



Aalto-yliopisto

MS-A0402

**Loppukoe ja tentti, 3.4.2018 klo 13.00-16.00**

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.

Ratkaise kaikki kuusi tehtävää, kukin niistä on kuuden pisteen arvoinen.

Kaikille kokeeseen osallistuneille lasketaan arvosana koetta sekä tenttinä (harjoituspisteet eivät vaikuta) että loppukokeena (harjoituspisteet vaikuttavat) käsiteltäen ja annetaan näistä arvosanoista parempi.

**Tehtävä 1:**

- a) Määritellään relaatio  $\sim$  joukossa  $\mathbb{Z}$  asettamalla  $x \sim y \Leftrightarrow x$ :llä ja  $y$ :llä on sama pariteetti (ts. molemmat parillisia tai molemmat parittomia). Perustele tarkasti miksi relaatio  $\sim$  on ekvivalenssirelaatio ja määritä sen ekvivalenssiluokat.
- b) Monelleko funktiolle  $f: \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  pätee  $|f^{-1}(\{2\})| = 4$ ?

**Tehtävä 2:** Todista induktiolla, että

$$\sum_{k=1}^n (2k+3) = n^2 + 4n$$

kaikille  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Muista kirjoittaa selkeästi näkyviin, mikä on käyttämäsi induktio-oletus ja missä kohtaa todistusta sitä käytät.

**Tehtävä 3:** Kymmenen teekkaria on juhlimassa. Saapuessaan juhlapaikalle he jättävät teekkari-lakkinsa eteiseen. Lähtiessään kukin nappaa yhden lakin taas mukaansa. Kuinka monta eri tapaa lakeilla on jakautua teekkareille, kun tiedetään, että kuusi teekkaria saa oman lakkinsa, mutta neljä ei? Perustele vastauksesi!

**Tehtävä 4:** Osoita, että renkaan  $\mathbb{Z}_n$  alkiolla  $a$  on olemassa käänteisalkio jos ja vain jos luvut  $n$  ja  $a$  ovat keskenään jaottomat (eli  $\text{syta}(a, n) = 1$ ).

**Tehtävä 5:**

- a) Olkoot  $\pi = (1\ 2\ 3)$  ja  $\rho = (2\ 3\ 4)$  ryhmän  $S_5$  permutaatioita. Esitä  $\pi\rho$  ja  $\rho\pi$  sekä matriisimuodossa että sykliesityksenä.
- b) Monellako eri tavalla tasasivuisen kolmion kärjet voidaan värittää, jos käytettävissä on kolmea eri väriä eikä erotella tapauksia, jotka saadaan toisistaan kääntelemällä kolmiota kolmiulotteisessa avaruudessa?

**Tehtävä 6:** Määrittele tarkasti kurssilla esiintyneet käsitteet *kromaattinen luku* ja *minimaalinen virittäjäpuu* ja anna molemmista myös esimerkki. Esittele sitten kummallekin käsitteelle jokin sovelluskohde, jossa sitä voitaisiin hyödyntää.