```julia
using Main.DN2
```

1 Gauss-Legendrove kvadrature

Martin Starič

Gauss-Legendre kvadratura pravila so namenjena numeričnem integriranju in želijo eksaktno izračunati polinome stopnje $\leq 2n-1$. Pri Gauss-Legendre kvadraturah reda 2, želimo aproksimirati integral $\int_{-1}^{1} f(x)dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$, kjer sta w_1 in w_2 uteži, x_1 in x_2 pa vozla.

1.1 Izpeljava Gauss-Legendre kvadrature reda 2

Ta integral izpeljemo na sledeč način: Da določimo uteži w_1 in w_2 se osredotočimo na integral polinomov stopnje 1,2,3 in 4.

$$\int_{-1}^{1} 1dx = 2 = w_1 * 1 + w_2 * 1 = w_1 + w_2$$

$$\int_{-1}^{1} xdx = 0 = w_1 * x_1 + w_2 * x_2$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} = w_1 * x_1^2 + w_2 * x_2^2$$

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 = w_1 * x_1^3 + w_2 * x_2^3$$

Sedaj če drugo enačbo pomnožimo z x_1^2 dobimo

$$w_1 * x_1^3 = -w_2 x_2 x_1^2$$

In levi del vstavimo v četrto enačbo dobimo

$$-w_2 x_2 x_1^2 + w_2 * x_2^3 = 0$$

Preoblikujemo jo v $w_2 x_2 (x_2^2 - x_1^2) = 0$ in preučimo možnosti za 0. $w_2 = 0$ ne velja, ker če si ogledamo drugo in četrto enačbo dobimo protislovje

$$\frac{2}{3} = w_1 * x_1^2; w_1 \neq 0, x_1 \neq 0$$

in $0 = w_1 * x_1^3, w_1 = 0 || x_1 = 0$.

Podobno velja če vzamemo $x_2 = 0$ Tako nam ostane le še zadnja možnost $x_2^2 - x_1^2 = 0$ katero preoblikujemo v $x_2^2 = x_1^2$ in iz tretje enačbe dobimo

$$\frac{2}{3} = (w_1 * w_2) * x_1^2$$

Iz prve enačbe vemo

$$w_1 * w_2 = 2 \implies x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

iz $x_2^2 - x_1^2 = 0$ pa vemo da morata biti x_2 in x_1 nasprotno predznačena zato $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ in $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Iz druge enačbe sledi

$$w_1 * (-\frac{1}{\sqrt{3}}) + w_2 * (\frac{1}{\sqrt{3}}) = 0$$

Zato $w_1 == w_2$ in iz prve enačbe velja da $w_1 + w_2 = 2$ torej sta $w_1 = w_2 = 1$. Tako smo izpeljali kvadraturno formulo

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

Če želimo izpeljati integral z drugimi mejami denimo $\int_0^h f(x)dx$ uporabimo linearno preslikavo $L_2(x) = Ax + B$, kjer $L(-1) = 0 = A * (-1) + B$ in $L(-1) = h = A * 1 + B$ iz tega dobimo, da je $B = \frac{h}{2}$ in če B vstavimo v drugo enačbo dobimo $A = -\frac{h}{2}$ Tedaj rezultat vstavimo

$$\int_0^h f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(-\frac{h}{2}t + \frac{h}{2}) * -\frac{h}{2}dt$$

kjer je

$$f(-\frac{h}{2}t + \frac{h}{2}) * -\frac{h}{2} = F(t)$$

in dobimo aproksimacijo

$$F(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + F(\frac{1}{\sqrt{3}}) = f(-\frac{h}{2}(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + \frac{h}{2}) * -\frac{h}{2} + f(-\frac{h}{2}(\frac{1}{\sqrt{3}}) + \frac{h}{2}) * -\frac{h}{2}$$

.

Sedaj pa izpeljimo še napako

$$R_f = \frac{(b-a)^{2n+1} * (n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} * f^{(2n)}(\epsilon) =$$

$$R_f = \frac{(b-a)^5 * 16}{5 * 24^3} * f^4(\epsilon)$$

Če želimo uporabiti sestavljeno pravilo, potem moramo integral $(0, h)$ preprosto le razdeliti na več delov denimo h/n delov, in izračunati integrale z podano kvadraturno formulo in te rezultate sešteti.

1.2 Uporaba izpeljanega pravila v Julia

Uporaba pravila za računanje integrala $sin(x)/x$ na intervalu $(0, 5)$

```
f(x) = sin(x)/x
rezultat = GaussLegendre2(f,5.0,100)
```

```
1.549931245160231
```

Sedaj ročno preverimo napako, četrti odvod funkcije $f''''(x) = \frac{(x^4-12x^2+24)*sin(x)+(4x^3-24x)*cos(x)}{x^5}$

```
f4(x) = ((x^4 - 12x^2 + 24) * sin(x) + (4x^3 - 24x) * cos(x))/ x^5
```

```
f4 (generic function with 1 method)
```

Tedaj izračunajmo koliko približno potrebujemo korakov, da bo integral izračunan na 10 decimalk natančno s pomočjo ocene za napako

```
tol = 1e-10
GaussLegendre2error(f,f4,5.0,tol)
```

```
195
```

Zgornji rezultat je enak 195, toda temu ni res tako. Oglejmo si rezultat pri točno katerem koraku je natančnost pravila na 10 decimalk.

```
using QuadGK
result,_ = quadgk(f, 0.0, 5.0)

i = 2
rezultat = GaussLegendre2(f,5.0,1)
while abs(result - rezultat) - tol > 0
    rezultat = GaussLegendre2(f,5.0,i)
    i = i + 1
end
i
```

```
Error: UndefVarError: `i` not defined
```

Izkaže se, da je 123 intervalov dovolj.