

有限元理论基础及 **Abaqus** 内部实现方式研究系列 2:

## S4 壳单元质量矩阵研究

V2017-0816

作者: SnowWave02 From [www.jishulink.com](http://www.jishulink.com)

email: [snowwave02@qq.com](mailto:snowwave02@qq.com)

### 1 概述

本系列文章研究成熟的有限元理论基础及在商用有限元软件的实现方式。我们关注 CAE 中的结构有限元, 所以选择了商用结构有限元软件中文档相对较完备的 **Abaqus** 来研究内部实现方式。

以往的系列文章:

第一篇: S4 壳单元刚度矩阵研究

<http://www.jishulink.com/content/post/338859>

本文为第二篇: S4 壳单元的质量矩阵研究。这次同时研究 **Abaqus** 和 **Nastran** 这两种软件一次壳单元质量矩阵的内部实现方式。

#### 1.1 研究方法

一方面我们查阅 **Abaqus** 软件手册得到修正方法的说明, 另一方面我们自己编程实现简单的结构有限元求解器, 通过自研求解器和 **Abaqus** 的结果比较结合理论手册如同管中窥豹一般来研究 **Abaqus** 的修正方法, 从而猜测商用有限元软件的内部计算方法。

#### 1.2 自编有限元求解器介绍

自编有限元求解器取名为 **iSolver**, 基于 **Matlab** 语言编写, 使用 **Abaqus/CAE** 做前后处理。

有如下特点:

(1) 作为 **Abaqus/CAE** 的一个插件, 可以直接使用 **Abaqus/CAE** 做前后处理, 调用方式和 **Abaqus** 自带求解器类似, 容易上手。

(2) 软件整体框架灵活, 除了内置的各种单元外, 支持用户利用 **Matlab** 编写自定义单元, 便于扩展。

(3) 和 **Abaqus** 结果一键式比较, 包括结果、刚度矩阵、质量矩阵的细致比较。

具体介绍和下载请到下面网页:

## 2 第二篇：S4 壳单元质量矩阵研究。

在模态分析或者动力学分析中，都必须计算质量矩阵。虽然 Abaqus 最近发展迅猛，但在模态分析时 Nastran 依然是行业标准，有些单位的模态分析只承认 Nastran 的结果，不能使用 Abaqus 等其它软件，所以，为了能更深入的了解 Nastran 的模态分析的优势，本章在研究 Abaqus 的 S4 壳单元的质量矩阵的同时也研究 Nastran 的 Quad4 壳单元质量矩阵的内部实现方式。研究方式是在自编程序 iSolver 根据成熟的理论实现质量矩阵，通过比较同一模型的 Abaqus、Nastran 的质量矩阵结果，结合帮助文档猜测这两个软件单元质量矩阵的内部实现方法。

### 2.1 质量矩阵一般介绍

质量理论公式见一般的材料力学或者有限元的书，譬如 IFEM.Ch32.pdf: Lumped and Consistent Mass Matrices。

#### 2.1.1 一致质量

质量矩阵分为两种：一致质量和集中质量。

如果是一致质量，那么由形函数的积分得到，譬如  $x$ 、 $y$  相关的质量：

$$M = \int N^T \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} N ds$$

此时两个节点之间存在耦合，整个质量矩阵不是对角阵。

由于上述需要积分，此时可能选择两种积分形式：完全积分（2X2 的高斯点）和减缩积分（1X1 积分）。完全和减缩积分指的是 Gauss 积分点的数目完全（即 2X2 个积分点）与减缩（即 1X1 个积分点）。

很多书建议是采用完全积分，包括 Abaqus 的帮助手册中也说是质量矩阵也是完全积分，但各个软件实际上并不是如此，后面对比自编求解器 iSolver 和 Abaqus 的质量矩阵发现，Abaqus 在有些情况是减缩积分，和它的帮助手册不符。

✧ 详见 Abaqus: Analysis User's Manual: 29.6.2 Choosing a shell element:

Many shell element types in Abaqus use reduced (lower-order) integration to form the element stiffness. The mass matrix and distributed loadings are still integrated exactly.

