


研究生课：工程数学

1.基础单元 “数值计算方法”

各章节知识点汇总

张健

上海理工大学 环境与建筑学院

2019年秋

- 答疑辅导时间/地点：

  每周四下午13：00-15：00，环建楼501办公室

  每周五晚上18：00-20：00，环建楼501办公室

- Email： jzhang66@163.com
- Mobile phone： 18217121656（短信联系）

教材：

[1] 廖晓钟，赖汝.《科学与工程计算》，国防工业出版社，2003年.

参考书：

[1] 沈剑华.《数值计算基础》，同济大学出版社，2004年.
[2] 李庆扬，王能超，易大义.《数值分析》（第五版）清华大学出社.2008年.
[3] 王兵团,张作泉,赵平福.《数值分析简明教程》清华大学出版社，北京交通大学出版社，2012年
[4] 唐旭清.《数值计算方法》，科学出版社，2015年.

- 本课为研究生必修课，考试课。直接关系大家的硕士学位，请认真对待！

- 请务必掌握标志“重点”的知识点，以及相关例题与习题，有12个重点。

- 学习数学，切记：

  重在理解！

  记忆公式+举一反三！

  功夫请下在平时！

基础单元的教学进度表

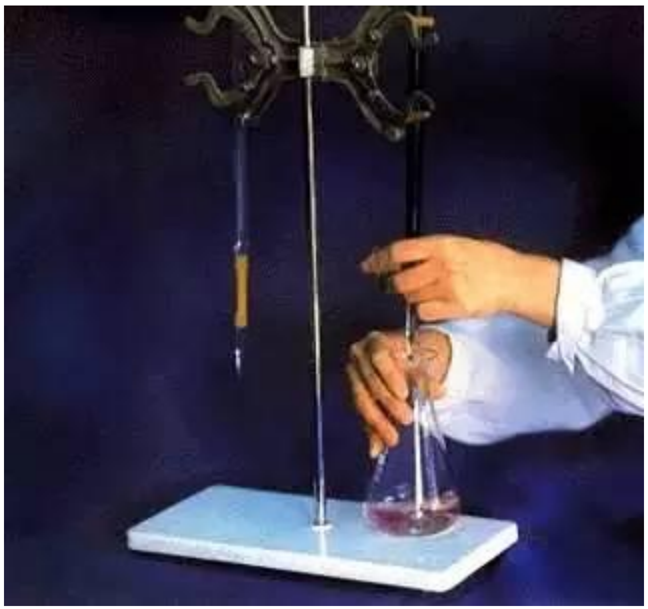
内容	课次数（1次是3学时）
第一章　绪论与误差分析	1
第二章　方程求根	3
第三章　插值与最小二乘法	3
第四章　数值积分和数值微分	2
第五章　常微分方程数值解	2
总计	**11**

另外，有5次课进行专题单元讲解，
有1次复习课，1次考试课。

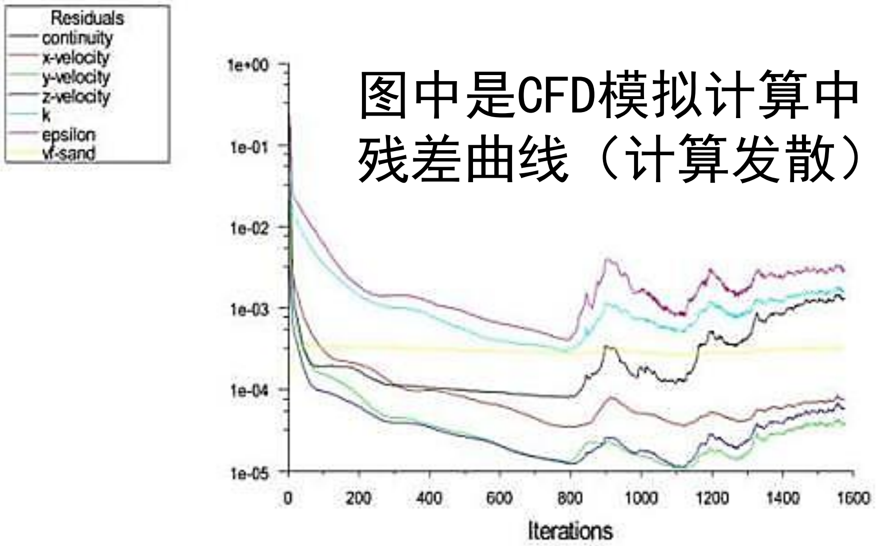
第一章　绪论与误差分析

(1次课)

