UCLouvain

Résumé de LINFO1123

compilation du 10 mars 2023

Thomas Debelle

Juin 2023

Table des matières

Préface

Bonjour à toi !

Cette synthèse recueille toutes les informations importantes données au cours, pendant les séances de tp et est amélioré grâce au note du Syllabus. Elle ne remplace pas le cours donc écoutez bien les conseils et potentielles astuces que les professeurs peuvent vous donner. Notre synthèse est plus une aide qui on l'espère vous sera à toutes et tous utiles.

Elle a été réalisée par toutes les personnes que tu vois mentionné. Si jamais cette synthèse a une faute, manque de précision, typo ou n'est pas à jour par rapport à la matière actuelle ou bien que tu veux simplement contribuer en y apportant ta connaissance ? Rien de plus simple ! Améliore la en te rendant ici où tu trouveras toutes les infos pour mettre ce document à jour. (*en plus tu auras ton nom en gros ici et sur la page du github*)

Nous espérons que cette synthèse te sera utile d'une quelconque manière ! Bonne lecture et bonne étude.

Chapitre 1

Concepts

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux ensembles, cardinalité et équipotences de ces derniers

1.1 Ensemble

Un ensemble est un *collection* d'objets, *sans répétition*, ces derniers sont appelés *éléments* de l'ensemble. Donc un ensemble peut être des chiffres, des lettres, il peut être vide symbolisé par *void*
On peut réaliser des opérations dessus, on peut déterminer des *sous-ensembles d'ensemble* donc des ensembles issus d'ensemble. On a également une notion s'appelant le *complément* d'un ensemble dénoté $\tilde{A}$

Langage

Un *langage* n'est autre qu'un mot ou bien un ensemble de caractères d'une taille fixée. Une chaine vide est écrite via le caractère "ϵ".
On forme un langage via un *alphabet* qui n'est autre qu'un ensemble de symboles, on le dénote "Σ".
Tout langage est donc une suite de symbole issue de l'*alphabet*.
Σ^* correspond à l'ensemble des langages formés via l'alphabet.

Relations

Lorsque nous avons deux ensembles appelés A et B, on peut établir une relation appelé R qui nous donne un sous-ensemble AXB On peut représenter la relation par une table.

Fonctions

Lorsque nous avons deux ensembles appelés A et B, on peut avoir ce qu'on appelle une *fonction* F. C'est une relation tel que :

$$\exists a \in A : \exists b \in B : \quad < a, b > \quad \in f \tag{1.1}$$

Il n'existe pas plus d'un b pour un a. Si pour un a il n'existe pas de b, on dit que $f(a)$ est indéfini et donc $f(a) = \perp$ ou *bottom*.

Propriétés des fonctions

— un domaine de fonction ou dom(f) $= a \in A | f(a) \neq \perp$
— une image de fonciton ou image(f) $= b \in B | \exists a \in A : b = f(a)$
— f est dit fonction totale si dom(f) $= A$
— f est dit fonction partielle si dom(f) $\in A$

— f est surjectif ssi image(f) = B autrement dit, tout élement est associé à minimum 1 élément dans B.
— f est injectif ssi $\forall a, a' \in A : a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$ autrement dit on ne fait correspondre qu'au plus un élément de A dans B.
— f est bijectif s'il combine *surjectif* et *injectif*

Intéressons nous aux extensions qui est le fait de rajouter une fonction qui ne définit un élément de B pas encore défini.

$$\forall x \in A : g(x) \neq \perp \Rightarrow f(x) = g(x) \tag{1.2}$$

f à la même valeur que g partout où g est défini.

Définition d'une fonction

Comme dit précédemment, une fonction est défini par sa table. On va souvent utiliser une description de la table qui permet que celle-ci soit clair et bien défini. De plus, on a pas besoin de savoir comment calculer ceci.
On peut également définir une table via une fonction ou un algorithme.

1.2 Ensemble énumérable

On dit que 2 ensembles ont le même cardinal (A et B) ssi il existe une bijection entre ces 2 ensembles. Donc chaque élément de A correspond à un élément de B.

On dit d'un ensemble qu'il est dénombrable ssi il est fini ou il existe une bijection entre l'ensemble $\mathbb{N}$ et cet ensemble.

