كلمات قليلة عن البرهان

البرهان ليس أكثر من مناقشة منطقية محاولة لمسك الماء. لا يوجد شكل محدد للبرهان على الصفحة. ولكن بقدر ما تضع ما تحاول أن تعرضه بدقة وتجعل أفكارك منطقية ومتسلسلة يعتبر ذلك برهاناً.

لماذا نثبت الأشياء؟

غالباً، ما يعتبره الرياضيون برهاناً يختلف تماماً عما يرضي العامة. كيف يمكن أن نقول أن الكلام جيد بما يكفي ليعتبر برهاناً؟

تخيل أن لديك أخت صغيرة مزعجة (ولكنها ذكية) دائماً تسألك "لماذا ذلك" أو "كيف عرفت ذلك" ، وعندما تقول لها أن ذلك شيء واضح تسألك "كيف ذلك" . إذا كانت إجابتك بعد ذلك كافية لإقناعها فإن ذلك يعتبر برهاناً.

ولكن لماذا نثبت الأشياء؟ قبل أن نذهب بعيداً . حاول الإجابة على

مسألة (١): بفرض أن لدينا 60 كرة بيضاء في صندوق أبيض، 60 كرة سوداء في صندوق أسود. خذ 20 كرة من الصندوق الأبيض وضعها في الصندوق الأسود، ثم اخلطها مع الكرات السوداء جيداً. بعد ذلك خذ 20 كرة (غالباً سيكون بعضها أسود وبعضها أبيض) من الصندوق الأسود ثم ضعها في الصندوق الأبيض. في النهاية أيهما أكبر عدد الكرات السوداء في الصندوق الأبيض أم عدد الكرات البيضاء في الصندوق الأسود؟

تمرين: بفرض أن لدينا كوب أبيض به حليب، وكوب أسود به شاي بنفس الكمية. أخذنا 3 ملاعق حليب من الكوب الأبيض ووضعناها في الكوب الأسود وخلطناها جيداً، ثم وضعنا 3 ملاعق من الخليط في الكوب الأبيض.
أي نسبة أكبر : الشاي إلى الحليب في الكوب الأبيض أم الحليب إلى الشاي في الكوب الأسود؟

البرهان بالتناقض

نعم البرهان هو كلام منطقي، ولكن ماذا نفعل عندما نواجه مسألة ولا نعرف كيف نبدأ البرهان؟
يوجد الكثير من الحيل التي يستخدمها الرياضي، واحدة من أقدمها ولا تزال الأكثر شيوعاً، هي البرهان بالتناقض،كالتالي:

- نفرض أن المطلوب خطأ.
- باستخدام سلسلة من الخطوات المنطقية نثبت أن هذا الفرض يقود لنتيجة مستحيلة.
- نستنتج أن الفرض خطأ وبالتالي المطلوب صحيح.

نظرية(١): يوجد عدد لا نهائي من الأعداد الأولية.

برهان إقليدس : بفرض المطلوب خطأ، وبالتالي يوجد عدد محدود من الأعداد الأولية، وبالتالي يمكن كتابتها بالقائمة

$p_1, p_2, \dots, p_k$ ، الآن نكون العدد N كالتالي

$$N = p_1 . p_2 \dots p_k + 1$$

الآن بقسمة N على كل من الأعداد الأولية في القائمة سيكون الباقي 1. وبالتالي N لا يقسمه أي منها ، ولكن $N > 1$ وبالتالي له قاسم أولي. وذلك لأن كل عدد صحيح أكبر من الواحد له قاسم أولي، ولأن قائمتنا تحتوي كل الأعداد الأولية فإن N نفسه لا بد أن يكون أولياً وهو من خارج القائمة وهذا تناقض. وبالتالي الفرض خطأ، ويوجد عدد لا نهائي من الأعداد الأولية.

نظرية(٢): $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي. بمعنى لا يمكن كتابته في صورة نسبة بين عددين صحيحين.