学习目标：
1）“数值计算方法”的学习意义；
2）理解“误差”的概念，通过函数的误差传递。



实验测试误差



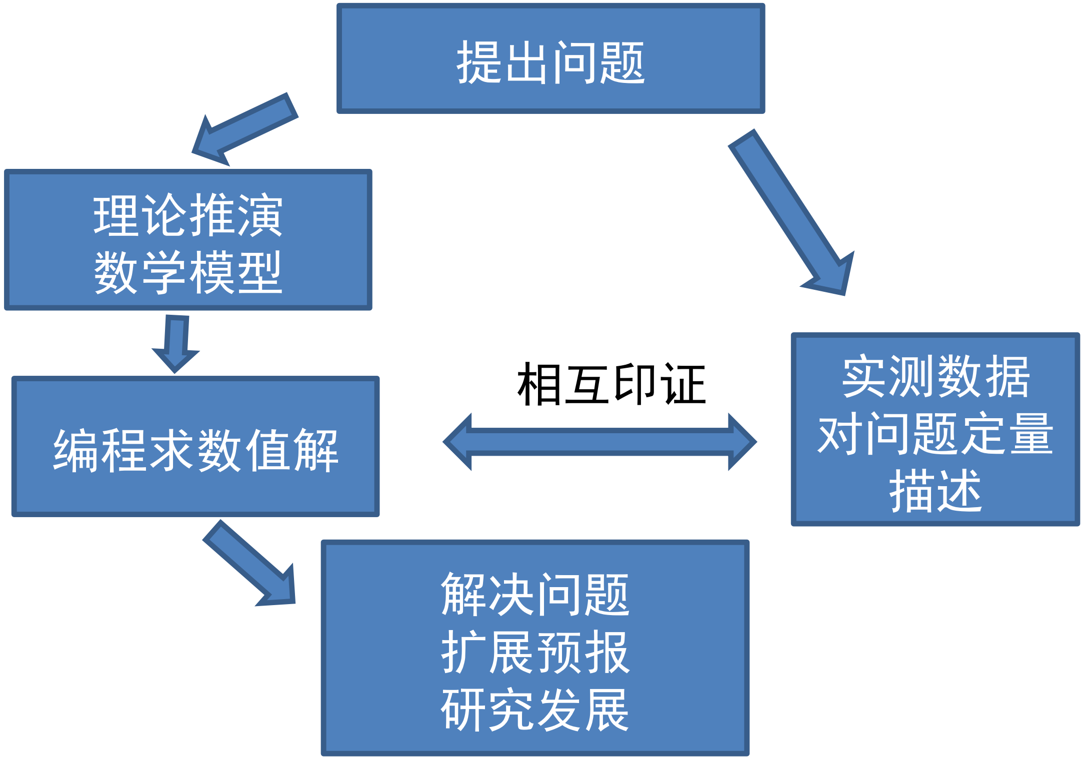
图中是CFD模拟计算中残差曲线（计算发散）

计算误差
（本节课讲解的是“数的误差”，以及“误差的函数传递”）

本章内容：

1. 数值计算方法（数值分析）：是应用数学的一个分支，是用计算机求解各种数学问题的方法及理论。

2. 数值分析求解科学计算问题的步骤



重点

3. 误差与误差限

绝对误差 $e(x^*) = x - x^*$，$|e(x^*)| = |x - x^*| \le \varepsilon^*$

相对误差 $e_r(x^*) = \dfrac{x - x^*}{x^*}$，$|e_r(x^*)| = \left|\dfrac{x - x^*}{x^*}\right| \le \varepsilon_r^*$

- 数据的置信区间 $x = x^* \pm \varepsilon^*$
- 绝对误差限与相对误差限的关联 $\varepsilon_r^* = \dfrac{\varepsilon^*}{|x^*|}$
- 数学上“四舍五入”的误差限是末位的半个单位。（测试上“四舍六入五留双”与本课无关）
- 有效数字。

4. 通过函数的误差传递

已知数据 x^* 的误差限(绝对误差限) ε^*，计算一元函数 $f(x)$ 的误差限

$$\varepsilon[f(x^*)] \approx \left| f'(x^*) \right| \cdot \varepsilon^*$$

$$\varepsilon_r[f(x^*)] \approx \frac{\left| f'(x^*) \right|}{\left| f(x^*) \right|} \cdot \varepsilon^*$$

重点

公式来自 $dy \approx (\frac{dy}{dx})\bigg|_{x^*} dx$ 或 $dz \approx \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(x^*,y^*)} dx + \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(x^*,y^*)} dy$

5. 尽量减少运算误差的原则

- 两个相近的数相减，会严重损失有效数字；
- 防止大数“吃掉”小数；
- 绝对值太小的数不宜做除数；
- 简化计算步骤，减少运算次数。

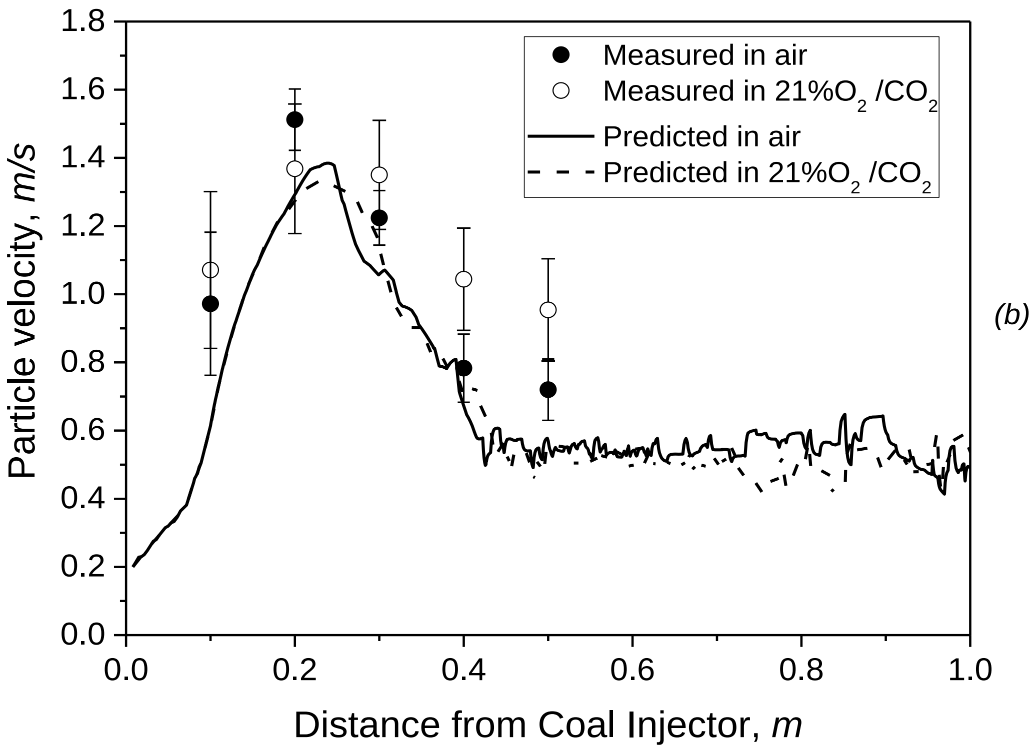
具体编程中的误差控制，要具体问题具体分析，方法不同。

第一章课后作业：

- P26　习题1，习题7

- 题：正方形边长约为1m,以米尺测量边长，米尺的测量误差为0.5mm，求正方形面积的计算误差是多少？

课外扩展：实验误差



实验误差的图示

图中是用Origin软件绘制带error bar的试验数据，并与数值模拟结果进行比较。

课外扩展：实验误差

➢ 实验误差主要分为系统误差、随机误差两类，前者可控。详见《分析化学》第一章节（第七版，华东理工大学、四川大学编，高等教育出版社）

➢ 有限次测试的实验数据的误差限（描述随机误差，不可实测）

实验数据的置信区间 $\mu = \overline{x} \pm \frac{ts}{\sqrt{n}}$

标准偏差 $s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$

测试次数 n

查 t 值表

测量次数 n	置信度 90%	置信度 95%	置信度 99%
2	6.314	12.706	63.657
3	2.920	4.303	9.925
4	2.353	3.182	5.841
5	2.132	2.776	4.604
6	2.015	2.571	4.032
7	1.943	2.447	3.707
8	1.895	2.365	3.500
9	1.860	2.306	3.355
10	1.833	2.262	3.250
11	1.812	2.228	3.169
21	1.725	2.086	2.845
∞	1.645	1.960	2.576