Exemples

— L'ensemble $\mathbb{Z}$
— L'ensemble des nombres pairs
— Des paires d'entiers
— L'ensemble des programmes Java

Propriétés

Tout sous-ensemble d'ensemble énumérable est *énumérable*. L'union et l'intersection d'ensembles énumérables est *énumérable*.

En s'intéressant à l'ensemble des programmes informatiques, on se rend compte que c'est une *ensemble énumérable infini*. De plus, les programmes informatiques ne considèrent que des choses *énumérables*.

1.3 Cantor

Le théorème de *Cantor* nous dit que l'ensemble des nombres entre 0 et 1 compris est *non énumérable*.

$$E = x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 1 \tag{1.3}$$

Preuve

Pour prouver cela, on va réaliser une table et on va réaliser une *diagonalisation de Cantor*.

	chiffre 1	chiffre 2	...	chiffre $k+1$	...
x_0	x_{00}	x_{01}	...	x_{0k}	...
x_1	x_{10}	x_{11}	...	x_{1k}	...
...	...	...	...	...	...
x_k	x_{k0}	x_{k1}	...	x_{kk}	...
...	...	...	...	...	...

Ensuite, on va définir notre nombre de la diagonale qui vaut $d = 0.x_{00}x_{11}...x_{kk}$. De cet valeur, on va créer une valeur d' qui a comme propriété $x_{kk} \neq x'_{kk} \forall k$.
Mais, on doit stocker notre valeur d' dans la table. On la stock à p ce qui donne $d' = 0.x'_{p0}x'_{p1}...x'_{pp}$ mais à cause de la construction de $d = 0.x_{00}x_{11}...x_{pp}$. Par construction, $x'_{pp} \neq x_{pp}$ mais cela ne peut être respecté. Donc, **il n'y a pas** de *bijection* des $\mathbb{N}$ vers cet ensemble. Donc cet ensemble est *non énumérable*.

Autre ensemble non énumérable

- L'ensemble des $\mathbb{R}$.
- L'ensemble des sous-ensemble de $\mathbb{N}$.
- L'ensemble des chaines infinies de caractères d'un alphabet fini.
- L'ensemble des *fonctions* de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Chose intéressante à noter, comme on a une infinité non énumérable de fonctions $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et un nombre de programme informatique *infini énumérable*. On ne peut résoudre tous les problèmes informatiques donc.

Chapitre 2

Programmes calculables

2.1 Les algorithmes

Un algorithme est un ensemble *d'instructions* qui a pour but de produire un résultat. Donc un algorithme n'est pas une fonction. Il *calcule* une fonction. Un algorithme n'est pas forcément un *programme*, il peut être un *organigramme*. C'est un *ensemble fini d'instructions*. C'est une sorte de *calculateur*. Ici, on va considérer nos algorithmes comme *n'ayant pas de limite* de :

— Taille de données
— Taille d'instructions
— Taille de la mémoire, mais on a une utilisation finie.

2.1.1 Calculabilité

Avant de continuer, il faut définir la *calculabilité* des algorithmes car sans *formalisme*, les algorithmes sont non rigoureux, non exploitables.

Ici, on base cette notion sur celle des *programmes informatiques*. (plus intuitif). Ainsi, on possède **2 univers** celui des *programmes informatiques* et celui des *problèmes*. Pour être plus précis, on se base sur le langage Java et on se limite au fonction $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Ainsi pour les fonctions, on aura **1 entrée** et **1 sortie**. (on peut également généraliser ceci en disant que $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$)

2.2 Fonction calculable

Une fonction est dite *calculable* s'il existe un *programme Java* recevant **1 donnée** étant un nombre $\in \mathbb{N}$ et la fonction va nous retourner la *valeur* de $f(x)$ *si* elle est défini.
Si le programme *ne se termine pas* donc pas défini ou erreur d'exécution on dit que $f(x) = \perp$. On définit bien la notion de calculabilité sur *l'existence d'un programme*. on a 2 types de fonctions

1. Fonction *partielle* calculable : on a *parfois* un résultat
2. Fonction *totale* calculable : on peut *toujours* calculé quelque chose.

