有限元理论基础及 **Abaqus** 内部实现方式研究系列 **10**：

耦合约束（Coupling constraints）的研究

V2019-0527
作者：SnowWave02 From www.jishulink.com
email: snowwave02@qq.com

1 概述

本系列文章研究成熟的有限元理论基础及在商用有限元软件的实现方式。有限元的理论发展了几十年已经相当成熟，商用有限元软件同样也是采用这些成熟的有限元理论，只是在实际应用过程中，商用 CAE 软件在传统的理论基础上会做相应的修正以解决工程中遇到的不同问题，且各家软件的修正方法都不一样，每个主流商用软件手册中都会注明各个单元的理论采用了哪种理论公式，但都只是提一下用什么方法修正，很多没有具体的实现公式。商用软件对外就是一个黑盒子，除了开发人员，使用人员只能在黑盒子外猜测内部实现方式。

一方面我们查阅各个主流商用软件的理论手册并通过进行大量的资料查阅猜测内部修正方法，另一方面我们自己编程实现结构有限元求解器，通过自研求解器和商软的结果比较来验证我们的猜测，如同管中窥豹一般来研究的修正方法，从而猜测商用有限元软件的内部计算方法。我们关注 CAE 中的结构有限元，所以主要选择了商用结构有限元软件中文档相对较完备的 Abaqus 来研究内部实现方式，同时对某些问题也会涉及其它的 Nastran/Ansys 等商软。为了理解方便有很多问题在数学上其实并不严谨，同时由于水平有限可能有许多的理论错误，欢迎交流讨论，也期待有更多的合作机会。

iSolver 介绍：

http://www.jishulink.com/college/video/c12884

以往的系列文章：

第一篇：**S4 壳单元刚度矩阵研究**。介绍 Abaqus 的 S4 刚度矩阵在普通厚壳理论上的修正。

http://www.jishulink.com/content/post/338859

第二篇：**S4 壳单元质量矩阵研究**。介绍 Abaqus 的 S4 和 Nastran 的 Quad4 单元的质量矩阵。

http://www.jishulink.com/content/post/343905

第三篇：**S4 壳单元的剪切自锁和沙漏控制**。介绍 Abaqus 的 S4 单元如何来消除剪切自锁以及 S4R 如何来抑制沙漏的。

http://www.jishulink.com/content/post/350865

第四篇：**非线性问题的求解**。介绍 Abaqus 在非线性分析中采用的数值计算的求解方法。

http://www.jishulink.com/content/post/360565

第五篇：**单元正确性验证**。介绍有限元单元正确性的验证方法，通过多个实例比较自研结构求解器程序 iSolver 与 Abaqus 的分析结果，从而说明整个正确性验证的过程和 iSolver 结果的正确性。

https://www.jishulink.com/content/post/373743

第六篇：**General 梁单元的刚度矩阵**。介绍梁单元的基础理论和 Abaqus 中 General 梁单元的刚度矩阵的修正方式，采用这些修正方式可以得到和 Abaqus 梁单元完全一致的刚度矩阵。

https://www.jishulink.com/content/post/403932

第七篇：**C3D8 六面体单元的刚度矩阵**。介绍六面体单元的基础理论和 Abaqus 中 C3D8R 六面体单元的刚度矩阵的修正方式，采用这些修正方式可以得到和 Abaqus 六面体单元完全一致的刚度矩阵。

https://www.jishulink.com/content/post/430177

第八篇：**UMAT 用户子程序开发步骤**。介绍基于 Fortran 和 Matlab 两种方式的 Abaqus 的 UMAT 的开发步骤，对比发现开发步骤基本相同，同时采用 Matlab 更加高效和灵活。

https://www.jishulink.com/content/post/432848

第九篇：**编写线性 UMAT Step By Step**。介绍基于 Matlab 线性零基础，从零开始 Step by Step 的 UMAT 的编写和调试方法，帮助初学者 UMAT 入门。

http://www.jishulink.com/content/post/440874

本文为第十篇：**耦合约束（Coupling constraints）的研究**。介绍 Abaqus 中耦合约束的原理，并使用两个简单算例加以验证。

2 第十篇：耦合约束（Coupling constraints）的研究

耦合约束对应 Nastran 的 MPC，是最常用的约束方式之一，用于定义一个表面集（Surface Set）内节点与控制节点位移自由度之间的相互关系，可以模拟节点的刚性连接或指定节点位移间的组合约束。

