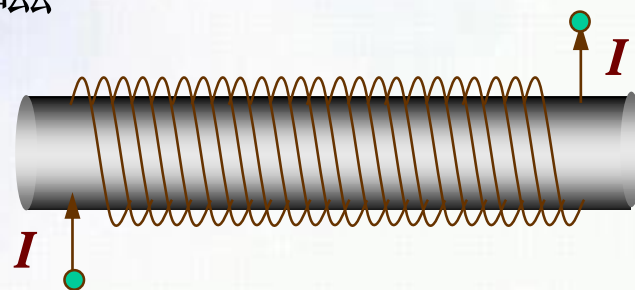
一、自感现象 自感系数

由于回路中电流产生的磁通量发生变化而在自身回路中激起感应电动势的现象——**自感现象**

现在讨论螺线管中的自感问题：

细长，密绕（无漏磁）线圈磁感应强度：

$$B = \frac{\mu NI}{l}$$



线圈中的磁通量:

$$\Phi = BS = \frac{\mu NI}{l} \pi R^2$$

穿过 N 匝线圈的磁通匝链数或全磁通:

$$\Psi = N\Phi = \frac{\mu N^2 I}{l} \pi R^2$$

若 I 变化, 线圈中出现的电动势:

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\mu\pi N^2 R^2}{l} \frac{dI}{dt}$$

可将上式改写成下列形式：

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

说明：1. $dI/dt > 0$ $\varepsilon_L < 0$ 感生电动势与 I 方向相反，
 $dI/dt < 0$ $\varepsilon_L > 0$ 感生电动势与 I 方向相同。

2. $L = \frac{\mu\pi N^2 R^2}{l}$ 称为自感系数,简称自感

无磁介质 $L_0 = \frac{\mu_0\pi N^2 R^2}{l}$, 有磁介质 $L = \mu_r L_0$

在一般情况下，全磁通的变化是由回路电流变化引起的，从而出现感应电动势为：

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dI} \frac{dI}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

因此，在一般情况下， L 定义为：

$$L = \frac{d\Psi}{dI}$$

在回路形状不变，周围没有铁磁质，空间任一点 B 与回路电流 I 成正比，因而 Ψ 也与 I 成正比，此时上式可写为：

$$L = \frac{\Psi}{I}$$

或：

$$\Psi = LI$$

自感系数（自感）定义为：回路中流变化为单位值时，在回路本身所围面积内引起的全磁通的改变值。

自感 L 的单位为 亨利 (H)， $1\text{H}=1\text{Wb/A}$ 。

例题8：

如图所示，由两个“无限长”的同轴圆筒状导体所组成的电缆，其间充满磁导率为 μ 的磁介质，电缆中沿内圆筒和外圆筒流过的电流 I 大小相等而方向相反。设内、外圆筒的半径分别为 R_1 和 R_2 ，求电缆单位长度的自感？

解：应用安培环路定理，可知在内圆筒之内以及外圆筒之外的空间中磁感应强度都为零。

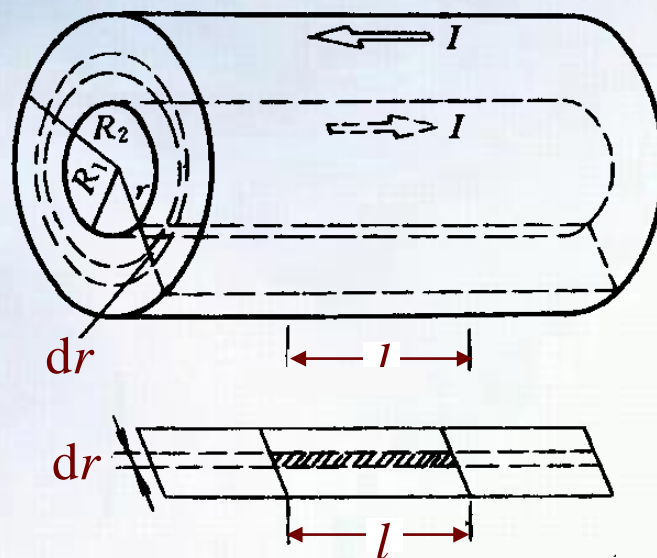
在内外两圆筒之间，离开轴线距离为 r 处的磁感应强度为：

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

在内外圆筒之间，取如图中所示的截面，通过长为 l 的面积元 $l dr$ 的磁通量为：

$$d\Phi = B l dr = \frac{\mu I l}{2\pi} \frac{dr}{r}$$

通过两圆筒之间长 l 的截面的总磁通量：



$$\Phi = \int d\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu Il}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu Il}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

