Raport 2 statystyka

Michał Tokarski 268747, Urszula Waszkowiak 268757

June 2023

1 Wstęp do zadań 1 i 2

Do testowania hipotez statystycznych posługujemy się danym algorytmem:

1. Słormułowanie hipotezy zerowej H_0: $\mu = \mu_0$ i hipotezy alternatywnej
   - H_1: $\mu \neq \mu_0$
   - H_2: $\mu > \mu_0$
   - H_3: $\mu =< \mu_0$
2. Wybór statystyki testowej,
3. Obliczenie statystyki na podstawie próby,
4. Określenie poziomu ufności,
5. Wyznaczenie obszaru krytycznego testu,
6. Odrzucenie lub nie hipotezy zerowej.

2 Zadanie 1

Badamy próbkę z rozkładu $X \sim \mathcal{N}(\mu, 0.2)$, za poziom ufności przyjmujemy α=0.05, a za hipotezę zerową H_0: $\mu = 1.5$ i hipotezy alternatywne:

- H_1: $\mu \neq 1.50$,
- H_2: $\mu > 1.5$,
- H_3: $\mu =< 1.5$.

Wybieramy statystykę testową postaci

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

gdzie:

- $\overline{X}$ - średnia próbkowa,
- μ - wartość hipotezy zerowej,
- σ - odchylenie standardowe próby,
- n - długość badanej próby.

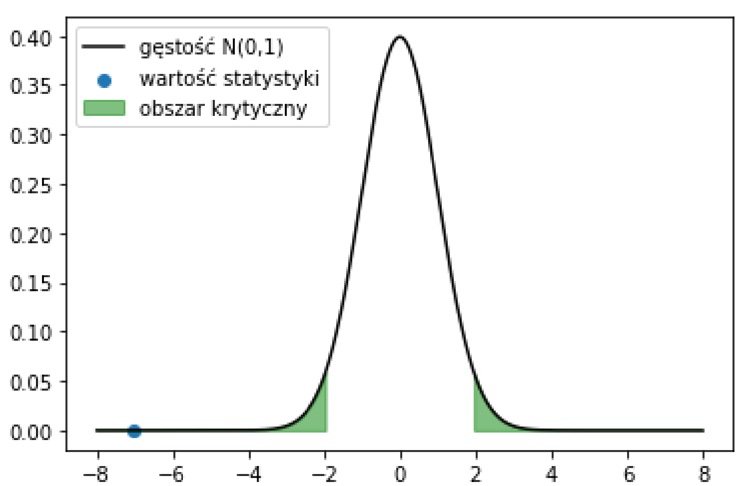
Wartość statystyki testowej wyliczona za pomoca programu Python to -7.041. Kolejnym krokiem jest policzenie obszarów krytycznych dla wszystkich hipotez alternatywnych.

1. H_1: $\mu \neq 1.50$
$$C = (-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$$
gdzie $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ to kantyl rzędu $1 - \frac{\alpha}{2}$ standardowego rozkładu normalnego. Dla badanej próbki rozkład ten wynosi
$$C = (-\infty, 1.960) \cup (1.960, \infty)$$
2. H_2: $\mu > 1.5$
$$C = (z_{1-\alpha}, \infty)$$
$$C = (1.645, \infty)$$
3. H_3: $\mu =< 1.5$
$$C = (-\infty, -z_{1-\alpha})$$
$$C = (-\infty, -1.645)$$

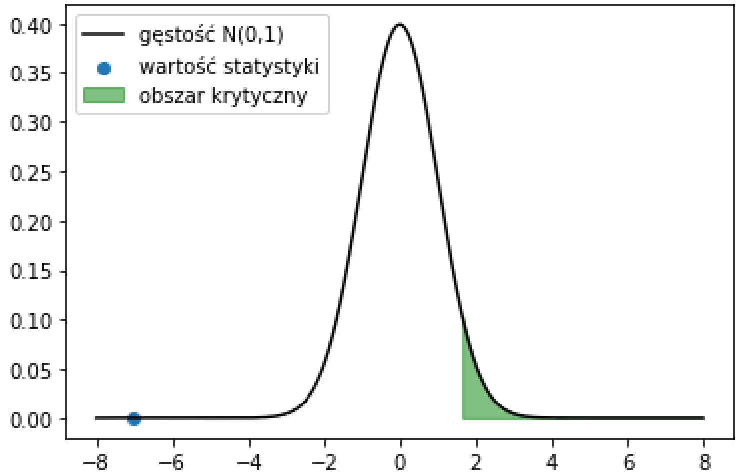
Wyznaczymy jeszcze p-wartości testu dla każdej hipotezy alternatywnej