完全积分和减缩积分可根据矩阵元素判断出来，如果是减缩积分，此时只有 0,0 这个等参点，使得所有形函数  $N$  都相等，那么由上述公式得到的对角线元素和非零对角线譬如  $M(1,1)$  和  $M(7,1)$  将一致；如果是完全积分，那么对角线元素和非零对角线譬如  $M(1,1)$  和  $M(7,1)$  将不一致。

### 2.1.2 集中质量

如果是集中质量，那么  $M$  就是上述一致质量的对角化，对角化的方式有多种选择。此时，整个质量矩阵就是对角阵。

### 2.1.3 矩阵各个元素介绍

对四节点的壳单元，每个节点 6 个自由度  $x,y,z,Rx,Ry,Rz$ ，质量矩阵为  $24 \times 24$  的矩阵。其中矩阵按节点分块，每块小矩阵都比较类似，以第一个节点自由度相关的小矩阵为例。

第一个节点相关的  $6 \times 6$  的小矩阵典型数据如下：

Element1Mass <24x24 double>									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4.0556e-07	0	0	0	0	0	2.0278e-07	0	0
2	0	4.0556e-07	0	0	0	0	0	2.0278e-07	0
3	0	0	4.0556e-07	0	0	0	0	0	2.0278e-07
4	0	0	0	3.3716	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	3.3796e-16	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	2.0278e-07	0	0	0	0	0	4.0556e-07	0	0
8	0	2.0278e-07	0	0	0	0	0	4.0556e-07	0
9	0	0	2.0278e-07	0	0	0	0	0	4.0556e-07

分为以下 2 个部分：

#### Part1: 平动项

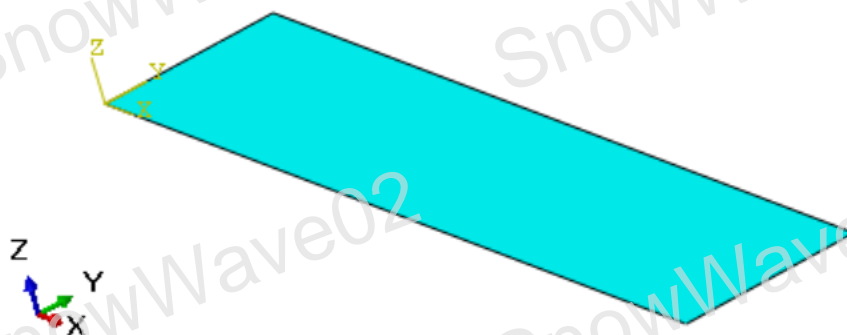
只与节点的前三个自由度  $x,y,z$  有关。与密度  $\rho$  有关。后面研究可以知道，在 Abaqus 中这三个值并不总是一样的。

#### Part2: 转动项

只与节点的后三个自由度  $Rx, Ry, Rz$  有关。其中  $Rx, Ry$  两个方向的转动受载荷是弯矩，得到的质量与弯曲惯性矩  $\rho h^3/12$  有关。 $Rz$  的质量一般取 0。

