# 第 一 周

第12章 静电场

§12.6， §12.7

第13章 静电场中的导体和电介质
§13.1， §13.2

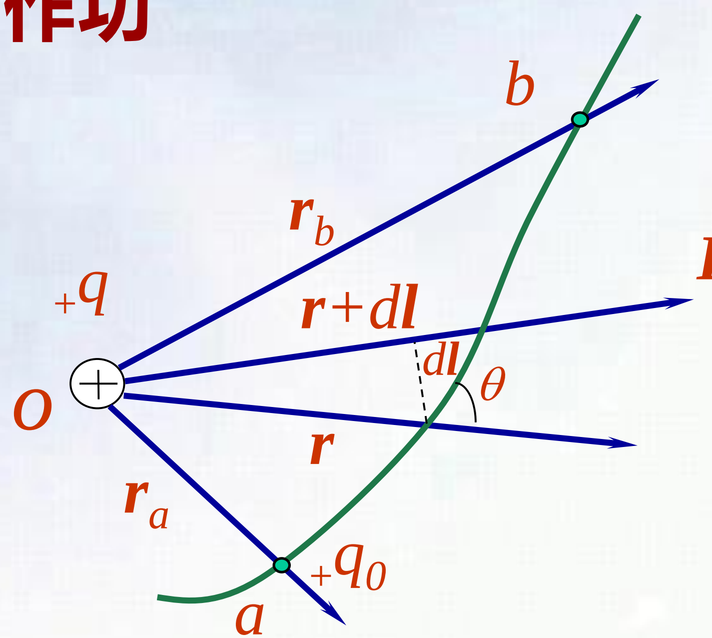
作业：12-18,12-20,12-25,12-29;13-2

# § 9.6 静电场的环路定理

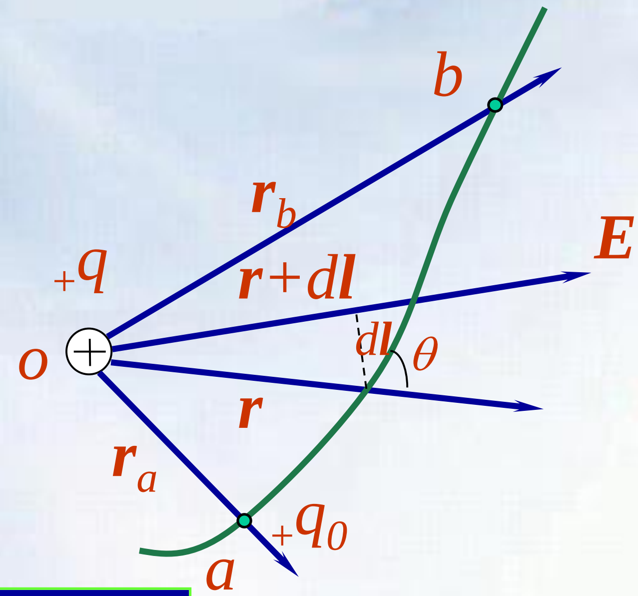
## 一、静电场力的功

### 1．点电荷电场中电场力作功

在位于$O$点的点电荷$+q$的电场中，试验电荷$+q_0$从$a$移至$b$，在位矢$\boldsymbol{r}$到$\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 位移元$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$上，电场力作的元功为



$$\mathrm{d}A=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$
$$=q_0E\cos\theta\,\mathrm{d}l=q_0E\,\mathrm{d}r$$




从$a$到$b$作功为：

$$A_{ab}=\int_a^b \mathrm{d}A=\int_{r_a}^{r_b} q_0\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$
$$=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