由于 $\Phi=LI$ ，可知单位长度电缆的自感为：

$$L = \frac{\Phi}{Il} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

例题9：

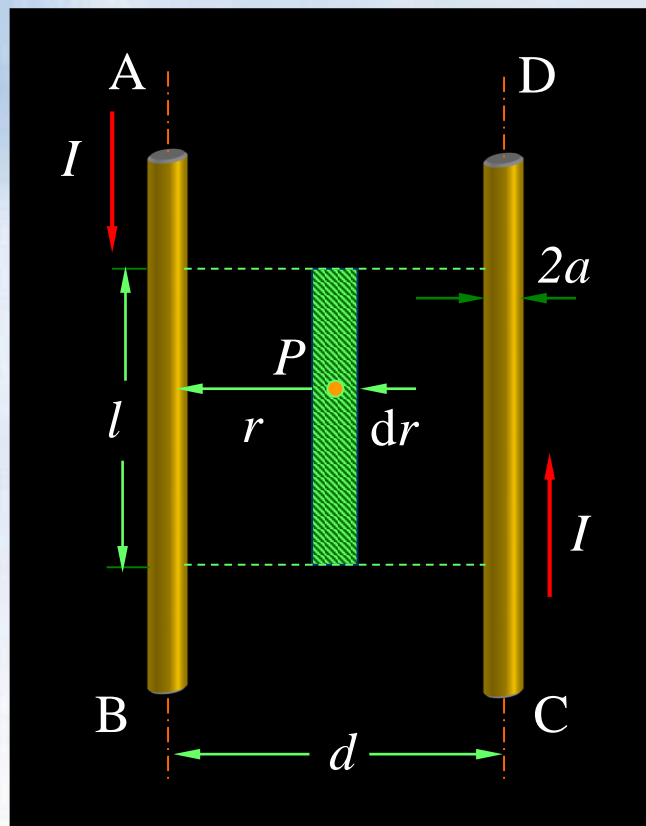
两根半径为 a 的平行长直传输线，相距为 d （见图），且 $a \ll d$ 。试求长为 l 的这对传输线的自感。

解： 设传输线中通有电流 I ，电源和用电器在无限远处，电流从AB输出，CD返回。两传输线在离AB为 r 处产生的总磁感应强度的大小为：

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}$$

由于 $a \ll r$ ，可以忽略两导线内部的磁通量。因此通过两传输线间长为 l ，宽为 dr 的面积元 ds 的磁通量为：

$$\begin{aligned} d\Phi &= \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)} \right] l dr \end{aligned}$$



通过长为 l 的两导线间的磁通量为：

$$\Phi = \int d\Phi = \int_a^{d-a} \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)} \right] l dr = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

于是，长为 l 的这对传输线的自感为：

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

这种传输线单位长度的电感为：

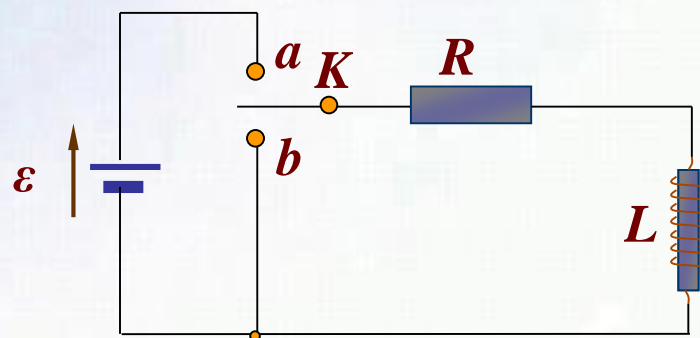
$$L_0 = \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