耦合约束常用于某些有限元模型要求特定自由度连接关系的场合，包括：

1、 描述非常刚硬的结构元件，使用约束方程代替大刚度弹性单元能够使有限元模型更为合理；

2、 在不同类型的单元间传递载荷，如将壳单元的力偶传递到实体单元中（实体单元没有转动自由度）；

3、 定义节点间的刚性连接。

Abaqus 中耦合约束分为运动耦合（Kinematic Coupling）和分布式耦合（Distributing Coupling），分别对应 Nastran 中的 RBE2 单元和 RBE3 单元，详见《Abaqus Analysis User's Manual Table 3.2.25–1》。

本文讨论 Abaqus 中耦合约束的原理，然后在自编有限元程序 iSolver 按照同样的原理实现耦合约束，最后验证 iSolver 的结果和 Abaqus 完全一致，从而证明 Abaqus 耦合约束的内部算法和我们设想的一致。具体验证过程也可以参考我们的演示录像：

https://www.jishulink.com/college/video/c12884 第 6 章节：3.1 载荷和边界-K-Coupling 耦合约束

2.1.1 运动耦合约束（Kinematic Coupling）

Abaqus 通过建立从节点（Slave Node）与参考节点（Reference Node）位移自由度之间的刚性连接来实现运动耦合约束，最终改变有限元模型的整体刚度。在运动耦合约束情况下，从节点之间没有相对位移。下面简单描述运动耦合约束如何影响整体刚度。

因为从节点与参考节点位移自由度之间为刚性连接，所以从节点与参考节点的位移自由度之间存在关系：

$$U_{slave} = U_{ref} + \emptyset_{ref} \times \vec{r}$$

其中，$\emptyset_{ref}$为参考节点的旋转向量，$\vec{r}$为从节点到参考节点的向量。

Abaqus 采用约束方程定义运动耦合约束，可将上式转换为一般形式：

$$[G_{mg}]\{u_g\} = 0$$

其中，m表示约束方程个数，g表示总自由度个数，$[G_{mg}]$为m行，g列的系数矩阵，$\{u_g\}$为总体位移。

Abaqus 采用减缩过程来反应约束对整体刚度的影响。设保留自由度个数$\mathrm{n} = \mathrm{g} - \mathrm{m}$，则有，

$$\{u_g\} = \begin{Bmatrix} u_m \\ u_n \end{Bmatrix}$$

根据约束方程，定义$\{u_g\}$和$\{u_n\}$之间的变换如下，

$$\{u_g\} = [G_{gn}]\{u_n\}$$

设$[K_{gg}]$为总体刚度矩阵，则减缩后的刚度矩阵为，

$$[K_{nn}] = [G_{gn}]^T [K_{gg}][G_{gn}]$$

2.1.2 分布耦合约束（Distributing Coupling）

分布耦合约束将施加在参考节点上的力和力矩按照加权系数分配到从节点上，从而实现载荷在单元间的传递。下面简单描述一下 Abaqus 中的加权系数计算方法。

假设从节点i的加权系数为ω_i，从节点i到参考节点的径向距离为r_i，r_0为最远点的径向距离，则有，

Uniform，节点的加权系数$\omega_i = 1$；

Linear，节点的加权系数为$\omega_i = 1 - \frac{r_i}{r_0}$；

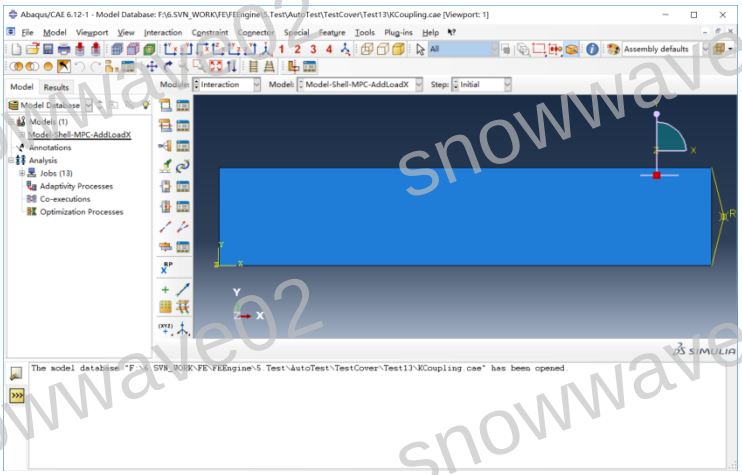
Quadratic，节点的加权系数为$\omega_i = 1 - \left(\frac{r_i}{r_0}\right)^2$；