电场力所作的功仅与试验电荷的起点、终点位置有关，与它经过的路径无关。

## 2．任意带电体电场中电场力作功

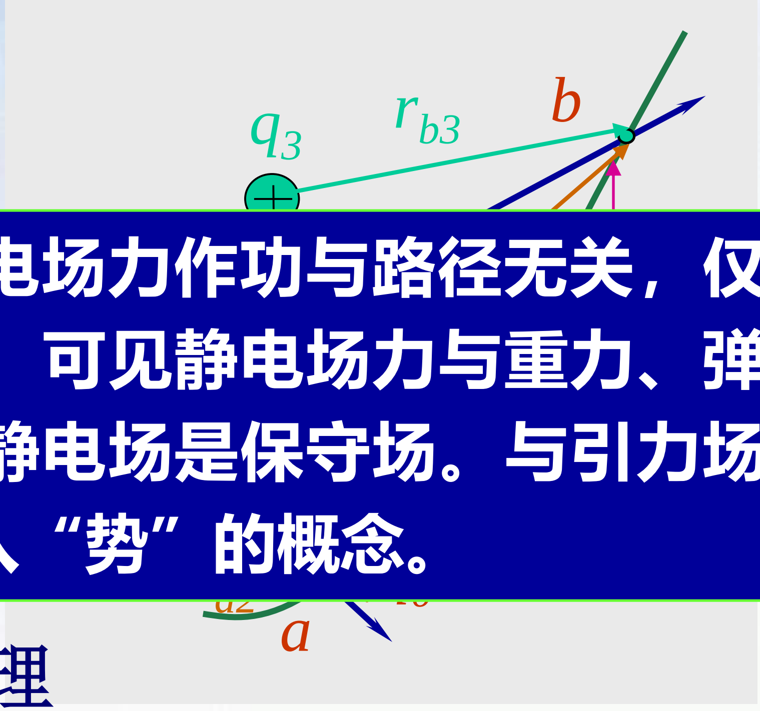
任意形状的带电体可看作是点电荷的组合，由场强的叠加性可得：

$$A_{ab}=\int_a^b \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=q_0\int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=q_0\int_a^b (\vec{E_1}+\vec{E_2}+\cdots+\vec{E_n})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= q_0\int_a^b \vec{E}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l} + q_0\int_a^b \vec{E}_2\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \cdots + q_0\int_a^b \vec{E}_n\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{ai}} - \frac{1}{r_{bi}}\right)$$




**保守力、保守场：由于电场力作功与路径无关，仅与起点、终点位置有关，可见静电场力与重力、弹性力一样，是保守力，静电场是保守场。与引力场类比，在静电场中可引入“势”的概念。**

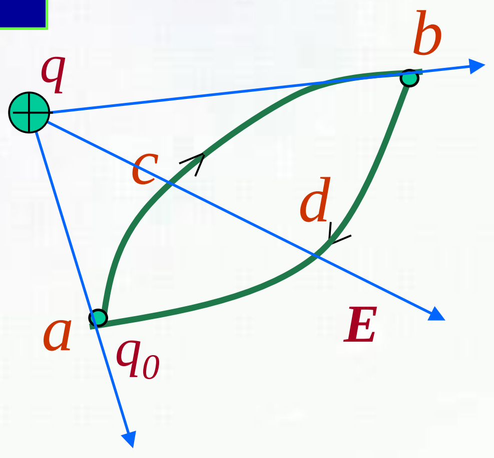
## 二、静电场的环路定理

将试验电荷$q_0$从$a$点移动到$b$点，再从$b$点移回到$a$点。从$a$到$b$可以走$acb$或$adb$，有

$$q_0\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}_{(c)} = q_0\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}_{(d)} = -q_0\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l}_{(d)}$$

所以 $$\boxed{\int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}_{(c)} + \int_b^a \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}_{(d)} = 0}$$

即 $$\boxed{\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0}$$




$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 称为静电场的环流。

有源场、有势场：高斯定理表明电场的闭合面积分不为零，是有源场；环路定理表明电场的闭合线积分为零，是有势场。

# §9.7 电势

电势是从能量的角度来描述电场。

## 一、电势能

对于保守场，类比重力势能，点电荷$q_0$在$a$点有电势能$W_a$，在$b$点有电势能$W_b$。$q_0$从$a$点移至$b$点时，电场力作的功等于电势能的减小：

$$A_{ab} = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = W_a - W_b$$

势能是相对的，对于有限分布的电荷系统可取无限远处电荷$q_0$的电势能为零(即$W_\infty$=0)；则电荷$q_0$在$p$点的电势能为将$q_0$从$p$点移至无限远时电场力所作的功：

$$\boxed{W_p = A_{p\infty} = q_0 \int_p^\infty \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

电势能单位：焦耳（J）。

点电荷电场中电荷的电势能：

$$W_p = q_0\int_p^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= q_0 \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_p}^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r_p}$$

$W_p$的大小、正负与$q_0$、$q$有关。

# 二、电势

定义：

$$U_p = \frac{W_p}{q_0} = \int_p^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

或 $$U_p = \int_p^{p_0} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \ , \quad U_{p_0} = 0$$

静电场中某点的电势，等于单位正电荷在该处所具有的电势能，也等于单位正电荷从该点经过任意路径移到无限远处（或电势能为零的参考点处）电场力对它所做的功。

电势能除去 $q_0$ 后的 $U_p$ 只反映了电场性质。
电势是标量，单位：伏特（V）。

**电势差：** 任意两点之间的电势之差。也称电压、电位。

$$U_{ab}=U_a-U_b=$$

$$\int_a^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}-\int_b^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_a^{b}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

电场力作功和电势能用电势来表示:

$$A_{ab}=q_0\int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=q_0(U_a-U_b)=q_0U_{ab}$$

$$W_a=q_0U_a,\quad W_b=q_0U_b$$

## 三、电势叠加原理

### 1．点电荷电场的电势

$$U_p = \int_p^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} =$$

$$\int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

若$q$为正，空间各点电势为正；$r$越大，离$q$越远，电势越低。若$q$为负，空间各点电势为负；$r$越大，离$q$越远，电势越高。

## 2．多点电荷系统的电势

场源有点电荷$q_1$、$q_2$、…、$q_n$，由电势定义和场强叠加原理：

$$U_p = \int_p^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_p^{\infty} (\vec{E_1} + \vec{E_2} + \cdots + \vec{E_n}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= U_{p1} + U_{p2} + \cdots + U_{pn}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} U_{pi} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

