FINAL EXAM,
FOUNDATIONS OF DISCRETE MATHEMATICS,
MS-A0402

- Time: 9:00-13:00
- You may use any material you wish, but you must not communicate with anybody during the exam.
- Your solutions should be hand-written on paper or tablet.
- Your name and student number must be visible on each page.
- Each problem is worth 4 points.
- Motivate all solutions carefully. Answers without motivation give no points.

Problem 1

Are the following statements tautologies or not? (1p/part)

a) $(P \vee Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.
b) $(P \to Q) \vee (Q \to P)$.
c) $((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$.
d) $((P \wedge Q) \vee R) \leftrightarrow ((P \wedge R) \vee (Q \wedge R))$.

Problem 2

Let $|A| = n$. Find a formula (in terms of n) for the number of functions $f : A \to P(A)$ such that $\forall x \in A : x \in f(x)$.

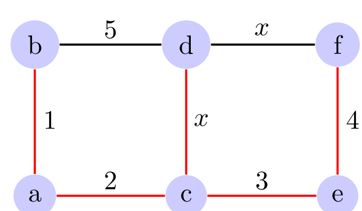
Problem 3

Consider the relation $\preceq$ on $\mathbb{Z}$ given by $x \preceq y$ if there exist $m \in \mathbb{N}$ and an odd integer k such that $kx = 2^m y$.

a) Prove that $\preceq$ is an order relation on $\mathbb{Z}$. (2p)
b) Draw the Hasse diagram of $\preceq$ on the set $\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ (1p)
c) Give an example of a linear extension of $\preceq$ on the set $\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$. (1p)

Problem 4

In the weighted graph below, the red edges form a minimal spanning tree. What can you say about the unknown weight $x \in \mathbb{R}$?



Problem 5

We know that

$$2^{11} = 2048$$

and that

$$2021 = 43 \cdot 47.$$

Using these facts, find a number k such that

$$27^k \equiv 2 \mod 2021.$$

Aalto-yliopisto

MS-A0402

Loppukoe ja tentti, 3.4.2018 klo 13.00-16.00

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.
Ratkaise kaikki kuusi tehtävää, kukin niistä on kuuden pisteen arvoinen.

Kaikille kokeeseen osallistuneille lasketaan arvosana koetta sekä tenttinä (harjoituspisteet eivät vaikuta) että loppukokeena (harjoituspisteet vaikuttavat) käsiteltäen ja annetaan näistä arvosanoista parempi.

Tehtävä 1:

a) Määritellään relaatio $\sim$ joukossa $\mathbb{Z}$ asettamalla $x \sim y \;\Leftrightarrow\; x$:llä ja y:llä on sama pariteetti (ts. molemmat parillisia tai molemmat parittomia). Perustele tarkasti miksi relaatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio ja määritä sen ekvivalenssiluokat.

b) Monelleko funktiolle $f\colon \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \to \{0,1,2,3,4,5,6\}$ pätee $|f^{-1}(\{2\})| = 4$?

Tehtävä 2: Todista induktiolla, että

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+3) = n^2 + 4n$$

kaikille $n \in \mathbb{Z}_+$. Muista kirjoittaa selkeästi näkyviin, mikä on käyttämäsi induktio-oletus ja missä kohtaa todistusta sitä käytät.

Tehtävä 3: Kymmenen teekkaria on juhlimassa. Saapuessaan juhlapaikalle he jättävät teekkarilakkinsa eteiseen. Lähtiessään kukin nappaa yhden lakin taas mukaansa. Kuinka monta eri tapaa lakeilla on jakautua teekkareille, kun tiedetään, että kuusi teekkaria saa oman lakkinsa, mutta neljä ei? Perustele vastauksesi!

Tehtävä 4: Osoita, että renkaan $\mathbb{Z}_n$ alkiolla a on olemassa käänteisalkio jos ja vain jos luvut n ja a ovat keskenään jaottomat (eli syt$(a,n) = 1$).

Tehtävä 5:

a) Olkoot $\pi = (1\ 2\ 3)$ ja $\rho = (2\ 3\ 4)$ ryhmän S_5 permutaatioita. Esitä $\pi\rho$ ja $\rho\pi$ sekä matriisimuodossa että sykliesityksenä.

b) Monellako eri tavalla tasasivuisen kolmion kärjet voidaan värittää, jos käytettävissä on kolmea eri väriä eikä erotella tapauksia, jotka saadaan toisistaan kääntelemällä kolmiota kolmiulotteisessa avaruudessa?