1. H_1: $\mu \neq 1.50$
$$2P_{H_0}(Z \geqslant |z|) = 2(1 - P_{H_0}(Z < |z|)) = 2 - 2F_Z(z)$$
gdzie $F_Z(z)$ to dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego. Dla badanej próbki wartość ta wynosi
$$2P_{H_0}(Z \geqslant |-7.041|) \approx 1.90 * 10^{-12}$$
2. H_2: $\mu > 1.5$
$$2P_{H_0}(Z \geqslant z) = 1 - P_{H_0}(Z < z)) = 1 - F_Z(z)$$
Dla badanej próbki wartość ta wynosi
$$P_{H_0}(Z \geqslant z)) \approx 1$$
3. H_3: $\mu =< 1.5$
$$P_{H_0}(Z \leqslant z) = F_Z(z)$$
Dla badanej próbki wartość ta wynosi
$$P_{H_0}(Z \leqslant -7.041) \approx 9.512 * 10^{-13}$$

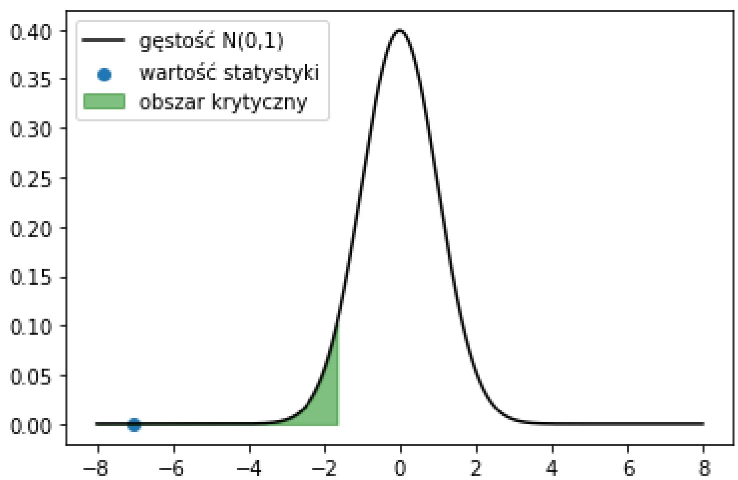
2.1 Wizualizacja otrzymanych danych



Rysunek 1: Wykres dla hipotezy alternatywnej H_1 i poziomu istotności $\alpha = 0.05$



Rysunek 2: Wykres dla hipotezy alternatywnej H_2 i poziomu istotności $\alpha = 0.05$



Rysunek 3: Wykres dla hipotezy alternatywnej H_3 i poziomu istotności $\alpha = 0.05$

Jak możemy zauważyć na powyższych wykresach na rysunkach 1 i 3 wartość statystyki zawiera się w obszarze krytycznym w przeciwieństwie do rysunku 2.

2.2 Wnioski

Na podstawie otrzymanych wyników odrzucamy hipoteze zerową na korzyść hipotez alternatywnych H_1: $\mu \neq 1.50$ i H_3: $\mu < 1.5$. Wynika z tego, że badana próba pochodzi z rozkładu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, z parametrami $\mu < 1.5$ i $\sigma = 0.2$. Gdy zwiększymy poziom ufności przedziały krytyczne zmniejszają się, co zmniejsza prawdopodobieństwo odrzucenia prawdziwej hipotezy zerowej, lecz zwiększa prawdopodobieństwo przyjęcia fałszywej hipotezy zerowej. Gdy zmniejszymy poziom ufności przedziały krytyczne zwiększą się, co zwiększa prawdopodobieństwo odrzucenia prawdziwej hipotezy zerowej.

3 Zadanie 2

Badamy próbkę z rozkładu $X \sim \mathcal{N}(0.2, \sigma^2)$, za poziom ufności przyjmujemy α=0.05, a za hipotezę zerową H_0: $\sigma^2 = 1.5$ i hipotezy alternatywne:

- H_1: $\sigma^2 \neq 1.50$,
- H_2: $\sigma^2 > 1.5$,
- H_3: $\sigma^2 =< 1.5$.

