

有限元理论基础及 **Abaqus** 内部实现方式研究系列 1:

## S4 壳单元刚度矩阵研究

V2017-0701



作者: SnowWave02

From [www.jishulink.com](http://www.jishulink.com)

email: [snowwave02@qq.com](mailto:snowwave02@qq.com)

### 1 概述

本系列文章研究成熟的有限元理论基础及在商用有限元软件的实现方式。有限元的理论发展了几十年已经相当成熟，商用有限元软件同样也是采用这些成熟的有限元理论，只是在实际应用过程中，商用 **CAE** 软件在传统的理论上会做相应的修正以解决工程中遇到的不同问题，且各家软件的修正方法都不一样，每个主流商用软件手册中都会注明各个单元的理论采用了哪种理论公式，但都只是提一下用什么方法修正，很多没有具体的实现公式。商用软件对外就是一个黑盒子，除了开发人员，使用人员只能在黑盒子外猜测内部实现方式。



一方面我们查阅各个主流商用软件的理论手册并通过进行大量的资料查阅猜测内部修正方法，另一方面我们自己编程实现结构有限元求解器，通过自研求解器和商软 **A** 的结果比较来验证我们的猜测，如同管中窥豹一般来研究的修正方法，从而猜测商用有限元软件的内部计算方法。我们关注 **CAE** 中的结构有限元，所以主要选择了商用结构有限元软件中文档相对较完备的 **Abaqus** 来研究内部实现方式，同时对某些问题也会涉及其它的 **Nastran/Ansys** 等商软。为了理解方便有很多问题在数学上其实并不严谨，同时由于水平有限也可能有许多的理论错误，欢迎交流讨论，也期待有更多的合作机会。

## 2 自编有限元求解器介绍

自编有限元求解器取名为 iSolver，基于 Matlab 语言编写，使用 Abaqus/CAE 做前后处理。

有如下特点：

(1) 作为 Abaqus/CAE 的一个插件，可以直接使用 Abaqus/CAE 做前后处理，调用方式和 Abaqus 自带求解器类似，容易上手。

(2) 软件整体框架灵活，除了内置的各种单元外，支持用户利用 Matlab 编写自定义单元，便于扩展。

(3) 和 Abaqus 结果一键式比较，包括结果、刚度矩阵、质量矩阵的细致比较。

具体介绍和下载请到下面网页：

<http://www.jishulink.com/content/post/337351>

## 3 第一篇：S4 壳单元刚度矩阵研究。

Abaqus 的壳单元刚度矩阵的理论基础都是 Kirchhoff（薄壳）和 Mindlin（厚壳）理论，本章重点研究 S4 壳单元，该单元基于 Mindlin 理论，在自编程序中根据 Mindlin 理论编写后和 Abaqus 结果对比，可以发现 Mindlin 和 Abaqus 差异很大，然后结合帮助文档猜测 Abaqus 的 S4 单元的内部修正方法。

### 3.1 Mindlin 理论介绍

Mindlin 理论公式见一般的材料力学或者有限元的书，譬如 Zienkiewicz 书《The Finite Element Method: Its Basis & Fundamentals》。

下边网页中的 pdf 文件写的也相当清楚。

quad4 单元理论推导 <http://forum.simwe.com/thread-997430-1-1.html>（作者 kissich2000）。

对四节点的 Mindlin 壳单元，每个节点 6 个自由度  $x, y, z, R_x, R_y, R_z$ ，刚度矩阵为  $24 \times 24$  的矩阵。其中矩阵按节点分块，每块小矩阵都比较类似，以第一个节点自由度相关的  $6 \times 6$  的小矩阵做研究对象。

Mindlin 公式得到第一个节点相关的  $6 \times 6$  的小矩阵典型数据如下：

	1	2	3	4	5	6	7
1	7.14e+07	1.7857e+07	0	0	0	0	2.4725e+07
2	1.7857e+07	1.8571e+08	0	0	0	0	1.3736e+06
3	0	0	5.1e+07	2.0030e+07	-4.0059e+06	0	0
4	0	0	2.0030e+07	2.0030e+07	-1.4881e+06	0	0
5	0	0	-4.0059e+06	-1.4881e+06	1.5967e+07	0	0
6	0	0	0	0	0	1.0e+36	0
7	2.4725e+07	1.3736e+06	0	0	0	0	7.1429e+07

