Résumé de LEPL1106

compilation du 10 mars 2023

Thomas Debelle

Juin 2023

Table des matières

I Signaux **4**

1 Les signaux **5**
- 1.1 Définition . . . 5
- 1.2 Signaux élémentaires . . . 5
  - 1.2.1 Signaux exponentiels . . . 5
  - 1.2.2 Signaux sinusoïdales . . . 5
  - 1.2.3 Signaux amortis . . . 6
  - 1.2.4 L'impulsion (temps discret) . . . 6
  - 1.2.5 L'échelon (temps discret) . . . 6
  - 1.2.6 L'impulsion (temps continu) . . . 6

2 Fourier **8**
- 2.1 La représentation de Fourier . . . 8
  - 2.1.1 Signaux continus . . . 8
  - 2.1.2 Signaux discrets . . . 10
- 2.2 La transformée de Fourier . . . 10
  - 2.2.1 Calcul de la transformée . . . 10
  - 2.2.2 Calcul discret . . . 11
- 2.3 Propriétés de Fourier . . . 11
  - 2.3.1 Dualité . . . 11
  - 2.3.2 Linéarité . . . 11
  - 2.3.3 Translation . . . 12
  - 2.3.4 Modulation . . . 12
  - 2.3.5 Différentiation . . . 12
  - 2.3.6 Multiplication par un monôme . . . 12
  - 2.3.7 Intégration . . . 13
  - 2.3.8 Dilatation . . . 13
  - 2.3.9 Renversement . . . 13
- 2.4 Transformée usuelle . . . 13
  - 2.4.1 Train d'impulsions (peigne) de Dirac . . . 14
  - 2.4.2 Fonction échelon . . . 15
  - 2.4.3 Fonction fenêtre . . . 15
  - 2.4.4 Fonction signe . . . 16
- 2.5 Tableau de Check . . . 16

II Systèmes **17**

3 Système LIT **18**
- 3.1 LIT . . . 18
- 3.2 Opération sur les signaux . . . 18
- 3.3 Convolution (temps discret) . . . 19

3.3.1 Propriétés . . . 19
3.4 Convolution (temps continu) . . . 19
3.4.1 Propriétés . . . 20
3.5 Réponse impulsionnelle . . . 20
3.6 Type de système . . . 20
3.7 Modélisation et représentation des systèmes . . . 20
3.7.1 Inconvénient . . . 20
3.7.2 Représentation . . . 20
3.7.3 Équation différentielle entrée-sortie . . . 21
3.7.4 Schéma Bloc . . . 22
3.7.5 Représentation d'état . . . 23
3.7.6 Passage de représentation . . . 23
3.7.7 Temps discret . . . 23
3.7.8 Résumé . . . 24
3.7.9 Existence des systèmes LIT . . . 24

Préface

Bonjour à toi !

Cette synthèse recueille toutes les informations importantes données au cours, pendant les séances de tp et est améliorée grâce au note du Syllabus. Elle ne remplace pas le cours donc écoutez bien les conseils et potentielles astuces que les professeurs peuvent vous donner. Notre synthèse est plus une aide qui, on l'espère, vous sera à toutes et tous utile.

Elle a été réalisée par toutes les personnes que tu vois mentionnées. Si jamais cette synthèse a une faute, manque de précision, typo ou n'est pas à jour par rapport à la matière actuelle ou bien que tu veux simplement contribuer en y apportant tes connaissances ? Rien de plus simple ! Améliore la en te rendant ici où tu trouveras toutes les infos pour mettre ce document à jour. (*en plus tu auras ton nom en gros ici et sur la page du github*)

Nous espérons que cette synthèse te sera utile d'une quelconque manière ! Bonne lecture et bonne étude.

Première partie

Signaux

Chapitre 1

Les signaux

1.1 Définition

Définition

Un signal est une fonction de une ou plusieurs variables (continues ou discrètes) qui correspondent à de l'information ou a un phénomène physique.

Continues ou discrets ?

Un signal est dit continu si il est définit sur un espace de temps continu. On note ce signal $x(t)$. Et il est dit discret si il est définit sur un espace discret de temps. On note ce signal $x[t]$.

Manipulation des signaux

Pour le cas discrets ou continu, nous pouvons réaliser les opérations suivantes.