2.2.1 Ensemble récursif

Maintenant, on va essayer de déterminer la calculabilité sur *un ensemble de fonctions*. Le principe de décision de *calculabilité* est le principe dit *récursif*.
A est récursif si il existe un programme *Java* qui recevant n'importe quelle donnée sous forme d'un $\mathbb{N}$ fourni comme résultat :

— 1 si $x \in A$
— 0 si $x \notin A$

Donc on est face à un *algorithme* qui calcule si x est dans A ou non. C'est un algorithme complet et se termine toujours. (attention de ne pas confondre *récursif* et *récursivité*)

On dit qu'un ensemble d'algorithme est récursivement énumérable s'il est *récursif* sauf qu'il retourne $\neq 1 \quad x \notin A$ ou ne se termine pas et qu'on puisse énuméré cet ensemble.

Fonctions caractéristiques

Une fonction caractéristique de $A \subseteq N$ et :

$$X_A : N \to N : X_A(x) = 1 \text{ si } x \in A \tag{2.1}$$
$$= 0 \text{ si } x \in A \tag{2.2}$$

C'est une autre manière de déterminer si un ensemble est récursift si X_A est une fonction *calculable*. On dit qu'une fonction est récursivement énumérable ssi il existe une fonction f calculable ayant pour domaine A. Ou bien, on dit que A est vide *ou* l'image de f est A ayant une fonction f *totale* calculable.
Un ensemble récursivement *énumérable* est un ensemble dont la bijection des $\mathbb{N}$ est énumérable et calculable.

Propriétés :
— A récursif $\Rightarrow$ A récursivement énumérable
— A récursif $\Rightarrow$ (N A) récursivement énumérable
— A récursif $\Rightarrow$ (N A) récursif
— A récursivement énumérable et (N A) récursivement énumérable $\Rightarrow$ A récursif
— A fini $\Rightarrow$ A récursif
— (N A) fini $\Rightarrow$ A récursif
— A récursif $\Rightarrow$ $\bar{A}$ récursif

2.3 Thèse de Church-Turing

Comment démontrer qu'une fonction **n'est pas** calculable.
Les 4 grands points de la thèse :

1. Aucun modèle de la notion de fonction calculable n'est plus puissant que les Machines de Turing (ici Java)
2. Toute fonction calculable (au sens intuitif) est calculable par une machine de Turing (ici Java)
3. Toutes les définitions formelles de la calculabilité connues à ce jour sont équivalentes (Théorème)
4. Toutes les formalisations de la calculabilité établies par la suite seront équivalentes aux définitions connues

On établit que Java à accès à une infinité de mémoire (donc physiquement possible). Ainsi, on a P qui est l'ensemble des programmes Java syntaxiquement corrects, qui reçoivent 1 données *entières* et qui retournent un résultat *entier*.
— P est un ensemble récursif (infini dénombrable)
— $P = P_0, P_1, ..., P_k, ...$ sans répétition donc chaque programme est unique.
— Pour simplifier, $f(k) = P_k$
— f est calculable.
— k et P_k représente le même objet

donc on dit que P_k donne le programme k dans l'ensemble P. on dit que φ_k est la fonction mathématique calculé par P_k. Donc on peut avoir $\varphi_m == \varphi_n$ car réalise le même travail mais sont issues de programmes *différents*. $\varphi_k : N \to N$.

2.4 Non calculabilité

Pour rappel :
— Nombre de fonctions de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est **non** dénombrable.
— Nombre de programmes Java est dénombrable.
En programmation, on s'intéresse aux fonctions définies de manière finie, donc on a une infinité dénombrable. Mais si une fonction est définie de manière finie, peut-elle être calculable ?

2.4.1 Problème de l'arrêt

Une fonction prends 2 paramètres : halt : P x N. P est le numéro du programme et N est son entrée.

$$\text{halt}(n, x) = 1 \text{ si } \varphi_n(x) \neq \perp \tag{2.3}$$
$$= 0 \text{ sinon} \tag{2.4}$$
$$\text{halt}(n, x) = 1 \text{ si l'exécution du } P_n \text{ se termine} \tag{2.5}$$
$$= 0 \text{ sinon} \tag{2.6}$$

On a donc une table finie, mais décrite de manière finie donc bien définie. Peut-on la calculer ?