Tehtävä 6: Määrittele tarkasti kurssilla esiintyneet käsitteet *kromaattinen luku* ja *minimaalinen virittäjäpuu* ja anna molemmista myös esimerkki. Esittele sitten kummallekin käsitteelle jokin sovelluskohde, jossa sitä voitaisiin hyödyntää.

Aalto-yliopisto

MS-A0402 / Kevät 2017

Loppukoe, 4.4.2017 klo 13.00-16.00

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.
Ratkaise kaikki kuusi tehtävää, kukin niistä on kuuden pisteen arvoinen.

Jos olet suorittamassa tenttiä, **pyydä valvojalta tenttipaperi**!

Tehtävä 1: Osoita, että kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ pätee

$$(1+2+3+\ldots+n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots n^3.$$

Tehtävä 2: Osoita, että joukot $\mathbb{Z}$ ja $\{2n \ : n \in \mathbb{N}\}$ ovat yhtä mahtavia.

Tehtävä 3: Tarkastellaan tavallista 52 kortin korttipakkaa (neljä maata, kutakin 13 korttia, numeroarvot 2-13 ja ässä).

a) Kuinka monta erilaista viiden kortin kättä (eli järjestämätöntä joukkoa) on olemassa?

b) Pokerissa viiden kortin kättä, jossa kaikki kortit ovat samaa maata, kutsutaan väriksi. Montako viiden kortin väriä on olemassa?

c) Viiden kortin kättä, jossa korteilla on peräkkäiset numeroarvot, kutsutaan suoraksi. Ässää voi käyttää numeroarvoina 1 ja 14, eli suora saa alkaa ässällä tai päättyä siihen, mutta ässä ei saa olla keskellä suoraa. Montako suoraa on olemassa?

d) Montako sellaista viiden kortin suoraa on olemassa, jotka eivät ole värejä?

Perustele vastauksesi.
Vastauksia ei tarvitse laskea auki, niihin saa jäädä esim. kertomerkkejä, potensseja, summia, binomikertoimia, multinomikertoimia ja kertomia.

Tehtävä 4: a) Etsi jäännösluokkarenkaan $\mathbb{Z}_9$ kääntyvät alkiot ja niiden käänteisalkiot.

b) Ratkaise x, kun

$$5x \equiv 3 \mod 9$$

tai perustele, miksi ratkaisua ei ole.

Tehtävä 5: Tarkastellaan permutaation $g = (123)(45)$ generoimaa ryhmää $G = \langle g \rangle$, joka toimii joukossa $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

a) Mitkä kaikki permutaatiot kuuluvat ryhmään G?

b) Etsi kunkin ryhmän G permutaation sykli-indeksi.

c) Mikä on ryhmän G sykli-indeksi?

Tehtävä 6: Tarkastellaan suuntaamatonta verkkoa $G = (V, E)$, jossa $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ja $E = \{\{a, c\}, \{a, d\}, \{d, c\}, \{c, b\}, \{b, e\}, \{e, c\}, \{f, b\}, \{f, g\}, \{g, e\}\}$.

a) Piirrä verkon kuva.

b) Onko verkossa Hamiltonin kävelyä, eli kävelyä, johon kuuluvat kaikki verkon solmut?

c) Onko verkossa Hamiltonin sykliä?

Kohdissa b) ja c) joko anna kävely/sykli tai perustele, miksi sitä ei ole.

Aalto-yliopisto

Gripenberg

MS-A0402 Diskreetin matematiikan perusteet
Tentti 4.9.2015

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Laskimia tai taulukoita ei saa käyttää tässä kokeessa!

1. Osoita induktiolla (etkä jollain muulla tavalla), että $n! \geq 2^n$ kaikilla $n \geq 4$.

2.

(a) Kurssilla on 40 opiskelijaa koulutusohjelmasta A ja 30 opiskelijaa koulutusohjelmasta B. Monellako tavalla voidaan kurssin opiskelijoista muodostaa harjoitusryhmä, johon kuuluu 10 opiskelijaa koulutusohjelmasta A ja 5 opiskelijaa koulutusohjelmasta B?

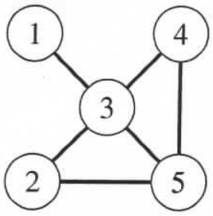
(b) Kirjasto jakaa vanhojen kirjojen varastostaan 10 (eri) kirjaa 6:lle opiskelijalle. Monellako tavalla tämä on mahdollista tehdä.