- Combinaison linéaire $\rightarrow \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$
- Multiplication $\rightarrow x_1[t]x_2[t]$
- Dilatation $\rightarrow x[n/a], a > \mathbb{R}$
- Translation $\rightarrow x(t - t_0), t_0 \in \mathbb{R}$
- Renversement $\rightarrow x(-t)$
- Différentiation (que pour le cas continu) $\rightarrow \frac{d^n x(t)}{dt^n}$
- Intégration (que pour le cas continu) $\rightarrow \int x(t)dt$

1.2 Signaux élémentaires

1.2.1 Signaux exponentiels

Pour les signaux continus nous avons :

$$x(t) = Be^{at} \tag{1.1}$$

Et pour les signaux discrets nous avons :

$$x[n] = Br^n \rightarrow 0 < r < 1 \tag{1.2}$$

1.2.2 Signaux sinusoïdales

Pour les signaux continus nous avons :

$$x(t) = Acos(\omega t + \phi) \tag{1.3}$$

Et pour les signaux discrets nous avons :

$$x[n] = Acos(\Omega n + \Phi) \tag{1.4}$$

Il a une période de $\Omega N = 2\pi m$

1.2.3 Signaux amortis

Pour les signaux continus et avec $\alpha > 0$:

$$x(t) = Ae^{-\alpha t}cos(\omega t + \phi) \tag{1.5}$$

Et pour les signaux discrets :

$$x[n] = Br^n cos(\Omega n + \Phi) \tag{1.6}$$

1.2.4 L'impulsion (temps discret)

Comme son nom l'indique, ce signal se représente sous la forme d'une impulsion. Par sa définition, cela nous force a avoir un signal discret !

$$\begin{cases} \delta[n] = 1 \rightarrow n = 0 \\ \delta[n] = 0 \rightarrow \forall n \notin 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

On peut réaliser des impulsions décaler en écrivant $\delta[n-x]$ avec x représentant la valeur du décalage.

1.2.5 L'échelon (temps discret)

Ce type de signal élémentaire est encore plus trivial puisqu'il se résume à :

$$\begin{cases} 1 \rightarrow n \geq 0 \\ 0 \rightarrow n < 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

On peut aussi voir l'échelon comme une somme infinie d'impulsion comme $\sum_{k\geq 0}^{\infty} \delta[n-k]$.

1.2.6 L'impulsion (temps continu)

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 \text{ si } t \neq 0 \\ \delta(0) = (+\infty) \\ \int_{-a}^{a} \delta(s)ds = 1 \rightarrow \forall a > 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

A noter que la dernière ligne nous crée une propriété bien spécifique. En effet, la valeur de l'impulsion est limité par les bornes a puisqu'on impose une intégrale égale à 1.

Lien entre impulsion et échelon

$\delta(t) = u'(t)$ donc l'impulsion est une sorte de dérivé de l'échelon. ceci nous permet également d'obtenir cette formule :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(s)\delta(s)ds = x(0) \tag{1.10}$$

On prouve cela de manière *peu rigoureuse* en remarquant que : pour $s \neq 0$, on a $\delta(s) = 0$ donc $x(s)\delta(s) = 0 = x(0)\delta(s)$ finalement on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(s)\delta(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} x(0)\delta(s)ds = x(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(s)ds = x(0) \tag{1.11}$$

Décomposition en impulsions

On peut décomposer tout signal en impulsion comme ci-dessous :

$$\begin{cases} \text{temps discret } \Rightarrow x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \\ \text{temps continu } \Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\delta(t-s)ds \end{cases} \tag{1.12}$$

Chapitre 2

Fourier

2.1 La représentation de Fourier

2.1.1 Signaux continus

Stocker un signal efficacement

Un signal est composé de sinus et de cosinus à des amplitudes, phases et fréquences différentes. La manière la plus efficace pour stocker un signal est d'avoir pour chaque fréquence *multiple* de la fréquence de base ω_0 son amplitude. (on verra que en effet, on peut faire cette supposition que chaque fréquence sont des multiples de fréquences) Cela ressemble donc à ça :

$$x(t) = 1cos(1\omega_0 t) + 2sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{2}cos(2\omega_0 t) + \frac{1}{2}sin(3\omega_0 t) + \frac{4}{5}cos(4\omega_0 t) \tag{2.1}$$

$$cos = [1, \frac{1}{2}, 0, \frac{4}{5}] \tag{2.2}$$

$$sin = [0, 2, \frac{1}{2}] \tag{2.3}$$

Périodicité

On sait que $x(t)$ est périodique et d'*énergie finie*.(Périodicité de $\omega_0 = \frac{1}{T_0}$) On peut décomposer notre signal en **Série de Fourier *trigonométrique*** :

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(2a_k cos(k\omega_0 t) + 2b_k sin(k\omega_0 t)\Big) \tag{2.4}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)cos(k\omega_0 t)dt \tag{2.5}$$

$$b_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)sin(k\omega_0 t)dt \tag{2.6}$$

De plus, on peut toujours décomposer un signal *périodique* en une partie **impaire** et **paire**. (en Fourier, il suffit de prendre la partie cos donc paire et sin donc impaire)

Chose importante à remarquer, on va souvent tracer des graphes avec un axe y de type $2a[n]$. Ce 2 est un des prémices de Fourier complexe.