Preuve par l'absurde

	0	1	...	k	...
P_0	halt(0,0)	halt(0,1)	...	halt(0,k)	...
P_1	halt(1,0)	halt(1,1)	...	halt(1,k)	...
...	...	...	...	...	...
P_k	halt(k,0)	halt(k,1)	...	halt(k,k)	...
...	...	...	...	...	...

On va sélectionner les valeurs sur la diagonale et stocker cela comme une variable s'appelant "$diag$". On va donc modifié cette valeur et est représenté par "$diag_{mod}$" qui inverse chaque nombre. (donc $0 \to 1$ et $1 \to 0$) Donc $diag_{mod}$ est calculable sous l'hypothèse que la fonction "halt" l'est.

Donc, il existe un programme Java qui calcule cette "$diag_{mod}$" qu'on trouvera en ligne d. Mais à cause de cela, $diag_{mod}(d) \neq diag(d)$ donc ne peut exister par *définition*.

En conclusion, la fonction "halt" **n'est pas** calculable.

Conclusion

— Aucun algorithme ne permet de déterminer pour tout programme Pn et donnée x si Pn(x) se termine ou non
— Seule possibilité serait d'avoir un langage de programmation dans lequel tous les programmes se terminent. La fonction halt est alors calculable pour les programmes de ce formalisme
— halt non calculable ne signifie pas que pour un programme k donné, halt(k,x) est non calculable
Pour le premier point, on ne peut séparer le soucis en 2 algorithmes car on ne peut changer de programmes selon l'input. Un algorithme donne le **bon résultat** en fonction du résultat.

On dit que halt n'est pas calulable dans le sens où il n'existe pas d'algorithmes **généraux**.

Exemple non-récursif

$$
\begin{aligned}
Halt &= \{(n,x)|\ \text{halt}(n,x) = 1\} && (2.7)\\
&= \{(n,x)|P_n(x)\ \text{se termine}\} && (2.8)\\
K &= \{n|(n,n) \in \text{HALT}\} && (2.9)\\
&= \{n|halt(n,n) = 1\} && (2.10)\\
&= \{n|diag(n) = 1\} && (2.11)\\
&= \{n|P_n(n)\ \text{se termine}\} && (2.12)\\
& && (2.13)
\end{aligned}
$$

Donc K et HALT **ne sont pas** récursifs mais sont récursivement énumérable car si un élément n'appartient pas à K ou HALT, il va boucler mais fournir la bonne solution s'il appartient à ces ensembles.
De plus K est la diagonale de $HALT$.

$\overline{HALT}$ n'est pas récursivement énumérable car on a pas de moyen de prouver qu'un probable n'appartient pas à cet ensemble. pareil pour $\overline{K}$

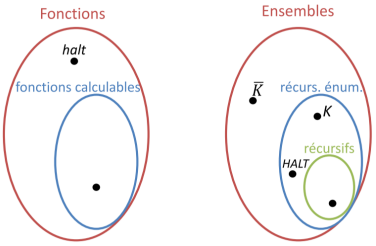


FIGURE 2.1 – Schématisation des fonctions et ensembles de fonctions

Le fait de ne pas pouvoir calculer "halt" nous pose soucis et va ouvrir tout un pan de soucis et limitations.

De plus, on peut faire face à des ensembles **co-récursivement** énumérable. En effet, il existe des ensembles co-récursivement énumérable tel que : $\overline{\mathbf{K}}$ et tous les ensembles *récursifs*.

2.5 Insuffisance des fonctions totales

Pourquoi est-ce utile d'avoir un programme qui tourne en *boucle* ? N'avons-nous pas besoin de fonctions qui donnent un résultat précis tout le temps donc *totale* ?

Imaginons que nous créons un *langage de programmation* qui a que des fonctions totales. Donc, **Halt** est calculable et on a une réponse pour toutes fonctions. Halt serait la fonction constante 1.

Notre langage Q est calculable donc ayant un interpréteur calculable.

2.5.1 Théorème de Hoare-Allison

Donc en résumé de notre langage Q :
— L'interpréteur de ce programme est calculable
— La fonction *halt* est totale et correspond à la fonction constante de 1.
— Mais l'interpréteur n'est pas calculable *dans* Q.

