Value at risk et probabilité de ruine, entre vaccination et banque d'affaires

Arthur Charpentier

Université Rennes I et Ensae

Les semaines passées ont vu paraître beaucoup d'éditoriaux ou de commentaires sur le contrôle des risques et leurs mesures, dans la presse généraliste et économique. Mais ces débats existaient depuis des années (en particulier en vue de l'adoption des accords de Bâle II et de Solvabilité II), sans intéresser – jusqu'à présent – les « non concernés ».

Pourtant, les réflexions sur les mesures de risques sont anciennes, et on peut remonter [1], par exemple, aux débats sur l'inoculation, avant l'invention de la vaccination (par Edward Jenner en 1796). Étant donné qu'alors c'est la maladie elle-même qui était inoculée (et non une forme atténuée, comme ce fut le cas de la vaccine), les résultats étaient assez inégaux, parfois pires que la maladie elle-même. D'Alembert dit clairement qu'il ne faut pas seulement prendre en compte le gain « en moyenne », dû au fait qu'un grand nombre de personnes développeront des anti-corps, mais également le risque : « *Ce n'est donc ni la longueur de la vie moyenne, ni la petitesse du risque qui doit déterminer à admettre l'inoculation ; c'est uniquement le rapport entre le risque d'une part, et de l'autre l'augmentation de la vie moyenne* ». Il rappelle encore plus précisément que le risque est la probabilité de mourir des suites d'une inoculation ou, plus généralement, la probabilité de survenance d'un événement désagréable.

Nous verrons que l'idée de *value at risk* (pour retenir la terminologie qui s'est imposée aujourd'hui) est en effet très ancienne, et que si le concept a souvent été mentionné comme mesure de risque, ce sont des outils plus simples (comme la variance) qui se sont imposés, pour des raisons le plus souvent techniques. Dans un monde gouverné par la loi gaussienne, cela n'a pas grande importance, mais dès lors que l'on traite de « grands risques », cela induit malheureusement beaucoup d'idées fausses.

Nous reviendrons ici sur l'histoire de cette mesure de risque, que nous introduirons avec d'Alembert, et qui a été remise à la mode par le banquier d'affaires J. P. Morgan voilà une quinzaine d'années dans un contexte financier, tout en notant qu'elle existait depuis plus d'un siècle en science actuarielle, cachée sous la notion de « probabilité de ruine ».

Du paradoxe de Saint-Pétersbourg aux mesures de risques

Du paradoxe de Saint-Pétersourg posé par Nicolas Bernoulli en 1713 on retient généralement les réponses de Daniel Bernoulli, Gabriel Cramer ou Georges-Louis Leclerc de Buffon, qui ont été formalisées quelques dizaines d'années plus tard par John von Neumann et Oskar Morgenstern, basées sur l'utilisation d'une « espérance morale » ou d'une « utilité morale de l'argent ».

Pour d'Alembert, « *les règles de probabilité sont en défaut lorsqu'elles proposent, pour trouver l'enjeu, de multiplier la somme espérée par la probabilité du cas qui doit faire gagner cette somme ; parce que, quelque énorme que soit la somme espérée, la probabilité de gagner peut* *être si petite qu'on serait insensé de jouer à un pareil jeu* ». Aussi, il conviendrait de négliger les petites probabilités de très forts gains (et non pas de diminuer le montant des gains en prenant une valeur morale). Il utilise pourtant une terminologie très proche : « *l'espérance dans ces deux cas n'est pas réellement la même, quoiqu'elle soit la même suivant le calcul des probabilités* ». Pour reprendre un adage populaire, d'Alembert préfère un tiens à deux tu l'auras, qu'il traduit sous la forme « *mille probabilités ne feront jamais une certitude* ». Autrement dit, mieux vaut gagner 500 livres de manière certaine qu'en gagner 1 000 avec une probabilité de 1 sur 2. D'Alembert met ainsi en évidence ce que la terminologie contemporaine appelle sous-additivité des probabilités, ou « préférence pour la sécurité » pour reprendre les termes de Maurice Allais, ou d'« effet de certitude » dans les travaux de Daniel Kahneman et Amos Tversky.