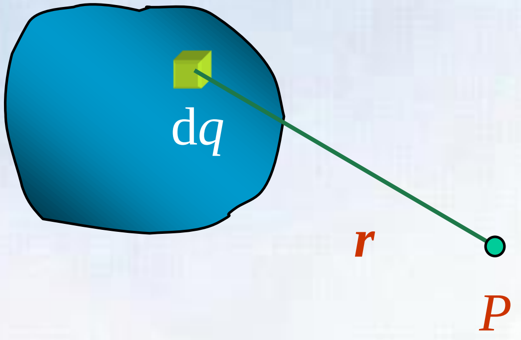
即电势叠加原理。

## 3．电荷连续分布带电体的电势

（方法1）在带电体上取一小电荷元dq作为点电荷，则

$$\mathrm{d}U=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\rho\,\mathrm{d}V}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$U=\int \mathrm{d}U=\int\frac{\rho\,\mathrm{d}V}{4\pi\varepsilon_0 r}$$




$$dq=\sigma dS(\text{面})=\lambda dL(\text{线})$$

（方法2）按定义式计算（已知电场E）

$$U=\int_p^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

# 例题1：计算电偶极子的电势。

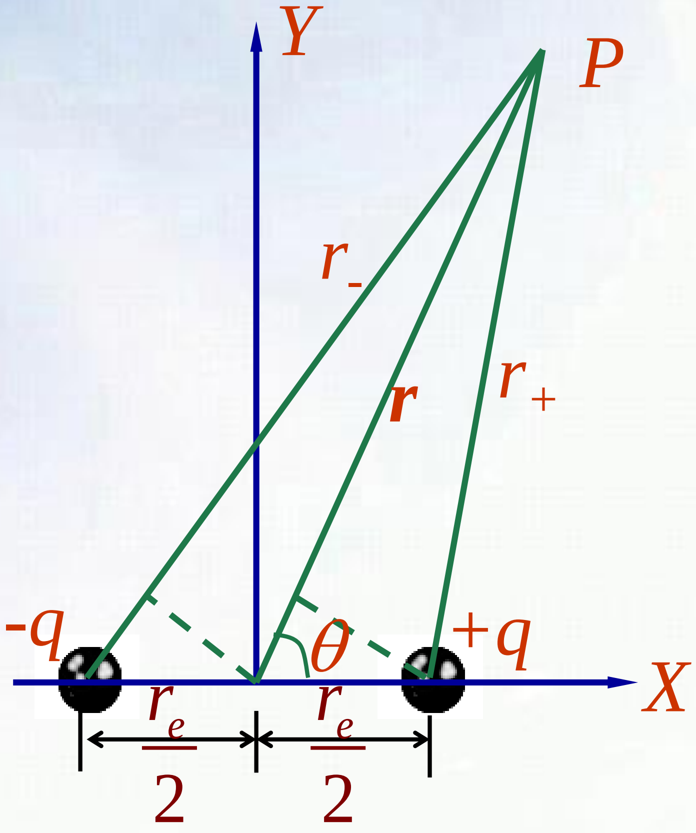
$(r >> r_e)$

解：如图所示，在电偶极子电场中P点的电势为：

$$U_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_-}$$

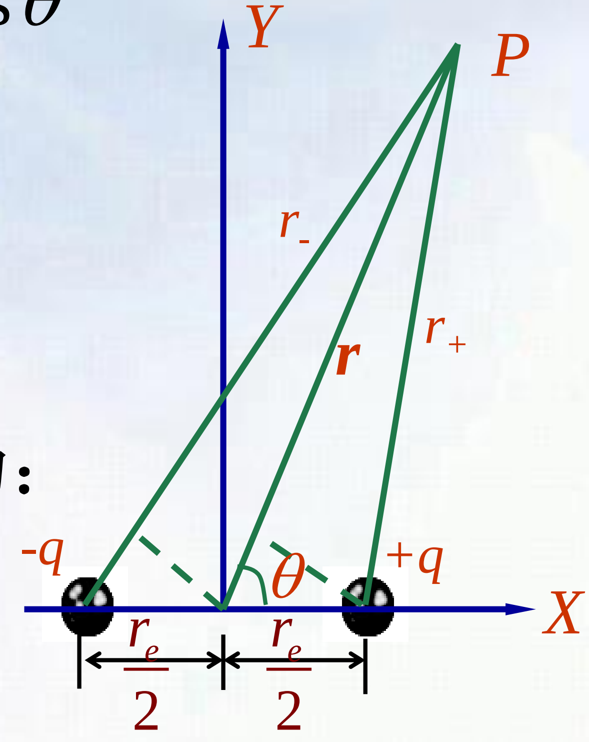
式中 $r_+ \approx r - \frac{r_e}{2}\cos\theta$

$$r_- \approx r + \frac{r_e}{2}\cos\theta$$



$$U_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r - \frac{r_e}{2}\cos\theta} - \frac{1}{r + \frac{r_e}{2}\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_e\cos\theta}{r^2 - (\frac{r_e}{2}\cos\theta)^2}$$




由于 $r >> r_e$ 所以P点电势可写为:

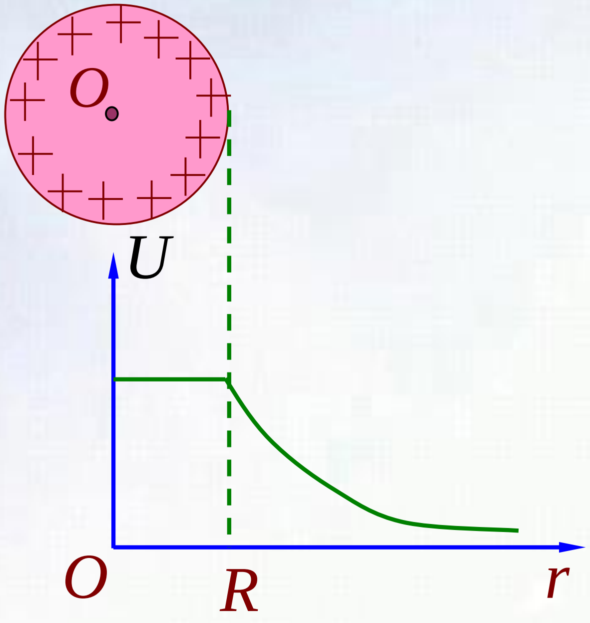
$$\boxed{U_p = \frac{qr_e\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}_e\cdot\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

其中，$\boldsymbol{p}_e = q\boldsymbol{r}_e$ 为电偶极矩。

# 例题2：计算均匀带电空心球壳的电势分布？

解：如图所示，带电球面在空间激发的场强沿半径方向，大小为：

$$E=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R\\ 0 & r<R\end{cases}$$



按公式有： $U_P=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_r^{\infty}E\mathrm{d}r$

当$r>R$ 时 $U_P=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}r}{r^2}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

当$r<R$ 时

$$U_P=\int_r^{R}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}+\int_R^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=$$

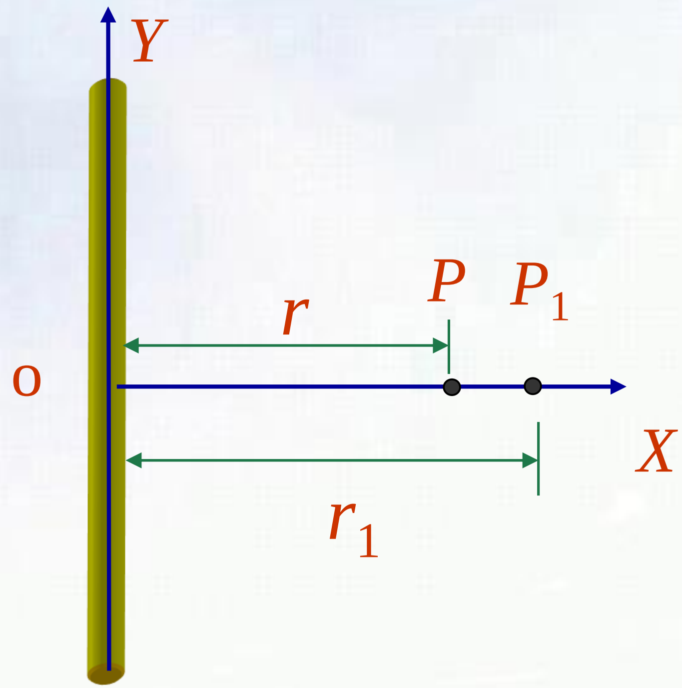
$$\int_r^{R}0\cdot \mathrm{d}r+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

# 例题3：计算无限长均匀带电直线的电势分布?

**解：** 如图所示，带电直线电荷线密度为 $\lambda$，计算$X$轴上距带电直线为$r$的$P$点处的电势。

由高斯定理，无限长均匀带电直线在$X$轴上的电场强度为：

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



计算$P$与$P_1$点的电势差为：

$$U_P - U_{P_1} = \int_r^{r_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_r^{r_1} \frac{\mathrm{d}r}{r} =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} (\ln r_1 - \ln r)$$ ，由于ln1=0，本题

选$r_1$=1m 处作为电势零点，则$P$点电势为：

$$\boxed{U_P = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r}$$

$\lambda > 0$时：$r$>1m，$U_P$为负；$r$<1m，$U_P$为正。

$$U_P - U_{P_1} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln r_1 - \ln r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_1}$$

选$r_1$=1m处作为电势零点，则$P$点电势为：

$$\boxed{U_P = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{1m} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_m}$$