第二章　方程求根

(3次课)

学习目标：

1）过去学过简单方程的求根

一元二次方程

标准形式： $ax^2+bx+c=0$

可求出解析解

求根公式： $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

2）现在学习对复杂方程求解

$$xe^x-1=0$$

$$x^3-x-1=0$$

$$2x-\lg x=7$$

$$\begin{cases} x^2-c=0 \quad (c\text{为常数}) \\ \text{即求解}\sqrt{c} \end{cases}$$

可用“迭代法”求解一定值域范围内的近似解

本章内容：

1. 方程求根：通过一定程式，将有根区间缩小，实现根的逐渐逼近，最终获得满足精度的根。

2. 二分法(根的初始值探索)

前提：方程 $f(x)=0$ 在区间[a, b]内单调连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，即在[a, b]内有唯一根。

方法1：逐步搜索法（设定步长h，求f(x)与f′(x）估算多解的大致位置）

方法2：区间二分法（取中点，替代f(x)同正负的端点）

3. 不动点迭代法（使用某固定的迭代函数/隐函数公式）

特点：迭代的收敛性，取决于迭代函数 $\varphi(x)$ 与初值 x_0 的选择。

1）理论判断迭代函数收敛的充分条件

重点

$$\left|\varphi'(x^*)\right| < 1$$

适用于：有映内性的[a, b]区间条件（上式是非必要条件），或是 x^* 的某邻域条件。

2）经验判断迭代函数收敛的方法：迭代中观察计算误差的绝对值是否下降。

4. 迭代法的收敛阶

对迭代格式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，若 $\varphi^{(p)}(x)$ 在 x^* 的邻域连续，且

$$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\ldots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$$

$$\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$$

则迭代格式/迭代函数是p阶收敛的。

越高阶迭代函数，其收敛速度越快。

（为了不动点迭代的加速，应选择高阶迭代函数，不过常常没得选择）

5. 不动点迭代的加速修正（初值的控制）

方法1：加权迭代法（利用两个点）

用加权的迭代格式 $x_{k+1}=\dfrac{1}{1-C}[\varphi(x_k)-Cx_k]$，

其中 $C=\varphi'(\xi),\quad \xi\in[x^*,x_k]$，

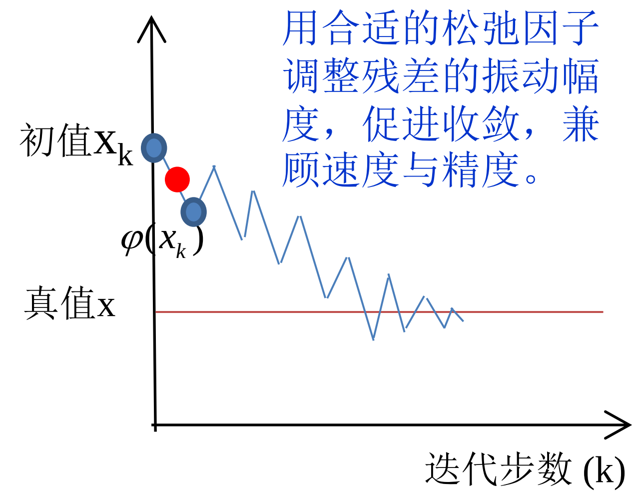
来替代不动点迭代格式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$。

课外扩展：加权迭代格式也可理解为 $x_{k+1}=\lambda\varphi(x_k)+(1\text{-}\lambda)x_k$

（1）松弛因子（relaxation factor，$\lambda\in(0,1]$）为最佳值 $\lambda=1/(1\text{-}\varphi'(x^*))$ 时，收敛最快；

（2）松弛因子<最佳值（亚松弛因子，under relaxation），计算量增加，有利于计算结果的精确度提高；

（3）松弛因子>最佳值（大松弛因子），计算量增加，计算误差（残差）正负波动较大，有可能计算发散。



方法2：斯蒂芬森迭代法（利用三个点）

斯蒂芬森迭代格式（二阶收敛）

$$x_{k+1} = x - \frac{[\varphi(x_k) - x_k]^2}{\varphi(\varphi(x_k)) - 2\varphi(x_k) + x_k}$$

6. 牛顿迭代法

牛顿迭代格式（至少二阶收敛）

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

重点

7. 改进的牛顿下山法（防止迭代发散）

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad \lambda \in (0,1]$$

迭代中，随时修改“下山因子（松弛因子）” λ ，用 $\frac{\lambda}{2}$ 替代 λ ，保证函数“下山”（$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$ ）一路发生。

第二章课后作业：

- P67　习题4，
- P68　习题12

第三章　插值与最小二乘法

(3次课)

学习目标 1）插值问题

t分布函数表

测量次数 n	置信度		
	90%	95%	99%
2	6.314	12.706	63.657
3	2.920	4.303	9.925
4	2.353	3.182	5.841
5	2.132	2.776	4.604
6	2.015	2.571	4.032
7	1.943	2.447	3.707
8	1.895	2.365	3.500
9	1.860	2.306	3.355
10	1.833	2.262	3.250
11	1.812	2.228	3.169
21	1.725	2.086	2.845
∞	1.645	1.960	2.576

