UNIVERSITY OF SHANGHAI FOR SCIENCE AND TECHNOLOGY

研究生课：工程数学

2.专题单元
“传热与流体流动的数值计算”
知识点汇总

张健

上海理工大学　环境与建筑学院

2019年12月

- 答疑辅导时间/地点：

  每周四13:00-15:00，环建楼501办公室

  每周五18:00-20:00，环建楼501办公室

- Email： jzhang66@163.com
- Mobile phone：18217121656（短信联系）

教材：

[1] S.V.帕坦卡.《传热与流体流动的数值计算》.张政翻译.

Suhas V. Patankar
(1941-)

主要参考书目：

[2]周力行《湍流两相流动与燃烧的数值模拟》清华大学出版社，1991.（CFD理论讲得相对简单，推荐学习）

[3]陶文铨 《数值传热学》，西安交通大学出版社，2001.

[4]俞冀阳 《热工流体数值计算》，清华大学出版社，2013.

[5]王明新 《数学物理方程》，清华大学出版社，2005年.

[6]袁洪君，许孝精，《工程数学.数学物理方程》，高等教育出版社，2006年.（原研究生课“工程数学”教材）

课次	授课计划（1次课包括3学时）
12	绪论（包括:三大“数学物理方程”简单介绍、CFD模拟意义、第一章 引论）
13	第二章 物理现象的数学描述 第三章 离散化方法
14	第四章 热传导（1.本章对象，2.一般稳态热传导，3.不稳态一维热传导）
15	第四章 热传导（4.二维与三维问题，5.超松弛与欠松弛，6.某些几何上的考虑）

之后，组织复习与期末考试。

专题单元内容占期末试卷的~20%分值，望认真对待！

第一章 绪论

1. 三大“数学物理方程”介绍
2. CFD模拟意义
3. 第一章 引论

（1次课）

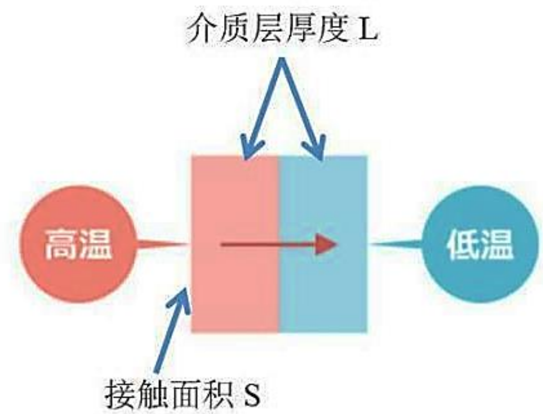
1. 三大“数学物理方程”简单介绍

(1) 数学物理方程 （“描述物理的数学方程”）

以偏微分方程为工具，研究自然界一些实际问题的学科。考虑自然中一般物理量都是多个自变量（时间（t）、空间(x, y, z)）的函数，因此偏微分方程的应用很普遍、很重要。

一维弦振动方程
（双曲型方程）

薄膜振动的二维泊松方程
（椭圆型方程）



一维热传导方程
（抛物型方程）

(2) 三大“数学物理方程” （二阶线性偏微分方程）

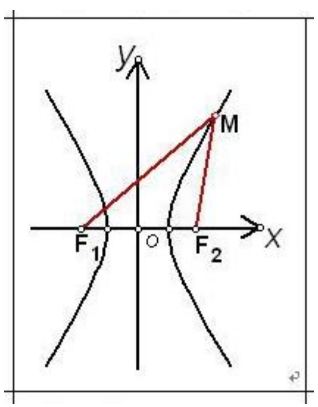
二阶方程	标准形式	涉及自然科学领域
双曲型方程	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f$	弦震动方程(力学)，声波、光波、水波、电磁波等描述
椭圆型方程	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f$	薄膜平衡方程(力学)，静电场电势分布，CFD的特殊稳态问题
抛物型方程	$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f$	一般CFD问题，动量守恒(N-S)方程，热传导方程，扩散方程（组分方程）

重点

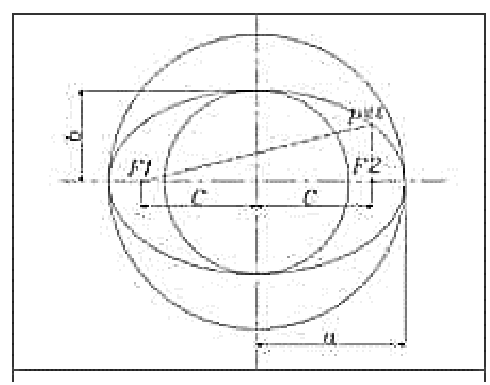
二阶线性偏微分方程的命名来自：二次曲线

二次曲线	二次曲线标准形式	二阶方程	二阶方程标准形式
双曲线	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	双曲型方程	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f$
椭圆	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	椭圆型方程	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f$
抛物线	$y^2=2px$	抛物型方程	$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f$

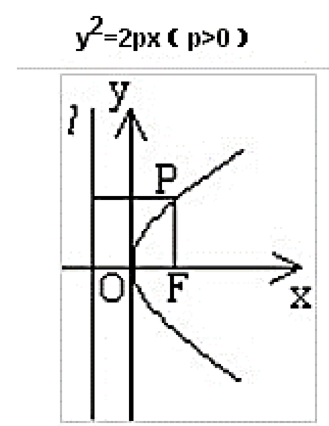
二次曲线的几何图形



双曲线



椭圆



抛物线

解释：

何为“二阶线性偏微分方程”？

（a）“偏微分”描述：

重点

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = u'$$

$$u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\sum_{i=1}^{3} b_i u_{x_i} = b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + b_3 \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u(x, y, z, t)$$

