أسئلة متنوعة في التركيبات - 1

فريق AoMP • مهدي البيك

بسم الله الرحمن الرحيم

هذا الملف يحوي 5 أسئلة من IMO Shortlist بمستوى C1-3، فإذا كنت تفكر في المشاركة في الـIMO فيجب أن تستطيع حلها.

١- هناك $n \geq 1$ قرية مرتبة على طريق من اليسار إلى اليمين، لكل قرية جرافة يسرى (في الجهة اليسرى من القرية وموجهة لليسار) وجرافة يمنى بالمثل، أحجام الجرافات مختلفة مثنى مثنى، في كل مرة تتقابل جرافة يمنى مع أخرى يسرى، تدفع أكبرهما الأخرى إلى خارج الطريق، لكن الجرافات غير محمية من الخلف، فإذا وصلت جرافة إلى الجزء الخلفي لجرافة أخرى فستدفعها إلى الخارج. لتكن A,B قريتان، وB في الجهة اليمنى من A، نقول أن القرية A تستطيع طرح B بعيدًا إذا كانت الجرافة اليمنى لـA تستطيع الوصول لـB طاردةً كل الجرافات التي تلتقي بها في طريقها، بالمثل B تستطيع طرح A بعيدًا إذا استطاعت جرافة B اليسرى بلوغ A. أثبت أنه يوجد بالضبط قرية واحدة لا يمكن طرحُها بعيدًا.
(IMO Shortlist 2015 C1)

٢- اخترنا عددين صحيحين موجبين $n > k$، هناك شخصان A,B وكلاهما يعرفان قيم n, k، يختار A عددًا له n خانة بالنظام الثنائي، ويكتب على ورقة جميع الطرق لتغيير k خانة منه

(مثلاً، إذا كان $n = 3, k = 1$ واختار A العدد 101 فسيكتب الأعداد 001,111,100). بعد ذلك يأتي B ويحاول تخمين العدد الذي اختاره A، حيث يسمح له بالنظر إلى الأعداد المكتوبة على الورقة. أوجد أقل عدد ممكن لتخمينات B بدلالة n, k.
(IMO Shortlist 2016 C1)

٣- يقال عن مجموعة منتهية من النقاط في المستوى S أنها "متوازنة" إذا كان لكل نقطتين مختلفتين $A, B \in S$ يوجد نقطة $C \in S$ بحيث $AC = BC$. كما يقال عن S أنها "عديمة المراكز" إذا كان لكل $A, B, C \in S$ لا يوجد $P \in S$ بحيث $PA = PB = PC$.

a. أثبت أنه لكل $n \geq 3$ توجد مجموعة متوازنة مكونة من n نقطة.

b. أوجد جميع الأعداد الصحيحة $n \geq 3$ بحيث توجد مجموعة متوازنة عديمة المراكز مكونة من n نقطة.

(IMO Shortlist 2015 C2)

٤- لمجموعة منتهية من الأعداد الصحيحة الموجبة A، يقال عن تقسيمها إلى مجموعتين جزئيتين منفصلتين غير خاليتين A_1, A_2 أنه "تقسيم جيد" إذا كان المضاعف المشترك الأصغر لعناصر المجموعة A_1 يساوي القاسم المشترك الأكبر لعناصر المجموعة A_2. أوجد أقل قيمة ممكنة ل n بحيث يوجد

مجموعة مكونة من n عدد صحيح موجب، ويمكن تقسيمها ل 2015 تقسيم جيد مختلف.
(IMO Shortlist 2015 C3)

٥- ليكن n عددًا صحيحًا موجبًا أولي نسبيًا مع 6. لوَّنا كل رأس من رؤوس مضلع منتظم ذو n ضلع بأحد 3 ألوان، بحيث نكون استخدمنا كل لون عددًا فرديًا من المرات. أثبت أنه يوجد مثلث متطابق الضلعين، رؤوسه ملونة بألوان مختلفة.
(IMO Shortlist 2016 C3)

تم بحمد الله

وفقكم الله لكل خير

نستقبل الاستفسارات والتعليقات والملاحظات والاقتراحات على

Aomp.team@gmail.com