## 2.2 模型例子

为了方便，我们只取一个简单的长方形单元作为例子。



参数如下：

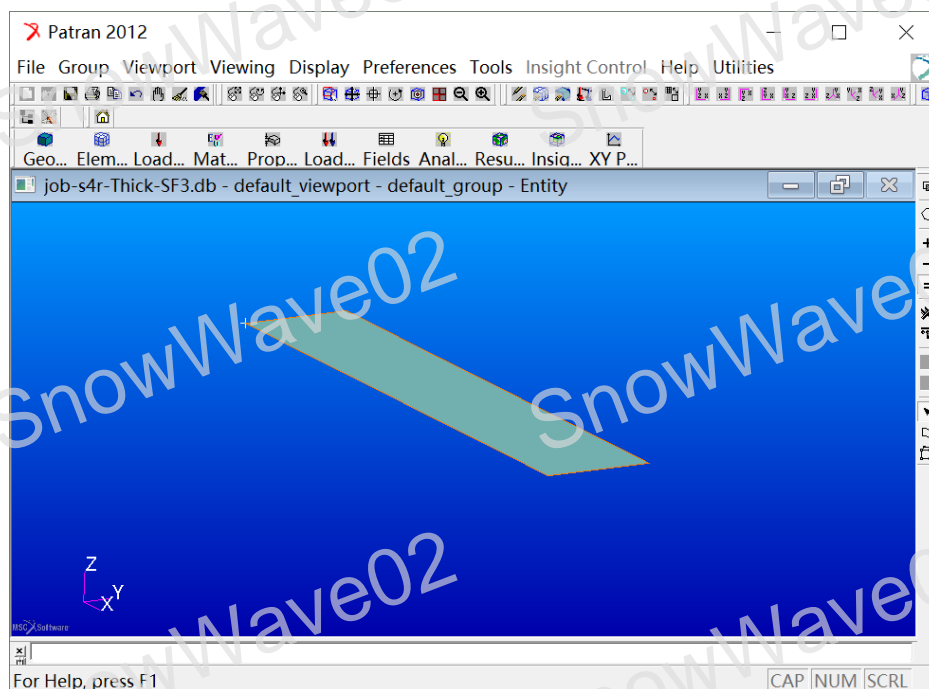
尺寸：5X1，厚度  $1e-4$ 。位于 XY 平面，其中 X 方向 5。

材料：Young's Modulus  $1e8$ ，Poisson Ratio 0.3，density 0.0073。

边界固支约束。

## 2.3 Nastran 的 Quad4 单元质量矩阵

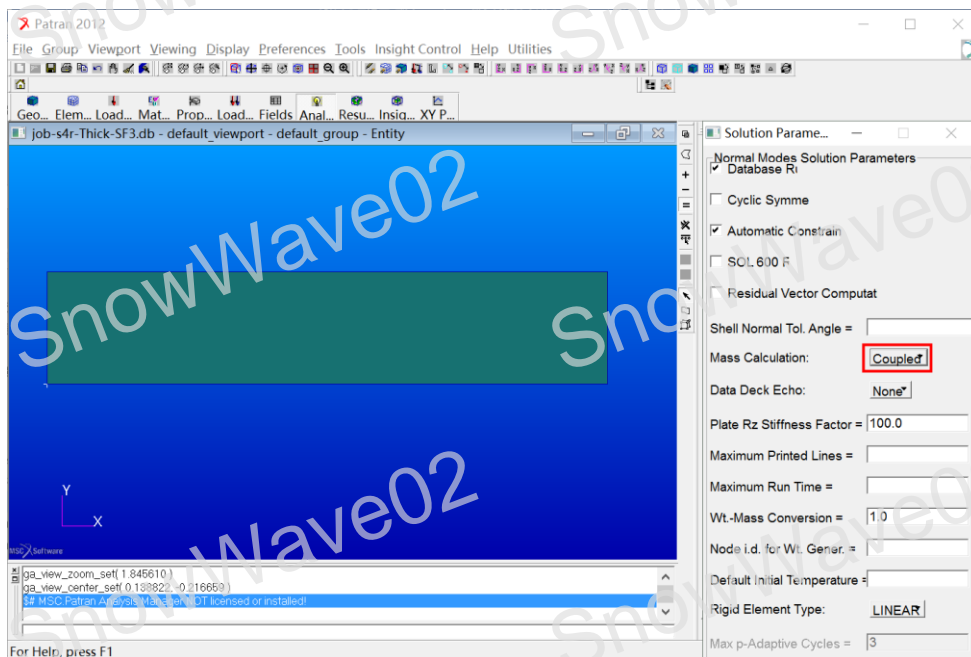
在 Nastran 中建模，使用 Quad4 单元，Quad4 即为 Nastran 中的一次线性壳单元，如下图：