Vastauksissasi saa numeroiden lisäksi olla potensseja, $\cdot$, $+$, !, (,) ja / mutta ei esimerkiksi binomikertoimia.

3. Osoita, että $[10^j]_3 = [1]_3$ kun $j \geq 0$ käyttämällä kaavaa $[m^j]_n = [m]_n^j$ kaksi kertaa. Osoita, että jos luku m kymmenjärjestelmässä kirjoitettuna on $x_k x_{k-1} \ldots x_0$ eli $m = x_k \cdot 10^k + x_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + x_1 \cdot 10 + x_0$ niin $[m]_3 = [x_k + x_{k-1} + \ldots + x_1 + x_0]_3$.

Päättele tämän tuloksen avulla onko luku 243 564 763 kolmella jaollinen.

4. Tarkastellaan alla olevaa verkkoa:



Määritä kaikki solmujen permutaatiot ψ, jotka ovat verkkoisomorfismeja eli jos a ja b ovat verkon solmuja, jotka ovat naapureita, niin silloin myös $\psi(a)$ ja $\psi(b)$ ovat naapureita.

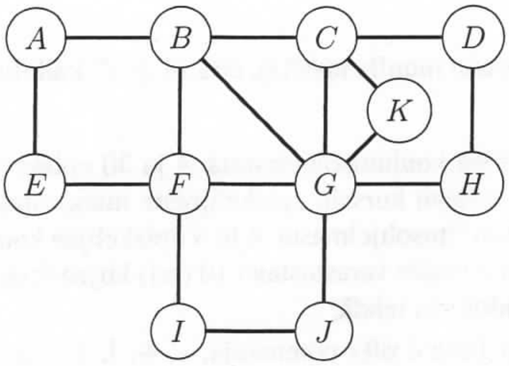
Nämä permutaatiot muodostavat ryhmän (mutta tätä sinun ei tarvitse osoittaa) ja laske tämä ryhmän sykli-indeksi sen toiminnassa solmujen joukolla.

KÄÄNNÄ!

5.

(a) Eulerin sykli verkossa on polku, joka kulkee verkon jokaisen kaaren kautta täsmälleen kerran ja palaa polun lähtösolmuun. Onko alla olevassa verkossa Eulerin sykliä? Esitä sellainen jos niitä löytyy tai selitä mistä nähdään ettei sellaista ole jos näin on asian laita.

(b) Mikä on Hamiltonin polun määritelmä? Onko alla olevassa verkossa Hamiltonin polkua? Esitä sellainen jos niitä löytyy tai selitä mistä nähdään ettei sellaista ole jos näin on asian laita.



Aalto-yliopisto

Diskreetin matematiikan perusteet (IV / 15–16)
Välikoe / Loppukoe, ti 5.4.2016 klo 13:00–16:00

Ei laskimia, ei taulukoita. Tehtävät ovat tasa-arvoisia.

Tehtävä 1:

a) Todista induktiolla, että $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$ pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$.

b) Olkoon $A = \{a, b, c, d, e\}$. Määritellään ekvivalenssirelaatio $\sim$ potenssijoukossa $\mathcal{P}(A)$ (joukon A kaikkien osajoukkojen joukko) asettamalla $X \sim Y$ jos ja vain jos $|X| = |Y|$. Montako ekvivalenssiluokkaa tällä relaatiolla on? Perustele lyhyesti.

Tehtävä 2:

a) Monelleko funktiolle $f\colon \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \to \{0,1,2,3,4,5,6\}$ pätee $|f^{-1}(\{3\})| = 5$?

b) Monessako 10-numeroisessa kymmenjärjestelmän luvussa on täsmälleen neljä kakkosta eikä yhtään nollaa?

c) Moniko seitsemän pituinen bittijono alkaa ykkösellä tai loppuu ykkösellä tai sisältää täsmälleen neljä ykköstä?

Anna vastauksesi muodossa, josta lopullinen numeroarvo voitaisiin laskea laskimella, esim.
$123! \cdot \binom{456}{789}$.

Käännä!

Aalto-yliopisto

Diskreetin matematiikan perusteet (IV / 15–16)

Tentti, ti 5.4.2016 klo 13:00–16:00

Tehtävä 3:

a) Määritä Eukleideen algoritmilla syt$(33, 70)$.

b) Määritä a-kohtaa hyödyntäen alkion 33 käänteisalkio joukossa $\mathbb{Z}_{70}$. Perustele, miksi löytämäsi alkio on etsitty käänteisalkio.