Wybieramy statystykę testową postaci

$$\chi = \frac{(n-1)Var(X)}{\sigma^2}$$

gdzie:

- $VarX$ - wariancja z próby,
- σ^2 - wartość hipotezy zerowej,
- n - długość badanej próby.

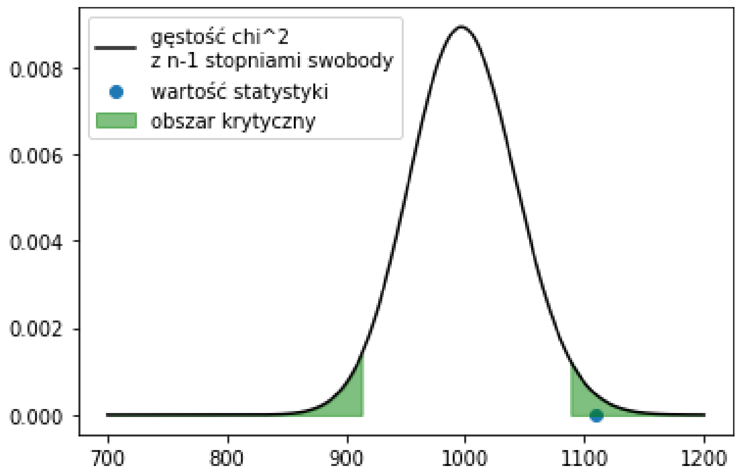
Wartość statystyki testowej wyliczona za pomoca programu Python to 1110.97. Kolejnym krokiem jest policzenie obszarów krytycznych dla wszystkich hipotez alternatywnych.

1. H_1: $\sigma^2 \neq 1.50$
   $$C = (-\infty, -\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$$
   gdzie $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$ to kantyl rzędu $1-\frac{\alpha}{2}$ z rozkładu χ^2 z n-1 stopniami swobody. Dla badanej próbki rozkład ten wynosi
   $$C = (-\infty, 913.3) \cup (1088.5, \infty)$$
2. H_2: $\sigma^2 > 1.5$
   $$C = (\chi^2_{1-\alpha}, \infty)$$
   $$C = (1073.6, \infty)$$
3. H_3: $\sigma^2 =< 1.5$
   $$C = (-\infty, \chi^2_{\alpha})$$
   $$C = (-\infty, 926.6)$$

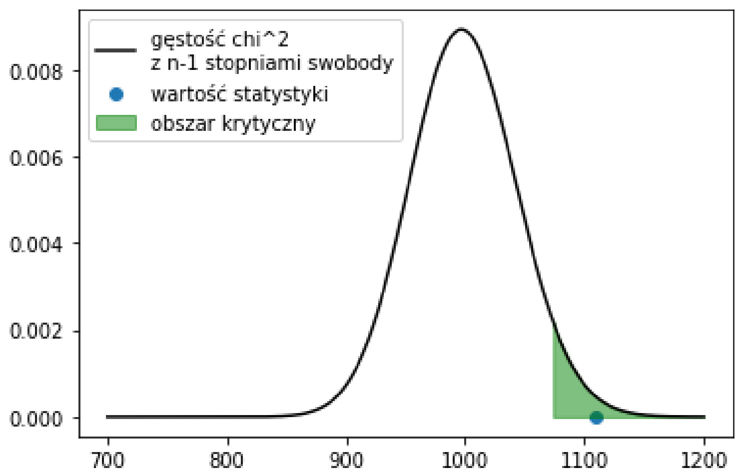
Wyznaczymy jeszcze p-wartości testu dla każdej hipotezy alternatywnej

1. H_1: $\sigma^2 \neq 1.50$
   $$2P_{H_0}(\chi^2 \geqslant |\chi|) = 2(1 - P_{H_0}(\chi^2 < |\chi|)) = 2 - 2F_(\chi^2)(\chi)$$
   gdzie $F_(\chi^2)(\chi)$ to dystrybuanta rozkładu χ^2 z n-1 stopniami swobody. Dla badanej próbki wartość ta wynosi
   $$2P_{H_0}(\chi^2 \geqslant |1110.97|) \approx 0.015$$
2. H_2: $\sigma^2 > 1.5$
   $$2P_{H_0}(\chi^2 \geqslant \chi) = 1 - P_{H_0}(\chi^2 < \chi)) = 1 - F_(\chi^2)(\chi)$$
   Dla badanej próbki wartość ta wynosi
   $$P_{H_0}(\chi^2 \geqslant 1110.97)) \approx 0.008$$
3. H_3: $\sigma^2 =< 1.5$
   $$P_{H_0}(\chi^2 \leqslant \chi) = F_(\chi^2)(\chi)$$
   Dla badanej próbki wartość ta wynosi
   $$P_{H_0}(\chi^2 \leqslant 1110.97) \approx 0.993$$