拉普拉斯（Laplace）算符： $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u$

梯度算符： $\nabla u = [\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}]$

引自：胡学刚《数学物理方程》，机械工业出版社，2007年出版，14页。

（b）“阶”的描述

重点

指偏微分方程中未知函数**偏导数的最高阶数**。

例题：

一阶偏微分方程：

$$u_t + \sum_{i=1}^{3} b_i u_{x_i} = 0 \quad , \qquad u_t - u u_x = 0$$

$$(u_x)^2 - u_y = 8x^2$$

二阶偏微分方程：

$$u_t - \Delta u = \sin t$$

$$u_{tt} - u_x - du - x^2 t = 0$$

四阶偏微分方程：

$$u_t + u_{xx} + u_{xxxx} = u^2$$

引自：胡学刚《数学物理方程》，机械工业出版社，2007年出版,14页
戴嘉尊，张鲁明《数学物理方程》第二版，东南大学出版社，16页。

（c）“线性”与“非线性”描述

如果一个偏微分方程（组）中各项关于未知函数及其各阶偏导数都是一次的/线性的，称线性偏微分方程。否则称为非线性偏微分方程。（注：讲未知函数u, 不是自变量x）

重点

例题：

线性偏微分方程： $u_t + \sum_{i=1}^{3} b_i u_{x_i} = 0$ ， $u_t - \Delta u = \sin t$

$u_{tt} - u_x - du - \underline{x^2 t} = 0$ ， $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}) + f(x, y, z, t)$

非线性偏微分方程： $u_t - \underline{u u_x} = 0$ ， $\underline{(u_x)^2} - u_y = 8x^2$

$$u_t + u_{xx} + u_{xxxx} = \underline{u^2}$$

$$\underline{[1 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \underline{[1 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = 0$$

（d）“齐次”与“非齐次”描述

- 在线性偏微分方程中，不含有未知函数及其偏导数的项称为自由项。
- 齐次方程：自由项为0的线性偏微分方程
- 非齐次方程：自由项不为0的线性偏微分方程

例题：

齐次线性方程：$u_t + \sum_{i=1}^{3} b_i u_{x_i} = 0$ ，$\Delta u = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

非齐次线性方程：$u_t - \Delta u = \sin t$

$$u_{tt} - u_x - du - x^2 t = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x, y, z, t)$$

作业：

1. 下列哪些是二阶线性微分方程？

(1) $u_t - \Delta u = \sin t$ 是

(2) $u_t + u_{xx} = u^2$ 不是

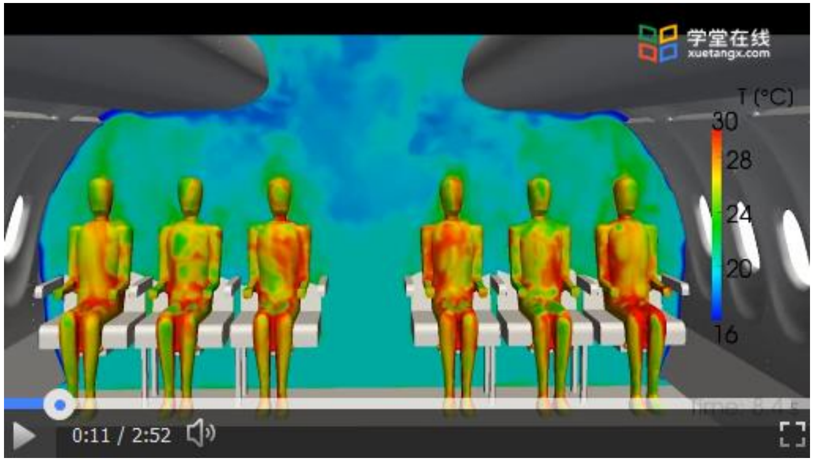
(3) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}) + f(x,y,z,t)$ 是

(4) $(u_x)^2 - u_{yy} = 8x^2$ 不是

2. 方程 $yu_{xx} + u_{yy} - u_x = 0$ 在y取不同值时，分别为何种二阶线性偏微分方程?