Cubic，节点的加权系数为$\omega_i = 1 - 3\left(\frac{r_i}{r_0}\right)^2 + 2\left(\frac{r_i}{r_0}\right)^3$。

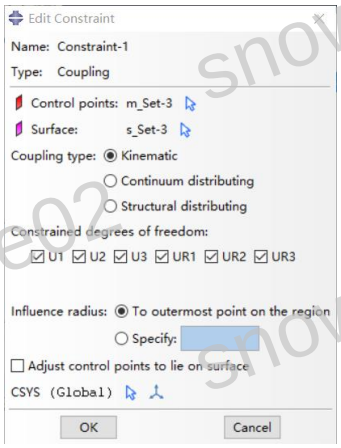
2.2 Abaqus 的算例验证

2.2.1 模型例子：运动耦合约束的算例

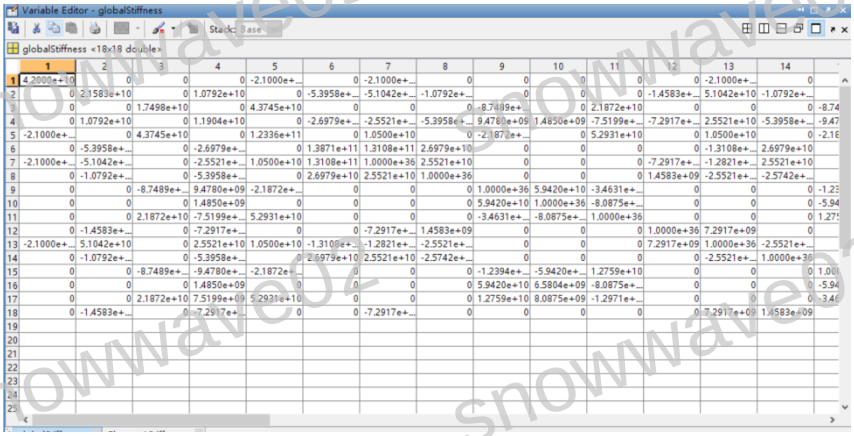
（详见附件 KCoupling.cae 和 Ggn.mat）



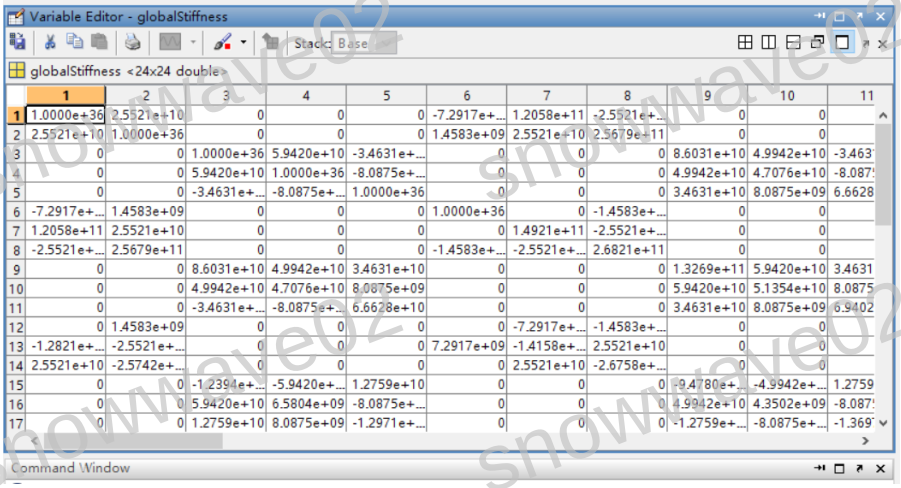
该算例是 5X1 的简单壳模型，矩形左下点为原点，右上点坐标为(5.0, 1.0,0.0)，为简单起见只划分 1 个四节点单元。去除左端两个节点的所有自由度，右端两个节点所有自由度与外侧 RP 点以运动耦合约束建立刚性连接，RP 点坐标为(5.0, 0.5,0.5)，。