分为以下 5 个部分：

#### Part1: 薄膜效应刚度（图中红色部分）

薄膜效应相关的刚度  $K_{in}$  矩阵，对平面内的载荷起作用。只与节点的前两个自由度  $x$ 、 $y$  有关，为  $2 \times 2$  的矩阵。

#### Part2: 面外弯曲刚度（图中蓝色部分）

面外刚度中弯曲相关的刚度  $K_b$  矩阵，只与节点的自由度  $z$ 、 $R_x$ 、 $R_y$  有关，为  $2 \times 2$  矩阵。

#### Part3: 面外横向剪切刚度（图中绿色部分）

面外刚度中与横向剪切相关的刚度  $K_{ts}$  矩阵，对不在平面的载荷起作用。只与节点的自由度  $z$ 、 $R_x$ 、 $R_y$  有关，为  $3 \times 3$  的矩阵。

#### Part4: 第 6 自由度刚度（图中紫色部分）

$R_z$  相关的刚度。

#### Part5: 其它非对角元素

✧ 每一部分的 Matlab 实现详见附录 [Mindlin 壳单元的 Matlab 代码](#)。其中需要积分求解的是  $K_{in}$ 、 $K_b$ 、 $K_{ts}$  这三个矩阵。

## 3.2 AbaqusS4 单元介绍

AbaqusS4 单元是通用的能同时处理厚壳和薄壳的 4 节点线性单元，称为完全积分单元。完全和减缩积分指的是 Gauss 积分点的数目完全（即  $2 \times 2$  个积分点）与减缩（即  $1 \times 1$  个积分点）。

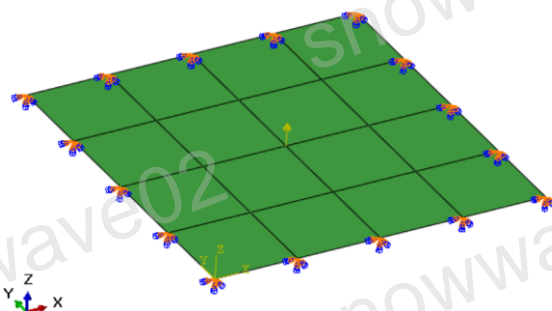
实际上 S4 的三部分刚度积分并不都是完全的， $K_{in}$ 、 $K_b$  是完全的，但  $K_{ts}$  还是减缩的。

✧ 详见 Abaqus: Analysis User's Manual: 29.6.4: Transverse shear stiffness:

*Although element type S4 has four integration points, the transverse shear calculation is assumed constant over the element.*