（y>0，椭圆型方程；y<0，双曲型方程；y=0，抛物型方程）

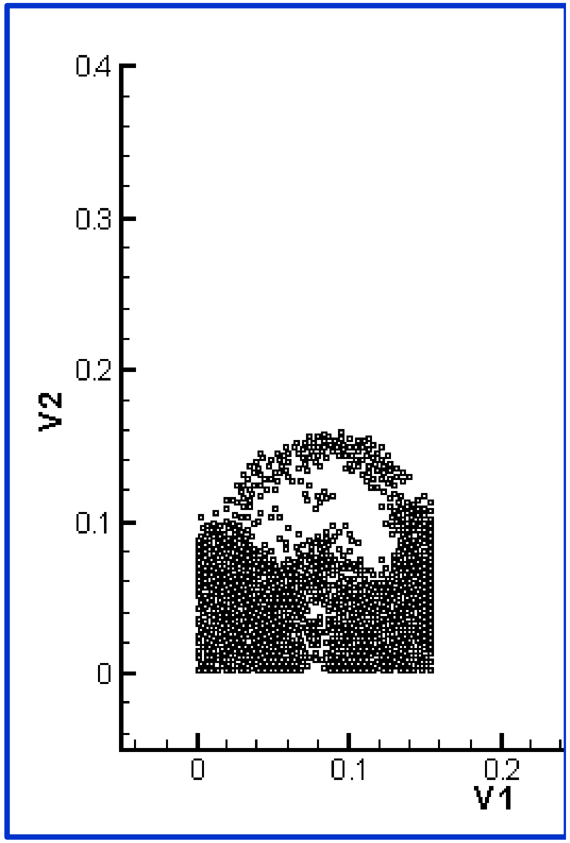
2. CFD模拟意义



- http://www.xuetangx.com/courses/course-v1:HRBEU+20180125+sp/about
- （3min）

数值模拟视频举例

- 1-水坝泄洪的模拟
  （STAR-CCM+）2min
- 2-管道内水流来流模拟
  （Ansys FLUENT）1min
- 3-循环流化床，旋风除尘器模拟
  （CPFD Barracuda VR）3min
- 4-固定床焚烧炉或气化炉模拟
  （Ansys）3min



3. 第一章 引论

传热与流体流动过程的研究有两种主要研究方法：

（1）实验/试验研究

优点：最可靠

缺点：测试困难，经费昂贵

（2）理论研究（包括解析解、数值解）

优点：成本低、速度快，有预报真实实际的能力

缺点：如果数学模拟不能反应真实，则再完善的模拟也毫无研究价值。

两种方法应该紧密配合，相互促进。

举例：燃烧与污染物研究中

❑研究方法：

1）锅炉燃烧测试

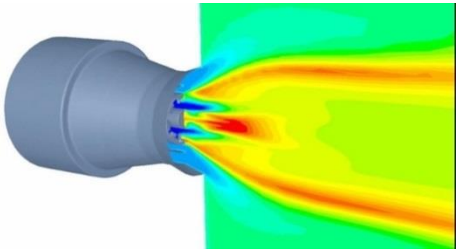
❖ 需要许多精密仪器；
❖ 因为锅炉内烟气温度过高(>1000^{o}C) ，获得的测试数据很少；
❖ 测试用燃料的运输以及机组试验运行费用昂贵。

2）数值模拟

❖ 经济实用，避免不必要的、海量的试验工作量；
❖ 获得大量细致的高温炉内数据；
❖ 帮助分析燃烧火焰形式与污染物生成机理；
❖ 优化燃烧器与炉膛的设计，支持新技术研发。

烟气分析仪

旋流煤粉燃烧器



第二章 物理现象的数学描述
第三章 离散化方法

（1次课）

1. CFD的通用微分方程：

最一般情况下，带有传热、反应的单相多组分流体瞬时守恒方程组为

连续方程：$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j}=0$$

Navier-Stokes方程：$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}[\mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i})]$$

组分方程：$$\frac{\partial(\rho Y_S)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_j Y_S)}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}(D_S\rho\frac{\partial Y_S}{\partial x_j})-w_S$$

能量方程：$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_j c_p T)}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda\frac{\partial T}{\partial x_j})+w_S Q_S$$

即CFD数值模拟的四大方程

- 如果把密度、速度、质量分数、温度等流体变量同一用φ表示，则可综合写出通用微分方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varphi)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i\varphi)=\frac{\partial}{\partial x_j}(\Gamma_\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x_j})+S_\varphi$$

非定常项：

表示单位体积内特性量的局部变化率

对流项：

表示通过控制面的净通量

扩散项：

通过控制面由分子效应引起的输运项的散度

源项：

表示任一内部和外部过程或源对控制体内特性量变化所作的贡献

- 是典型的二阶线性偏微分方程（组），属于抛物型方程

2. “离散化”概念：

重点

- 从几何讲，是将空间问题近似成离散点（网格节点）问题；
- 从数学讲，是用关于 ϕ 的代数方程近似替代二阶线性偏微分方程，从而求解满足精度的 ϕ 值。
- 从误差控制讲，近似应该满足精度要求，保证守恒、保证收敛。从而实现：不同的离散化计算方法应该给出相同的解，不同的网格划分也应给出相同的解。

3. 主要的离散化方法：

- 有限差分法；
- 加权余数法，包括控制容积法（即有限容积法）；
- 有限元法（材料力学领域的模拟）。

4. “有限差分法”的不足

重点

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{d\phi}{dx}\right)_2 = \dfrac{\phi_3 - \phi_1}{2\Delta x} \\[2ex]
\left(\dfrac{d^2\phi}{dx^2}\right)_2 = \dfrac{\phi_1 + \phi_3 - 2\phi_2}{(\Delta x)^2}
\end{cases}
$$

将有截断误差的近似函数（三点微分公式）代入通用微分方程，会带来了离散化描述无法避免的误差。误差积累（包括迭代误差积累、网格误差积累）后，甚至会严重背离原二阶方程的描述，数值解的守恒性难以保证。当然，在步长 Δx 足够小时，该方法有一定意义。