然后输出质量矩阵查看结果。Patran 中计算前可设置质量矩阵为一致质量或者集中质量。

### 2.3.1 一致质量

在模态分析步设置质量矩阵为一致质量（Coupled）。



分析后得到 Quad4 的一致质量矩阵如下：

M <24x24 double>												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4.0556e-07	0	0	0	0	0	2.0278e-07	0	0	0	0	0
2	0	4.0556e-07	0	0	0	0	0	2.0278e-07	0	0	0	0
3	0	0	4.0556e-07	0	0	0	0	0	2.0278e-07	0	0	0
4	0	0	0	4.0556e-07	0	0	0	0	0	2.0278e-07	0	0
5	0	0	0	0	4.0556e-07	0	0	0	0	0	2.0278e-07	0
6	0	0	0	0	0	4.0556e-07	0	0	0	0	0	2.0278e-07
7	2.0278e-07	0	0	0	0	0	4.0556e-07	0	0	0	0	0
8	0	2.0278e-07	0	0	0	0	0	4.0556e-07	0	0	0	0
9	0	0	2.0278e-07	0	0	0	0	0	4.0556e-07	0	0	0
10	0	0	0	2.0278e-07	0	0	0	0	0	4.0556e-07	0	0
11	0	0	0	0	2.0278e-07	0	0	0	0	0	4.0556e-07	0
12	0	0	0	0	0	2.0278e-07	0	0	0	0	0	4.0556e-07
13	2.0278e-07	0	0	0	0	0	1.0139e-07	0	0	0	0	0
14	0	2.0278e-07	0	0	0	0	0	1.0139e-07	0	0	0	0
15	0	0	2.0278e-07	0	0	0	0	0	1.0139e-07	0	0	0
16	0	0	0	2.0278e-07	0	0	0	0	0	1.0139e-07	0	0
17	0	0	0	0	2.0278e-07	0	0	0	0	0	1.0139e-07	0
18	0	0	0	0	0	2.0278e-07	0	0	0	0	0	1.0139e-07
19	1.0139e-07	0	0	0	0	0	2.0278e-07	0	0	0	0	0
20	0	1.0139e-07	0	0	0	0	0	2.0278e-07	0	0	0	0
21	0	0	1.0139e-07	0	0	0	0	0	2.0278e-07	0	0	0
22	0	0	0	1.0139e-07	0	0	0	0	0	2.0278e-07	0	0
23	0	0	0	0	1.0139e-07	0	0	0	0	0	2.0278e-07	0
24	0	0	0	0	0	1.0139e-07	0	0	0	0	0	2.0278e-07

有如下特点：

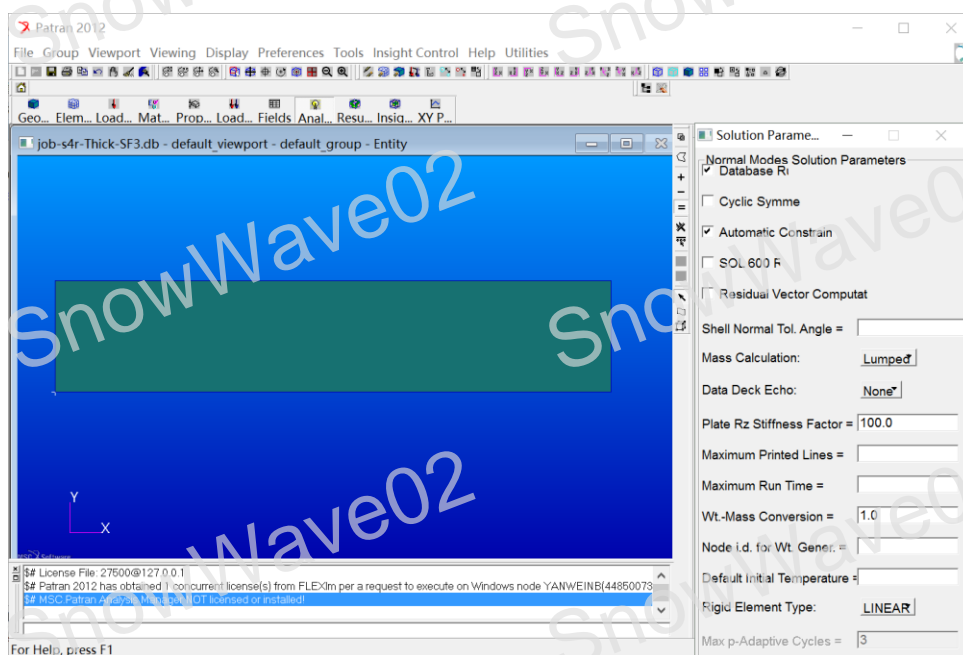
(1) 平动项：由于  $M(1,1)$  和  $M(7,1)$  不一致，可推测 Nastran 的 Quad4 的平动三项质量都采用的是完全积分。