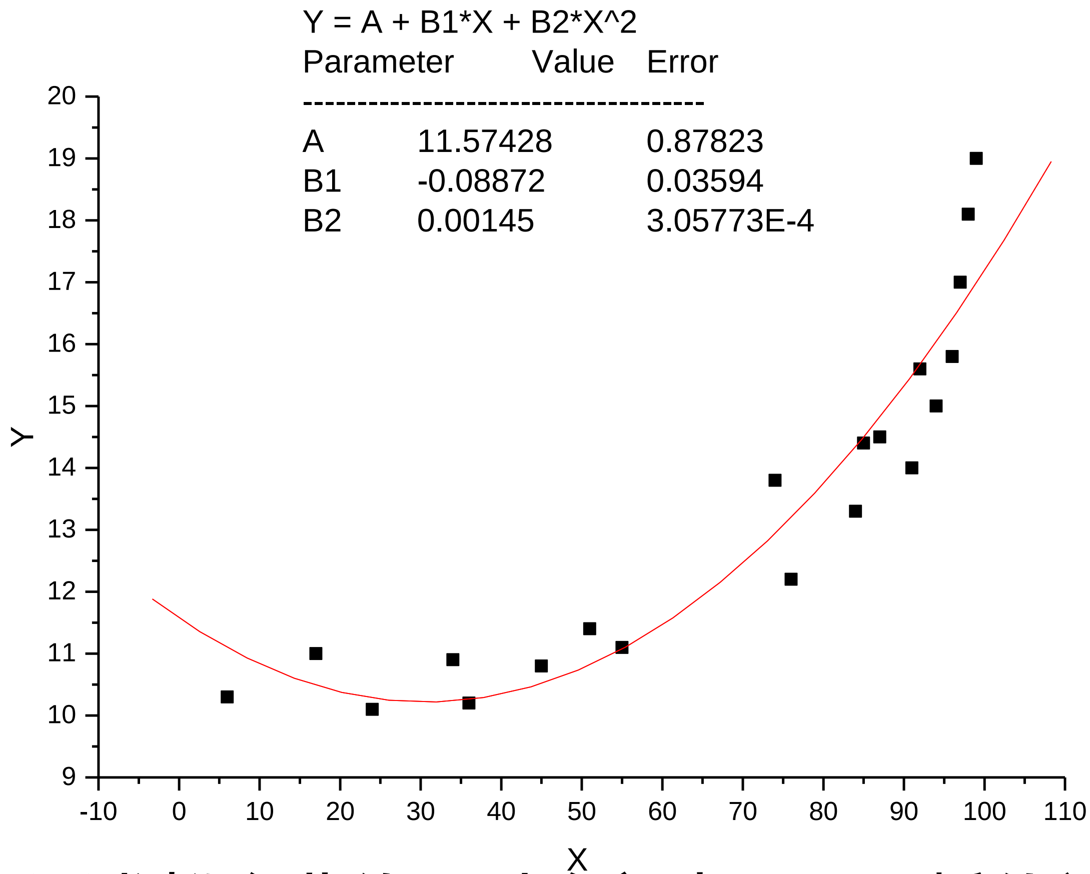
求n=13 →

“查值” or “插值”

（查表） （插入一个值）

√

2）曲线的拟合



并不要求拟合曲线经过全部点，不是插值问题；

是用曲线拟合，来指明点的大致分布规律或趋势。

本章内容：

1. 插值问题的意义

插值是对函数的离散数据建立简单的数学模型，进而求其余点的函数值。

2. 拉格朗日插值法

1）线性插值（经过已知的2个离散数据点）

通过点（x_0, y_0）与（x_1, y_1）两点的插值函数：

$$P(\mathrm{x}) = y_0 + \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)(x - x_0)$$

重点

2）抛物线插值（经过已知的3个离散数据点）

通过三点 (x_0, y_0)，(x_1, y_1)，(x_2, y_2) 的插值函数

$$P(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{2} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} y_i$$

$$= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

重点

3）扩展：n次拉格朗日插值函数(经过n+1个点)

$$P_{\mathrm{n}}(\mathrm{x}) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) y_k$$

其中，基函数 $l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$

插值余项为 $R(x) = \mathrm{f}(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(x)$

其中， $w(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i), \quad a < \xi < b$

重点

3. 牛顿插值法（基于差商）

牛顿插值多项式：

$$P(x)=f(x_0)+\sum_{k=0}^{n}\left\{\prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i)f[x_0,x_1,\ldots,x_k]\right\}$$

$$=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)$$

$$+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\ldots$$

$$+f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

插值余项：

$$R(x)=f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n,x](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

（要理解：①有n+1个点，则最高有n阶差商，即牛顿插值多项式最高是n次的；②差商值是常数时对应的最高阶，即为牛顿插值多项式的最高次）

差商表：

重点

x_i	$f(x_i)$	一阶	二阶	三阶
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$		
x_2	$f(x_2)$	$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
x_3	$f(x_3)$	$\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$	$\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	$\dfrac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_4	$f(x_4)$	$\dfrac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}$	$\dfrac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	$\dfrac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
x_5	$f(x_5)$	$\dfrac{f(x_5)-f(x_4)}{x_5-x_4}$	$\dfrac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$	$\dfrac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}$

4. 等距节点的牛顿插值法（基于差分）

往前差分表

x_i	y_i	一阶	二阶	三阶
x_0	y_0			
x_1	y_1	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$		
x_2	y_2	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$	
x_3	y_3	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$
x_4	y_4	$\Delta y_3 = y_4 - y_3$	$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$	$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$

等距节点的牛顿插值多项式：

$$f(x) \approx P(\mathrm{x}) = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 +$$

$$\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots[t-(n-1)]}{n!}\Delta^n y_0$$

其中，$h = x_1 - x_0$ 描述步长间距，

$t = \dfrac{x - x_0}{h}$ 描述计算点（x）离某给定点 (x_0) 的距离是步长间距的倍数。

5. 最小二乘法曲线拟合的概念

- 要求误差（近似函数 $\varphi(x_i)$ 与目标函数 $f(x_i)$ 的绝对误差）的平方和达到最小，从而获得近似函数。
- 最小二乘法求解是通过误差评估获得近似函数，是可人为控制近似函数的算法。然而，插值函数是求解数学严谨的近似函数。两者概念完全不同。

6. 最小二乘法直线拟合公式的推导过程

重点

$$\varepsilon_i = \varphi(x_i) - f(x_i)$$

$\|\varepsilon\| = (\sum_{i=0}^{N} \varepsilon_i^2)^{1/2}$ 达到最小，对于拟合直线 $y = a + bx$，

也就是 $J = \sum_{i=1}^{N} [y_i - (a + bx_i)]^2$ 达到最小

满足上式，即要求J达到极值，需要满足：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial J}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

推导上两个式子，最后有

$$\begin{cases} aN + b\sum x_i = \sum y_i \\ a\sum x_i + b\sum x_i^{\ 2} = \sum x_i y_i \end{cases}$$

重点

7. 最小二乘法的多项式拟合

抛物线拟合

$$\begin{cases} a_0 N + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 = \sum y_i \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 = \sum x_i y_i \\ a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 = \sum x_i^2 y_i \end{cases} \Rightarrow y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