برهان أرسطو: بفرض أن المطلوب خطأ بمعنى أن $\sqrt{2}$ عدد نسبي أبسط صورة له $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ حيث a, b عددان صحيحان ، $\gcd(a, b) = 1$. بتربيع الطرفين نحصل على $2 = \frac{a^2}{b^2}$ ومنها $a^2 = 2b^2$ وبالتالي a عدد زوجي وليكن $a = 2k$ ومنها $4k^2 = 2b^2$ ومن ثم $2k^2 = b^2$ وبالتالي b عدد زوجي أيضاً ، وهذا يناقض كون a, b أوليان نسبياً، وأن $\frac{a}{b}$ في أبسط صورة . وبالتالي $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي.

على الهامش: برهان أرسطو، يبدو قد ظهر قبله ل هيباسوس أحد أعضاء المجتمع الفيثاغورسي. وإكتشافه كان يهدم معتقد فيثاغورس وأتباعه (معتقد رياضي فلسفي ديني) أن كل الأعداد نسبية. وكان الأعضاء قد أقسموا على قدسية الفكرة. ولكن ظهور برهان هيباسوس يضعف الفكرة. والعقاب كان سريعاً كما تقول الأسطورة، فقد شُنق أو أُغرق بواسطة باقي الأعضاء. تخيل من فكَّر فقط أن $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي قوبل بهذه الوحشية. أليس من اللطيف أننا نتكلم الآن بحرية عن الأعداد غير النسبية؟

تعليق: الشئ العظيم في البرهان بالتناقض أنه يعطينا أساس نبني عليه، تخيل أننا عكسنا إتجاه البرهان أنه يوجد عدد لا نهائي من الأعداد الأولية، كيف ومن أين نبدأ؟! برهان إقليدس بالتناقض بدأمن افتراض ملموس " يوجد عدد محدود من الأعداد الأولية". فأمكنه أن يحصرهم في قائمة، يسميهم، يتعامل حسابياً معهم. بالمثل في برهان أرسطو أن $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي، بدأ بافتراض أن $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ فأعطاه ذلك عددين معينين a, b ليتعامل معهم.

عموماً ، لاختبار هل البرهان بالتناقض يعمل بشكل جيد في مسألة معينة، اسأل نفسك: " لو فرضت المطلوب خطأ هل هذا سيعطينا شيء ملموس لابني عليه وابدأ منه كلامي؟"

تدريب (١): اثبت أن $\sqrt{3}$ عدد غير نسبي. ماذا عن $\sqrt{p}$ ، p عدد أولي؟

تدريب (٢): اثبت أن لا يوجد أصغر عدد نسبي موجب.

تدريب (٣): اثبت أن مجموع عددين أحدهما نسبي والآخر غير نسبي هو عدد غير نسبي. ماذا عن مجموع عددين غير نسبيين؟

براهين الإمكانية والإستحالة

يبدو في المطلق أن مثال واحد ليس برهاناً، وهذا الكلام ليس صحيحاً تماماً، فالبرهان يعتمد على ما نريد أن نثبت، فإذا كنت تريد أن تثبت أن شيئاً ما دائماً صحيح، فيجب أن يكون البرهان عاماً . على الجانب الآخر إذا كنت تريد إثبات أن شيئاً ممكناً، فإن مثال واحد يمكن إيجاده يعتبر برهاناً. مثلاً إذا كنت تريد أن تفوز في مباراة بشكل مؤكد، عليك إيجاد طريقة واحدة للفوز وخطة لتحقيقها(ربما يكون هناك خطط أخرى تحقق الفوز ولكن لا أحد يهتم بها بعد أن يفوز فعلاً). هذا البرهان يسمى البرهان الإنشائي. وهذه أمثله على هذا النوع من البراهين.

تدريب: يوجد 8 في حفلة. اثبت أنه من الممكن لكل واحد منهم أن يصافح 3 أشخاص بالضبط.

المثال المضاد ليس بالضرورة سيئ

يوجد نوع آخر مهم جداً من الأمثلة يعتبر برهاناً ، وذلك عندما تريد أن تثبت أن أن عبارة ليست دائماً صحيحة. كل ما تحتاجه هو مثال واحد تكون فيه العبارة خطأ ويكون هذا برهان لإدعائك ويسمى مثال مضاد.

مثال: اثبت أو انفي أن كل نظام من n معادلة فيها n متغير له حل وحيد.

البرهان: الإدعاء خاطئ.