	0	1	...	k	...
Q_0	interpret(0,0)	interpret(0,1)	...	interpret(0,k)	...
Q_1	interpret(1,0)	interpret(1,1)	...	interpret(1,k)	...
...	...	...	...	...	...
Q_k	interpret(k,0)	interpret(k,1)	...	interpret(k,k)	...
...	...	...	...	...	...

La colonne Q correspond à l'ensemble des programmes et la ligne de nombre correspond aux entrées de chaque programme.

Tous les programmes se terminent donc *jamais* $\perp$. On sélectionne la diagonale :

$$diag(n) = interpret(n, n) \tag{2.14}$$
$$diag_{mod}(n) = interpret(n, n) + 1 \tag{2.15}$$
$$Q_l = diag_{mod} \tag{2.16}$$

Et donc, on voit facilement que à la ligne l il y aura un souci avec *diag* et notre entrée à Q_l qui n'est autre que $diag_{mod}$. en effet $diag_{mod}(l) \neq diag(l)$. Donc la fonction *interpret* n'est **pas** calculable en Q.

Le *théorème* nous dit donc que : Si un langage de programmation (non trivial) ne permet que le calcul de fonctions totales, alors :
— l'interpréteur de ce langage n'est pas programmable dans ce langage
— il existe des fonctions totales non programmables dans ce langage
— ce langage est restrictif

Donc si on peut faire un interpréteur d'un langage dans son langage, la fonction *halt* n'est pas totale. Donc c'est soit programmable par lui-même soit fonction totale de halt.

Si on veut qu'un langage de programmation permette la programmation de toutes les fonctions totales calculables, alors ce langage doit également permettre la programmation de fonctions non totales.

De plus, si on avait une fonction qui regarde si des fonctions sont totales, cela pose problème. Cela est impossible et donc cette fonction $tot(n)$ n'est pas récursif.

2.5.2 Interpréteur

Pour qu'un formalisme soit assez puissant, il faut que ce dernier arrive à programmer son propre interpréteur.

$$\exists z \forall n, x : \varphi_z(n, x) = \varphi_n(x) \tag{2.17}$$

Avec φ_z qu'on appelle la fonction universelle. et P_z est le programme universel. Par convention, on appelle $\theta(n, x)$ la fonction universelle.

2.6 Extension des fonctions partielles

Pour l'instant, nous n'avons vu que des fonctions qui soit donnent le bon résultat soit donne $\perp$ et donc boucle. On va réaliser des *extensions*, c'est-à-dire que nous allons retourner la valeur correcte dans les cas possible et un message ou autre chose pour le reste des entrées.

Un *théorème* nous dit que, *Il existe une fonction partielle calculable g telle qu'aucune fonction totale calculable n'est une extension de g.*
Pour prouver cela, on utilise la fonction *nbstep(n,x)* qui correspond au nombre d'instruction avec l'arrêt de $P_n(x)$. ($P_n(x) = \perp$)La preuve se fait pas diagonalisation comme avant (vidéo).

2.7 Théorème de Rice

2.7.1 Réduction à Halt

Pour montrer que f(x) est non calculable on suppose que :
— f(x) est calculable.
— Sous cette hypothèse la fonction halt(n,x) est alors calculable.
— Comme halt(n,x) est enfaite non-calculable, f(x) est également non-calculable.

Raisonnement

Définissons une fonction qui dit que :

$$\begin{aligned} f(n) &= 1 \quad \text{si } \varphi_n(x) = \perp \\ &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

On suppose que $f(n)$ est calculable et on veut montrer que halt est calculable. Pour se faire :

1. On construit (pas exécute) un programme qui dit : $P(z) \equiv P_n(x); print(1)$
2. On obtient le numéro de programme : $d =$ numéro de programme $P(z)$
3. On regarde si le résultat de cette fonction calculable pour créer halt :

```
if F(d) = 1 then
        print(0)  //car on est bottom et cela boucle
else
        print(1)  //car le programme se termine
```

4. Donc on en conclue que cette fonction halt est non-calculable

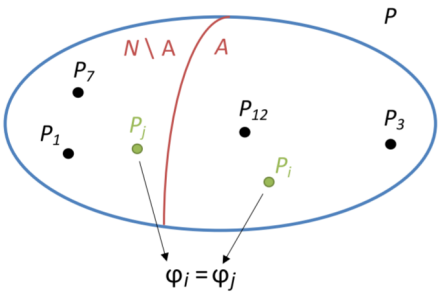
On utilise ce type de démarche pour tout autre fonction du même genre. (on doit impérativement définir le comportement de la fonction)

2.7.2 Théorème

On s'intéresse à comparer des programmes entre eux, savoir si un programme est correct.