第三章课后作业：

- P208　习题1（用线性插值），

  习题6 （真值 $\sqrt{175}$=13.22876, 计算相对误差）

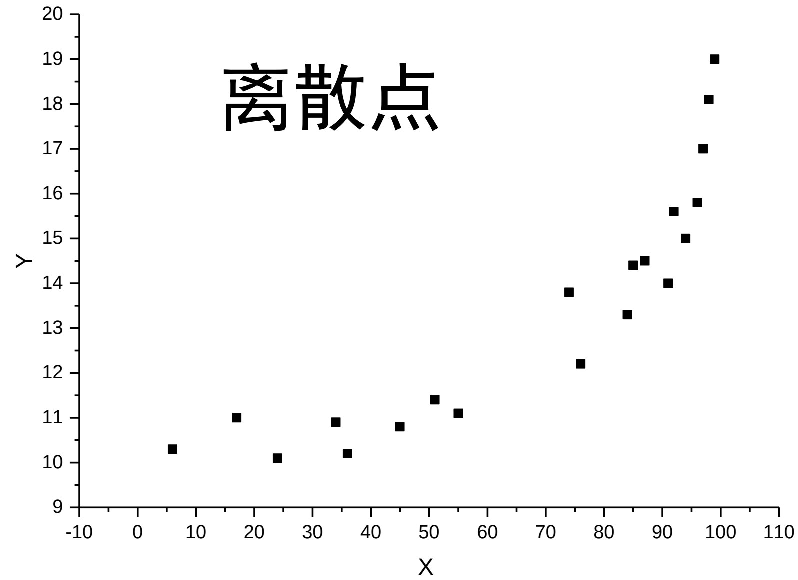
- P209　习题15

  习题16

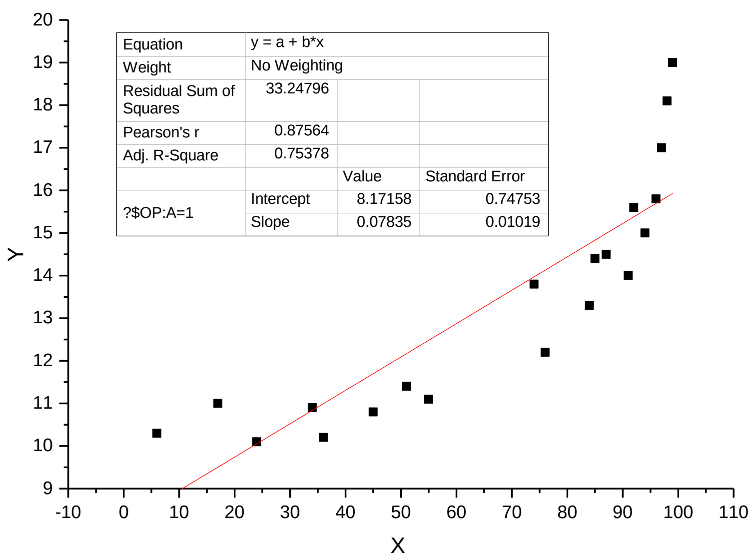
  习题27（只求一次拟合多项式，去掉“二次多项式”）

补充课外内容：

示范Origin软件对离散数据求曲线拟合



直线拟合



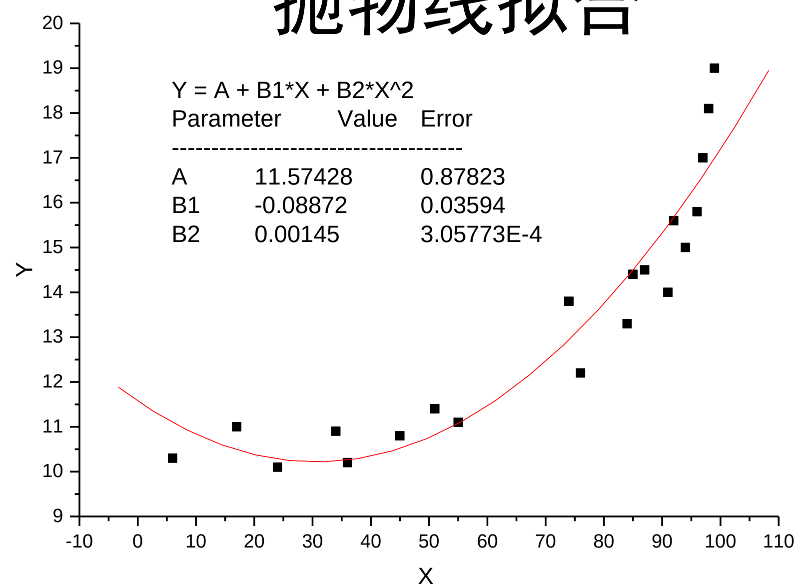


图3—1

第四章　数值积分和数值微分

(2次课)

学习目标：

- 高数所学的“微分” “定积分”都是针对特定函数而言的。即使给出积分表，很多案例仍旧无法实用地求解。

举例：已知下面公式表达，定积分求解仍非常困难。

$$\int \frac{x^2}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}}dx = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{1+x^4}}{1-x^2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}+C$$

- 将学会为一般的复杂函数，求解满足精度的数值积分与数值微分。

本章内容：

1. 数值积分算法：

用积分区间[a，b]上的一些离散节点的函数值的线性组合，来近似计算定积分的值。

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

A_k 取值可以人为控制（如用待定系数法，确保满足一定代数精度），也可以采用严谨的拉格朗日插值型描述：

$$A_k = \int_a^b l_k(x)dx$$

重点

2. 求积公式的代数精度(代数精度越高，公式越准确)

对于 $f(x)=1,x,x^2,x^3,\ldots,x^m$，求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$

都准确成立，对于 $f(x)=x^{m+1}$ 不能准确成立，则求积公式有m次代数精度（m=0, 1, 2, 3, …）

- 注：代数精度只是定性地评估求积公式的计算精度，不是定量地评估定积分近似计算的误差。

3. 牛顿-柯特斯公式（来自拉格朗日插值的求积公式）

已知：将较小的积分区间[a, b]等分成n份（节点等距），节点函数值 (x_k, y_k)，k=0, 1, 2…n

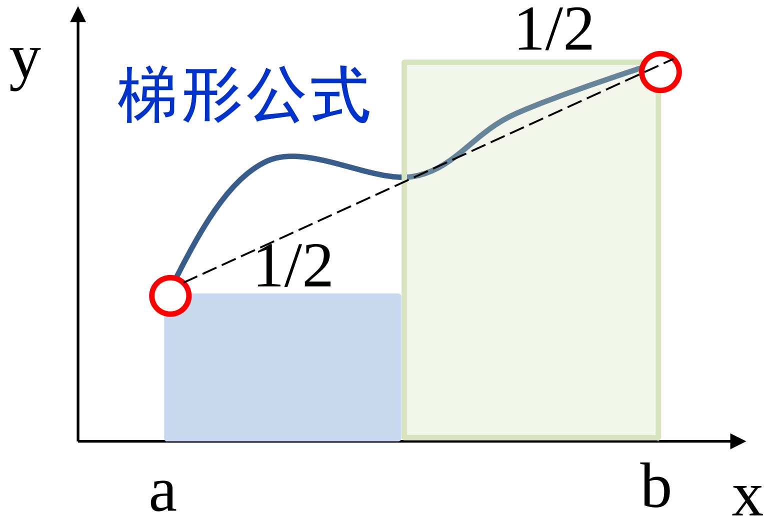
$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k f(x_k)$$