5. “加权余数法”思想：

重点

对微分方程 $L(\phi)=0$

假设其近似解为 $\bar{\phi}=a_0+ax_1+a_2x^2+\ldots+a_mx^m$

近似误差（即余数）$R=L(\phi)-L(\bar{\phi})=L(\bar{\phi})$

在某网格容积内控制 $\int_{\Omega} wR=0$，利用该加权数w的描述来求近似解 $\bar{\phi}$

该方法简言之，引入一个网格内的守恒限制条件，让近似解的误差可控，保证守恒。

作业：

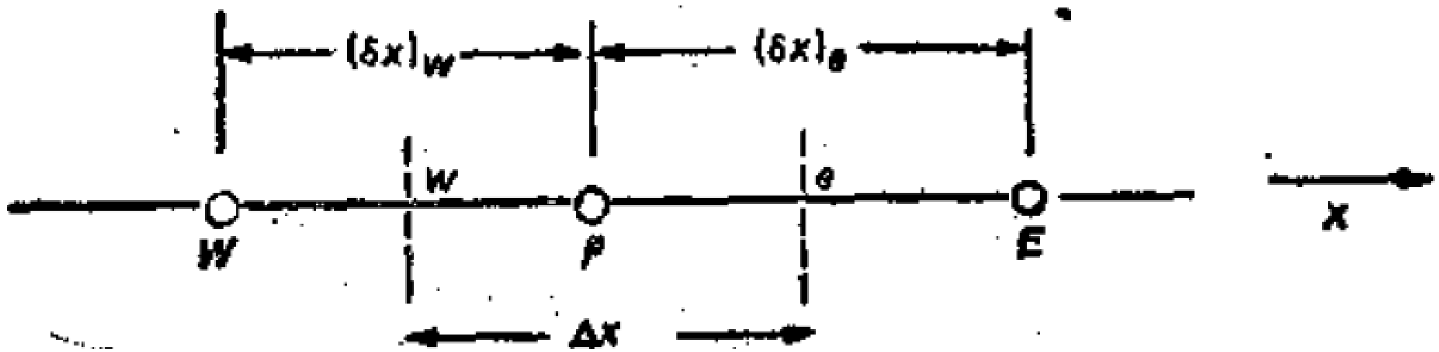
1. 请简述二阶微分方程“离散化”的思想。并对比“有限差分法”与“加权余数法”的区别。

第四章　热传导

（2次课）

重点

1. 一维稳态热传导问题（理解控制容积法）



控制微分方程： $$\frac{\mathrm{d}}{dx}(k\frac{dT}{dx})+S=0$$ （描述物理现象的基础方程）

网格节点：P，W，E；网格面 w，e

积分，获得守恒限制条件： $$(k\frac{dT}{dx})_e-(k\frac{dT}{dx})_w+\int_w^e Sdx=0$$

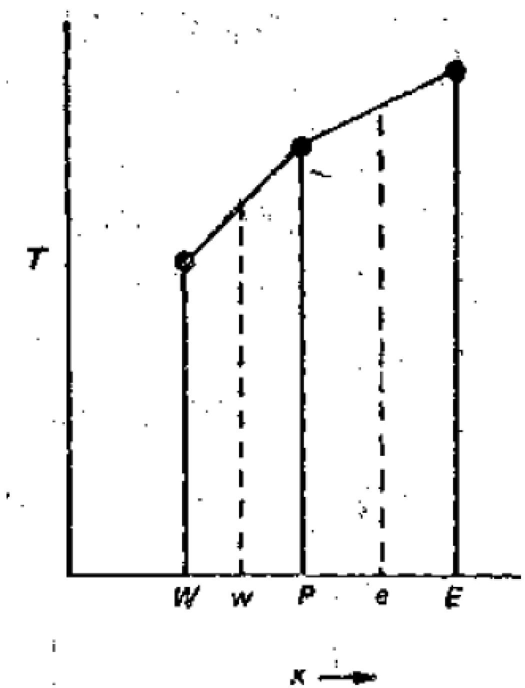
重点

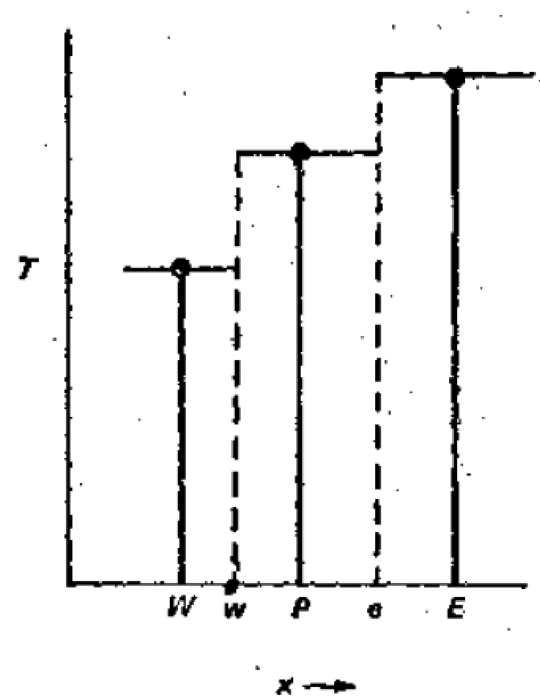
$$\frac{k_e(T_E - T_P)}{(\delta x)_e} - \frac{k_w(T_P - T_W)}{(\delta x)_w} + \bar{S}\Delta x = 0$$