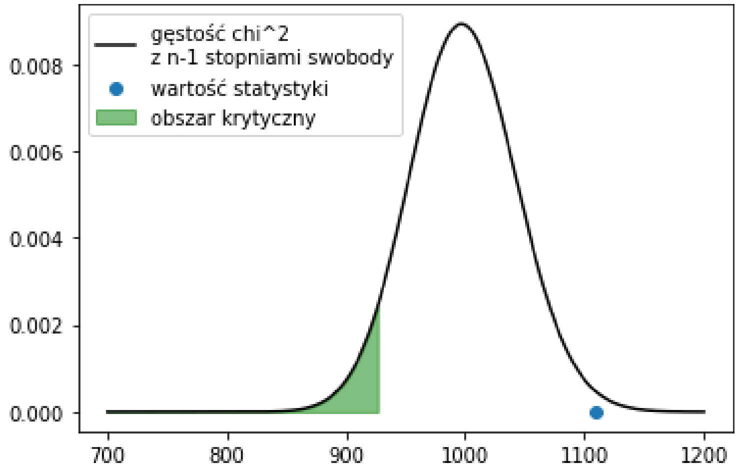
3.1 Wizualizacja otrzymanych danych



Rysunek 4: Wykres dla hipotezy alternatywnej H_1 i poziomu istotności $\alpha = 0.05$



Rysunek 5: Wykres dla hipotezy alternatywnej H_2 i poziomu istotności $\alpha = 0.05$



Rysunek 6: Wykres dla hipotezy alternatywnej H_3 i poziomu istotności $\alpha = 0.05$

Jak możemy zauważyć na powyższych wykresach na rysunkach 4 i 5 wartość statystyki zawiera się w obszarze krytycznym w przeciwieństwie do rysunku 6.

3.2 Wnioski

Na podstawie otrzymanych wyników odrzucamy hipoteze zerową na korzyść hipotez alternatywnych H_1: $\sigma^2 \neq 1.50$ i H_2: $\sigma^2 > 1.5$. Wynika z tego, że badana próba pochodzi z rozkładu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, z parametrami $\mu = 0.2$ i $\sigma^2 > 1.5$. Gdy zwiększymy poziom ufności przedziały krytyczne zmniejszają się, co zmniejsza prawdopodobieństwo odrzucenia prawdziwej hipotezy zerowej, lecz zwiększa prawdopodobieństwo przyjęcia fałszywej hipotezy zerowej. Gdy zmniejszymy poziom ufności przedziały krytyczne zwiększą się, co zwiększa prawdopodobieństwo odrzucenia prawdziwej hipotezy zerowej.

4 Zadanie 3

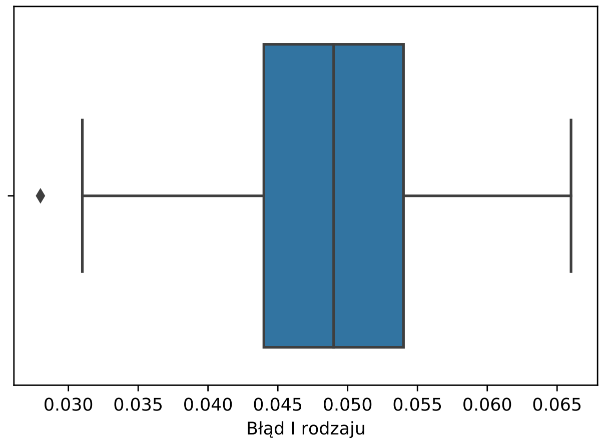
4.1 Błąd I rodzaju

Aby wyznaczyć symulacyjnie błąd I rodzaju musimy wygenerować prostą próbę losową z rozkładu normalnego o parametrach zgodnych z H_0 ($\mu = 1.5$ oraz $\sigma = 0.2$) i sprawdzić, ile razy odrzucimy hipotezę zerową.
Algorytm:

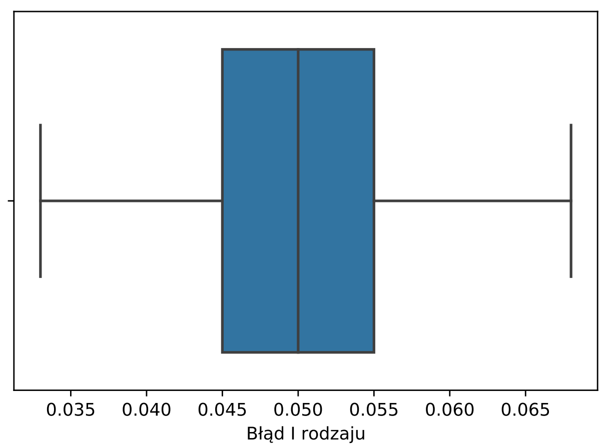
1. Ustalamy $\alpha = 0.05, n = 1000$
2. Generujemy $X_1, \ldots, X_n$ - prostą próbę losową z rozkładu $N(\mu, \sigma)$ (parametry zgodne z H_0)
3. Wyznaczamy wartość statystyki testowej Z (lub χ^2 w Zadaniu 2.)
4. Wyznaczamy obszar krytyczny (jego postać będzie zależała od postaci hipotezy alternatywnej, czyli dla każdego z podpunktów Zadania 1 oraz Zadania 2 będziemy tutaj mieć inny obszar)
5. Sprawdzamy, czy statystyka Z (lub χ^2 w drugim zadaniu) jest w obszarze krytycznym
6. Powtarzamy kroki 2. – 5. $N = 1000$ razy i zliczamy, ile razy statystyka testowa jest w obszarze krytycznym
7. $\#\{Z$ (lub χ^2) w obszarze krytycznym$\}/N$ daje w przybliżeniu błąd I rodzaju

4.1.1 Część do zadania 1.

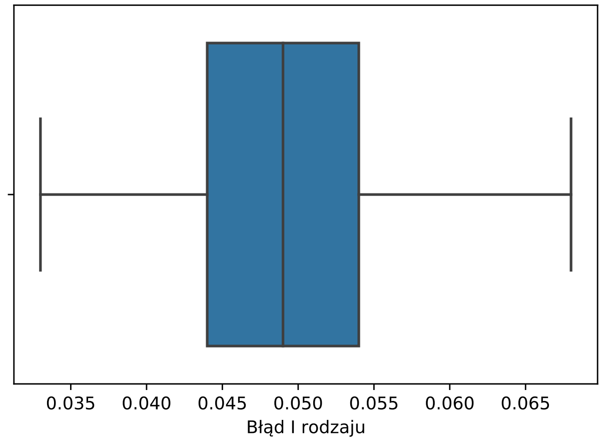
Wyniki otrzymane przez zaimplemetnowanie zaprezentowanego wyżej algorytmu zaprezentujemy za pomocą wykresów pudełkowych i tabel. Dla $\alpha = 0.05$ powtórzymy algorytm wszystkie kroki $M = 100$ razy i otrzymane rezultaty przestawimy na wykresie. Natomiast w tabeli zamieszczone zostaną wartości również dla poziomów istoności $\alpha = 0.01$ i $\alpha = 0.05$



Rysunek 7: Wykres pudełkowy przedstawiający wartość błędu I rodzaju dla wartości średniej dla hipotezy alternatywnej H_1 i poziomu istotności $\alpha = 0.05$



Rysunek 8: Wykres pudełkowy przedstawiający wartość błędu I rodzaju dla wartości średniej dla hipotezy alternatywnej H_2 i poziomu istotności $\alpha = 0.05$



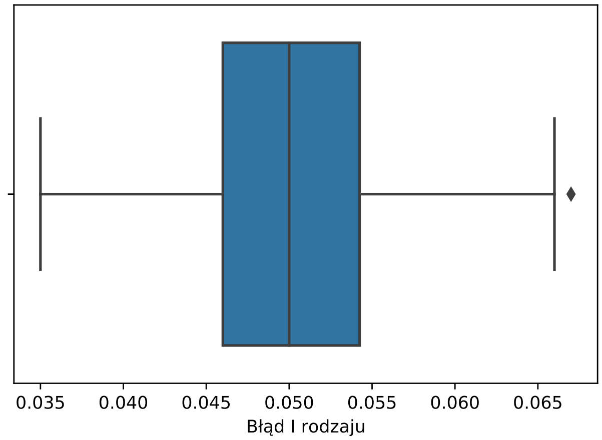
Rysunek 9: Wykres pudełkowy przedstawiający wartość błędu I rodzaju dla wartości średniej dla hipotezy alternatywnej H_3 i poziomu istotności $\alpha = 0.05$