重点

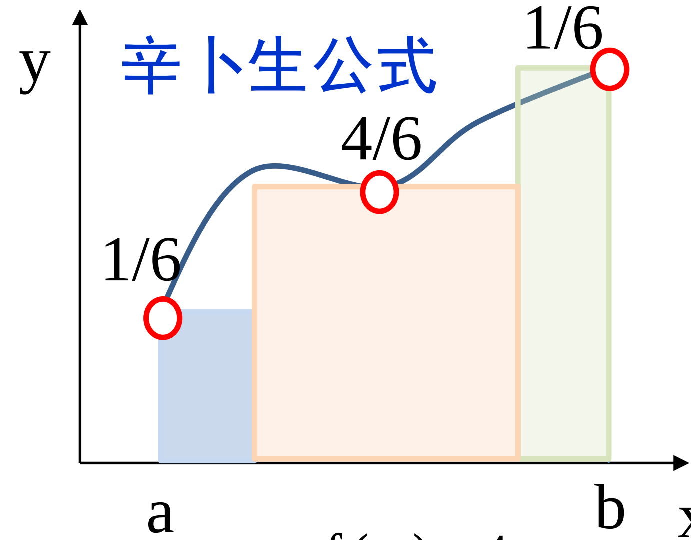
网格数 n	C_k					节点数 n+1	代数精度	模型名字
0						1	0	矩形公式
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				2	1	梯形公式
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$			3	3	辛卜生公式
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$		4	3	
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$	5	5	柯特斯公式

- n=8时，Ck有负值；仅低阶公式有实用意义。
- n为奇数时，代数精度=n；
  n为偶数(节点数为奇数)时，代数精度=n+1，更为准确。

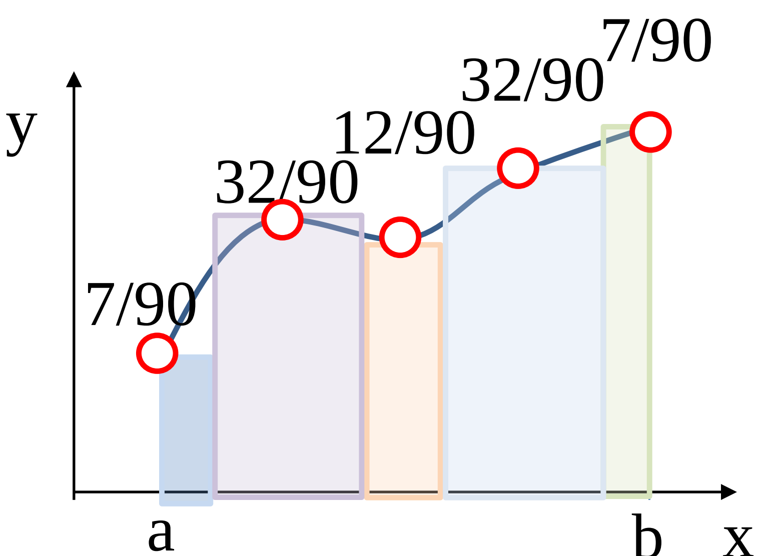
理解：1）小积分区间的函数定积分可近似为多个矩形面积之和；
2）梯形公式可以用来计算离散点曲线的积分。



$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)[\frac{f(x_1)}{2}+\frac{f(x_2)}{2}]$$



$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\cdot[\frac{f(x_1)}{6}+\frac{4}{6}f(x_2)+\frac{f(x_3)}{6}]$$



柯特斯公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx$$

$$(b-a)\cdot[\frac{7}{90}f(x_1)+\frac{32}{90}f(x_2)+\frac{12}{90}f(x_3)$$

$$+\frac{32}{90}f(x_4)+\frac{7}{90}f(x_5)]$$

4. 一定区间[a，b]的定步长求积法（复化求积法，重在概念）

$$\int_a^b f(x)dx = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}}_{\text{n个之和}} \underbrace{\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx}_{\text{一个小区间}}$$

1）复化梯形公式

$$T_n = \frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)], \qquad R_n = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)$$

2）复化辛卜生公式

$$S_n = \frac{h}{6}[f(a)+f(b)+\sum_{k=1}^{n-1}[4f(x_{k-1/2})+2f(x_k)], \qquad R_n = -\frac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(\eta)$$

- 书上235页例题显示：[0, 1]区间的定积分，复化梯形公式需要213个网格（n的数量），复化辛卜生公式需要4个网格。
- 该方法难于准确评估误差，难于设定小区间长度h，没有实用意义。

5. 一定区间[a，b]的变步长求积法

（1）变步长与余项外推的思路

- 步长逐次二分，让积分近似值误差满足精度要求；
- 通过余项外推，提高公式的计算精度。
- 书上242页例题显示：龙贝格算法可以让[0, 1]区间的定积分的误差控制在 1×10^{-3} ~ 1×10^{-10}，足够精确。

$$T(\frac{h}{2})=\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{T}{2}+\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})}_{\text{梯形公式序列，代数精度1}}+\mathrm{a}_1(\frac{h}{2})^2}_{\text{辛卜生公式序列，代数精度3}}+\mathrm{a}_2(\frac{h}{2})^4}_{\text{柯特斯公式序列，代数精度5}}+a_3(\frac{h}{2})^6}_{\text{龙贝格公式序列，代数精度7}}+a_4(\frac{h}{2})^8+\ldots$$