二、 R - L 电路中电流的增长和衰减过程

由于自感的存在，使电路中具有保持原有电流不变的特性。它使电路在接通或断开后，电路中的电流要经历一个过程才能达到稳定值，这个过程称为 RL 电路的暂态过程。

1 电流的增长过程

设电路有纯电感线圈 L 和纯电阻 R 构成。当电键 K 与 a 接通后，电路中某瞬时的电流为 $i=i(t)$ 。



由于自感应作用，线圈中出现自感电动势为：

$$\varepsilon_L = -L \frac{di}{dt}$$

回路中的总电动势为 $\varepsilon + \varepsilon_L$ ，由欧姆定律得电路方程为：

$$\varepsilon + \varepsilon_L = \varepsilon - L \frac{di}{dt} = iR$$

对上式分离变量后积分，取 $t=0$ 时， $I=0$ ，于是：

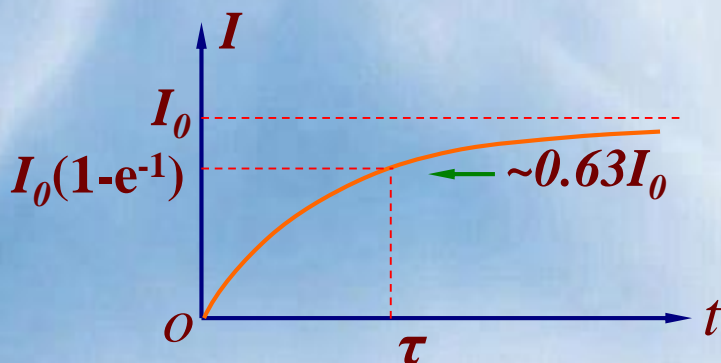
$$\int_0^I \frac{di}{i - \varepsilon / R} = \int_0^t -\frac{R}{L} dt$$

积分整理后，并令 $I_0=\varepsilon/R$ ，得：

$$I = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = I_0 (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

可见，电流 I 按指数规律增长，逐渐达到稳定值 I_0 。在 RL 电路中， L/R 是表征暂态过程持续长短的特征量，它具有时间的量纲，称为 RL 电路的时间常数 τ (弛豫时间)，当 $t = \tau$ 时，

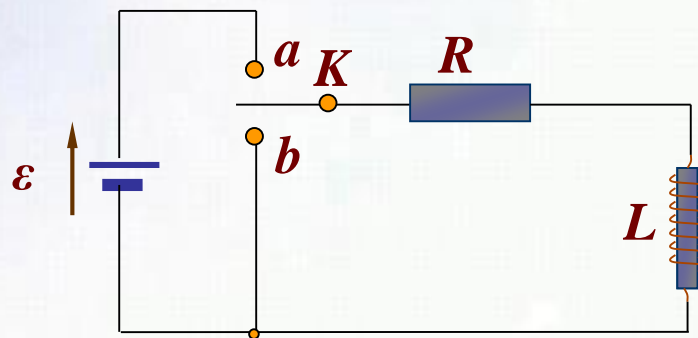
$$I = I_0 (1 - e^{-1}) = 0.63 I_0$$



$t=\tau$ 时, $I=0.63I_0$ 。实际上, 当 $t=5\tau$ 时, $I=0.993I_0$, 可以认为电流已达稳定值。

2 电流的衰减过程

当电路中的电流达到稳定值 I_0 后, 将电键 K 从触点 a 倒向 b , 这时回路中无外电源, 但由于自感的作用, 电流不马上回到零:



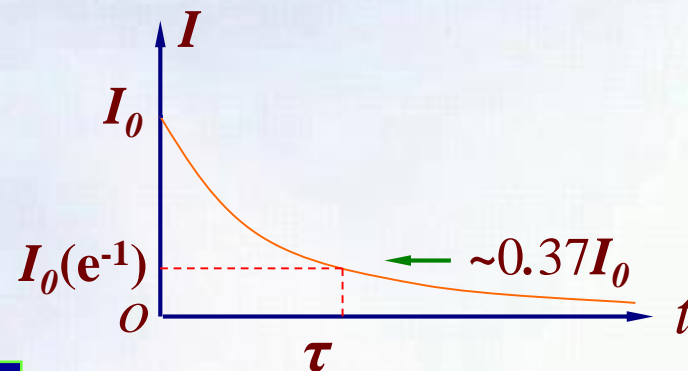
$$\varepsilon_L = -L \frac{di}{dt} = iR$$

将上式分离变量后积分，考虑到 $t=0$ 时， $i=I_0$ ，则有：

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-t/\tau}$$

当 $t=\tau=L/R$ 时：

$$I = I_0 e^{-1} = 0.37I_0$$

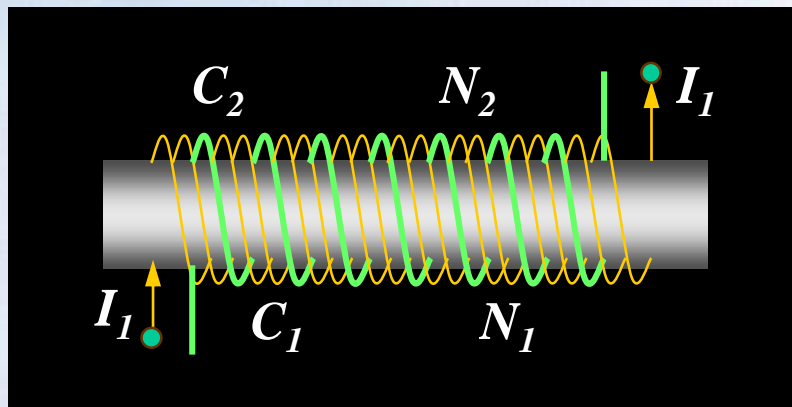


在撤去电源的情况下，时间常数 τ 表示电流由稳定值 I_0 减小至 I_0 的37%所需的时间。

三、互感现象 互感系数 *

由于一个回路中的电流变化而在邻近另一个回路中产生感应电动势的现象，称为**互感现象**。

图中所示是绕有 C_1 和 C_2 两层线圈的长直螺线管，长度均为 l ，截面的半径都是 r 。 C_1 线圈共有 N_1 匝，当其中通有电流 I_1 时，其磁场在



C_2 线圈每匝中的磁通为：

$$\mu_0 \frac{N_1}{l} I_1 \pi r^2$$

所以，通过 C_2 线圈 N_2 匝的全磁通：

$$\Psi_{21} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} I_1 \pi r^2$$

当 I_1 变化时，在 C_2 线圈回路中将产生感生电动势：

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi r^2 \frac{dI_1}{dt}$$

将上式改写为：

$$\varepsilon_{21} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

式中：

$$M_{21} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi r^2$$

同样，当 C_2 线圈中 I_2 变化时，在 C_1 回路中也将产生感生电动势：

$$\varepsilon_{12} = -\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi r^2 \frac{dI_2}{dt} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