	$H_1 : \mu \neq 1.5$	$H_2 : \mu > 1.5$	$H_3 : \mu < 1.5$
$\alpha = 0.1$	0.100	0.099	0.100
$\alpha = 0.05$	0.049	0.052	0.049
$\alpha = 0.01$	0.010	0.011	0.009

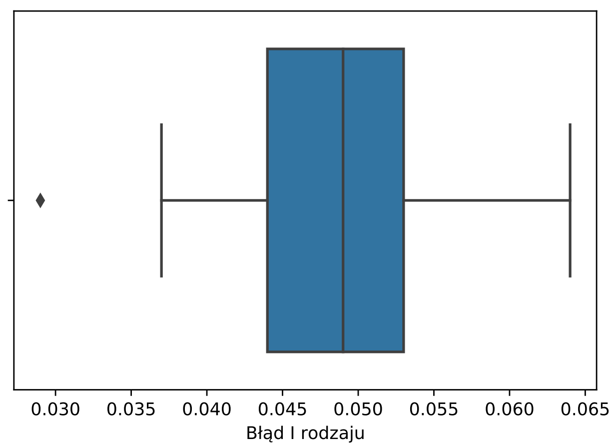
Tabela 1: Wartości błędu I rodzaju dla testów średniej przy różnych poziomach istotności α w zależności od postaci hipotezy alternatywnej.

4.1.2 Część do zadania 2.

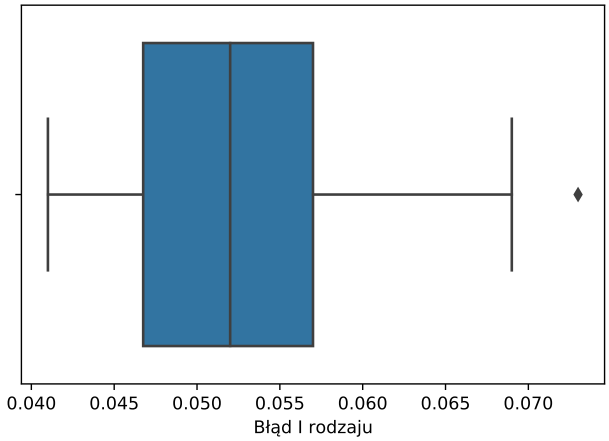
Dla testów wariancji rezultaty zostaną przedstawione analogicznie do tych dotyczących wartości średniej.



Rysunek 10: Wykres pudełkowy przedstawiający wartość błędu I rodzaju dla wariancji dla hipotezy alternatywnej H_1 i poziomu istotności $\alpha = 0.05$



Rysunek 11: Wykres pudełkowy przedstawiający wartość błędu I rodzaju dla wariancji dla hipotezy alternatywnej H_2 i poziomu istotności $\alpha = 0.05$



Rysunek 12: Wykres pudełkowy przedstawiający wartość błędu I rodzaju dla wariancji dla hipotezy alternatywnej H_3 i poziomu istotności $\alpha = 0.05$

	$H_1 : \sigma \neq 1.5$	$H_2 : \sigma > 1.5$	$H_3 : \sigma < 1.5$
$\alpha = 0.1$	0.100	0.097	0.104
$\alpha = 0.05$	0.050	0.049	0.052
$\alpha = 0.01$	0.010	0.008	0.010

Tabela 2: Wartości błędu I rodzaju dla testów wariancji przy różnych poziomach istotności α w zależności od postaci hipotezy alternatywnej.

4.1.3 Wnioski

Patrząc na rysunki 7-12 można stwierdzić, że zaproponowana symulacja pozwoliła poprawnie wyznaczyć błąd I rodzaju dla testów zarówno dla wartości średniej jak i wariancji. W obu przypadkach otrzymane rezultaty są bardzo zbliżone do rozważanej wartości poziomu istotności α. Z tabeli 1 i tabeli 2 widać, że wraz ze wzrostem parametru α wzrasta błąd I rodzaju, czyli mamy do czynienia z większym prawdopodobieństwem odrzucenia hipotezy zerowej H_0, gdy jest ona prawdziwa.