Idée de base

Dans l'ensemble des programmes, on va séparer cet ensemble en 2 *sous-ensembles*.



On a que :

$$\begin{aligned} &\text{Soit } A \subseteq \mathbb{N} \\ &\text{Si } A \text{ récursif et } A \neq \varnothing \text{ et } A \neq \mathbb{N} \\ &\qquad \text{Alors } \exists i \in A \text{ et } j \in \mathbb{N} \setminus A : \varphi_i = \varphi_j \end{aligned}$$

Ce qui revient à dire que :

$$\text{Si } \forall i \in A \text{ et } \forall j \in \mathbb{N} : \varphi_i \neq \varphi_j$$
$$\text{Alors } A \text{ non récursif } \textit{ou } A = \varnothing \text{ ou } A = \mathbb{N}$$

De plus, si un programme est récursif, on peut savoir de quel ensemble il est.

Compréhension

1. Si une propriété de programmes, vérifiée par certains programmes mais pas tous, est décidable, alors il existe deux programmes équivalents (calculant la même fonction) dont un vérifie la propriété et l'autre pas
2. Si une propriétéde la fonctioncalculée par un programme est vérifiée par certains programmes, mais pas par tous,
   alors cette propriété ne peut être décidée par un algorithme
3. S'il existe un algorithme permettant de déterminer si un programme quelconque calcule une fonction ayant cette propriété,
   alors toutes les fonctions calculables ont cette propriété ou aucune fonction calculable n'a cette propriété

Voyons plus en détail ce que chacun veule dire :

1. C'est une simple traduction du théorème en français.
2. Cela signifie qu'on ne peut pas vérifier si 2 programmes sont équivalents !
3. Autre façon d'énoncer le théorème de *Rice*.

2.7.3 Exmple

Commençons avec : $A_1 = \{i | \varphi_i \text{ est totale}\}$ (P_i s'arrête toujours)
Donc on sait que $A_1 \neq \varnothing$ car on a une fonction $P_k(x) \equiv print(1)$ et on sait ainsi que $k \in A_1$. Ce n'est pas $A_1 \neq \mathbb{N}$ car $P_l(x) \equiv whiletrue$ n'est pas total ! De plus, notre ensemble A a des fonctions totales et l'ensemble $\overline{A}$ des fonctions non-totales, par construction : $\forall i \in A$ et $\forall j \in \mathbb{N} : \varphi_i \neq \varphi_j$

Via le théorème de *Rice*, A_1 est un ensemble non-vide et non égale à $\mathbb{N}$. On a également prouvé que les fonctions ne sont pas égales entre les 2 *ensembles*. On en *conclut* que l'enseble **n'est pas récursif**.

2.7.4 Analyse du théorème

Bonne nouvelle, on est pas remplaçable (ou presque).

1. Aucune question relative aux programmes, vus sous l'angle de la **fonction** qu'ils calculent, ne peut être décidée par l'application d'un algorithme
2. Les propriétés intéressantes d'un programme concernent la fonctionqu'il calcule, nonpas la forme (syntaxe) du programme
3. La plupart des problèmes intéressants au sujet des programmes sont non calculables

Mauvaise, on ne peut pas automatiser qu'un programme est correct.

2.7.5 Démonstration

Supposons que $A \neq \varnothing$ et $A \neq \mathbb{N}$. Et on suppose que $\forall i \in A, \forall j \in \overline{A} : \varphi_i \neq \varphi_j$ Donc A ne peut être récursif. On va **démontrer** cela.