上式中可以看出：

$$M_{21} = M_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi r^2 = M$$

M 反映了两回路间互相产生感生电动势的能力，称为**互感系数**或**互感**。

若两个回路的相对位置固定，且周围没有铁磁性物质， $\Psi_{21} \propto I_1$ 、 $\Psi_{12} \propto I_2$ ，则：

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\Psi_{12}}{I_2}$$

一般情况下，互感和自感一样只和两回路的形状、相对位置及周围磁介质有关，而与电流无关。

若周围有铁磁物质， Ψ_{21} 和 I_1 、 Ψ_{12} 和 I_2 就不一定是线性关系，这时：

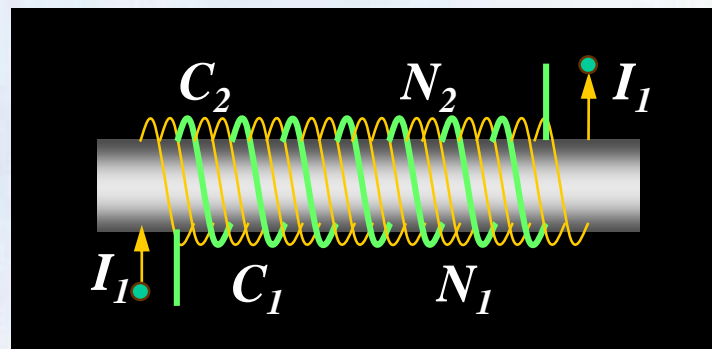
$$\mathcal{E}_{12} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -\frac{d\Psi_{12}}{dI_2} \frac{dI_2}{dt} = -M \frac{dI_2}{dt}$$

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -\frac{d\Psi_{21}}{dI_1} \frac{dI_1}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

互感的单位也是亨利（**H**）。

现仍以两层螺线管为例，讨论自感与互感的关系，已知原线圈的自感：

$$L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{l} \pi r^2$$



同理，副线圈的自感系数：

$$L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2}{l} \pi r^2$$

互感:

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi r^2$$

由此可见:

$$M^2 = L_1 L_2, \quad M = \sqrt{L_1 L_2}$$

只有一个回路所产生的磁感应线全部穿过另一回路，才有上述关系。对于一般的情形：

$$M = K \sqrt{L_1 L_2}$$

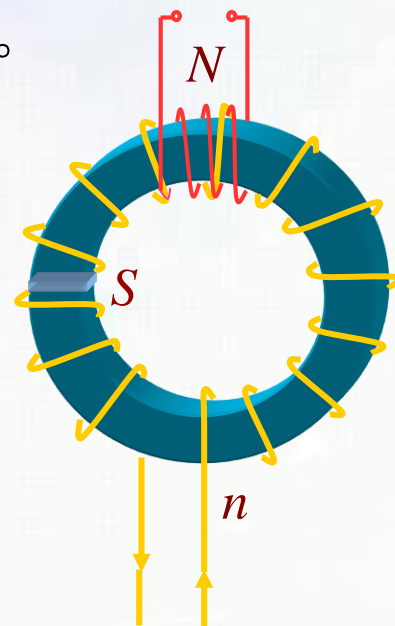
$0 \leq K \leq 1$ ，称为**偶合系数**。

例题10: *

一密绕螺绕环，单位长度匝数为 $n=2000\text{m}^{-1}$ ，环的横截面积为 $S=10\text{cm}^2$ ，另一个 $N=10$ 匝的小线圈绕在环上，如图所示：

- (1) 求两个线圈间的互感；
- (2) 当螺绕环中的电流变化率为 $dI/dt=10\text{A/s}$ 时，求在小线圈中产生的互感电动势的大小。

解：（1）设螺绕环中通有电流 I ，螺绕环中磁感应强度的大小为 $B=\mu_0 nI$ ，通过螺绕环上各匝线圈的磁通量等于通过小线圈各匝的磁通量，所以通过 N 匝小线圈的磁通链数为：



$$\Psi_N = N\Phi = N\mu_0 nIS$$

根据互感的定义可得螺绕环与小线圈间的互感为：

$$M = \frac{\Psi_N}{I} = N\mu_0 nS = 25\mu H$$

(2)由公式知，小线圈中产生的感生电动势的大小为：

$$\varepsilon_{21} = \left| -M \frac{dI_1}{dt} \right| = 2.5 \times 10^{-5} \times 10 = 250 \mu V$$