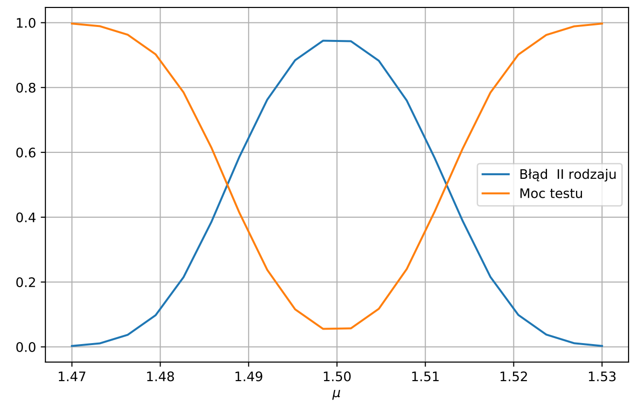
4.2 Błąd II rodzaju

Aby symulacyjnie wyznaczyć błąd II rodzaju musimy wygenerować prostą próbę losową z rozkładu normalnego o parametrach zgodnych z H_1 (ale blisko tych z H_0) i sprawdzić, ile razy przyjmujemy hipotezę zerową. Algorytm:

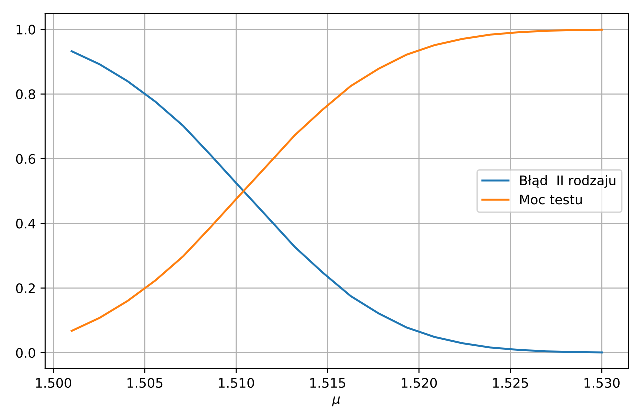
1. Ustalamy $\alpha = 0.05, \mu =$ (wartość zgodna z H_1), $\sigma = 0.2, n = 1000$
2. Generujemy $X_1, \ldots, X_n$ - prostą próbę losową z rozkładu $N(\mu, \sigma)$
3. Wyznaczamy wartość statystyki testowej Z (lub χ^2 w Zadaniu 2.)
4. Wyznaczamy obszar krytyczny (jego postać będzie zależała od postaci hipotezy alternatywnej, czyli dla każdego z podpunktów Zadania 1 oraz Zadania 2 będziemy tutaj mieć inny obszar)
5. Sprawdzamy, czy statystyka Z (lub χ^2 w drugim zadaniu) jest poza obszarem krytycznym
6. Powtarzamy kroki 2. – 5. $N = 1000$ razy i zliczamy, ile razy statystyka testowa jest poza obszarem krytycznym
7. $\#\{Z$ (lub χ^2) poza obszarem krytycznym$\}/N$ daje w przybliżeniu błąd II rodzaju

4.2.1 Część do zadania 1.

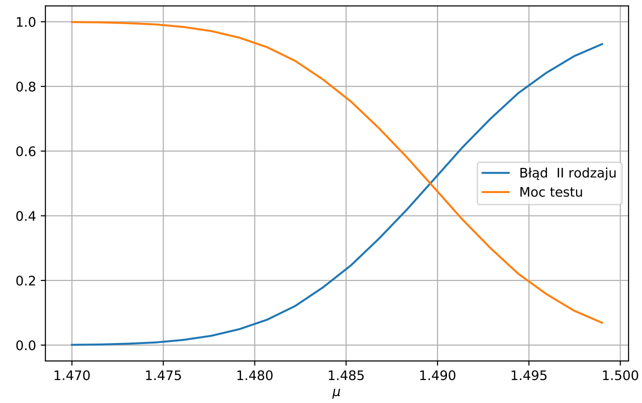
W celu zaprezentowania wyników dla błędu II rodzaju dla testów średniej rozważamy alternatywne μ i przygotowujemy wykres, który na osi x ma wartość μ a na osi y wartość błędu II rodzaju. Dodatkowo na wykresie zaznaczymy moc testu.