Signaux carrés

Un signal carré est exprimé comme ci-dessous avec une période de 2π :

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.7}$$

Si on fait la série de Fourier, on peut se rendre compte que ce signal est composé d'une *infinité* de sinus de tel sorte que :

$$x(t) = \sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} sin((2n+1)t) \tag{2.8}$$

Fourier Complexes

On voit que cette série est bien plus simple et est une révolution pour calculer *Fourier* :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \tag{2.9}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \tag{2.10}$$

Donc on prend le conjugué pour calculer X_k. C'est ici que le coefficient 2 fait du sens, on se rappelle les formules d'Euler.

$$cos(t) = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} \qquad sin(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \tag{2.11}$$

Donc le lien avec la série en Réelle est : $X_0 = a_0$, $X_k = X_{-k}^* = a_k - jb_k$. On trouve cela en injectant dans l'équation 2.10 la formule d'Euler.

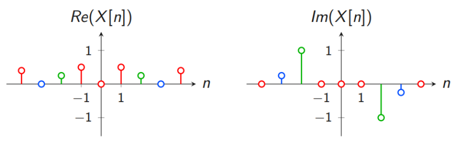
Représentation de Fourier

Pour faire la représentation de Fourier, on va commencer par prendre l'équation 2.1 et la transformer :

$$x(t) = 2(\frac{1}{2}cos(1\omega_0 t) + \frac{1}{4}cos(2\omega_0 t) + \frac{4}{10}cos(4\omega_0 t)) + 2(1 sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{4}sin(3\omega_0 t)) \tag{2.12}$$

Ensuite on injecte la formule d'Euler dans l'équation 2.12 ce qui donne :

$$\begin{aligned} x(t) = {} & \tfrac{4}{10}e^{-4j\omega_0 t} + \tfrac{j}{4}e^{-3j\omega_0 t} + (\tfrac{1}{4} + j)e^{-2j\omega_0 t} + \tfrac{1}{2}e^{-j\omega_0 t} \\ & + \tfrac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + (\tfrac{1}{4} - j)e^{2j\omega_0 t} - \tfrac{j}{4}e^{3j\omega_0 t} + \tfrac{4}{10}e^{4j\omega_0 t} \end{aligned}$$



Notre signal $x(t)$ est bien défini de manière unique via ses coefficients !

Base orthogonale

Les exponentielles complexes de Fourier sont orthogonales dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_T$ équipé avec le produit scalaire :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) y^*(t) dt \tag{2.13}$$

$$\{e^{jk\omega_0 t}\}, k \in \mathbb{Z} \rightarrow \textbf{ est } \perp \tag{2.14}$$

2.1.2 Signaux discrets

La périodicité d'un signal change puisqu'on ne peut avoir que des valeurs $\mathbb{N}$. En effet, on dit qu'un signal est de période N si $x[n+N] = x[n]$. De plus, N est en $[rad]$ et pas $[\frac{rad}{s}]$ car la pulsation fondamentale est $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$

Calcul de la série de Fourier

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{jk\Omega_0 n} \tag{2.15}$$

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]e^{-jk\Omega_0 m} \tag{2.16}$$

On a seulement besoin de N coefficient grâce à la **périodicité**. En effet, $e^{j(N+k)\Omega_0 n} = e^{jk\Omega_0 n}$

2.2 La transformée de Fourier

Cela s'applique sur les signaux *non-périodiques* et *continus*.
Il faut donc voir le signal comme ayant un $\omega = 0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{\infty}$ et y appliquer la série de Fourier !

2.2.1 Calcul de la transformée

On dit que le spectre $X(j\omega)$ du signal $x(t)$ est sa **transformée de Fourier**.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \tag{2.17}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{2.18}$$

On appelle l'équation 2.18, la transformée de Fourier **inverse**.

Pour arriver à ce résultat, nous avons réalisés quelques modifications à la série de Fourier :

$$\omega_k = k\omega_0 = \frac{2\pi k}{T_0} \Rightarrow \omega_{k+1} - \omega k = \Delta\omega = \frac{2\pi}{T_0} \tag{2.19}$$

$$\int_0^T \approx \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \qquad \text{Pour "couvrir" tout le domaine} \tag{2.20}$$

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} X_k e^{j\omega_0 kt} \tag{2.21}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{T_0}\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt\right\}e^{jk\omega_0 t} \tag{2.22}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \quad e^{jk\omega_0 t}\Delta\omega \tag{2.23}$$

On remarque qu'on a 2 parties intéressantes dans l'équation 2.23. On a une partie qui évolue dans le temps, c'est notre *signal continu*, c'est notre spectre. L'autre partie dépend de la fréquence et c'est la *reconstruction du signal*.

La transformée de $x(t) = e^{-2|t|}$ est $X(j\omega) = \frac{4}{4+\omega^2}$.

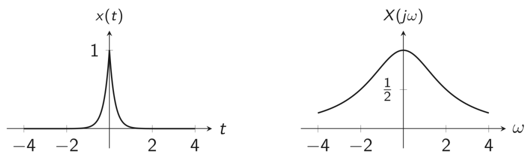


FIGURE 2.1 – à gauche, un signal pair à droite, le spectre

2.2.2 Calcul discret

On a un signal $x[n]$ qui s'exprime de manière unique selon ses fréquences :

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\Omega}\right)e^{j\Omega n}d\omega \tag{2.24}$$

$$X\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\Omega m} \tag{2.25}$$

L'équation donne la transformée de Fourier.