做个简单的例子就能证明：

在 **Abaqus** 中建立一个正方形钢板模型，四周固定，中间加 **Z** 方向的一个集中力，如下图：



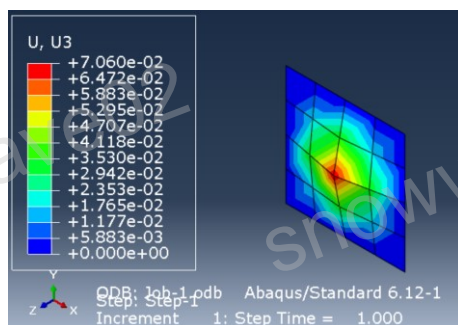
具体参数如下：

尺寸：20X20，厚度 0.1。

材料：Young's Modulus  $3e7$ ，Poisson Ratio 0.3。

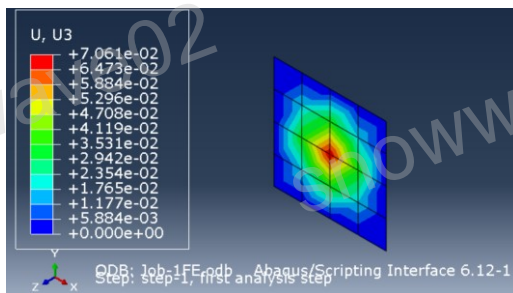
集中力：100。

**Abaqus** 中划分为 4X4 的网格，使用 **Abaqus** 求解器，**S4** 得到中心位移为  $7.060e-2$ 。



**Abaqus** 的 **S4** 单元结果

同一模型，使用 **Mindlin** 理论计算（内部积分实现时 **S4** 的 **Kin**、**Kb** 是完全的，**Kts** 减缩的）。**S4** 得到中心位移为  $7.061e-2$ ，和 **Abaqus** 的结果吻合的很好，只有小数点后面第三位的精度有差异，如果 **S4** 的 **Kts** 改为完全积分，可以发现和 **Abaqus** 差异很大。



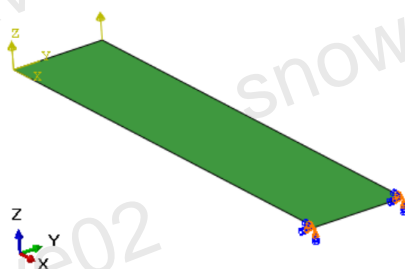
**Mindlin** 的 **S4** 单元结果

✧ inp 文件见文件夹内的 **Shell-Rect16S4.inp**。

### 3.3 Abaqus 的 S4 单元和传统的 Mindlin 理论的差异

#### 3.3.1 模型例子

下面对比的 Abaqus 和 Mindlin 的单元刚度矩阵，为了方便，我们只取一个简单的长方形单元。



参数如下：

尺寸：5X1，厚度 0.1。

材料：Young's Modulus  $1e8$ ，Poisson Ratio 0.3。

右侧两个节点固支。

左侧两个节点每个加集中力  $1e5$ 。

✧ inp 文件见 OneQuad Geom=5X1 h=0.1 目录

Abaqus 刚度矩阵第一个节点 6X6 的数据如下：

	1	2	3	4	5	6	7
1	5.5317e+06	1.7849e+06	0	-5.0022e-12	1.2771e-11	-7.8557e+03	4.0916e+06
2	1.7849e+06	1.8096e+07	0	-3.5516e-11	5.0022e-12	1.5711e+03	1.3658e+05
3	0	0	4.8011e+06	2.1499e+06	-1.2530e+06	0	0
4	-5.0022e-12	-3.5516e-11	2.1499e+06	1.0478e+06	-2.1497e+05	0	4.5475e-13
5	1.2771e-11	5.0022e-12	-1.2530e+06	-2.1497e+05	2.0711e+06	0	9.9662e-12
6	-7.8557e+03	1.5711e+03	0	0	0	1.5711e+04	0
7	4.0916e+06	1.3658e+05	0	4.5475e-13	9.9662e-12	0	1.0000e+36

Mindlin 理论刚度矩阵第一个节点 6X6 的数据如下：

K <24x24 double>							
	1	2	3	4	5	6	7
1	7.1429e+06	1.7857e+06	0	0	0	0	2.4725e+06
2	1.7857e+06	1.8571e+07	0	0	0	0	1.3736e+05
3	0	0	4.1667e+06	2.0032e+06	-4.0064e+05	0	0
4	0	0	2.0032e+06	1.0171e+06	-1.4881e+03	0	0
5	0	0	-4.0064e+05	-1.4881e+03	1.0076e+06	0	0
6	0	0	0	0	0	1.0000e+36	0
7	2.4725e+06	1.3736e+05	0	0	0	0	7.1429e+06

具体的对比如下：



### 3.3.2 Part1: 薄膜效应刚度

即：左上方 2X2 的矩阵，可发现 Abaqus 和 Mindlin 理论明显不同。因为，Mindlin 的薄膜效应刚度是建立在把结构看成是壳的基础上的，但 AbaqusS4 的薄膜效应刚度公式是建立在把结构看成是体的基础上的，为的是消除平面内弯曲的剪切锁死现象。