$\lambda > 0$时：$r_m$>1，$U_P$为负；$r_m$<1，$U_P$为正。

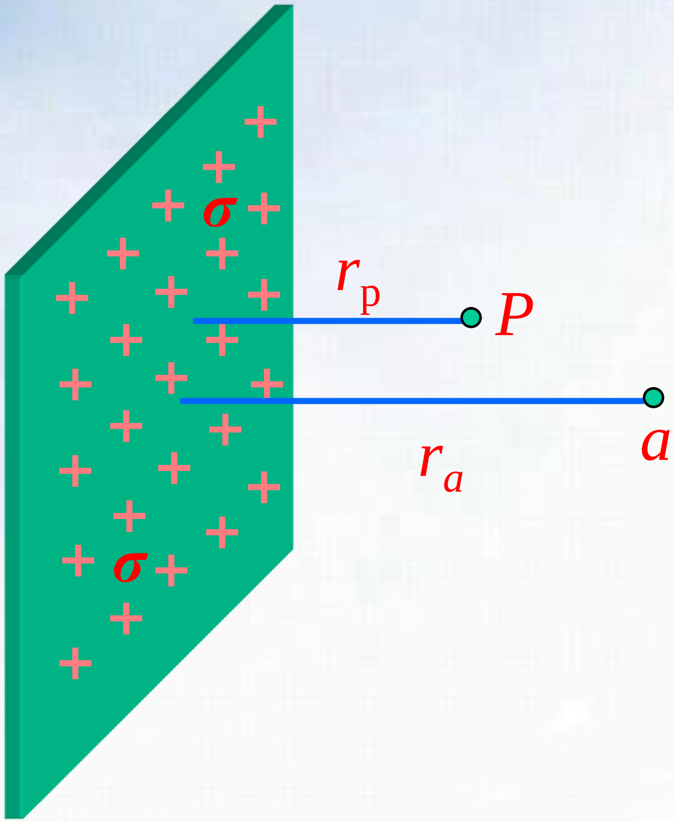
# 例题4：计算无限大均匀带电平面的电势分布?

**解：** 已知场强与带电平面垂直，数值为：

$E=\sigma/2\varepsilon_0$ 选取$a$点为电势零点， 则$P$点的电势为：

$$U_P=\int_P^a \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{r_P}^{r_a}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}r$$

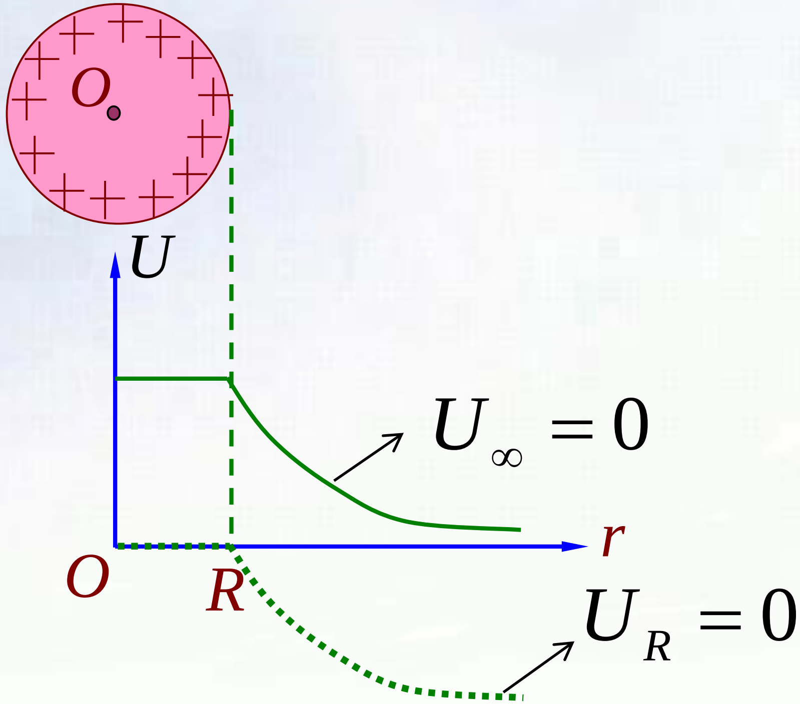
$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}r_a-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}r_P$$



为使表达式简洁，取$r_a$=0，即选取带电平面为势能零点，则P点的电势分布为：

$$U = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} r$$

选择不同电势零点不影响电势的分布特征：



# § 9.8 电场强度与电势的关系

## 一、等势面

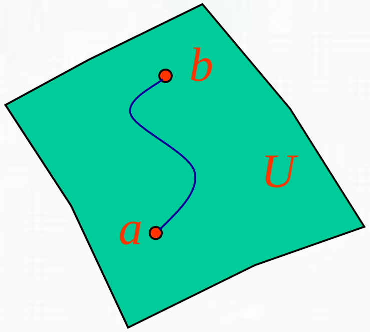
**等势面：** 电势值相等的点构成的曲面。

**等势面性质：**

**1．等势面与电场线处处正交**

在等势面上两点$a$、$b$之间，电场力作功为

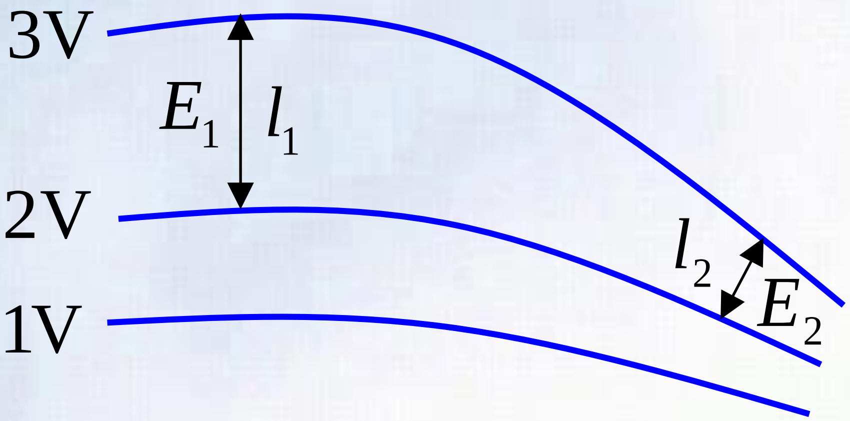
$$A_{ab} = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = q_0 (U_a - U_b) = 0$$