(2) 转动项：为 0

第 (2) 点可通过自编程序 iSolver 证明，在 iSolver 中编程，将平动项取为完全积分，转动项为 0，可得到上述完全一致的质量矩阵。

## 2.3.2 集中质量

在模态分析步设置质量矩阵为集中质量（Lumped）。



分析后得到 Quad4 的集中质量矩阵如下：

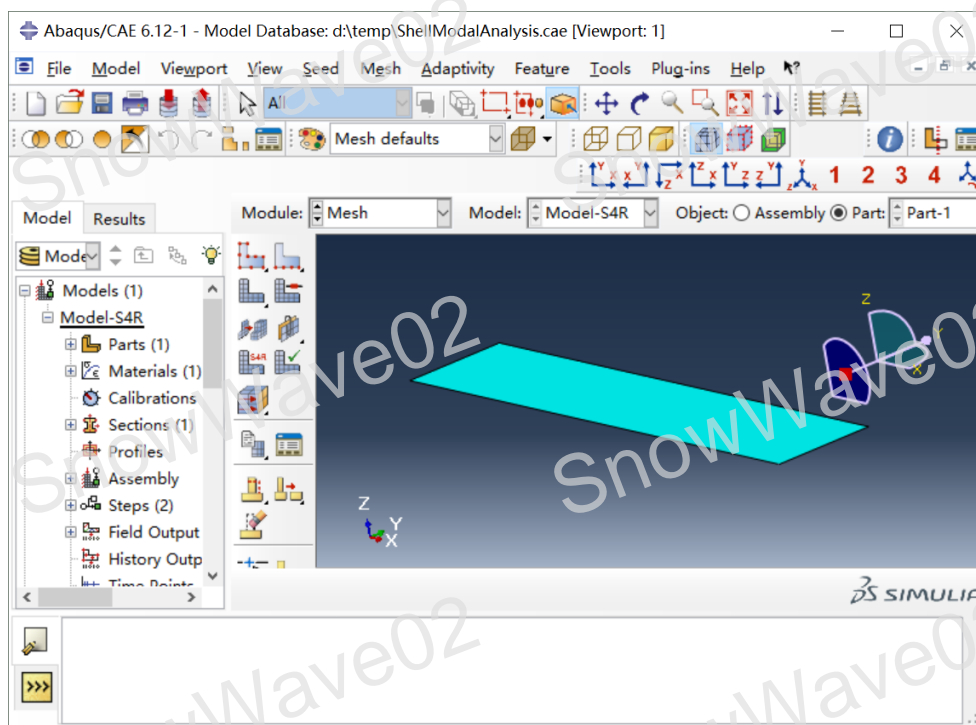
M <24x24 double>										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	9.1250e-07	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	9.1250e-07	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	9.1250e-07	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	9.1250e-07	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	9.1250e-07	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	9.1250e-07	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

由  $9.125e-7=4.0556e-7+2*2.0278e-7+1.0139e-7$ ，猜测 Nastran 集中质量矩阵的求法是将一致质量的对应自由度的一行相加作为对角元素。