2.3 Propriétés de Fourier

2.3.1 Dualité

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega) \tag{2.26}$$

$$X(jt) \longleftrightarrow 2\pi x(-\omega) \tag{2.27}$$

Donc on échange $t \to -\omega$ et $\omega \to t$ et on échange les fonctions.

Démonstration

$$\begin{aligned}
X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \\
x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\
x(-t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{-j\omega t}d\omega \\
2\pi x(-t) &= \int_{\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{-j\omega t}d\omega \\
2\pi x(-\omega) &= \int_{\infty}^{\infty} X(jt)e^{-j\omega t}dt
\end{aligned}$$

2.3.2 Linéarité

En effet,

$$\begin{aligned}
x_k(t) &\longleftrightarrow X_k(j\omega) \\
\sum_k x_k(t) &\longleftrightarrow \sum_k X_k(j\omega)
\end{aligned}$$

2.3.3 Translation

On a :

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega)$$
$$x(t-t_0) \longleftrightarrow X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

Il faut bien retenir qu'une translation en temporelle amène à une exponentielle en phasorielle. Combiner à la propriété de dualité venant de 2.3.1 est très puissant et utile.
On doit aussi noter que cela ne change **pas** l'amplitude du spectre mais change sa **phase**.

2.3.4 Modulation

C'est quand on combine la translation et la dualité :

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega)$$
$$e^{j\omega_0 t}x(t) \longleftrightarrow X(j(\omega-\omega_0))$$

Cette modulation va elle modifier l'amplitude du signal car déplace son "espace" phasoriel revient à déplacer ses fréquences et en ajoute.

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega)$$
$$cos(\omega_0 t)x(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}(X(j(\omega-\omega_0)) + X(j(\omega+\omega_0)))$$

On reconnait clairement les formules d'Euleur.

2.3.5 Différentiation

Dériver un signal à **énergie finie** revient à amplifier ses hautes fréquences.

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega)$$
$$\frac{d^k x}{dt^k}(t) \longleftrightarrow (j\omega)^k X(j\omega)$$

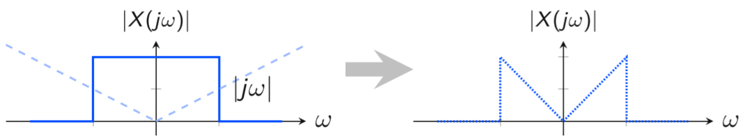


FIGURE 2.2 – Exemple de transformation de Fourier

2.3.6 Multiplication par un monôme

Par dualité, faire ceci :

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega)$$
$$t^n x(t) \longleftrightarrow j^n \frac{d^n X}{d\omega^n}(j\omega)$$

2.3.7 Intégration

Donc intégrer, augmente les basses fréquences :

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega)$$
$$\sum_{-\infty}^{t} x(t)dt \longleftrightarrow \frac{X(j\omega}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$

La partie en rouge est dû au fait qu'un résultat d'une intégration à toujours une constante d'intégration (le fameux $+C$)

2.3.8 Dilatation

Quand on *dilate* un signal, on *compresse* son espace spectre.

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega)$$
$$x(t/a) \longleftrightarrow |a|X(aj\omega)$$

Un truc utile est de penser au vidéo au ralenti où on *dilate* le temps et on *compresse* son spectre donc on entend plus les *basses fréquences*.

Parseval

On **conserve** l'énergie du signal grâce à son spectre. donc :

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

2.3.9 Renversement

Renverser un signal revient à renverser son spectre.

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega) \tag{2.28}$$
$$x(-t) \longleftrightarrow X(-j\omega) \tag{2.29}$$

C'est une dilatation par $a = -1$.

Complexe conjugué

Le spectre d'un signal conjugué est le conjugué renversé du spectre du signal.

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega)$$
$$x^*(t) \longleftrightarrow X^*(-j\omega)$$

2.4 Transformée usuelle

On utilisera des propriétés vu à la section 2.3.

Delta de Dirac

C'est plutôt simple, il faut appliquer simplement la formule :

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 \text{ si } t \neq 0 \\ \int_{a}^{-a} \delta(t)dt = 1 \forall a > 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) \end{cases} \tag{2.30}$$

Via toutes ces propriétés on voit facilement que :

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = 1(e^0) = 1 \tag{2.31}$$

Delta de Kronecker

Même idée que à 2.4 si ce n'est qu'on est en discret. Le résultat reste le même.