（2）龙贝格算法公式

理解：1）误差用二分前后（k变化）的积分值对比获得，2）满足精度不一定要一算到底，3）下表类似牛顿差分表

区间二分次数 k	等分后网格数 $n=2^k$	步长 $h=\frac{b-a}{n}$	梯形序列 T_n	辛卜生序列 S_n	科特斯序列 C_n	龙贝格序列 R_n
0	1	$b-a$	$T_1=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)]$			
1	2	$\frac{b-a}{2}$	$T_2=\frac{T_1}{2}+h[f(a+h)]$	$S_1=\frac{4}{3}T_2-\frac{1}{3}T_1$		
2	4	$\frac{b-a}{4}$	$T_4=\frac{T_2}{2}+h[f(a+h)+f(a+3h)]$	$S_2=\frac{4}{3}T_4-\frac{1}{3}T_2$	$C_1=\frac{16}{15}S_2-\frac{1}{15}S_1$	
3	8	$\frac{b-a}{8}$	$T_8=\frac{T_4}{2}+h[f(a+h)+f(a+3h)+f(a+5h)+f(a+7h)]$	$S_8=\frac{4}{3}T_4-\frac{1}{3}T_2$	$C_2=\frac{16}{15}S_4-\frac{1}{15}S_2$	$R_1=\frac{64}{63}C_2-\frac{1}{63}C_1$
。。。。。。			变步长梯形公式	基于余项的外推公式，龙贝格公式		

（3）扩展：大区间[a, b]的定积分计算

①用龙贝格算法，计算一定区间的积分值，不断二分，满足精度要求。

②用复化求积法的思想

$$\int_a^b f(x)dx = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}}_{n\text{个之和}} \underbrace{\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx}_{\text{一个小区间}}$$

可以①法单独使用，也可以① ②法协同使用，要根据计算速度优化选择。

6. 求等距节点上的一阶导数

（1）三点求导公式

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}(-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2))$$

$$=\frac{1}{2h}\{3[f(x_1)-f(x_0)]-[f(x_2)-f(x_1)]\}$$

$$f'(x_1)=\frac{1}{2h}[f(x_2)-f(x_0)]$$

重点

$$f'(x_2)=\frac{1}{2h}[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)]$$

$$=\frac{1}{2h}\{3[f(x_2)-f(x_1)]-[f(x_1)-f(x_0)]\}$$

（2）五点求导公式（书外知识补充）

$$f'(x_0)=\frac{1}{12h}[-25f(x_0)+48f(x_1)-36f(x_2)+16f(x_3)-3f(x_4)]$$

$$f'(x_1)=\frac{1}{12h}[-3f(x_0)-10f(x_1)+18f(x_2)-6f(x_3)+f(x_4)]$$

$$f'(x_2)=\frac{1}{12h}[f(x_0)-8f(x_1)+8f(x_3)-f(x_4)]$$

$$f'(x_3)=\frac{1}{12h}[-f(x_0)+6f(x_1)-18f(x_2)+10f(x_3)+3f(x_4)]$$

$$f'(x_4)=\frac{1}{12h}[3f(x_0)-16f(x_1)+36f(x_2)-48f(x_3)+25f(x_4)]$$

7. 求等距节点上的二阶导数

（1）三点求导公式

$$f''(x_0)=f''(x_1)=f''(x_2)=\frac{1}{h^2}[f(x_0)+f(x_2)-2f(x_1)]$$

（2）五点求导公式（书外扩充）

$$f''(x_0)=\frac{1}{12h^2}[35f(x_0)-104f(x_1)+114f(x_2)-56f(x_3)+11f(x_4)]$$

$$f''(x_1)=\frac{1}{12h^2}[11f(x_0)-20f(x_1)+6f(x_2)+4f(x_3)-f(x_4)]$$

$$f''(x_2)=\frac{1}{12h^2}[-f(x_0)+16f(x_1)-30f(x_2)+16f(x_3)-f(x_4)]$$

$$f''(x_3)=\frac{1}{12h^2}[-f(x_0)+4f(x_1)+6f(x_2)+20f(x_3)+11f(x_4)]$$

$$f''(x_4)=\frac{1}{12h^2}[11f(x_0)-56f(x_1)+114f(x_2)-104f(x_3)+35f(x_4)]$$

第四章课后作业：

- P257 习题1(1)（原题错误，$\int_{-3h}^{3h} f(x)dx$ 改为 $\int_{-h}^{h} f(x)dx$）
- 习题3 （与精确值比较，即分析几位有效数字是精确的）
- 习题13 （题目选做）
- 习题21 （去掉“~~估计误差~~”）

第五章　常微分方程数值解

(2次课)

本科所学复习：

- 常微分方程（一元函数的微分方程）

1）可分离变量的微分方程 $g(y)dy = f(x)dx$

2）齐次方程 $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y) = f(\dfrac{y}{x})$

3）一阶线性微分方程 $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$（先求 $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = 0$）

4）贝努力方程 $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0,1)$（先÷ y^n ）

- 常微分方程的解为通解（多个解）$y = f(x,C)$

（C为常数）

学习目标：

常微分方程的初值问题

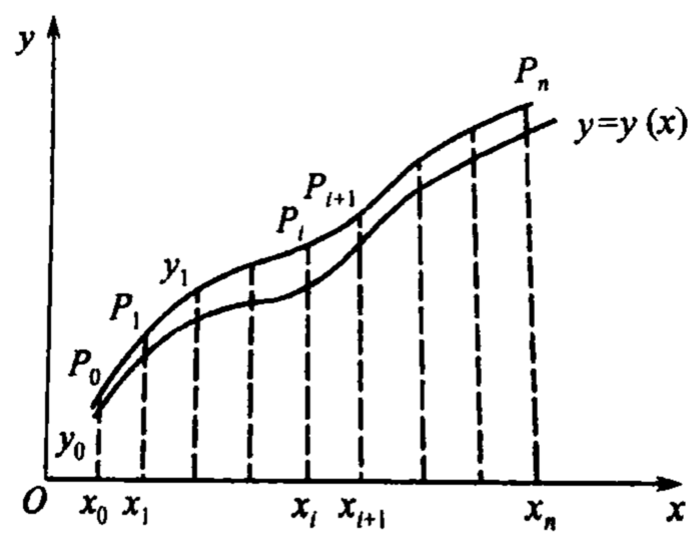
（对应一个x只有一个解y）

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

1. 欧拉法（用一条与初始点重合的折线近似表示曲线）

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ x_n = x_0 + nh \qquad (n=0, 1, \cdots) \end{cases}$$

重点



求已知导数的曲线的坐标值

2. 几种方法的优缺点

（1）欧拉法（显式格式，一阶龙格-库塔法）

优点：计算简单；步长h越小，累计误差越小。

缺点：误差大，一阶精度；离已知点越远，误差累积得越大。

（2）隐式欧拉法/两步法（隐式格式）

缺点：不是隐函数都能求显式解，大多情况无法用

（3）梯形法/预报-校正法（嵌套格式）

缺点：第一次迭代有效，第二次之后的迭代收敛缓慢

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})] \end{cases}$$

（4）改进欧拉法

（嵌套格式，二阶龙格-库塔法）

优点：二阶精度，

无需反复迭代

$$\begin{cases} y_p = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_c = y_n + hf(x_{n+1}, y_p) \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(y_p + y_c) \end{cases}$$