Pour prouver cela on va utiliser une réduction à *halt*. On fait les choses suivantes :

1. On suppose que A est récursif.

2. Donc halt est calculable mais ce n'est pas le cas.
3. Donc est n'est pas récursif.

On va donc séparer notre ensemble des Programmes et on effectue ces manipulations :

1. $\mathbb{N}$ en A et $\overline{A}$. On dit que $P_k(x) \equiv whiletrue$ et que $k \in \overline{A}$
2. On sait que $A \neq \varnothing, \exists m \in A$ (on sait que c'est différent du vide donc il existe au moins 1 programme quelconque)
3. On peut affirmer que (par hypothèse de récursif) $\varphi_k \neq \varphi_m$
4. On crée un programme pour *halt* :
   — On construit : $P(z) \equiv P_n(x); P_m(z)$
   — On assigne un numéro de programme qu'on a construit : $d = \#P(z)$. Cela dépend de ma donnée n et x.
   — on exécute un programme qui regarde si $d \in A$ il print 1 qu'il appartient sinon il imprime 0.
5. On exécute le programme : si $P_n(x)$ se **termine** alors $\varphi_d = \varphi_m$. **Sinon** il boucle et est $\varphi_d = \varphi_k = \perp$
6. Donc aucun programme dans A et $overline A$ n'est équivalent. Donc tester que $\varphi_d = \varphi_m$ est la même chose que tester que $d \in A$ et inversement.
7. Donc, Halt est non calculable car il boucle, donc A est bien **non récursif**.

Chapitre 3

Questions Test d'entrée

3.1 TP1

1. Effectivement, il existe une bijection entre les N et les nombres impairs positifs → en somme il existe une fonction qui transforme les N en impair positif
2. J'imagine qu'il y a une bijection mais je ne vois pas quel formule passant de N aux impairs existent car c'est le propre des nombres impairs
3. Même raisonnement que la question 1
4. La fameuse formule qui lie N et Q car Q est juste une paire de N
5. Effectivement, sachant la diagonalisation de Cantor il est simple de le prouver
6. Pour N dans N il en existe une infinité et l'ensemble d'arrivé ne change pas grand-chose car on s'intéresse au nombre de fonction.
7. Effectivement, on a un nombre fini de langage donc de mot. Cela est dû grâce à l'alphabet fini et la longueur fixe. Donc on sait énumérer
8. Question typique vu au cours. En effet comme on a une infinité et il n'existe aucune bijection depuis les naturels etc.
9. Même cardinalité = bijection, il ne peut y avoir de bijection entre un ensemble non énumérable et énumérable
10. Une infinité de nombre mais effectivement même cardinalité car tous peuvent être ramené aux naturels.

3.2 TP2

1. Effectivement, on ne doit pas être en capacité de coder l'algorithme pour que la fonction soit calculable.
2. Nombre premier est récursif car on a le crible d'eratosthène.
3. Si un ensemble **X** est récursif (donc donne 1 ou 0) alors $\bar{X}$ l'est également car il inverse les 1 et 0.
4. Si **X** est récursivement énumérable (donne 1 ou quelque chose d'autre mais pas 1) et que son opposé $\bar{X}$ est récursivement énumérable. Alors bien évidemment **X** est récursif.
5. Oui, trivial.
6. Non, juste au simple fait que si **X** est récursivement énumérable alors $\bar{X}$ ne peut être récursivement énumérable.
7. Vrai car on a une fonction calculable car ce sont des combinaisons linéaires de calculables.
8. Voir sous-section 2.2.1.

9. Oui car être énumérable c'est dire qu'on peut compter tous les résultats même si ça prend un temps infini.
10. Voir sous-section 2.2.1.

3.3 TP3

1. En effet, si on a que des fonctions totales, on sait qu'on aura toujours une réponses pour n'importe quelle input.
2. Oui, le théorème de *Hoare-Allison* ne dit pas l'inverse et pour le sous langage :

   ```
   P = return 1;
   ```

3. Mais si on peut avoir la fonction halt en L, on ne peut avoir sa fonction *interpret*
4. Mais, on peut calculer cette fonction *interpret* avec un langage de programmation qui n'est pas restrictif.
5. Effectivement on ne peut pas calculer toutes les fonctions totales avec L.
6. Il existe un langage qui peut calculer sa fonction halt et son interpréteur (le langage vide trivial)
7. Effectivement, ne pas être récursif n'empêche pas d'être récursivement énumérable.
8. Faux exemple : $\overline{\mathbf{K}}$. (voir 2.4.1)
9. Non, on peut imaginer 2 fonctions non récursives qui se "*complètent*" et comblent les lacunes de chacune. Exemple : K et $\overline{K}$
10. Non, on peut imaginer une intersection qui ne comportent que des entrées avec une réponse.

