TEAM SELECTION TEST
BALKAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

Day 2, April 8 2021

Problem 1. There are $n \geq 2$ positive integers written on the whiteboard. A move consists of three steps: calculate the least common multiplier N of all numbers then choose any number a and replace a by $\frac{N}{a}$.

Prove that, using a finite number of moves, you can always make all the numbers on the whiteboard equal to 1.

Problem 2. Let ABC be an acute triangle with $AB < AC$ and inscribed in the circle (O). Denote I as the incenter of ABC and D, E as the intersections of AI with $BC, (O)$ respectively. Take a point K on BC such that $\angle AIK = 90°$ and KA, KE meet (O) again at M, N respectively. The rays ND, NI meet the circle (O) at Q, P. Prove that the quadrilateral $MPQE$ is a kite.

Problem 3. Let a, b, and c be positive real numbers. Prove that

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a + b + c)^3.$$

Problem 4. A set of n points in space is given, no three of which are collinear and no four of which are co-planar (on a single plane), and each pair of points is connected by a line segment. Initially, all the line segments are colorless. A positive integer b is given and Alice and Bob play the following game. In each turn Alice colors one segment red and then Bob colors up to b segments blue. This is repeated until there are no more colorless segments left. If Alice colors a red triangle, Alice wins. If there are no more colorless segments and Alice hasn't succeeded in coloring a red triangle, Bob wins. Neither player is allowed to color over an already colored line segment.

(1) Prove that if $b < \sqrt{2n-2} - \frac{3}{2}$, then Alice has a winning strategy.
(2) Prove that if $b \geq 2\sqrt{n}$, then Bob has a winning strategy.

السؤال الأول

تم كتابة $n \geq 2$ عددًا صحيحًا موجبًا على سبورة. تتكون الحركة من ثلاث خطوات: احسب المضاعف المشترك الأصغر N لكل الأعداد، واختار أي عدد وليكن a واستبدله بالعدد $\dfrac{N}{a}$.

أثبت أن بعد عدد محدود من الحركات يمكنك أن تجعل كل الأعداد على السبورة تساوي 1.

السؤال الثاني

ليكن ABC مثلثًا حاد فيه $AB < AC$ ودائرته المحيطة (O). لتكن I مركزه الداخلي، D, E هما نقطتي تقاطع AI مع $BC, (O)$ تواليًا. بأخذ نقطة K على BC بحيث $\angle AIK = 90°$ و KA, KE يقطعان (O) ثانية في M, N تواليًا. الشعاعان ND, NI يقطعان (O) ثانية في Q, P . أثبت أن الشكل الرباعي $MPQE$ طائرة ورقية.

السؤال الثالث

لتكن a, b, c أعداد حقيقية موجبة. أثبت أن

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a + b + c)^3$$

السؤال الرابع

معطى مجموعة من n من النقاط في الفراغ. لا توجد ثلاث منها على استقامة واحدة ولا توجد أربع منها مستوية (على مستوى واحد) ، وكل زوج من النقاط متصل بقطعة مستقيمة. في البداية كل القطع المستقيمة عديمة اللون. معطى عدد صحيح موجب b ويلعب أليس وبوب اللعبة التالية: في كل جولة يقوم أليس بتلوين قطعة واحدة باللون الأحمر ثم يلون بوب قطع يصل عددها إلى b قطعة باللون الأزرق. يتكرر هذا حتى لا يتبقى المزيد من القطع عديمة اللون. يفوز أليس إذا تمكن من تلوين مثلث أحمر، بينما يفوز بوب إذا لم يكن هناك المزيد من القطع عديمة اللون ولم ينجح أليس في تلوين مثلث أحمر. لا يُسمح لأي لاعب بإعادة تلوين قطعة مستقيمة ملونة بالفعل. أثبت أن:

i) إذا كانت $b < \sqrt{2n-2} - \dfrac{3}{2}$ فإن أليس لديه إستراتيجية للفوز.

ii) إذا كانت $b \geq \sqrt{n}$ فإن بوب لديه إستراتيجية للفوز.

الزمن 4 ساعات ونصف

مع أطيب التمنيات بالتوفيق