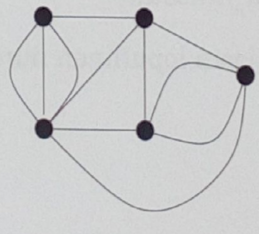
Tehtävä 4: Suora tanko on jaettu n:ään yhtä pitkään osaan piirtämällä tankoon $n-1$ viiltoa. (Oletetaan, että tangon poikkileikkaus on kiekko ja että viillot ovat ympyröitä.) Tankoa voidaan liikutella vapaasti kolmiulotteisessa avaruudessa.

a) Mitkä permutaatioryhmän S_n alkiot muodostavat tangon symmetriaryhmän? Tarkastele erikseen tapaukset n parillinen ja n pariton. Vihje: kokeile ensin tapauksilla $n = 4$ ja $n = 5$.

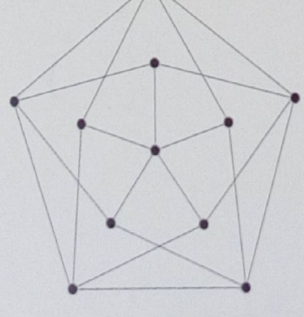
b) Monellako olennaisesti eri tavalla tangon osat voidaan värittää q:lla värillä?

Tehtävä 5: Tee **vaihtoehtoisesti** joko tehtävä a) tai b).

a) Kerro mitä Eulerin syklillä tarkoitetaan. Esitä alla olevan verkon avulla, milloin ja miten Eulerin sykli yleisesti löydetään.



b) Osoita tarkasti, että alla olevan verkon kromaattinen luku on neljä.



Aalto-yliopisto

Gripenberg, Ketola

MS-A0402 Diskreetin matematiikan perusteet
Tentti ja välikokeiden uusinta 6.5.2014

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot!
Laskimia tai taulukoita ei saa käyttää tässä kokeessa!

Kirjoita selvästi jokaiseen paperiin minkä kokeen suoritat.
Tentin tehtävät ovat 5 tehtävää tehtävistä 1, 3, 4, 5, 6, 8.
Uusintavälikokeiden tehtävät ovat
1. vk: 1–4,
2. vk: 5–8.

1. Osoita induktiolla, että

$$5+7+9+11+\ldots+(2n+3)=\sum_{j=1}^{n}(2j+3)=n^2+4n, \quad n\geq 1.$$

2.

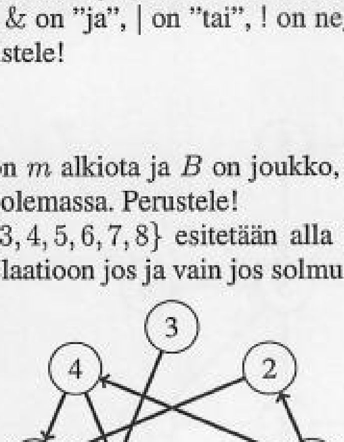
(a) Mitä tarkoittaa merkintä "$f \in O(n^3)$ kun $n \to \infty$"?

(b) Formuloi väite "Kaikilla kokonaisluvuilla x on olemassa kokonaisluku y siten, että jos x:n ja y:n tulo on pienempi kuin x niin x:n ja y:n tulo on suurempi kuin x" käyttäen $\forall$, $\exists$, $\to$, &, |, !, $\in$, $<$, $>$, $\mathbb{Z}$, $\cdot$, x ja y sekä tarvittaessa sulkumerkkejä (missä siis $\mathbb{Z}$ on kokonaislukujen joukko, & on "ja", | on "tai", ! on negaatio ja $\cdot$ on kertolaskumerkki). Päteekö tämä väite? Perustele!

3.

(a) Jos A on joukko, jossa on m alkiota ja B on joukko, jossa on n alkiota niin montako injektiota $f : A \to B$ on olemassa. Perustele!

(b) Relaatio joukossa $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ esitetään alla olevan suunnatun verkon avulla siten, että $[a,b]$ kuuluu relaatioon jos ja vain jos solmusta a on kaari solmuun b.



Mitkä kaaret olisi poistettava ja minkä solmujen välille olisi lisättävä kaari jotta tuloksena olisi relaatio, joka on funktio?

4. Kirjasto jakaa vanhojen kirjojen varastostaan 6 kirjaa 4:lle opiskelijalle. Monellako tavalla tämä on mahdollista tehdä jos

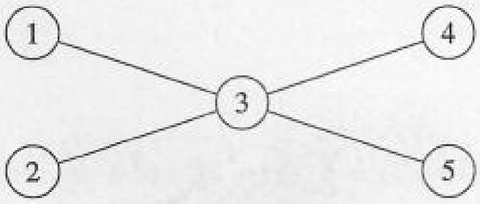
(a) kirjat ovat erilaiset?