✧ 详见：Theory Manual: 3.6.5 Finite-strain shell element formulation

*The membrane formulation used for S4 does not rely on the fact that S4 is a shell element. Hence, the discussion below details the formulation from the point of view that the membrane response is governed by the equilibrium for a three-dimensional body in a state of plane stress.*

✧ 有兴趣的也可以比较一下 Abaqus 的 CPS 单元和 Mindlin 的薄膜效应刚度，可以发现完全一致。

### 3.3.3 Part2: 面外弯曲刚度

面外刚度矩阵=面外弯曲刚度+面外横向剪切刚度，需要先将它们分开。由于  $K_b$  和  $K_{ts}$  关于  $h$  的因子分别是  $h^3$  和  $h$ ，所以，可以改变  $h$  分开两个刚度。

将上面的 inp 中的  $h=0.1$  改为  $h=1e4$ ，此时面外刚度矩阵主要由面外弯曲刚度组成。

Abaqus 和 Mindlin 的面外弯曲刚度分别如下表，可以发现完全相同。说明 AbaqusS4 的面外弯曲刚度没有在 Mindlin 理论进行修正。

	1	2	3	4	5	6	7
1	5.7578e+11	1.7457e+11	0	0.0039	0	-4.0064e+...	4.2582e+11
2	1.7457e+11	1.3945e+12	0	0	-0.0039	8.0128e+09	9.7299e+09
3	0	0	4.8611e+11	2.1768e+11	-1.2687e+11	0	0
4	0.0039	0	2.1768e+11	1.1607e+19	-1.4881e+18	0	-0.0039
5	0	-0.0039	-1.2687e+11	-1.4881e+18	4.4643e+18	0	0
6	-4.0064e+...	8.0128e+09	0	0	0	8.0128e+10	0
7	4.2582e+11	9.7299e+09	0	-0.0039	0	0	1.0000e+36

(a) Abaqus 的  $K_b$

K <24x24 double>							
	1	2	3	4	5	6	7
1	5.3571e+11	1.7857e+11	0	0	0	0	4.2582e+11
2	1.7857e+11	1.3929e+12	0	0	0	0	1.3736e+10
3	0	0	4.1667e+11	2.0032e+11	-4.0064e+10	0	0
4	0	0	2.0032e+11	1.1607e+19	-1.4881e+18	0	0
5	0	0	-4.0064e+10	-1.4881e+18	4.4643e+18	0	0
6	0	0	0	0	0	1.0000e+36	0
7	4.2582e+11	1.3736e+10	0	0	0	0	5.3571e+11

(b) Minlin 的  $K_b$

### 3.3.4 Part3: 面外横向剪切刚度

将上面的 inp 中的  $h=0.1$  改为  $h=1e-4$ 。此时面外刚度矩阵主要由面外横向剪切刚度组成。

Abaqus 和 Mindlin 的面外横向剪切刚度分别如下表。

	1	2	3	4	5	6	7
1	5.5238e+03	1.7857e+03	0	-2.1684e-18	5.2368e-18	-8.0128e-06	4.0916e+03
2	1.7857e+03	1.8096e+04	0	-2.2674e-17	2.1684e-18	1.6026e-06	137.3626
3	0	0	0.3889	0.1741	-0.1015	0	0
4	-2.1684e-18	-2.2674e-17	0.1741	0.0836	-0.0173	0	4.3368e-19
5	5.2368e-18	2.1684e-18	-0.1015	-0.0173	0.1673	0	3.4368e-18
6	-8.0128e-06	1.6026e-06	0	0	0	1.6026e-05	0
7	4.0916e+03	137.3626	0	4.3368e-19	3.4368e-18	0	1.0000e+36