C'est à partir de cette réflexion qu'il se propose de répondre au paradoxe de Saint-Pétersboug. « *Il n'y a point de joueur qui voulût donner cette somme (50 écus) en pareil cas ; car il faudrait, pour qu'il rattrapât cette somme en jouant, que croix ne vînt qu'au septième coup ; et assurément, Pierre croirait trop risquer d'attendre que ce cas arrivât.* [...] *Une probabilité de 127 contre 1 est si petite qu'on ne doit point risquer une somme d'argent vis-à-vis de cette probabilité, quand même le gain qui en pourrait résulter serait immense.* »

La « probabilité de ruine »

La réponse de d'Alembert est basée sur le fait que la probabilité de « *ne pas rentrer dans ses frais* » est de 127/128. Dans une terminologie actuarielle, d'Alembert notait tout simplement qu'il y avait « ruine » avec une probabilité de 1/128.

Ces travaux sur la probabilité de ruine (ou de manière duale le montant atteint avec une probabilité relativement faible) ont été poursuivi pendant des années, dans le contexte du calcul de la marge de solvabilité. Et ce sont les difficultés analytiques pour calculer ces grandeurs qui ont principalement freiné le developpement de ces notions.

Comme le notait Condorcet par exemple, dans le cas de *n* opérations identiques, le nombre de succès (ou d'échecs) suit une loi binomiale, dont le calcul de la fonction de répartition est lourd et complexe. Inverser cette fonction (nécessaire pour connaître le nombre de succès possibles à probabilité donnée) l'est encore davantage. Quand Condorcet décrit explicitement un problème de ruine, il montre malheureusement très clairement que si sa théorie est intéressante, sa complexité analytique la rend inutilisable. Il faudra attendre les travaux de Filip Lundberg en 1903, prolongés par ceux de Bruno de Finetti dans les années 1940, puis ceux de Jules Dubourdieu et Harald Cramér dans les années 1950.

L'approche moyenne-variance ou la variance comme unique mesure de risque

Étrangement, il y a quinze ans encore, la seule mesure de risque enseignée était la variance, avec comme unique référence les travaux d'Harry Markowitz : on opposait alors rendement et risque, c'est-à-dire espérance et variance. Mais en parallèle, dans les cours d'assurance, on nous imposait de comprendre les modèles de théorie de la ruine sans jamais établir de liens entre les outils dans le monde de la finance et ceux dans le monde de l'assurance. On fait souvent remonter à Francis Edgeworth, à la fin du XIX[e] siècle, l'idée de mesurer le risque par l'écart type. Mais à y lire de plus près, il n'oppose par profitabilité et risque en comparant moyenne et variance (ou écart type), mais « profit » et « solvabilité » (se reliant ainsi directement aux travaux de Laplace et Condorcet sur la probabilité de ruine). Francis Edgeworth essaye ainsi, en appliquant des théorèmes de convergence en probabilité à des problèmes économiques, d'obtenir la probabilité qu'une grandeur dépasse un certain seuil ou, pour reprendre les termes initiaux, la « *probabilité qu'il ne soit pas appelé à rembourser d'un coup plus d'un tantième de son passif* ». Irving Fisher a davantage essayé d'approfondir ce risque d'insolvabilité, c'est-à-dire la « *probabilité que les bénéfices tombent au-dessous de la ligne de paiement des intérêts* » ; et pour cela, en utilisant des hypothèses de loi de Gauss, il fait référence à l'écart type, suite à des travaux récents de Karl Pearson. La justification de cette simplification est liée aux réflexions contemporaines de Frank Knight car, selon Irving Fisher, « *bien qu'il soit possible de calculer mathématiquement les risques de certains jeux de hasard* [...], *la plupart des risques économiques ne sont pas aisément mesurés* ». Ce qui explique la simplification du problème lié à l'insolvabilité par la seule recherche d'un écart type.