使用两个假设，获得上式：

① “界面上流量”用分段线性分布假设

② “源项”用阶梯式分布假设





重点

整理获得离散化方程标准形式：

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b$$

其中 $a_E = \dfrac{k_e}{(\delta x)_e}$， $a_W = \dfrac{k_w}{(\delta x)_w}$

$$a_P = a_E + a_W$$

$$b = \overline{S}\Delta x$$

若多个相邻节点，如二维、三维问题，离散化方程可扩展为：

$$a_P T_P = \sum a_{nb} T_{nb} + b$$

作业：

1. 对一维稳态热传导问题，

控制微分方程为 $\frac{\mathrm{d}}{dx}(k\frac{dT}{dx})+S=0$ ，

请推导该方程的离散化方程。

2. 离散化的四项基本法则：

（1）网格之间的连续性是表现在控制容积界面上；

保证守恒

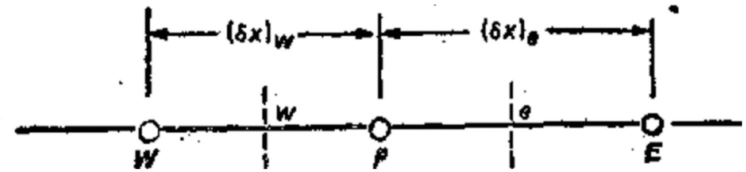
（2）离散化方程的系数全部为正数；

（3）源项线性化描述（可选用）的斜率应为负数；

（4）网格中心节点的系数为各相邻节点的系数之和。

保证收敛

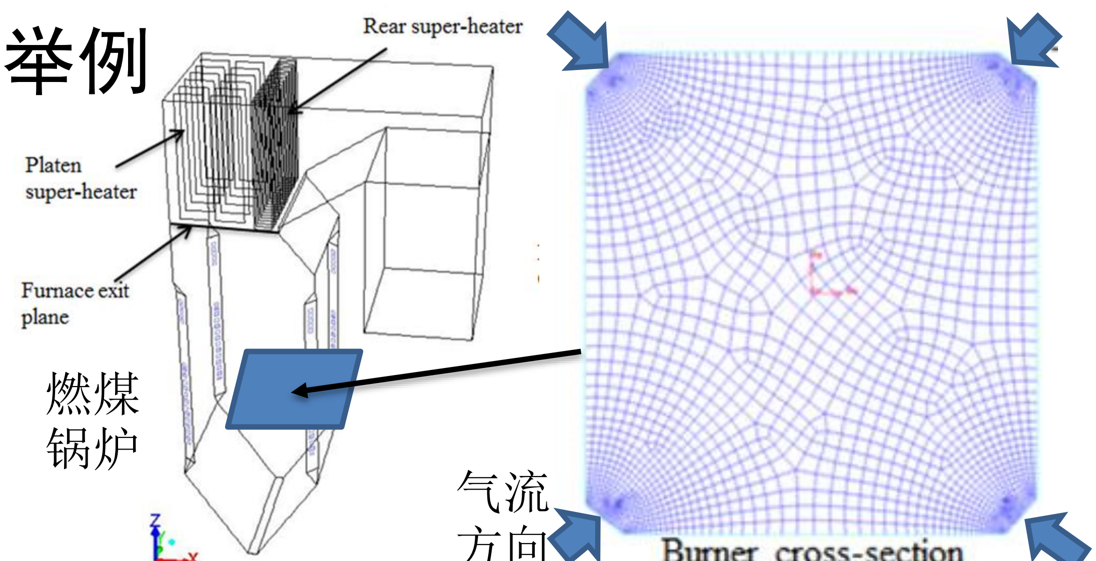
3. 离散方程中各元素的讨论

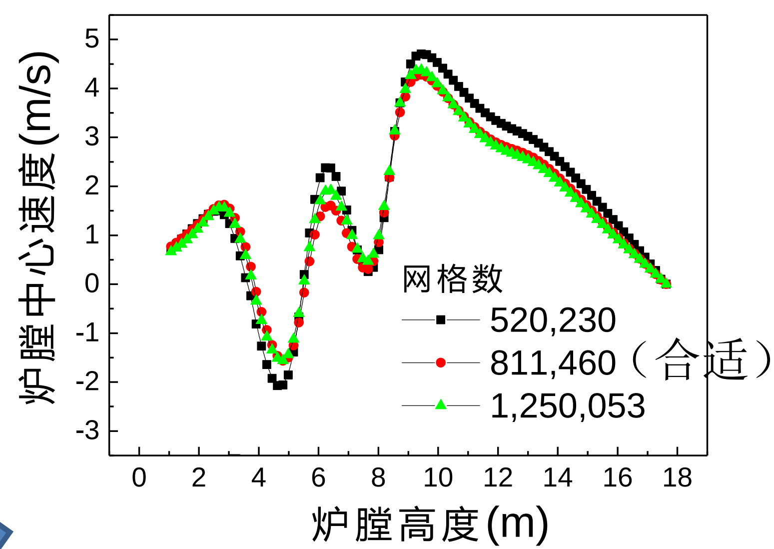


(1) 网格间距

- 节点距离 $(\delta x)_e$ 与 $(\delta x)_w$ 没有必要相等；
- 梯度大(如速度变化大)的地方，网格需加密；
- 网格独立性分析（grid independence test，选择合适的网格数量）

举例





(2) 界面参数的计算，如导热系数k

- 仅根据分段线性关系，推导得到“算术平均值”