3. 二阶龙格-库塔法推导的思想与过程

题目：求解常微分方程的初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

可用龙格-库塔法，取不同点的斜率加权平均作为平均斜率，进而既提高计算精度，又避免了求函数的高阶导数。二阶龙格-库塔法公式可写为：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(w_1K_1 + w_2K_2) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h K_1) \end{cases}$$

试求四个未知数 w_1, w_2, α, β 之间的关联？

重点

提示：可以构造函数 $y_n = y(x_n)$，其泰勒展开式为

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{1}{2!}h^2 y''(x_n) + o(h^3)$$

解：假设 $y_n = y(x_n)$

重点

有 $K_1 = f(x_n, y_n) = y'(x_n)$

$$K_2 = f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h K_1)$$

$$= f(x_n, y_n) + f_x(x_n, y_n)\cdot \alpha h + f_y(x_n, y_n)\cdot \beta h K_1$$

$$= f(x_n, y_n) + f_x(x_n, y_n)\cdot \alpha h + f_y(x_n, y_n)\cdot \beta h \cdot f(x_n, y_n)$$

将K_1, K_2带入y_{n+1}, 整理得

$$y_{n+1} = y_n + h(w_1 K_1 + w_2 K_2)$$

$$= y(x_n) + h(w_1 + w_2)\cdot y'(x_n) + h^2[w_2\alpha \cdot f_x(x_n, y_n) + w_2\beta \cdot f_y(x_n, y_n)\cdot y'(x_n)]$$

对比$y(x_{n+1})$在x_n点上的泰勒展开式，$y(x_{n+1}) = y_{n+1}$ 所以 $\begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ w_2\alpha = \dfrac{1}{2} \\ w_2\beta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

4. 经典的四阶龙格库塔法（四个点，四阶精度）

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + h(\frac{1}{6}K_1 + \frac{1}{3}K_2 + \frac{1}{3}K_3 + \frac{1}{6}K_4) \\
K_1 = f(x_n, y_n) \\
K_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1) \\
K_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2) \\
K_4 = f(x_n + \mathrm{h}, y_n + hK_3)
\end{cases}
$$

适合条件：函数y=y(x)的光滑性、连续性要好

第五章课后作业：

- P293 习题1
- P293 习题3 （原“梯形法和改进欧拉法”改为“欧拉法与改进欧拉法”）

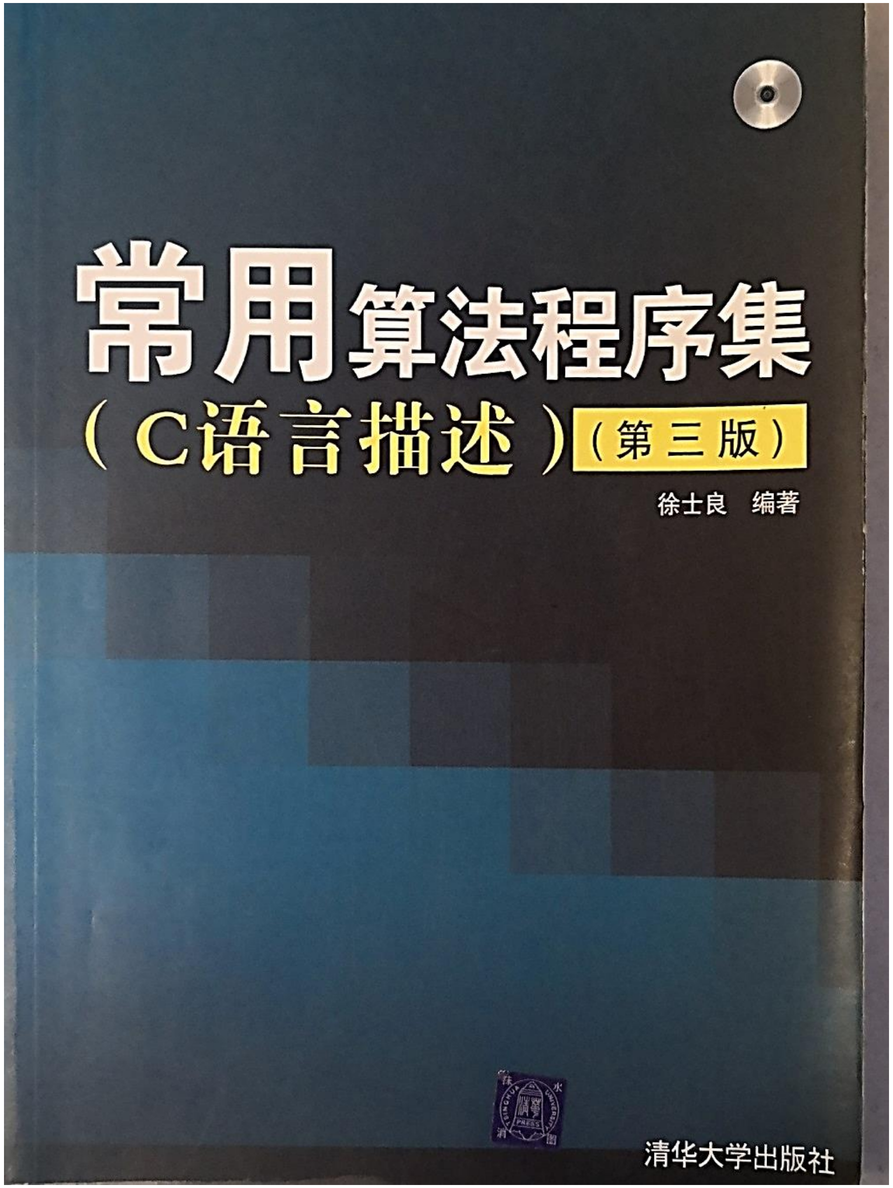
- P294 习题12 （计算y(0.2),y(0.4)的近似值，题目选做）
- 题目：二阶龙格-库塔公式中四个未知数的关联推导

附录：所学知识对应的C语言程序，参考该书

第8章 差值与逼近

第9章 数值积分

第10章 常微分方程组的求解



感谢聆听课程！

张健
上海理工大学　环境与建筑学院

2019年秋