En 1952, l'année de parution de l'article initial d'Harry Markowitz, Andrew Roy revient sur l'utilisation de la probabilité d'insolvabilité, insistant sur le caractère naturel et rudimentaire du concept. Il montre clairement que le but de maximiser un revenu avec une contrainte de « sécurité » correspond au niveau atteint avec une très grande probabilité (e.g. 95 %). Le principe énoncé par Condorcet est renommé ici « *safety first principle* », sauf qu'enfin un seuil de sécurité est ici explicitement exprimé. En utilisant l'inégalité de Binaymé-Tchbechev, Roy simplifie les calculs de probabilité de ruine, pour retomber sur les résultats que Markowitz vient de publier.

La variance comme mesure de risque ?

Parmi les critiques de la variance comme mesure de risque, on retiendra Paul Samuelson, qui en 1963 reprenait une conversation qu'il avait eue avec des collègues. Son point de départ était très proche de l'idée que se font beaucoup d'assureurs : « *There is safety in numbers* » ; autrement dit, une interprétation limite du théorème central est qu'un gros portefeuille est moins risqué qu'un petit. En effet, le chiffre d'affaires croît proportionnelement à la taille du portefeuille, alors que le risque croît avec un facteur en racine carrée (soit nettement moins vite).

Il considère alors un jeu très simple, basé sur du pile ou face : si face tombe, je perds 100 dollars, et si pile tombe, j'en gagne 200. Ce jeu permet de gagner, en moyenne, 50 dollars à chaque lancer. De plus, si on s'engage à jouer au moins 34 fois, la probabilité de gagner dépasse 99,9 %. Bref, avec un tel jeu, toute personne sensée serait prête à s'engager sur une centaine de lancers. Et pourtant ce n'est pas le cas, loin de là : certains joueurs, que nous pourrions qualifier de prudents, notent qu'en s'engageant sur 100 lancers, on peut potentiellement perdre 10 000 dollars ! Et effectivement, si le critère de risque n'est pas la variance mais la perte maximale, cette dernière augmente rapidement avec le nombre de lancers. Et peut-être ne faut il pas regarder la perte maximale, mais la « perte maximale probable », avec un seuil de 5 %, 1 %, etc.

Si on souhaite poursuivre la réflexion à partir de ce simple jeu, notons que si en plus je ne connais pas les probabilités d'avoir pile ou face, je limite davantage encore le nombre de parties que je suis prêt à jouer – ce qui est qualifié depuis les travaux de Knight d'« *aversion à l'ambiguïté* ».

La *value at risk*

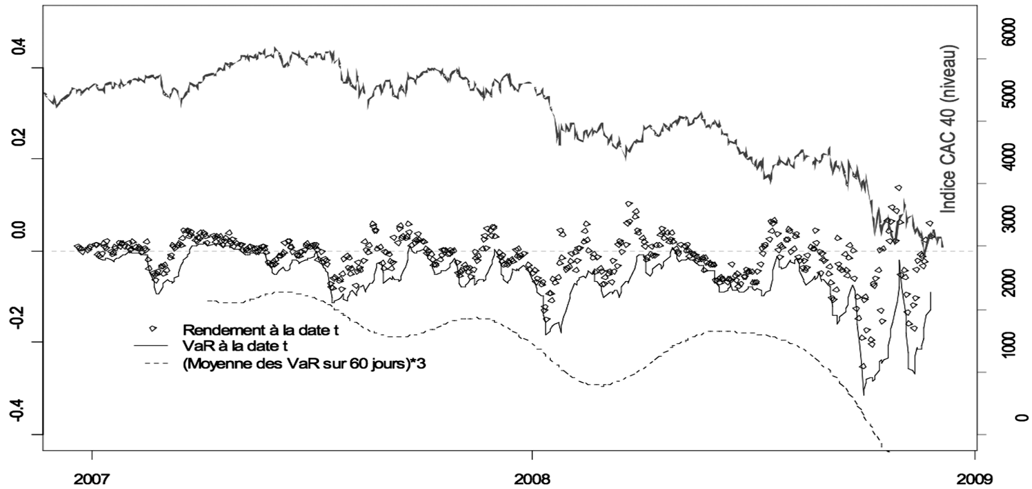
Suite à de malheureux hasards, la value at risk n'a pas pu s'imposer en finance, et ce sont au contraire les approches basées sur les calculs de variance qui vont occuper économistes et financiers pendant une quarantaine d'années. Il faudra attendre les années 1990 pour que le concept soit davantage mis en avant. En fait, il a été évoqué dans la littérature financière à partir du milieu des années 1980 sous le nom de *dollar at risk*, *capital at risk*, *income at risk*, etc. Il faudra attendre le rapport du G30 au début des années 1990, et surtout la publication du « Technical Document » de RiskMetrics, par J. P. Morgan, pour que le terme *value at risk* s'impose.