مثال مضاد نظام المعادلتين $x-y=x, x+y=x$ فيه متغيران وعدد لا نهائي من الحلول $(x,0)$ كل قيمة ل x تعين حل.

كما تلاحظ يوجد أمثلة أخرى لإثبات خطأ الإدعاء ولكن لا داعي للبحث عنها. نظام واحد لا يحقق الإدعاء يكفي لإثبات خطأ الإدعاء.

هل من الممكن إثبات أن شيئاً مستحيل:

لاثبات أن شيئاً ما ممكناً كل ما عليك أن توضح طريقة واحدة لامكانيته. ولكن كيف نثبت أن شيئاً ما مستحيل؟ قبل ذلك عليك أن تحاول في المثال التالي:

مسألة (٢): يوجد 9 أشخاص في حفلة. اثبت أن من المستحيل لكل منهم أن يسلم على 3 أشخاص آخرين بالضبط؟

– بدلاً من الخوض في حالات دعنا نرجع خطوة للخلف وننظر للصورة كاملة، ونبحث عن جانب أساسي في المسألة_ نمط، عدد، زوجية_ والذي لا يتغير أياً كانت التفاصيل. ويسمى هذا اللاتغير. وبذلك نثبت أنه لا يوجد حل بإيضاح أن أي حل مطلوب سيغير هذا اللاتغير. وهذا يعتبر حالة خاصة من البرهان بالتناقض.

– مسألة (٣) التالية لها علاقة بالزوجية، ولكنها تعلمنا شيئاً آخر. بالرغم من أننا نعتبر اللاتغير طريقة لاثبات الإستحالة، فربما يمكن استخدامه في مواضع أخرى .

مسألة (٣): إذا كانت كل غرفة في منزل لها عدد زوجي من الأبواب، بين أن عدد أبواب الخروج يجب أن يكون زوجياً. (كل باب له إتجاهين).

لعبة الإستغماية مع اللاتغير:

البرهان الذي يشتمل على اللاتغير يتطلب الكثير من الإبداع، لأن اللاتغير غالباً ما يحتاج لحيل لإلقاء الضوء عليه. ومن الحقول الخصبة التي نجد فيها ذلك لوحة الشطرنج. فمثلاً من السهل أن يرى الشخص كيف يغطي رقعة شطرنج عادية 8×8 ب 32 قطعة دومينو (بلاطة من مربعين متجاورين)، ولكن ماذا لو استخدمنا ترومينو (بلاطة من 3 مربعات على شكل حرف L) أو 4×1 تيترومينو (بلاطة من أربعة مربعات في صف)؟ عندما نضعها على اللوحة يمكننا أن ندورها أو نقلبها كما نريد، ولكنها دائماً تغطي $2, 3 or 4$ مربعات توالياً.

مسألة (٤): هل يمكنك التغطية دون تداخل.

(a) لوحة شطرنج 6×6 مزال منها مربع بقطع ترومينو؟

(b) لوحة شطرنج 8×8 مزال منها مربعين في أحد الأقطار الكبرى بقطع دومينو؟

(c) لوحة شطرنج 10×10 بقطع تيترومينو 4×1 ؟

مسألة (٥): فصل به 25 طالب طاولتهم مرتبة في مربع 5×5 ، لا يوجد أكثر من طالب في الطاولة الواحدة، المدرس طلب من كل طالب التحرك إلى الطاولة المجاورة (للإمام أو الخلف أو اليمين أو اليسار لطاولته) اثبت أن ذلك مستحيل.

مسألة (٦): في لعبة للأطفال، ثلاث ساحرات يحلقون فوق بغداد دائماً على نفس الإرتفاع، إذا تحركت واحدة منهما فإن الآخرتين تتوقفان، المهم مسموح لأي منهن أن تتحرك في إتجاه موازي للمستقيم الواصل بين موضعي الأخرتين. فإذا بدأت الأولى فوق خان مرجان، الثانية 2 ميل شمالاً، الثالثة 4 ميل شرقاً. هل من الممكن بعد وقت ما أن تكون الأولى فوق سوق الغزل، الثانية 3 ميل شمال الشرق، الثالثة 3 ميل جنوب الشرق؟

هل يوجد برهان للسؤال عن العدد:

بعض الأسئلة يُطلب تعيين قيمة n التي تحقق شرط معين.