$$q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

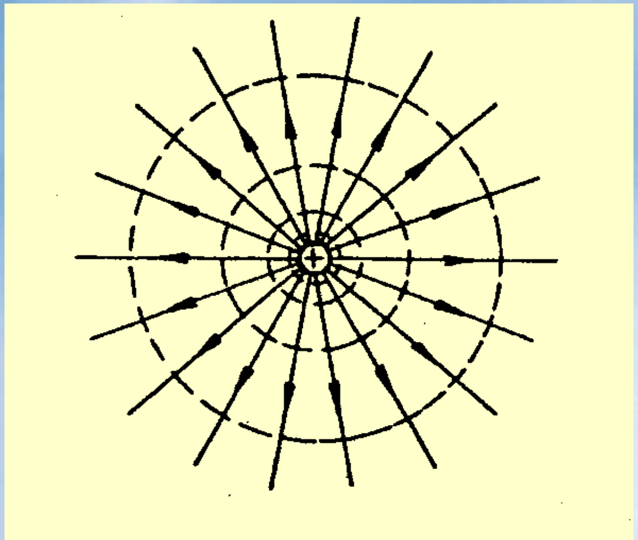
因为$q_0$、$\boldsymbol{E}$、$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$均不等于零，所以$\boldsymbol{E} \perp \mathrm{d}\boldsymbol{l}$。