利用 EMM 插件（**EMM 插件介绍见附录**），导出整体刚度矩阵$[K_{nn}]$为：

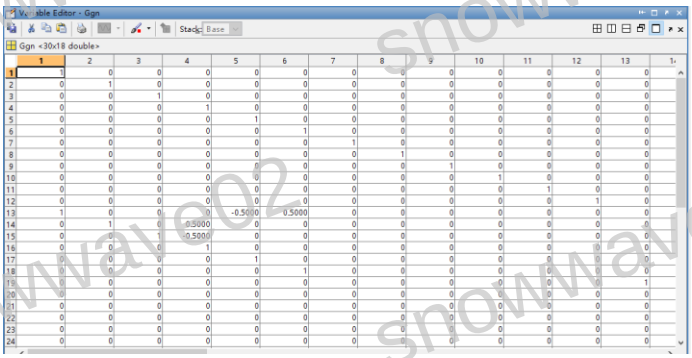


将运动耦合约束失效，导出整体刚度矩阵$[K_{gg}]$为：



注意：此时导出的整体刚度矩阵不包含 RP 点的六个自由度，故应对整体刚度矩阵进行扩充，且按照 Abaqus 的内部实现来看 RP 点节点序号应该在前。

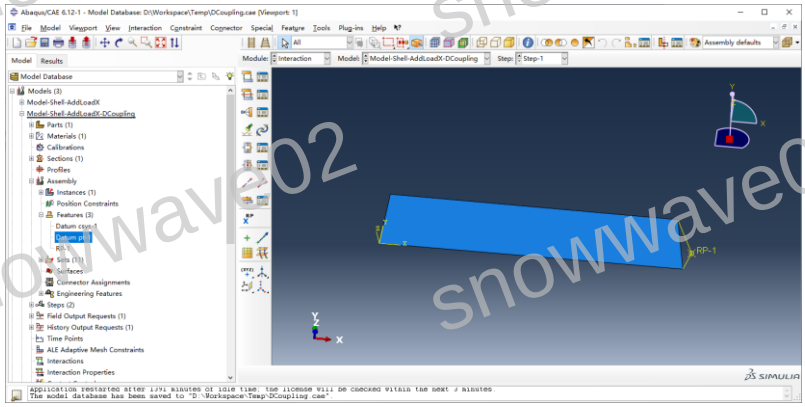
根据运动耦合约束定义减缩矩阵G_{gn}，



容易验证：$[K_{nn}] = [G_{gn}]^T [K_{gg}][G_{gn}]$。

2.2.2 模型例子：分布耦合约束的算例

（详见附件 DCoupling.cae）



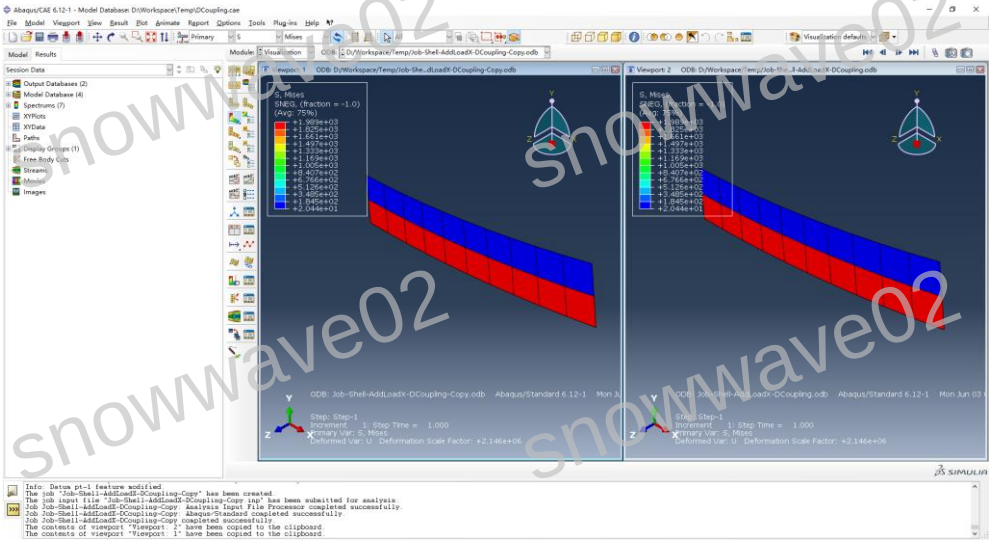
该算例是一个简单矩形壳模型，矩形左下点为原点，右上点坐标为(5.0, 1.0,0.0)，共有 20 个 0.5X0.5 的四节点单元。去除左端三个节点的所有自由度，右端三个节点所