(b) kirjat ovat identtiset?

Voit antaa vastauksesi niin että siinä on $+$, $-$, $\cdot$, / ja ! mutta ei esim. binomikertoimia.

5. Eräässä yliopistossa käytetään opiskelijanumeroita, jotka muodostetaan kahdeksasta numerosta ja tarkistuskirjaimesta. Opiskelija A kirjoitti opiskeiljanumeronsa muodossa $235x7247H$ missä numero x jäi suttuisaksi. Määritä x käyttämällä hyväksi tietoa, että tarkistuskirjan H tarkoittaa, että kun luku, joka muodostuu tarkistukirjanta edeltävistä numeroista jaetaan 23:lla niin jäännös on 8 ja että $[23507247]_{23} = [5]_{23}$, $[10000]_{23} = 18$ ja että $[18]_{23}^{-1} = [9]_{23}$.

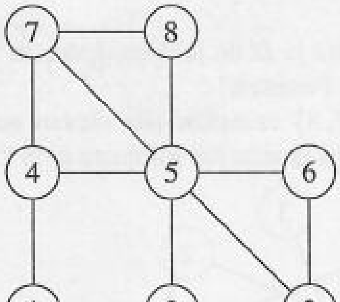
6. Alla olevan verkon



solmujoukon X permutaatiot (1), $(1\ 5)(2\ 4)$, $(1\ 4)(2\ 5)$ and $(1\ 2)(4\ 5)$ muodostavat ryhmän G (mutta tätä sinun ei tarvitse osoittaa). Määritä sykli-indeksi $\zeta_{G,X}$ ja määritä sen avulla monellako tavalla verkon solmut voidaan värittää 2:lla värillä (kun kaksi väritystä pidetään samana jos toinen saadaan toisesta kiertämällä verkkoa 180 astetta tai peilaamalla verkkoa solmun 3 kulkevan pystsuoran tai vaakasuoran viivan suhteen).

7. Selitä miksei (suuntaamattomassa) yksinkertaisessa verkossa, jossa on kolme solmua, joilla on kolme naapuria ei ole olemassa Eulerin polkua (eli polkua, joka käy kaikkien kaarien läpi täsmälleen kerran).

8. Verkko $[V, E]$ on seuraavanlainen:



(a) Määritä tämän verkon naapurimatriisi. Jos A on naapurimatriisi niin mikä informaatio saadaan matlab/octave-komennoilla `B=A^7; B(3,5)`?

(b) Määritä "ahneella algoritmilla" verkon solmujen väritys väreillä $a, b, c, d, e, \ldots$ kun solmut otetaan kasvavassa numerojärjestyksessä. Mikä on tämän verkon kromaattinen luku? Perustele!

Aalto-yliopisto

Gripenberg, Ketola

MS-A0402 Diskreetin matematiikan perusteet
2. välikoe 10.4.2014

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Laskimia tai taulukoita ei saa käyttää tässä kokeessa!

1. Lukujen 60 ja 46 suurin yhteinen tekijä on 2 koska Eukleideen algoritmin avulla saadaan

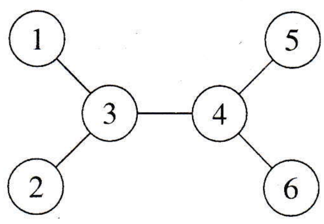
$$\begin{aligned} 60 &= 1 \cdot 46 + 14, \\ 46 &= 3 \cdot 14 + 4, \\ 14 &= 3 \cdot 4 + 2, \\ 2 &= 1 \cdot 2 + 0. \end{aligned}$$

Määritä tämän laskun avulla joitakin kokonaislukuja x ja y siten, että $4 = 60x + 14y$.

2.

(a) Jos RSA-algoritmissa julkinen avain on (n, k) niin miten löydetään yksityinen avain?
(b) Miten nähdään, ettei jäännösluokalla $[12]_{32}$ ole käänteisalkiota joukossa $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$?
(c) Oletetaan, että $[G, \bullet]$ on ryhmä. Osoita, että neutraalialkio on yksikäsitteinen, eli jos e ja $\hat{e} \in G$, $e \bullet x = x \bullet e = x$ ja $\hat{e} \bullet x = x \bullet \hat{e} = x$ kaikilla $x \in G$ niin $e = \hat{e}$.