**2．等势面密集的地方场强大，稀疏处场强小。**

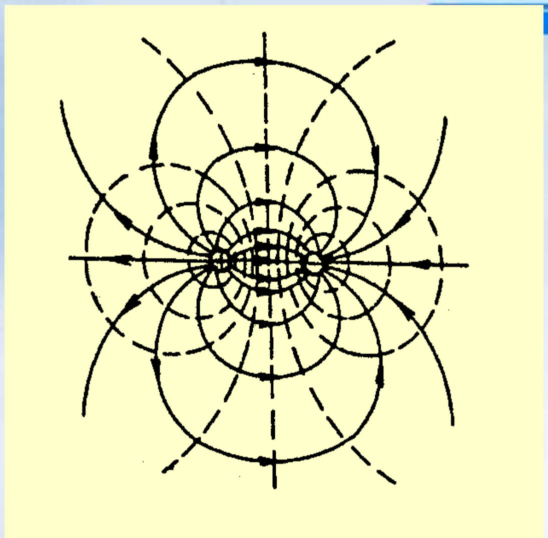



$$E_1 l_1 = E_2 l_2 = 1\mathrm{V}$$

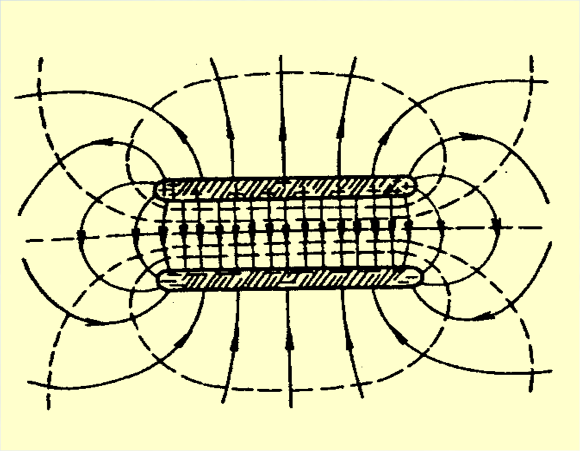
实箭头→电场　　虚线→等势面



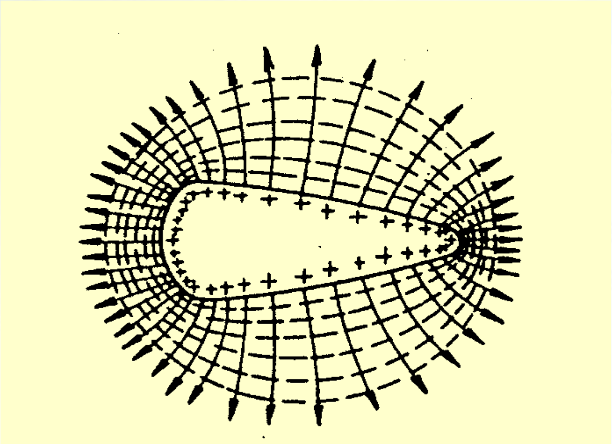
点电荷



电偶极子



正负带电板



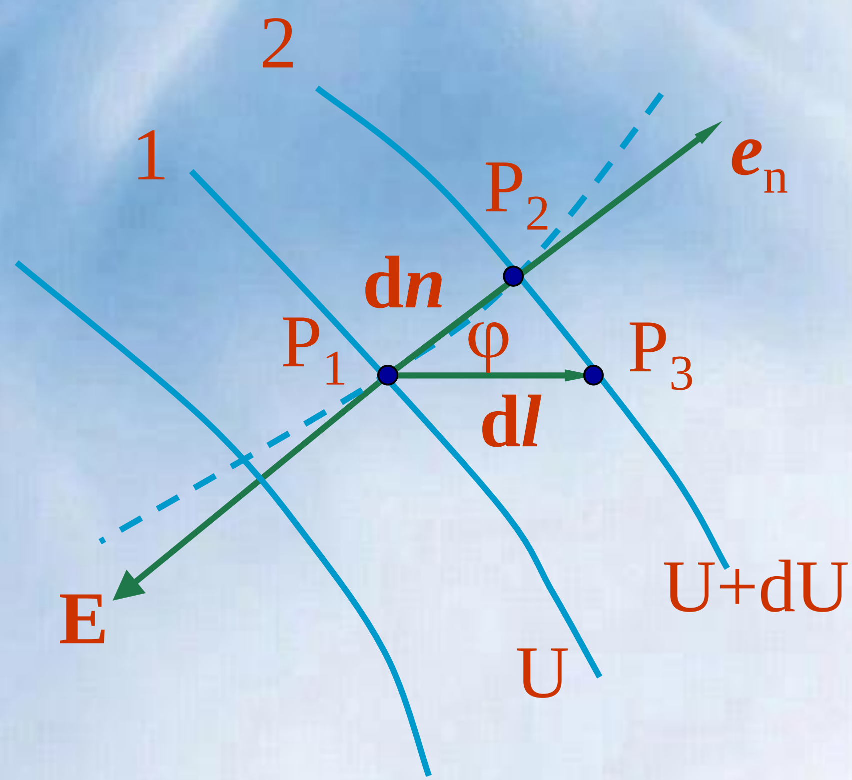


不规则形状的带电导体

## 二、电场强度与电势梯度的关系

电势为场强的积分形式，那么场强为电势的微分形式?

如下图，取相邻两等势面1、2，其电势分别为：$U$、$U+\mathrm{d}U$，并设$\mathrm{d}U>0$。过$P_1$点作法线交面2于$P_2$，法线方向矢量为$\boldsymbol{e}_n$，$P_1P_2=\mathrm{d}\boldsymbol{n}$，取面2中另一点$P_3$，$P_1P_3=\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，则电势的空间变化率$\mathrm{d}U/\mathrm{d}l$将恒小于$\boldsymbol{e}_n$方向上电势的空间变化率$\mathrm{d}U/\mathrm{d}n$。




$\mathrm{d}U/\mathrm{d}l \le \mathrm{d}U/\mathrm{d}n$。

设**d*l***与$\boldsymbol{e}_n$之间的夹角为$\varphi$，可知，

$\mathrm{d}n = \mathrm{d}l\cos\varphi$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\cos\varphi = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\vec{e}_n \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}l}$$

电势变化率 $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l}$ 是矢量 $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\vec{e}_n$ 在 $\mathbf{d}\boldsymbol{l}$ 方向上的分量，此矢量记做 $\nabla U$。

**电场中某点的电势梯度矢量，方向取电势在该点空间变化率为最大时的方向，大小等于这个最大的空间变化率。**

电场中某点电势梯度矢量与电场强度之间的关系：

电场线的方向亦即电场强度的方向恒垂直于等势面，并指向电势降落的方向。$P_1$点电场强度的方向与$\mathbf{e}_n$的方向相反。单位正电荷从$P_1$移动到$P_2$点时，电场力做功：

$$\mathbf{E}_n \bullet \mathrm{d}\mathbf{n} = E_n \mathrm{d}n = U - (U + dU) = -\mathrm{d}U$$

式中$E_n$为场强在$\mathbf{e}_n$方向上的分量：$E_n = -\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}$

将上式写成矢量式：

$$\vec{E} = E_n \vec{e}_n = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\vec{e}_n = -\nabla U$$

电场的X方向分量为：

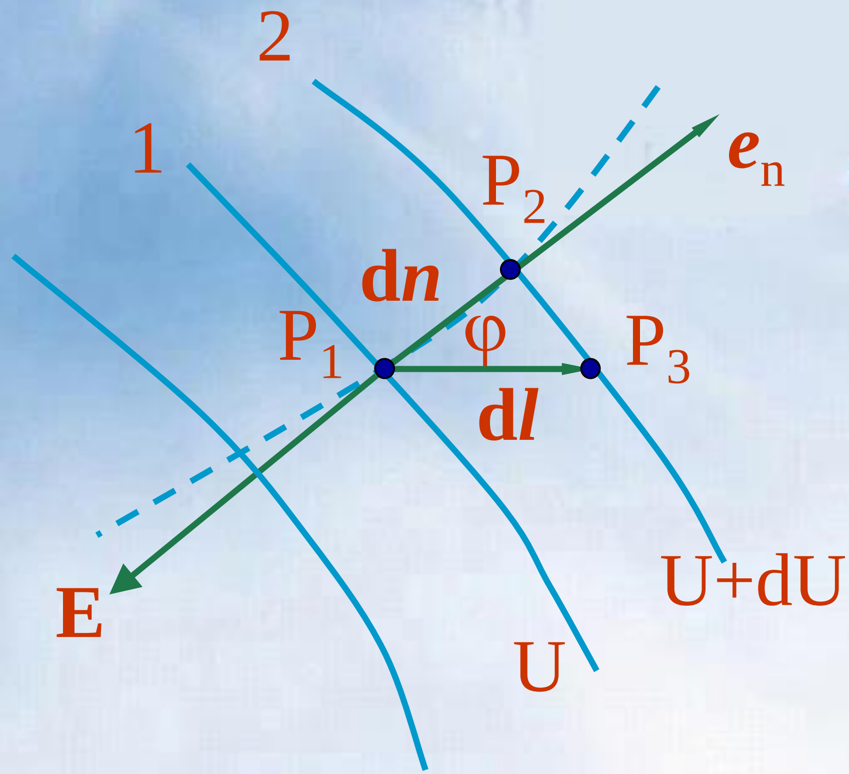
$$E_x = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\vec{e}_n \bullet \vec{i} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$$