有自由度与外侧 RP 点以分布耦合约束建立连接。RP 点坐标为(5.0, 0.25,0.5)，约束类型为 Continuum distributing，权值计算方法选线性（Linear）。

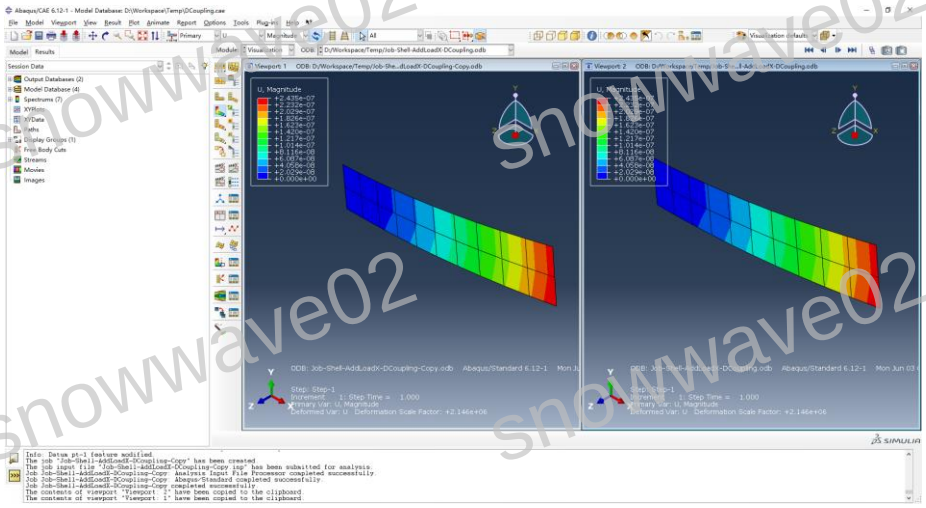
在 RP 点施加载荷 1000，提交计算。

将载荷力等效到 3 个节点上，大小分别为 500,500,0，比较两者计算结果。

应力：



位移：



由此可见，两者结果一致。

2.3 总结

本文简单介绍了耦合约束的定义和用途，具体阐述了 Abaqus 中运动耦合约束和分布耦合约束的原理，并通过两个简单算例加以验证。在有限元分析中，耦合约束应用极广，研究其原理有助于我们选择合理的约束方式，从而保证建模的准确性。不同商软对耦合约束的定义也不同，Abaqus/Nastran/Ansys 的定义分别如下：

项次	问题	运动耦合约束	分布耦合
1	Abaqus	K-Coupling	D-Coupling

项次	问题	运动耦合约束	分布耦合
2	Nastran	RBE2	RBE3
3	Ansys	CERIG	RBE3

注：对于非线性分析，Ansys 采用 MPC184 单元来创建耦合约束。

如果有任何其它疑问，欢迎联系我们：

snowwave02Fromwww.jishulink.com

email: snowwave02@qq.com

附录

EMM(Export Matlab Matrix)是集成在 ABAQUS/CAE 中的一个插件，能够一键输出 Abaqus 模型的单元及全局刚度、质量、载荷矩阵，并自动转换为 MATLAB 矩阵。

EMM 插件介绍和下载链接：

http://www.jishulink.com/content/post/341364