## 2.4 Abaqus 的 S4 单元质量矩阵

在 Abaqus/CAE 中建模，使用壳单元，如下图：





然后输出质量矩阵查看结果。

## 2.4.1 一致质量

### 2.4.1.1 S4 单元

选择 S4 单元，即一次线性完全积分壳单元，输出质量矩阵如下：

Element1Mass - 24x24 double >												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	4.0556e-07	0	0	0	0	2.0278e-07	0	0	0	0	0	0
2	0	4.0556e-07	0	0	0	0	2.0278e-07	0	0	0	0	0
3	0	0	4.0556e-07	0	0	0	0	2.0278e-07	0	0	0	0
4	0	0	0	3.3796e-16	0	0	0	0	1.6898e-16	0	0	0
5	0	0	0	0	3.3796e-16	0	0	0	0	1.6898e-16	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	2.0278e-07	0	0	0	0	4.0556e-07	0	0	0	0	0	0
8	0	2.0278e-07	0	0	0	0	4.0556e-07	0	0	0	0	0
9	0	0	2.0278e-07	0	0	0	0	4.0556e-07	0	0	0	0
10	0	0	0	1.6898e-16	0	0	0	0	3.3796e-16	0	0	0
11	0	0	0	0	1.6898e-16	0	0	0	0	3.3796e-16	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	1.0139e-07	0	0	0	0	2.0278e-07	0	0	0	0	0	0
14	0	1.0139e-07	0	0	0	0	2.0278e-07	0	0	0	0	0
15	0	0	1.0139e-07	0	0	0	0	2.0278e-07	0	0	0	0
16	0	0	0	8.4491e-17	0	0	0	0	1.6898e-16	0	0	0
17	0	0	0	0	8.4491e-17	0	0	0	0	1.6898e-16	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	2.0278e-07	0	0	0	0	1.0139e-07	0	0	0	0	0	0
20	0	2.0278e-07	0	0	0	0	1.0139e-07	0	0	0	0	0
21	0	0	2.0278e-07	0	0	0	0	1.0139e-07	0	0	0	0
22	0	0	0	1.6898e-16	0	0	0	0	8.4491e-17	0	0	0
23	0	0	0	0	1.6898e-16	0	0	0	0	8.4491e-17	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

有如下特点：

- (1) 平动项：由于  $M(1,1)$  和  $M(7,1)$  不一致，可推测平动三项质量都采用的是完全积分。
- (2)  $R_x$ 、 $R_y$  转动项：不为 0，由于  $M(4,4)$  和  $M(10,4)$  不一致，可推测转动三项质量都采用的是完全积分。

在自编程序 iSolver 中编程，将平动项和转动项都取为完全积分，可得到上述完全一致的质量矩阵，证明上述猜测是正确的。

#### 2.4.1.2 S4R 单元

选择 S4R 单元，即一次线性减缩积分壳单元，输出质量矩阵如下：

Element1Mass <24x24 double>												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2.2830e-07	0	0	0	0	0	2.2810e-07	0	0	0	0	0
2	0	2.2830e-07	0	0	0	0	0	2.2810e-07	0	0	0	0
3	0	0	4.0556e-07	0	0	0	0	0	2.0278e-07	0	0	0
4	0	0	0	3.1686e-16	0	0	0	0	0	1.9008e-16	0	0
5	0	0	0	0	3.1686e-16	0	0	0	0	0	1.9008e-16	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	2.2810e-07	0	0	0	0	0	2.2830e-07	0	0	0	0	0
8	0	2.2810e-07	0	0	0	0	0	2.2830e-07	0	0	0	0
9	0	0	2.0278e-07	0	0	0	0	0	4.0556e-07	0	0	0
10	0	0	0	1.9008e-16	0	0	0	0	0	3.1686e-16	0	0
11	0	0	0	0	1.9008e-16	0	0	0	0	0	3.1686e-16	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	2.2800e-07	0	0	0	0	0	2.2810e-07	0	0	0	0	0
14	0	2.2800e-07	0	0	0	0	0	2.2810e-07	0	0	0	0
15	0	0	1.0139e-07	0	0	0	0	0	2.0278e-07	0	0	0
16	0	0	0	6.3389e-17	0	0	0	0	0	1.9008e-16	0	0
17	0	0	0	0	6.3389e-17	0	0	0	0	0	1.9008e-16	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	2.2810e-07	0	0	0	0	0	2.2800e-07	0	0	0	0	0
20	0	2.2810e-07	0	0	0	0	0	2.2800e-07	0	0	0	0
21	0	0	2.0278e-07	0	0	0	0	0	1.0139e-07	0	0	0
22	0	0	0	1.9008e-16	0	0	0	0	0	6.3389e-17	0	0
23	0	0	0	0	1.9008e-16	0	0	0	0	0	6.3389e-17	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