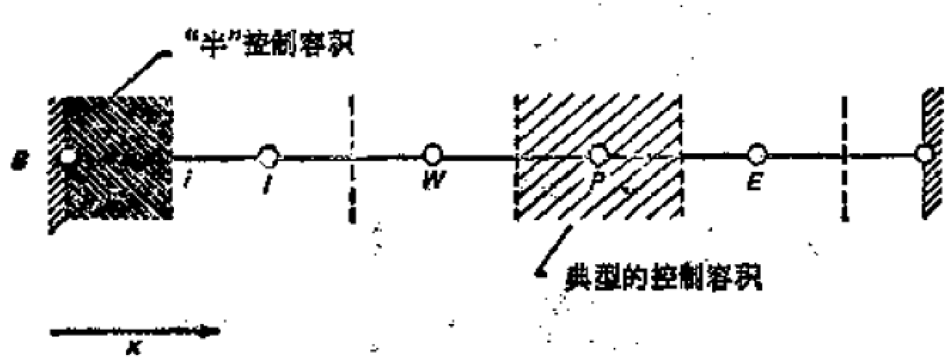
$$\mathrm{k}_e = \frac{k_P + k_E}{2}$$

- 根据热流量理论描述，推导得到“调和平均值”

$$(\mathrm{k}_e)^{-1} = \frac{(k_P)^{-1} + (k_E)^{-1}}{2} \quad \checkmark$$

- 界面参数（如k）的描述，应使用调和平均值，更符合物理本质，保证网格内物质守恒。

(3) 边界条件



- 边界条件有三类：

①已知边界温度；

②已知边界的热流密度；

③已知周围流体温度与换热系数

- **边界处的离散方程（上述三类情况都适合）**

$$a_B T_B = a_I T_I + b$$

其中 $a_I = \dfrac{k_i}{(\delta x)_i}$， $a_P = a_I$ ， $b = \bar{S}\Delta x + q_B$

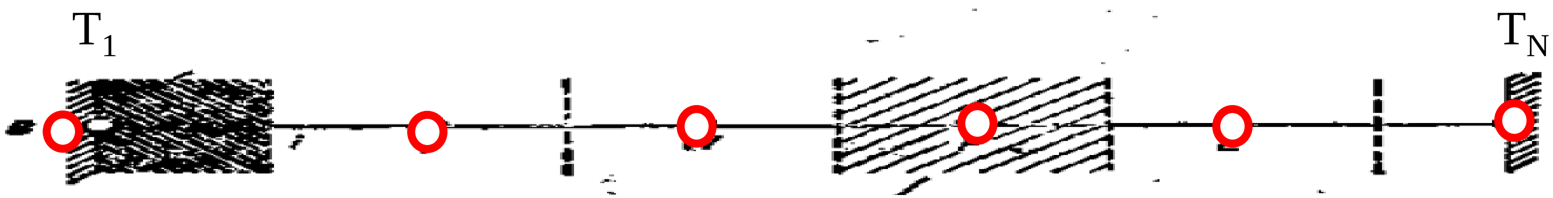
q_B 为热流密度；可对其定义，如 $q_B = h(T_f - T_B)$ 。

说明：考虑两端边界后，一维离散描述变成“双向坐标”问题，即同时受到两侧边界值的影响。

4. 一维离散化方程组求解的TDMA算法

TDMA算法，即三角矩阵算法，也称追赶法

例：已知T_1，T_2两点温度，求解一维方向上其他各点的温度



$$\left\{\begin{array}{l} a_1 T_1 = b_1 T_2 + d_1 \\ \quad\vdots \\ a_i T_i = b_i T_{i-1} + cT_{i+1} + d_i \\ \quad\vdots \\ a_N T_N = b_N T_{N-1} + d_N \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lr} a_1 T_1 - b_1 T_2 & = d_1 \\ -b_2 T_1 + a_2 T_2 - c_2 T_3 & = d_2 \\ & \vdots \\ -b_i T_{i-1} + a_i T_i - cT_{i+1} & = d_i \\ & \vdots \\ -b_N T_{N-1} + a_N T_N & = d_N \end{array}\right.$$

其中参数a、b、c、d与T无关

正向看： T(1) T(2) T(3) ··· T(i-1) T(i)··· T(N)

$$a_1 T_1 = b_1 T_2 + d_1$$

$$a_i T_i = b_i T_{i-1} + c T_{i+1} + d_i$$

逆向看： 引入 $T_{i-1} = P_{i-1} \boldsymbol{T_i} + Q_{i-1}$ ，问题变化为求解P, Q，公式显式描述

边界端点1

$$\begin{cases} P_1 = \dfrac{b_1}{a_1} \\ Q_1 = \dfrac{d_1}{a_1} \end{cases}$$

中间点i与点i-1关联

$$\begin{cases} \boldsymbol{P_i} = \dfrac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \\ \boldsymbol{Q_i} = \dfrac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}} \end{cases}$$

边界端点N

$$\begin{cases} P_i = 0 \\ Q_N = T_N \end{cases}$$

注：若有非线性参数（如k=k(T)），必须使用迭代法

更复杂的偏微分方程

（1） $\frac{\mathrm{d}}{dx}(k\frac{dT}{dx})+S=0$ 一维稳态热传导问题

（2） $\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}}{dx}(k\frac{dT}{dx})$ 一维非稳态的热传导

（3） $\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}}{dx}(k\frac{dT}{dx})+\frac{\mathrm{d}}{dy}(k\frac{dT}{dy})+S$ 二维、非稳态的热传导

