

**MS-A0402 / Kevät 2017****Loppukoe, 4.4.2017 klo 13.00-16.00**

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.
Ratkaise kaikki kuusi tehtävää, kukin niistä on kuuden pisteen arvoinen.

Jos olet suorittamassa tenttiä, **pyydä valvojalta tenttipaperi!**

Tehtävä 1: Osoita, että kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ pätee

$$(1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3.$$

Tehtävä 2: Osoita, että joukot \mathbb{Z} ja $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$ ovat yhtä mahtavia.

Tehtävä 3: Tarkastellaan tavallista 52 kortin korttipakkaa (neljä maata, kutakin 13 korttia, numeroarvot 2-13 ja ässä).

- a) Kuinka monta erilaista viiden kortin kättä (eli järjestämätöntä joukkoa) on olemassa?
- b) Pokerissa viiden kortin kättä, jossa kaikki kortit ovat samaa maata, kutsutaan väriksi. Montako viiden kortin väriä on olemassa?
- c) Viiden kortin kättä, jossa korteilla on peräkkäiset numeroarvot, kutsutaan suoraksi. Ässää voi käyttää numeroarvoina 1 ja 14, eli suora saa alkaa ässällä tai päättyä siihen, mutta ässä ei saa olla keskellä suoraa. Montako suoraa on olemassa?
- d) Montako sellaista viiden kortin suoraa on olemassa, jotka eivät ole värejä?

Perustele vastauksesi.

Vastauksia ei tarvitse laskea auki, niihin saa jäädä esim. kertomerkkejä, potensseja, summia, binomikertoimia, multinomikertoimia ja kertomia.

Tehtävä 4: a) Etsi jäännösluokkarenkaan \mathbb{Z}_9 kääntyvät alkiot ja niiden käänteisalkiot.

b) Ratkaise x , kun

$$5x \equiv 3 \pmod{9}$$

tai perustele, miksi ratkaisua ei ole.

Tehtävä 5: Tarkastellaan permutaation $g = (123)(45)$ generoimaa ryhmää $G = \langle g \rangle$, joka toimii joukossa $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

- a) Mitkä kaikki permutaatiot kuuluvat ryhmään G ?
- b) Etsi kunkin ryhmän G permutaation sykli-indeksi.
- c) Mikä on ryhmän G sykli-indeksi?

Tehtävä 6: Tarkastellaan suuntaamatonta verkkoa $G = (V, E)$, jossa $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ja $E = \{\{a, c\}, \{a, d\}, \{d, c\}, \{c, b\}, \{b, e\}, \{e, c\}, \{f, b\}, \{f, g\}, \{g, e\}\}$.

- a) Piirrä verkon kuva.
- b) Onko verkossa Hamiltonin kävelyä, eli kävelyä, johon kuuluvat kaikki verkon solmut?
- c) Onko verkossa Hamiltonin sykliä?

Kohdissa b) ja c) joko anna kävely/sykli tai perustele, miksi sitä ei ole.