有如下特点：

- (1) x、y 平动项：由于  $M(1,1)$  和  $M(7,1)$  近似，推测采用的是减缩积分。

在自编程序 iSolver 采用减缩积分可发现值为  $2.2812e-07$ ，Abaqus 的  $M(1,1) = 2.2830e-07$ ， $M(7,1) = 2.2810e-07$ ，显然 Abaqus 做了一个修正，但 Abaqus 的文档中没有任何说明，猜测和刚度矩阵采用减缩积分时做的沙漏修正是一样的道理，因为减缩积分只有一个点，会导致矩阵的秩退化变小，计算时会出现沙漏现象等非物理问题。当增加沙漏的修正后，矩阵的秩会增加，从而减少沙漏现象。

- (2) z 平动项：和 S4 的一样，采用完全积分。

- (3) Rx、Ry 转动项：不为 0，由于  $M(4,4)$  和  $M(10,4)$  不一致，可推测转动三项质量都采用的是完全积分。但明显 S4R 这些项的结果和 S4 有差异，明显 Abaqus 也做了一个修正，Abaqus 的文档中没有任何说明，现在还无法猜测。



## 2.4.2 集中质量

Abaqus 的 S4 单元在 Standard 求解器默认使用的一致质量，没有找到修改为集中质量的方法，同时在 Explicit 求解器中按照文档说明应该使用的是集中质量，但没有找到输出 Explicit 中质量矩阵的方法，所以暂时没法知道 S4 的集中质量矩阵的具体方法。

✧ 详见 Abaqus: Analysis User's Manual: 6.3.3 Explicit dynamic analysis:

The explicit dynamics analysis procedure is based upon the implementation of an explicit integration rule together with the use of diagonal ("lumped") element mass matrices. The equations of motion for the body are integrated using the explicit central-difference integration rule

## 2.5 总结

Nastran 的 Quad4 在计算质量矩阵时可选择一致或者集中，都使用完全积分。

Abaqus 一次壳单元在 standard 求解器默认使用一致质量，且质量矩阵的积分和壳单元的类型有关，S4 是完全积分，S4R 是选择积分。在 explicit 默认使用集中质量，但没找到输出质量矩阵的方法，所以没法研究。

针对一次壳单元，具体的质量矩阵在 Nastran 和 Abaqus 中的实现方式如下表：

软件	单元类型	矩阵类型	元素	积分	修正情况
Nastran	Quad4	一致质量	平动项	三个都是完全积分	无
			转动项	取 0	无
		集中质量	平动项	一致质量对应列相加	无
			转动项	取 0	无
Abaqus	S4	一致质量	平动项	三个都是完全积分	无
			转动项	x、y 完全积分、z 取 0	无
		集中质量	-		
	S4R	一致质量	平动项	x、y 都是减缩、z 完全积分	xy 修正，类似沙漏
			转动项	x、y 完全积分、z 取 0	修正，没找到原因
		集中质量	-		

如有任何疑问，欢迎联系我们：

snowwave02 From [www.jishulink.com](http://www.jishulink.com)

email: [snowwave02@qq.com](mailto:snowwave02@qq.com)