5. 非稳态的一维热传导

控制微分方程 $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\mathrm{d}}{dx}(k\dfrac{dT}{dx})$

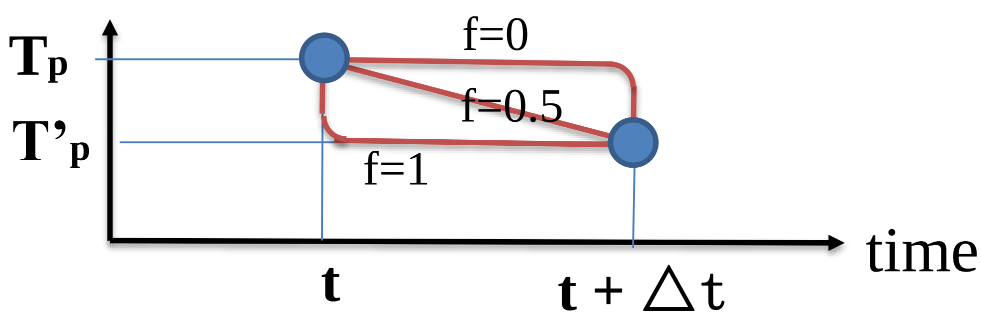
离散方程 $$\mathrm{a}_P T_P = a_E[fT_E + (1-f)T_E^0] + a_W[fT_W + (1-f)T_W^0] + [a_P^0 - (1-f)a_E - (1-f)a_W]T_P^0$$

加权因子
$$\begin{cases} f=0, & \text{显式格式（求解简单）} \\ f=0.5, & \text{克兰克-尼科尔森模式(更真实)} \\ f=1, & \text{全隐式模式（无发散隐患）} \end{cases}$$

有发散的隐患

控制收敛条件：

$$\Delta t < \frac{\rho c(\Delta x)^2}{2k}$$



非稳态的一维热传导的控制微分方程

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}}{dx}(k \frac{dT}{dx})$$

全隐式离散方程：

$$\mathrm{a}_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b$$

其中 $b = \overline{S}\Delta x + a_P^0 T_P^0$ ， $a_P = a_E + a_W + a_P^0$ ， $a_P^0 = \dfrac{\rho c \Delta x}{\Delta t}$

6. 二维热传导的离散化方程

控制微分方程 $\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}}{dx}(k\frac{dT}{dx})+\frac{\mathrm{d}}{dy}(k\frac{dT}{dy})+S$