(a) Abaqus 的 Kts

	1	2	3	4	5	6	7
1	7.1429e+03	1.7857e+03	0	0	0	0	2.4725e+03
2	1.7857e+03	1.8571e+04	0	0	0	0	137.3626
3	0	0	4.1667e+03	2.0032e+03	-400.6410	0	0
4	0	0	2.0032e+03	1.0016e+03	-1.4881e-06	0	0
5	0	0	-400.6410	-1.4881e-06	1.0016e+03	0	0
6	0	0	0	0	0	1.0000e+36	0
7	2.4725e+03	137.3626	0	0	0	0	7.1429e+03

(b) Mindlin 的 Kts

可以发现差异很大，差异主要来之两方面：

- (1) Abaqus 对 Kts 增加了一个几何因子，使得当厚板时，Kts 接近 Mindlin 值，当薄板时，Kts 接近 0。

✧ 详见 Analysis Manual 29.6.4 Transverse shear stiffness

*fp is a dimensionless factor that is used to prevent the shear stiffness from becoming too large in thin shells.*

- (2) S4 的 Kts 是减缩积分，增加沙漏模态导致的刚度，同时 S4 对斜单元做了特殊处理。

✧ 详见: Theory Manual: 3.6.5 Finite-strain shell element formulation: One point integration plus stabilization

*This transverse shear energy can be approximated in many ways to produce a one point integration at the center of the element plus hourglass stabilization.*

✧ 详见 Abaqus Theory Manual: 3.6.5 Finite-strain shell element formulation:

*This transverse shear energy can be approximated in many ways to produce a one point integration at the center of the element plus hourglass stabilization. It is*

important that this treatment yield accurate representation of transverse shear deformation in thick shell problems and provide robust performance for skewed elements.

### 3.3.5 Part4: 第 6 自由度刚度

Mindlin 理论中第 6 自由度刚度设为任意一个非零项就行，Abaqus 中 S4 的这个刚度取了面外横向剪切刚度对角线元素一半乘以某个因子，但到底这个因子是多少帮助文档中没有说明，试了厚度不同的几个模型，没有验证出上述的计算公式。

◇ 详见：Analysis User's Manual: 29.6.6 Using a general shell section to define the section behavior

The stiffness associated with the drill degree of freedom is the average of the direct components of the transverse shear stiffness multiplied by a scaling factor. In most cases the default scaling factor is appropriate for constraining the drill rotation to follow the in-plane rotation of the element.

### 3.3.6 Part5: 其它非对角元素

Mindlin 得到的其它非对角元素项都是 0，但 Abaqus 的 S4 中为小量。

- (1) 前面 5X5 矩阵的其它非对角元素是 during analysis 选项导致的。
- (2) 最后一行和最后一列，看数值猜测与第 6 个自由度刚度有关的小量，具体公式多少没研究出来。

## 3.4 总结

Abaqus 的 S4 单元的薄膜效应刚度和面外弯曲刚度矩阵是完全积分，面外横向剪切刚度是减缩积分。

具体的刚度矩阵在 Mindlin 理论基础上的修正如下表：

项次	刚度	修正情况		说明
		修正	不修正	
1	薄膜效应刚度	√		Abaqus 为了消除壳单元出现的剪切锁死，计算薄膜效应时把壳作为体来处理
2	面外弯曲刚度		√	
3	面外横向剪切刚度	√		(1) Abaqus 为了处理薄板情况，增加了一个几何因子 (2) 为了消除沙漏问题增加相关刚度
4	第 6 自由度刚度	√		Abaqus 取了和对角刚度相关的小量



项次	刚度	修正情况		说明
		修正	不修正	
5	其它非对角元素	√		(1) during analysis 选项导致的小量 (2) 第 6 自由度刚度相关小量

### 3.5 后续

这儿仅仅是猜测了 **S4** 单元的内部实现方法，如果想证实，就需要将猜测的修正方法加入到 **Mindlin** 理论中，编程对比刚度矩阵，只有得到和 **Abaqus** 的 **S4** 单元一模一样的刚度矩阵才能证明猜测是正确的，而且，以上讨论的也仅仅是简单的各项同性材料的长方形单元模型修正，**Abaqus** 对其它单元、材料等的在工程应用中修正更复杂，想要验证就更难了。