Problem 3.1. Determine all infinite sequences $(a_1, a_2, \ldots)$ of positive integers satisfying

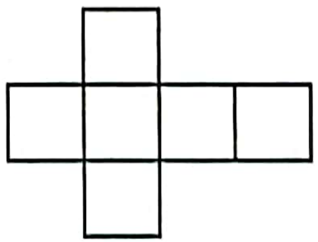
$$a_{n+1}^2 = 1 + (n + 2022)a_n$$

for all $n \geq 1$.

Problem 3.2. Point M on side AB of quadrilateral $ABCD$ is such that quadrilaterals $AMCD$ and $BMDC$ are circumscribed around circles centered at O_1 and O_2 respectively. Line O_1O_2 cuts an isosceles triangle with vertex M from angle CMD. Prove that $ABCD$ is a cyclic quadrilateral.

Problem 3.3. Let p be a prime number and let m, n be integers greater than 1 such that $n \mid m^{p(n-1)} - 1$. Prove that $\gcd(m^{n-1} - 1, n) > 1$.

Problem 3.4. The *sword* is a figure consisting of 6 unit squares presented in the picture below (and any other figure obtained from it by rotation).



Saudi International Olympiad Teams
Math Team
L3,4, test 3–, January 9, 2022

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity

السؤال الأول

عين كل المتتابعات الغير منتهية $(a_1, a_2, \ldots.)$ للأعداد الصحيحة الموجبة التي تحقق لكل $n \geq 1$ أن :

$$a^2_{n+1} = 1 + (n+2022)a_n$$

السؤال الثاني

النقطة M على الضلع AB في الشكل الرباعي $ABCD$ بحيث الرباعيان $AMCD, BMDC$ مماسيين لدائرتين مراكزهما O_1, O_2 تواليًا (كل من الدائرتين تمسان أضلاع رباعي من الداخل). المستقيم O_1O_2 يقطع ضلعي الزاوية CMD في نقطتين تشكلان مع النقطة M مثلثًا متطابق الضلعين رأسه M. أثبت أن الشكل $ABCD$ رباعي دائري.

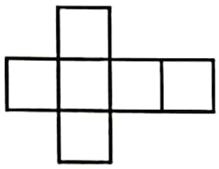
السؤال الثالث

ليكن p عددًا أوليًا، وليكن m, n عددين صحيحين أكبر من 1 بحيث $n \mid m^{p(n-1)} - 1$.

أثبت أن $\gcd(m^{n-1} - 1, n) > 1$.

السؤال الرابع

ليكن "السيف" شكلًا مكونًا من 6 مربعات وحدة كما في الصورة أدناه (وأي شكل آخر يمكن الحصول عليه منه من خلال الدوران).



عين أكبر عدد من السيوف التي يمكن قطعها من رقعة ورقية 6×11 مقسمة لمربعات وحدة (كل سيف سيتكون من 6 مربعات منها).

الزمن 4 ساعات ونصف
كل سؤال 7 نقاط
مع أطيب التمنيات بالتوفيق