离散化方程 $\mathrm{a}_P T_P=a_E T_E+a_W T_W+a_N T_N+a_S T_S+b$

描述相邻点间导热

$a_E=\frac{k_e\Delta y}{(\delta x)_e}$ $a_W=\frac{k_w\Delta y}{(\delta x)_W}$

$a_N=\frac{k_n\Delta x}{(\delta y)_n}$ $a_S=\frac{k_s\Delta x}{(\delta y)_s}$

描述t时刻容积内的内能 $a_P^0=\frac{\rho c\Delta x\Delta y}{\Delta t}$

（特例$\Delta t\to\infty$, $a_P^0=0$,表示稳态）

描述容积内发热率 $b=\overline{S}\Delta x\Delta y+a_P^0 T_P^0$

中心点系数

$$a_P=a_E+a_W+a_N+a_S+a_P^0$$

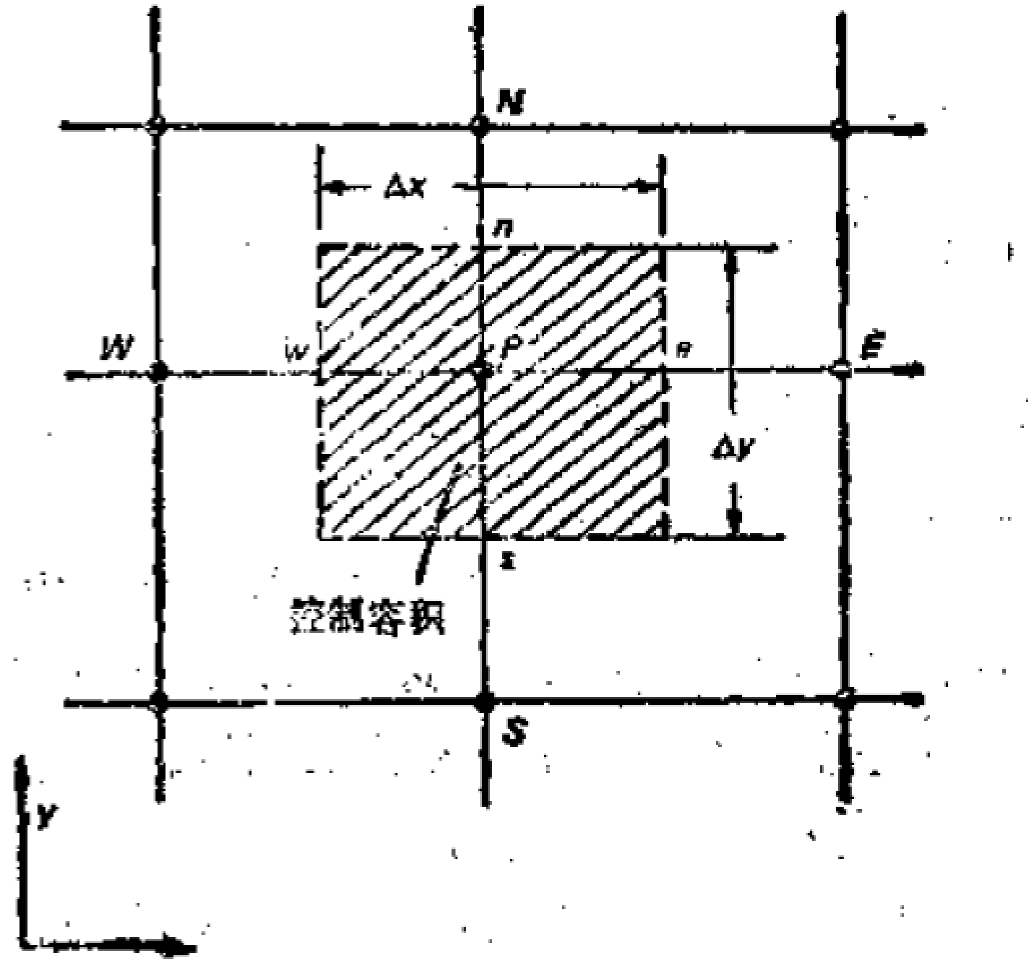


图4.6　对于二维情况的控制容积

7. 离散方程组求解的迭代法

（1）高斯–赛德尔逐点计算法

$$a_{\mathrm{p}}T_p = \sum a_{nb}T_{nb} + b$$

举例：便于理解，一维问题写成不动点迭代

$$\begin{cases} T_1 = (b_1 T_2 + d_1)/a_1 \\ \vdots \\ T_i = (b_i T_{i-1} + cT_{i+1} + d_i)/a_i \\ \vdots \\ T_N = (b_N T_{N-1} + d_N)/a_N \end{cases}$$

保证收敛的条件

$$\begin{cases} |a_{\mathrm{p}}| \ge \sum |\mathrm{a}_{nb}| & \text{所有方程（空间条件）} \\ |a_{\mathrm{p}}| > \sum |\mathrm{a}_{nb}| & \text{至少一个方程（边界条件）} \end{cases}$$

即满足法则中的第四条

（2）逐行法

高斯-赛德尔法与TDMA算法结合

（3）考虑松弛因子的“超松弛”、“欠松弛”

原离散方程： $a_{\mathrm{p}}T_{p}=\sum a_{nb}T_{nb}+b$

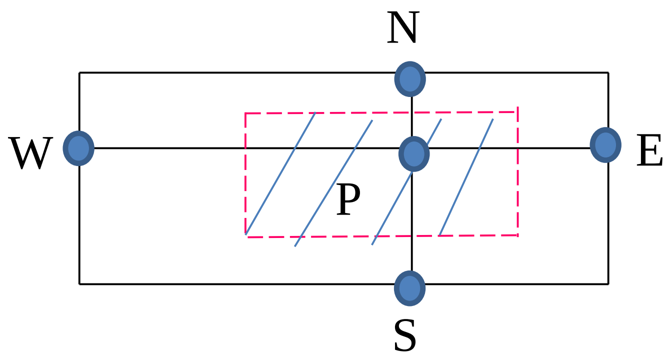
考虑松弛因子α

- α>1, 超松弛，提高迭代速度，用的较少
- 0< α <1, 欠松弛，避免发散（特别对有非线性参数的方程组）

$$T_{p}=T_{p}^{*}+\alpha[(\sum a_{nb}T_{nb}+b)/a_{p}-T_{p}^{*}]$$

8. “外节点网格”与“内节点网格”的差异

（1）外节点网格

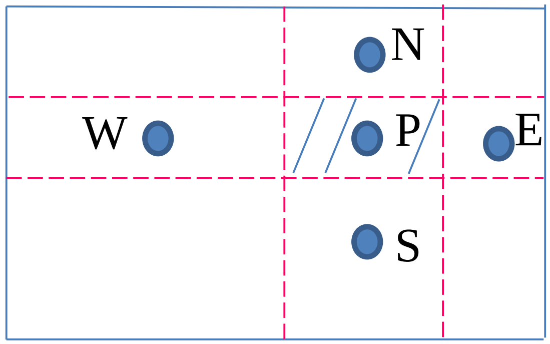


节点位于网格边角上，再两节点中心画界面，界面围成控制容积，非均匀网格节点不在控制容积中心。

优点：有利于求界面上的热流通量；

缺点：求源项的计算精度不高。

（2）内节点网格（一般采用）



节点位于网格（控制容积）的几何中心，

节点值代表控制容积的平均值，

不均匀网格的界面不在两相邻节点的中心，

边界上的网格可理解为零厚度的控制容积。

优点：求源项精度高；

缺点：求热流通量不利。

大作业（选做）：

热传导问题的课程作业

题目： 利用离散化方法，通过编程计算一个二维平板的稳态温度场。具体要求如下：

1）已知物性参数导热系数为 $k(W/(m.K))$，含有内热源 S(单位 w/m^3)，简化使用 $S/k=10$；

2） 采用第一类边界条件，边界温度从左边界按逆时针方向依次是 T_1=100, T_2=20, T_3=20, T_4=50，单位℃；

3） 网格均匀设置，并请分析公式推导中使用有限容积法与有限差分法的差异；

4） 可采用 C 语言、Fortran 语言或其他基础语言。使用 Tecplot 软件进行出图。

感谢聆听课程！

张健
上海理工大学　环境与建筑学院

2019年12月