2.4.1 Train d'impulsions (peigne) de Dirac

On a donc une fonction qui ressemble à cela : (d'où le nom)

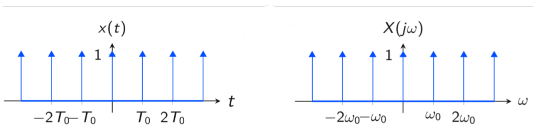


FIGURE 2.3 – peigne de Dirac (avec un petit spoil)

formellement un peigne de Dirac est :

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT_0) \tag{2.32}$$

et son $X(j\omega)$ est :

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega) = \omega_0 x_{\omega_0}(\omega) \text{ avec } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{2.33}$$

Preuve

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)e^{-j\omega t}dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kT_0} \text{ car on a une énergie finie} \\ \mathcal{F}(\delta(t - kT_0)) &= e^{-j\omega kT_0} \end{aligned}$$

Ensuite, on va refaire une série de Fourier :

$$x(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l e^{j\omega_0 t} \qquad X_l = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j\omega_0 l t}dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 l t} \qquad = \frac{1}{T_0}\int \delta(t)e^{-j\omega_0 l t}dt$$

$$= \frac{1}{T_0}$$

Ensuite, on utiliser la dualité :

$$\begin{aligned} x(t) &\longleftrightarrow X(j\omega) \\ X(jt) &\longleftrightarrow 2\pi x(-\omega) \\ \mathcal{F}(e^{j\omega_0 l t}) &= 2\pi\delta(\omega - \omega_0 l) \end{aligned}$$

$$x(t) = \frac{1}{T_0}\sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - l\omega_0) = \omega_0 \sum(\delta(\omega - l\omega_0) = \omega_0 x(\omega)$$

2.4.2 Fonction échelon

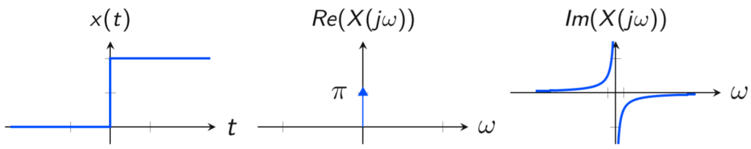


FIGURE 2.4 – Transformé de la fonction échelon

Sa transformée de Fourier est :

$$x(t) = u(t) \longleftrightarrow X(j\omega) = \pi\delta(t) + \frac{1}{j\omega} \tag{2.34}$$

Preuve

On utilise l'intégration car on sait que :

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^{\infty} \delta(t)dt \\ \mathcal{F}(\delta(t)) &= 1 \\ u(j\omega) &= \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \end{aligned}$$

2.4.3 Fonction fenêtre

Cette fonction, correspond à 2 impulsion. tel que :

$$imp = u(t+1) - u(t-1) \tag{2.35}$$

Ces fonctions sont des filtres *passes-bandes* et à pour transformé de Fourier :

$$x(t) = \Pi(t) \longleftrightarrow X(j\omega) = 2sinc(t) = 2\frac{sin(\omega)}{\omega}$$

Preuve

On utilise l'*addition* de 2 échelons *translatés*.

2.4.4 Fonction signe

La fonction signe est :

$$sign(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \tag{2.36}$$

et à pour transformée de Fourier :

$$x(t) = sign(t) =\longleftrightarrow X(j\omega) = \frac{2}{j\omega}$$

Cela se prouve avec la dilatation et la translation de la fonction échelon.

2.5 Tableau de Check

Deuxième partie

Systèmes

Chapitre 3

Système LIT

Un système est une entité qui prend *un ou plusieurs signaux* en entrée et produit *de nouveaux signaux* en sortie.
Exemple : $H\{x[n]\} = x[n] + x[n-1]$. Un système est par exemple : *une radio, une caméra, une voiture, ...*

3.1 LIT

Un système *Linéaire et Indépendant du Temps* ou **LIT** est, comme son nom l'indique, linéaire donc :

$$\mathcal{H}\{a_1x_1 + ... + a_Nx_N\} = a_1\mathcal{H}\{x_1\} + ... + a_N\mathcal{H}\{x_N\} \tag{3.1}$$

Et un système est *invariant temporelle* donc :

$$\begin{cases} \mathcal{H} \text{ est invariant si } \forall t_0 \in \mathbb{N} \\ \mathcal{H}\{x\}[n] = y[n] \Rightarrow \mathcal{H}\{x[n-n_0]\} = y[n-n_0] \end{cases} \tag{3.2}$$

On remarque qu'on peut ré-écrire tous signaux via une somme d'impulsions. De plus, si $\mathcal{H}$ est linéaire alors :

$$\mathcal{H}\{x\} = \mathcal{H}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\mathcal{H}\{\delta[n-k]\} \tag{3.3}$$

Si $\mathcal{H}$ est *invariant* au temps et qu'on pose $h := \mathcal{H}\{\delta\}$

$$\mathcal{H}\{\delta[n-k]\} = \mathcal{H}\{\delta\}[n-k] = h[n-k] \tag{3.4}$$

$$\mathcal{H}\{x\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] =: x * h \tag{3.5}$$

A noter que "$*$" fais référence à la convolution, sujet abordé à la section 3.3.