Chapitre 4

QCM

4.1 S5

1. L'ensemble des programmes Java calculant une fonction f telle que $f(10) = 10$ n'est pas récursif (car ici on caractérise que fait le programme !)
2. L'ensemble des programmes Java calculant une fonction f telle que $f(10) = 10$ est un ensemble récursivement énumérable. (n'a aucun rapport avec Rice ! ! !)
3. Toute propriété relative aux programmes est calculable (théorème de rice parle des propriétés calculés par la fonction pas lié à la fonction
4. Si A est un sous-ensemble (strict et non vide) récursif de programmes Java, alors toute fonction calculée par un programme de A n'est pas aussi calculée par un programme du complément de A (car il existe pas qu'il existe pour tout ! ! !)
5. Soit la fonction $revenu1_yde(n)$ = le revenu imposable de Yves Deville à l'année n. Si n est inférieur à 1960 ou supérieur à 2060, le résultat de cette fonction est $\perp$. Par hypothèse, une personne décédée a un revenu de 0. Cette fonction est-elle calculable ? (Car n'est définie que pour 101 inputs. Calculable car nb fini de point à calculer. Domaine finie == calculable au sens théorique du terme)
6. Soit la fonction $revenu2_yde(n)$ = le revenu imposable de Yves Deville à l'année n. Par hypothèse, une personne pas encore née ou décédée a un revenu de 0. Cette fonction est-elle calculable ? (car est constante sauf pour un certain input. Ici on n'est jamais bottom donc il existe toujours une fonction)
7. Un programme Java étant fini, l'exécution de ce programme sera aussi finie (car il peut boucler) Soient les programmes P_32
8. (n) dont le code est « print(1) » et $P_57(n)$ dont le code est « print(0) ». Cochez les affirmations correctes (on peut pas varier de l'un à l'autre)
9. Une extension d'une fonction partielle calculable est toujours calculable (faux car il existe des fonctions qui ne peuvent être étendue ex : HALT)
10. L'ensemble des sous-ensembles des entiers est énumérable (car autant que les réelles, on a besoin d'une chaine infinie de caractère)
11. Il existe un ensemble infini de chaînes finies de caractères (A-Z) qui est non énumérable (on peut créer des chaines de caractères de chiffres et ce sera fini)
12. Il existe un ensemble infini de chaînes finies de caractères (A-Z) qui est non récursivement énumérable (ensemble non récursif $\rightarrow$ complément K $\rightarrow$ c'est une représentation
13. La fonction $halt(18, x)$ est calculable (cela dépend de la numérotation choisie des programmes Java)
14. L'ensemble des fonctions non calculables est énumérable (Faux car infinité)

15. Soit A est un ensemble (infini) récursivement énumérable. Si $B \subseteq A$, alors B est aussi récursivement énumérable. (Faux car le sous-ensemble peut prendre que des choses bottoms)
16. Il existe des langages de programmation (non triviaux) dans lesquels toutes les fonctions calculées sont totales (Vrai, mini-Java ne calcule que des fonctions totales et calculables. Toutes les fonctions sont totales)
17. Si une fonction f est calculable, alors toute fonction g dont f est une extension est calculable (Faux, $\rightarrow$ le théorème de l'extension parle pas de ça. Car g peut être bottom et donc ne pas être calculable (genre 1 si élément appartient au complément de K ou $\perp\rightarrow$ fonction pas calculable et f est une extension))
18. Soit le programme numéro n calculant la fonction factorielle ($f(x) = x!$ si x non négatif et $f(x) = \perp$ si x négatif,). Cochez les affirmations correctes :
    (a) $\varphi_l(n)$ calcule bien quelque soit l'énumération choisie pour les programmes
    (b) Pas énumération car n est positif
    (c) Une infinité de programmes calculent la même fonction
    (d) Par hasard
    (e) Pas injectif car ne fait d'office correspondre au max 1 une fois. (penser à 0! Et 1! Même réponse)