所以在直角坐标系中，有

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} =$$

$$-(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}) = -\nabla U$$

直接证明:




$$\vec{E}\bullet d\vec{l} = -dU = -(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz) = -\nabla U \bullet d\vec{l}$$

$$\vec{E} = -\nabla U \equiv -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

利用电势求电场强度可避免复杂的矢量运算。
电势梯度单位是V/m，即场强单位。

## 例题5：由电偶极子的电势分布求其场强?

解：电偶极子电场中任意一点P处的电势为：

$$U_P = \frac{p_e \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p_e x}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + y^2)^{3/2}}$$

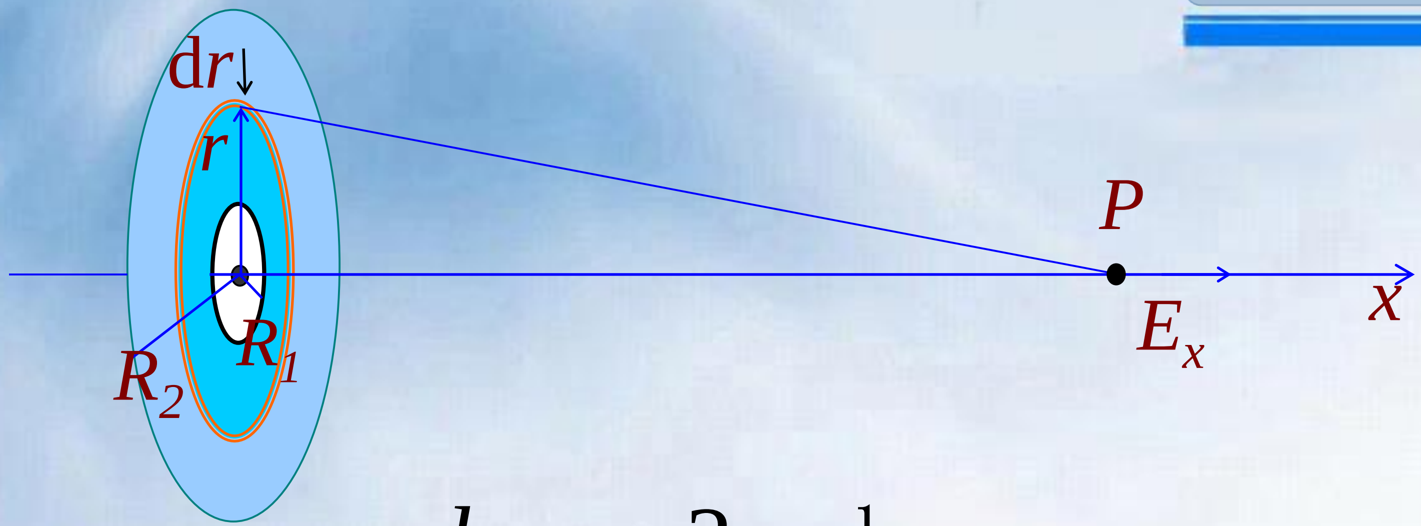
P点的场强沿坐标轴$x$、$y$的分量为：

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{p_e(2x^2 - y^2)}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

$$E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{3p_e xy}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

例题6：将半径为$R_2$的圆盘，在盘心处挖去半径$R_1$的小孔，并使盘均匀带电，试用电势梯度求场强的方法，计算这个中空带电圆盘轴线上任一点$P$处的场强？

**解：** 设面电荷密度$\sigma$，离圆心距离$x$，在盘面上取半径$r$，宽为d$r$的圆环，环上带电：




$$dq = \sigma 2\pi r \mathrm{d}r$$

d$q$在$P$点的电势为

$$\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma r \mathrm{d}r}{2\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}}$$

整个圆盘在$P$点的电势为：

$$U=\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{d}U=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\sigma r\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}}$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R_2^2+x^2}-\sqrt{R_1^2+x^2})$$

由对称性分析可知，电场只沿$x$轴，其值为：

$$E=E_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x}{\sqrt{R_1^2+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{R_2^2+x^2}}\right)$$