Il est important de noter que toutes ces propriétés et caractéristiques des systèmes *LIT* en **temps discret** sont également valables et ont un équivalent en **temps continu**.

3.2 Opération sur les signaux

Voici un tableau résumant les différentes opérations possibles sur les signaux :

	Temps discret	Temps continu
Combinaison linéaire	$\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]$	$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$
Multiplication	$x_1[n]x_2[n]$	$x_1(t)x_2(t)$
Différentiation		$d^n x(t)/dt^n$
Intégration		$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$
Convolution	$x_1[n] * x_2[n]$	$x_1(t) * x_2(t)$
Dilatation	$x[n/a]$ (arrondi n/a)	$x(t/a)a > 0$
Translation	$x[n - n_0], n_0 \in \mathbb{Z}$	$x(t - t_0), t_0 \in \mathbb{R}$
Renversement	$x[-n]$	$x(-t)$

Une chose importante à voir dans ces formules est que x est un *signal*, $x[k]$ la *valeur* de ce signal en k et on a $\mathcal{H}$ qui est un *système* prenant et donnant des signaux.

3.3 Convolution (temps discret)

La convolution est un nouvel opérateur qui nous sera très utile. Son signe est "$*$" et la formule qui définit cette opération est :

$$f[n] * g[n] := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k] \tag{3.6}$$

La méthode pour trouver le résultat d'une convolution de manière **graphique** est :

1. Il faut "*renverser*" une des fonctions. C'est-à-dire faire $f[n] \to f[-n]$.
2. On décale une des fonctions le plus à droite. (on prend le k_0 où après, tous les résultats de $f[k]g[n-k]$ valent 0)
3. Puis multiplier chaque point entre eux et les sommer.
4. On met le résultat sur un *graphe* au point k.
5. On décale notre fonction d'un point vers la gauche et on répète le processus.

Pour trouver de manière **calculatoire**, on applique simplement la formule 3.6.

3.3.1 Propriétés

Commutativité	$(f * g)[n] = (g * f)[n]$
Associativité	$(f * (g * h))[n] = ((f * g) * h)[n]$
Distributivité	$(f * (g + h))[n] = (f * g + f * h)[n]$

On également ces propriétés :

Élément neutre	$f[n] * \delta[n] = f[n]$
Décalage	$f[n] * \delta[n - n_0] = f[n - n_0], n_0 \in \mathbb{Z}$

3.4 Convolution (temps continu)

Si on a *2 signaux* $f(t)$ et $g(t)$ leur convolution est donnée par (ressemble très fort à 3.3) :

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{3.7}$$

Pour calculer de manière **graphique** il faut suivre ces étapes :

1. Il faut "*renverser*" une des fonctions. C'est-à-dire faire $f(t) \to f(-t)$.
2. On décale une des fonctions le plus à droite. (on prend le τ_0 où après, tous les résultats de $f(t)g(t - \tau_0)$ valent 0)

3. Puis multiplier chaque point entre eux et on les intègre. (on prend la surface sous la courbe).
4. On met le résultat sur un *graphe* au pont τ.
5. On décale notre fonction d'une distance (pas trop loin mais pas trop proche pour ainsi avoir une nuée de points) vers la gauche et on répète le processus.

En somme, nous avons une méthode très proche du temps discret si ce n'est l'utilisation d'intégrale allant de $-\infty$ à ∞.

3.4.1 Propriétés

On retrouve les mêmes propriétés que en temps discret.

Commutativité	$(f * g)(t) = (g * f)(t)$
Associativité	$(f * (g * h))(t) = ((f * g) * h)(t)$
Distributivité	$(f * (g + h))(t) = (f * g + f * h)(t)$

On également ces propriétés :

Élément neutre	$f(t) * \delta(t) = f(t)$
Décalage	$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0), n_0 \in \mathbb{R}$

3.5 Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système *LIT* $\mathcal{H}$ est la réaction du système à une *impulsion d'entrée* ($\delta[0]$) on le note h.

Pour **tout** système *LIT*, le signal de sortie est le résultat de la convolution entre *le signal d'entrée* et *la réponse impulsionnelle.*

$$y[n] = x[n] * h[n] \tag{3.8}$$

$$y(t) = y(t) * h(t) \tag{3.9}$$

3.6 Type de système

Système sans mémoire	Si la sortie du système *à un temps donné* ne dépend que de l'entrée à **cet instant**.
Système causal	Le système **ne dépend pas** de ce qui se passe dans le *futur*
Système stable ou (*BIBO*)	Entrée *bornée* donne une sortie *bornée*
Système inversible	On sait *retrouver* l'entrée en ayant la *sortie.*

3.7 Modélisation et représentation des systèmes

Comme vu précédemment, la réponse impulsionnelle est le résultat du système étant perturbé par une impulsion.