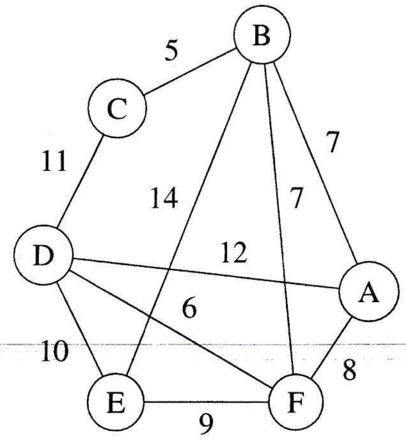
3. Määritä kaikki joukon $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ permutaatiot, jotka ovat alla olevan verkon isomorfismeja (eli kun solmut permutoidaan, naapurit pysyvät naapureina):



Kirjoita vastauksesi syklimerkinnöillä ja määritä näiden permutaatioiden muodostaman ryhmän sykli-indeksi.

KÄÄNNÄ!!!

4. Määritä alla olevan verkon $[V, E]$ minimaalinen virittävä puu käyttämällä algoritmia, joka takaa optimaalisen tuloksen (mutta sinun ei tarvitse osoittaa, että algoritmi antaa optimaalisen tuloksen). Selitä miten ole menetellyt esimerkiksi kirjoittamalla missä järjestyksessä olet lisännyt solmuja ja/tai kaareja.



Aalto-yliopisto

Gripenberg, Ketola

MS-A0402 Diskreetin matematiikan perusteet
1. välikoe 18.3.2014

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Laskimia tai taulukoita ei saa käyttää tässä kokeessa!

1. Osoita induktioperiaatetta käyttäen (vaikka on olemassa muitakin mahdollisuuksia), että $2^n \geq n^2$ kun $n \geq 4$.

2.

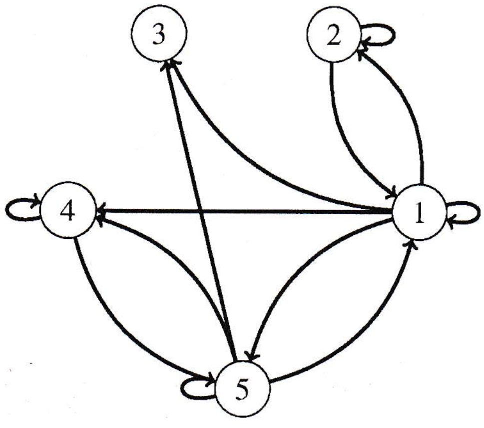
(a) Formuloi väite "Jos a ja b ovat kaksi rationaalilukua siten, että a on pienempi kun b niin on olemassa rationaaliluku c joka on suurempi kuin a ja pienempi kuin b" käyttäen $\forall$, $\exists$, $\rightarrow$, &, |, !, $\in$, $<$, $\mathbb{Q}$, a, b ja c sekä tarvittaessa sulkumerkkejä (missä siis $\mathbb{Q}$ on rationaalilukujen joukko, & on "ja", | on "tai" ja ! on negaatio).

(b) Osoita, että jos $f : X \rightarrow Y$ on surjektio ja $g : Y \rightarrow Z$ on surjektio niin $g \circ f : X \rightarrow Z$ on myös surjektio (missä siis $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $x \in X$).

3.

(a) Olkoon X joukko, jossa on n alkiota. Montako refleksiivistä relaatiota voidaan määritellä joukossa X? Selitä miten olet ajatellut!

(b) Joukossa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ on määritelty relaatio W seuraavan suunnistetun verkon avulla siten, että solmusta j solmuun k on kaari jos ja vain jos $[j, k] \in W$, (eli jWk).



Onko relaatio symmetrinen ja onko se transitiivinen? Perustele!

4. Yhdistyksellä on 60 jäsentä joiden joukosta on valittava hallitus johon kuuluu 6 jäsentä. Hallituksen jäsenten joukosta on valittava puheenjohtaja, varapuheenjohtaja, sihteeri ja varainhoitaja niin että jokaisella on korkeintaan yksi tehtävä. Monellako tavalla voidaan valita puheenjohtaja, varapuheenjohtaja, sihteeri, ja varainhoitaja ja kaksi muuta hallituksen jäsentä? Voit antaa vastauksesi niin että siinä on $+$, $-$, $\cdot$, $/$ ja ! mutta ei esim. binomikertoimia.