Rysunek 13: Błąd II rodzaju i moc testu dla różnych μ dla $\alpha = 0.05$, dla hipotezy alternatywnej $\mu \neq 1.5$



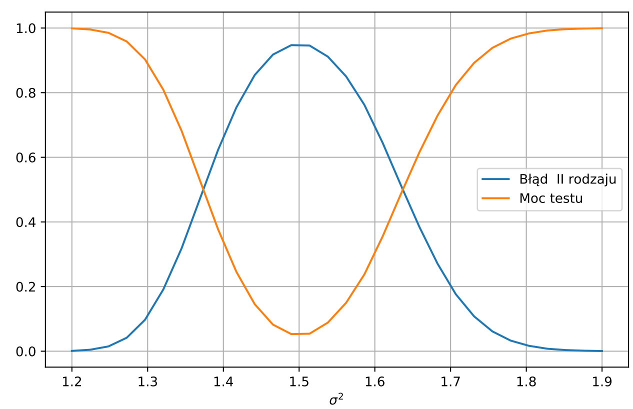
Rysunek 14: Błąd II rodzaju i moc testu dla różnych μ dla $\alpha = 0.05$, dla hipotezy alternatywnej $\mu > 1.5$



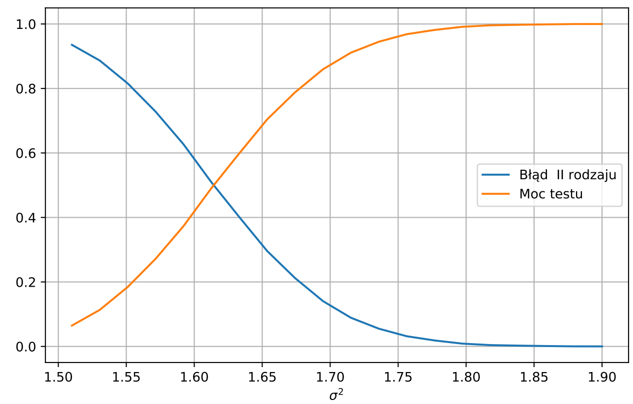
Rysunek 15: Błąd II rodzaju i moc testu dla różnych μ dla $\alpha = 0.05$, dla hipotezy alternatywnej $\mu < 1.5$

4.2.2 Część do zadania 2.

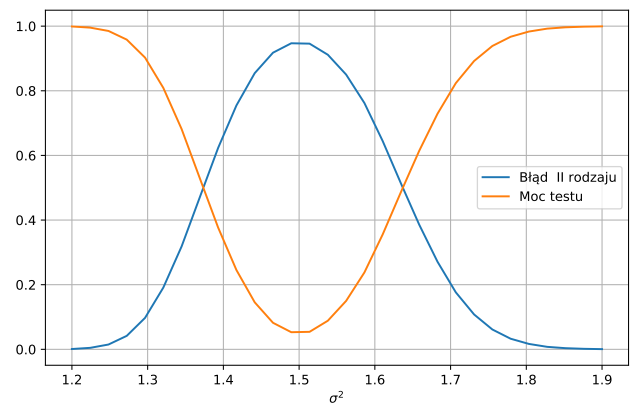
Wyniki dla testów wariancji zaprezentujemy analogicznie do wartości średniej.



Rysunek 16: Błąd II rodzaju i moc testu dla różnych σ^2 dla $\alpha = 0.05$, dla hipotezy alternatywnej $\sigma^2 \neq 1.5$



Rysunek 17: Błąd II rodzaju i moc testu dla różnych σ^2 dla $\alpha = 0.05$, dla hipotezy alternatywnej $\sigma^2 > 1.5$



Rysunek 18: Błąd II rodzaju i moc testu dla różnych σ^2 dla $\alpha = 0.05$, dla hipotezy alternatywnej $\sigma^2 < 1.5$

4.2.3 Wnioski

Analizując wykresy numer 13-18 dochodzimy do wniosku, że błąd II rodzaju maleje wraz ze wzrostem różnicy pomiędzy parametrem rzeczywistym a parametrem hipotezy zerowej. Moc testu natomiast wykazuje się odwrotną proporcjonalnością w stosunku do błędu II rodzaju. Dodatkowo zauważmy, że suma mocy testu oraz błędu II rodzaju wynosi zawsze 1, co jest zgodne z poznaną nam teorią.