3.7.1 Inconvénient

1. Fonction de taille *infinie* et représentation donc *peu simple.*
2. La modélisation d'un système ne mène généralement pas à une réponse impulsionnelle.
3. On doit connaitre l'entrée depuis $-\infty$.

3.7.2 Représentation

Il existe 3 grandes façons de représenter un système. Tout d'abord la méthode *équation différentielle d'entrée-sortie.* Pour la suite des exemples, j'utiliserai un circuit RLC comme montré ci-contre.

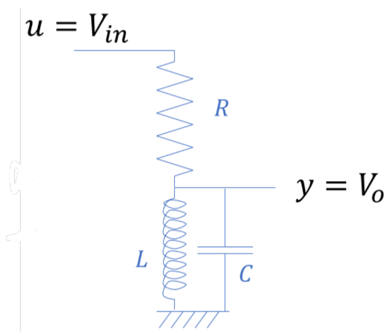


FIGURE 3.1 – Circuit RLC

équation différentielle d'entrée-sortie est une somme des dérivées comme montré dans l'équation 3.10. C'est plutôt facile de trouver les équations mais on fait face à un problème, l'opération *dérivée* n'existe pas dans le monde réelle, il faut un opérateur intégrateur.

Ensuite, nous avons la *représentation d'état* qui utilise des matrices pour former les équations différentielles comme nous voyons à l'équation 3.11

La dernière représentation type est le *schéma bloc* qui est visuel et qui utilise lui des blocs intégrateurs au lieu de dérivé comme montré à la figure 3.2.

$$\ddot{y} + \frac{1}{CR}\dot{y} + \frac{1}{LC}y = \frac{1}{CR}\dot{u} \tag{3.10}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} V_0 \\ I_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/RC & -1/C \\ 1/L & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_0 \\ I_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/RC \\ 0 \end{pmatrix} u \tag{3.11}$$

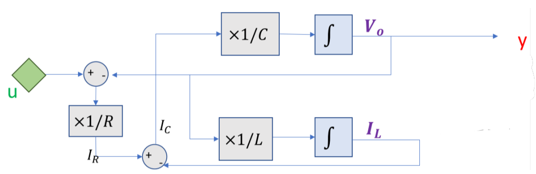


FIGURE 3.2 – Repésentation *bloc* du système à la figure 3.1

3.7.3 Équation différentielle entrée-sortie

La forme générale de ces équations est de ce type :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k(\frac{d^k}{dt^k})y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k(\frac{d^k}{dt^k})u(t) \tag{3.12}$$

Quelque chose à bien remarquer est que ces équations ne modélise *qu'une partie* d'un système *LIT*. Par exemple, on ne peut pas représenter un *délai* ce qui également rare dans la réalité.

Une chose à remarquer est que l'opérateur *dérivé* peut se "*démultiplier*" et possède une *associativité* et *commutativité*. Ainsi, on peut avoir une représentation dite "*polynomiale*" comme ci-dessus qui est une autre écriture de l'équation 3.12.

$$p(\frac{d}{dt})y(t) = q(\frac{d}{dt})u(t) \tag{3.13}$$

Puis après, pour résoudre ce genre d'équation, on utilise des méthodes classiques vu au cours d'Analyse donc, solution homogène et particulière ...

Réponse libre et forcée

Une réponse *libre* est la solution de l'équation homogène, donc quand $u(t) = 0$ à l'équation 3.13 et on garde les **mêmes conditions initiales**. En somme c'est la représentation de l'impact des *CI*.

Une réponse *forcée* est l'équation 3.13 mais avec les *conditions initiales* nulles. Donc on s'intéresse à l'impact de l'entrée sans les conditions initiales. La somme de la réponse *libre* et *forcée* nous donne la réponse générale.

Stabilité

On peut avoir une intuition sur la stabilité de notre système en posant $y_H(t)$ qui équivaut à :

$$y_H(t) = \sum_i \alpha_i e^{r_i t} \rightarrow \quad r_i \text{ correspond aux racines de p(z) de 3.13} \tag{3.14}$$

Si la partie réelle de $r_i < 0 \forall i$ alors on a une exponentielle décroissante donc **stable**. On appelle ce genre de système *BIBO* stable ou *Bounded Input Bounded Output*.

En revanche, si $r_i > 0 \exists i$ donc on a au moins une exponentielle croissante créant une *instabilité*.

Si $r_i = 0 \exists i$ on dit qu'on a une *stabilité marginale* ou *instabilité*. Cela dépendera de la **multiplicité** et de $te^{r_i t}$.

Linéarité de l'entrée

Avec cette représentation polynomiale, on peut facilement voir qu'on a une linéarité de l'entrée nous permettant de simplifier différent calcul.

Avantages et Inconvénients

2 représentations qui sont 3.12 et 3.13. Les avantages :
- Représentation compacte.
- Conditions initiales claires.
- Facile de la transformer dans d'autres représentations.