La formule préconisée dans les modèles internes afin de calculer le capital nécessaire pour se couvrir contre le risque de marché est alors de la forme suivante :

$$CR_t = \max\left\{VaR_t(99\%) + \frac{k}{60}\sum_{i=1}^{60} VaR_{t-i+1}(99\%)\right\} + CR_t^*$$

où VaR_t (99 %) est la value at risk du portefeuille, sur un horizon de 10 jours, avec un seuil de 99 %, CR_t * est un montant de capital pour des « risques spécifiques », et désigne un « facteur de stress » compris entre 3 et 5 (qui doit dépendre du backtesting statistique et de la qualité de la méthodologie statistique utilisée). En situation normale, on prend généralement la value at risk moyenne observée sur les 60 derniers jours, multipliée par un facteur *k*. Le fait d'utiliser cette moyenne permettait de lisser le capital dans le temps, et d'adapter le montant de capital nécessaire si les marchés devenaient plus volatils. Mais début octobre 2008, c'est la première composante qui est devenue la plus importante, et qui a entraîné d'importantes hausses du capital nécessaire. La figure suivante montre ainsi l'évolution de l'indice CAC 40 et le capital nécessaire pour un investisseur dont le portefeuille dupliquerait l'indice. Non seulement la VaR moyenne a quasiment doublé entre début septembre et fin novembre, mais surtout la VaR instantanée a commencé à devenir presque trois fois plus élevée que la VaR moyenne sur 60 jours, avec désormais des niveaux moyens pour la VaR deux fois plus importants qu'auparavant. C'est-à-dire qu'il faut désormais deux fois plus de capital pour couvrir ses risques sur les marchés actions.

Évolution de l'indice CAC 40 en 2007-2008 et calcul de la *value at risk* sur un horizon de 10 jours



Conclusion

L'arrivée, ces dernières années, des mesures de risques dans la sphère réglementaire a fortement poussé la recherche sur les concepts sous-jacents (par exemple dans Föllmer & Schied,2004), ce qui devrait satisfaire les plus conformistes. Mais ces débats sont devenus très techniques, et nous avons malheureusement quitté la sphère épistémologique, ce qui rend les discussions délicates, d'autant que le choix des mesures de risques a des impacts non négligeables sur la sphère de l'économie réelle, comme l'ont montré les événements récents.

Notes

1. *Sans remonter avant les Lumières pour trouver déjà une réflexion sur le risque, comme le suggèrent de nombreux auteurs. Pour reprendre la citation de Theodor Adarno, en 1966,* « le tremblement de terre de Lisbonne *[en 1755]* suffit à guérir Voltaire de la théodicée de Leibniz ». *À partir de cette date, la survenance de catastrophes commence à être attribuée au hasard, et non plus à un dieu. Les réflexions sur le risque peuvent alors naître.*

Bibliographie

FÖLLMER H. ; SCHIED A., Stochastic finance. An Introduction in Discrete Time, de Gruyter Studies in Mathematics, 2004.

HOLTON G., "History of Value at Risk: 1922-1998", Working Paper, 2002.

JORION P., Value at Risk, McGraw-Hill, 2001.