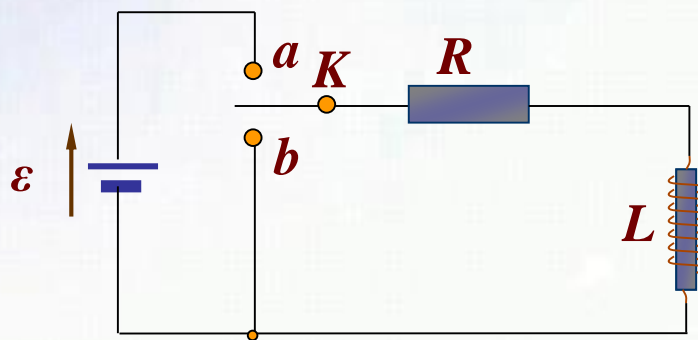
§ 14-5 磁场的能量

一、自感磁能

在带电系统形成过程中，外力克服静电场力做功，转化为电荷系统或电场的能量，电场的能量密度为：

$$\omega_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

在 RL 暂态过程中，电流克服自感，在回路电流消长中存在能量转化问题。在上一节的 RL 电路中，由欧姆定律：



$$\varepsilon - L \frac{dI}{dt} = RI$$

设 $t=0$ 时, $I=0$; $t=t$ 时, $I=I_0$ 。电流从0增长到 I_0 的过程中, 电源电动势做功: ($dw=\varepsilon dq$)

$$\int_0^t \varepsilon I dt = \int_0^{I_0} LI dI + \int_0^t RI^2 dt$$

在 L 与 I 无关的条件下:

$$\int_0^t \varepsilon I dt = \frac{1}{2} LI_0^2 + \int_0^t RI^2 dt$$

上式方程右边第二项为电源消耗在电阻上的热能, 第一项为克服感生电动势所做的功。

按功能原理，此功以能量形式储存在线圈内。当电键K倒向b， $I=I_0 e^{-(R/L)t}$ ，衰减过程中R中的焦耳热来自于线圈储存能：

$$Q = \int_0^{\infty} RI^2 dt = RI_0^2 \int_0^{\infty} e^{-2\frac{R}{L}t} dt = \frac{1}{2} LI_0^2$$

线圈中储存的能量将通过自感电动势做正功全部释放出来。因此，自感为L的回路中，线圈中储存的磁能为：

$$W_m = \frac{1}{2} LI_0^2$$

二、磁场的能量

线圈中储存的能量可视作存储于磁场之中，
 对于一个长直螺线管，磁导率为 μ ，电流 I_0 ，则
 $B = \mu n I_0$ ， $I_0 = B / \mu n$ ， $L = \mu N^2 S / l$ ，将 L 、 I_0
 代入 W_m ：

$$W_m = \frac{1}{2} L I_0^2 = \frac{1}{2} \mu \frac{N^2}{l} S \cdot \frac{B^2}{(\mu N / l)^2} = \frac{1}{2} B H V$$

定义单位体积内的磁能为**磁能密度**：

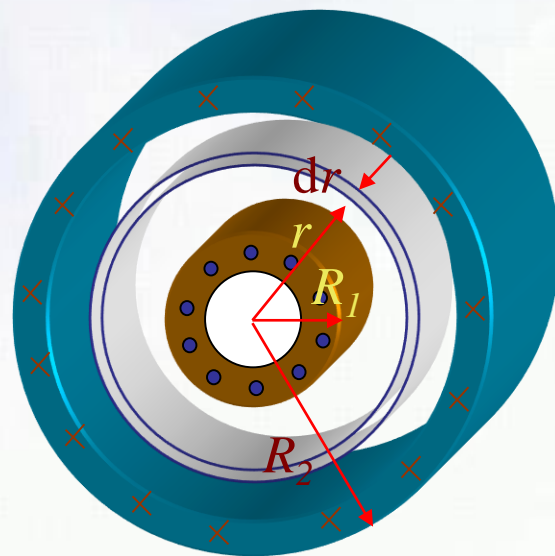
$$\omega_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} B H \quad \text{或:} \quad \omega_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

例题11:

一根很长的同轴电缆，由半径为 R_1 的圆柱筒与半径为 R_2 的同心圆柱筒组成，电缆中央的圆柱筒上载有稳定电流 I ，再经外层导体返回形成闭合回路。试计算：
 (1) 长为 l 的一段电缆内的磁场中所储藏的能量； (2) 该段电缆的自感。