Les désavantages :
- On peut perdre la représentation physique.

3.7.4 Schéma Bloc

Comme son nom l'indique, le schéma bloc utilise des "*blocs*" pour représenter notre système. Ci-dessus on peut voir les composants de base composant ce type de schéma

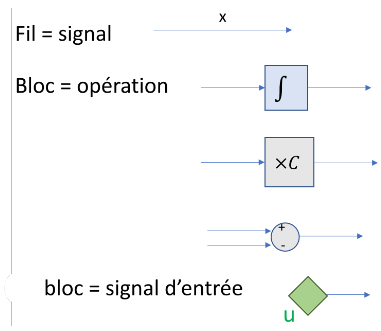


FIGURE 3.3 – Liste reprenant les blocs de base

Dans le cadre des systèmes *LIT*, on se restreint souvent à l'addition, multiplication et intégration. On ne réalise que des opérations *linéaires*.

Avantages et Inconvénients

Les avantages :
- Représentation très intuitive.
- Proche de l'implémentation réelle du système.
- On peut plus facilement réfléchir sur le *design* de notre système.
- Très modulaire.

Les désavantages :
- Lien moins clair avec la solution.

De plus, on peut voir comme un *avantage* ou *inconvénient* le fait de pouvoir voir l'évolution des signaux entre chaque bloc plutôt qu'une sorte de boite noire "*entrée-sortie*". De plus, on peut réaliser de bien des manières des circuits.

3.7.5 Représentation d'état

Dans ce type de représenation, on a état x qui est un *vecteur* comportant toutes les infos internes de notre système. On entrée u qui est un *signal* extérieur affectant le système. Finalement on a une sortie y qui est un signal qu'on peut accéder depuis l'extérieur.

$$\begin{cases} \text{évolution : } \frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ \text{sortie : } Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{3.15}$$

Solution

La solution *homogène* de $e^{\lambda_i t}$ avec λ_i étant les valeurs propres de l'équation. Si la partie réelle des racines est négative pour tout λ_i.

État non-unique

Avec cette représentation, on peut facilement modifier les vecteurs et signaux pour rendre les équations plus simples. Cela n'a aucun impacte et rend les équations plus logiques pour un certain sens "*réel*".

$$\begin{cases} z = Tx \Rightarrow \frac{d}{dt}z = T\frac{d}{dt}x = TAT^{-1}z(t) + TBu(t) \\ y = Cx(t) + Bu(t) = CT^{-1}z(t) + Du(t) \end{cases} \tag{3.16}$$

Si la matrice A est diagonalisable, on peut réaliser un **découplage** et obtenir ainsi un mode dit *découplé*. On peut également faire des *blocs de Jordan* pour diagonaliser le tout :

$$\frac{d}{dt}z_i = \lambda_i z_i + \tilde{B}_i u \tag{3.17}$$

3.7.6 Passage de représentation

3.7.7 Temps discret

Pour passer du temps continu au temps discret, il faut transformer $\frac{d}{dt}$ en l'opérateur de *décalage* D :

$$Dx[n] = x[n-1] \tag{3.18}$$

Ce qui nous permet d'établir l'équation de *différence*

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k u[n-k] \\ p(D)y = q(D)u \end{cases} \tag{3.19}$$

Ce qui nous donne pour solution homogène :

$$y_H[N] = \sum_i c_i r_i^n \tag{3.20}$$

On a une décroissance donc *stabilité* si $|r_i| < 1$ et une croissance si $|r_i| > 1$
De plus, on remplace le bloc *intégrateur* du temps discret en bloc D^{-1}. La ré-écriture de l'équation 3.16 en temps discret :

$$\begin{cases} x[n+1] = Ax[n] + Bu[n] \\ y[n] = Cx[n] + Du[n] \end{cases} \tag{3.21}$$

On approxime un système en temps *continu* en temps *discret* ssi :

$$A_d \approx A_c \Delta t \text{ si } \Delta t \text{ petit} \tag{3.22}$$

3.7.8 Résumé

1. Réponse impulsionnelle, universelle mais peu maniable $\Rightarrow$ On voit que l'entrée et sortie et **Pas de CI**
2. Équation différentielle entrée-sortie $\Rightarrow$ On voit que l'entrée et sortie et on a des **CI**
3. Représentation d'état (matrice) $\Rightarrow$ On voit l'intérieur et on a des **CI**
4. Schéma Bloc (très concret) $\Rightarrow$ On voit l'intérieur et on a des **CI**

3.7.9 Existence des systèmes LIT

Une forme usuelle des systèmes LIT dans la vraie vie est de type $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$.
Invariance temporelle : tout système fait face à l'usure mais on estime que sur la période d'observation, l'usure est minime et peut être ignorée.
Linéarité : aucun système n'est pas linéaire. Cela peut être dû à des *imperfections* ou si on augmente *énormément* l'entrée ce qui change le comportement du système.