解： (1) 由安培环路定理可知，在内外圆柱筒间的区域内离轴线距离为 r 处的磁感应强度为：

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



在外圆柱筒外面 $B=0$ ，在内圆柱筒的内部 $B=0$ 。则在两圆柱筒中间区域离轴线距离为 r 的磁能密度为：

$$\omega_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

在半径为 r 与 $r+dr$ ，长 l 的圆柱壳空间之内的磁能：

$$dW_m = \omega_m dV = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r dr l = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \frac{dr}{r}$$

对上式积分可得储藏在内外筒间空间内的总磁能：

$$W_m = \iiint_V \omega_m dV = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

(2) 由磁能公式 $W_m = LI^2/2$ 可求出长为 l 的同轴电缆的自感为：

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

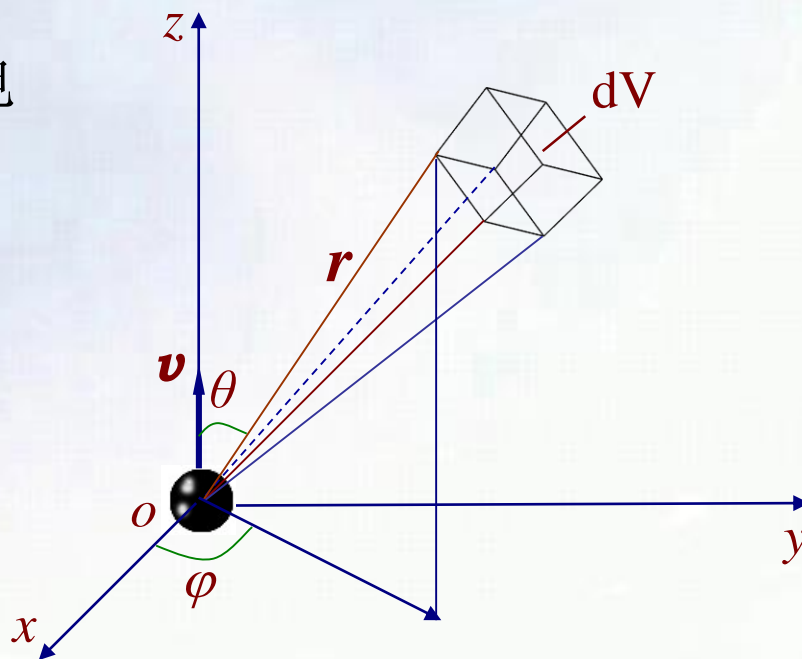
所得的结果和例题8完全相同。

例题12:

设电子是一个半径为 R 的小球，并假定电荷均匀分布于其表面，当电子以速度 v ($v \ll c$) 运动时，在电子周围无限大空间内建立电磁场。试计算电磁场中的总磁能？

解： 因为 $v \ll c$ ，所以离电子瞬时位置 \mathbf{r} 处的磁感应强度是：

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ev \sin \theta}{r^2}$$



设电子沿Z轴运动，为简便计，改用如图所示的球面坐标。则离电子瞬时位置 \mathbf{r} 处的体积元 dV 为

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

在该体积元中的磁能为：

$$dW_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

对上式求除电子本身体积外的全部空间积分，得运动电子周围空间的总磁能为：

$$\begin{aligned} W_m &= \iiint_V dW_m \\ &= \frac{\mu_0}{2} \iiint_V \left(\frac{e v \sin \theta}{4 \pi r^2} \right)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{\mu_0}{32 \pi^2} e^2 v^2 \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= \frac{\mu_0}{32 \pi^2} e^2 v^2 \left[-\frac{1}{r} \right]_R^\infty \left[-\frac{1}{3} \cos \theta (\sin^2 \theta + 2) \right]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi} \\ &= \frac{\mu_0}{32 \pi^2} e^2 v^2 \left[\frac{1}{R} \right] \left[\frac{4}{3} \right] [2\pi] = \frac{\mu_0}{12 \pi} \frac{e^2}{R} v^2 \end{aligned}$$