مسألة (٧): في حفلة مدعو n شخص، كل شخص صافح 3 آخرين بالضبط. لأي قيم n يمكن تحقق ذلك؟

- البرهان الكامل لمثل هذه المشاكل يتكون من مجموعة قيم n وبرهانين:
  - برهان أن كل القيم في مجموعتنا تحقق شرط السؤال.
  - برهان أن أي قيمة أخرى لا تحقق شرط السؤال.

مسألة (٨): لأي قيم m,n يمكن تغطية المستطيل $m\times n$ بدون تداخل بمستطيلات 4×1 (تيترومينو)؟

مسألة (٩): ليكن n^2 طالب جالسون على طاولات مرتبة في مربع $n\times n$، لأي قيم n يمكن للطلبة تلبية طلب مدرسهم، بأن كل طالب يجب أن يتحرك للطاولة المجاورة (للإمام أو الخلف أو اليمين أو اليسار لطاولته) بحيث لا يجلس أكثر من طالب في الطاولة الواحدة.

مسألة (١٠): كما تعلم، الحصان في الشطرنج يتحرك في شكل حرف "L". مربع في إتجاه ومربعين في الإتجاه العمودي.
الذي لا تعرفه أن حركة الحصان نوع من حركة التنين: مربع في إتجاه و n مربع في الإتجاه العمودي.
في لوحة الشطرنج اللانهائية. أي تنين- n يمكنه الإنتقال من مربع معين لآخر معين أيضاً ؟

تدريب: اثبت أن التنين- الفردي الواقف على مربع أسود يستطيع الوصول لأي مربع أسود آخر في الشطرنج اللانهائي.

المباريات مع اللاتغير

تهيئة عددية.

الحسابات مع الأعداد ربما تكون سهلة، ولكن ماذا عن الحسابات مع "الحروف" عندما لا نعرف الأعداد؟

تدريب ١ (تهيئة). كيف يمكنك التفكير في عددين مجموعهما يساوي ضربهما؟ نعم $2.2 = 2 + 2$. هل يمكنك التفكير في زوج آخر؟ هل يمكنك إيجاد عددين مختلفين مجموعهما يساوي ضربهما؟

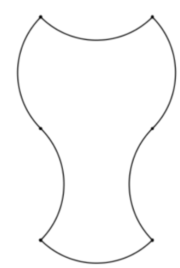
تدريب ٢ . اثبت أن العددين الطبيعيين اللذين مجموعهما يساوي ضربهما هما فقط 2 و 2.

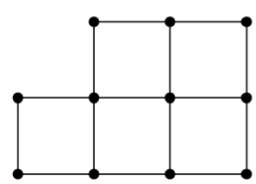
ارشاد: استخدم المتباينات لاثبات عدم وجود حلول أخرى.

تهيئة مع ألغاز حسية.

تماثل وتطابق الأشكال سيلعب دور مهم فيما بعد في هذا الدرس. هذا زوج من الألغاز التقليدية ليذكرك ماذا يعني التطابق.

تدريب ٣ (تهيئة). هل يمكنك أخذ ثلاث أعواد من الشكل $1a$ وتترك أربعة مربعات متطابقة؟ هل يمكنك أخذ ثلاث أعواد وترك ثلاثة مربعات متطابقة؟





تدريب ٤ (تهيئة). هل يمكنك تقسيم المنطقة في الشكل $1b$ إلى شكلين متطابقين دون استخدام الانعكاس على محور؟

اللاتغير مع الأعداد

المفهوم الأساسي الذي سندرسه طريقة إيجاد اللاتغير. في العديد من المواضع ، نكون مهتمين بالنواتج الممكنة لعملية. اللاتغير كمية لا تتغير أياً كانت الطريقة التي تتم بها العملية.

تدريب ٥. اكتب ست أصفار، خمس واحدات في ورقة. الآن امسح زوج من الأرقام واستبدله برقم واحد كالتالي: إذا مسحت صفرين أو واحدين استبدلهم بصفر. بينما إذا مسحت صفر وواحد فاستبدلهم بواحد. استمر في هذه العملية حتى يتبقى رقم واحد فقط. ما هو هذا الرقم؟

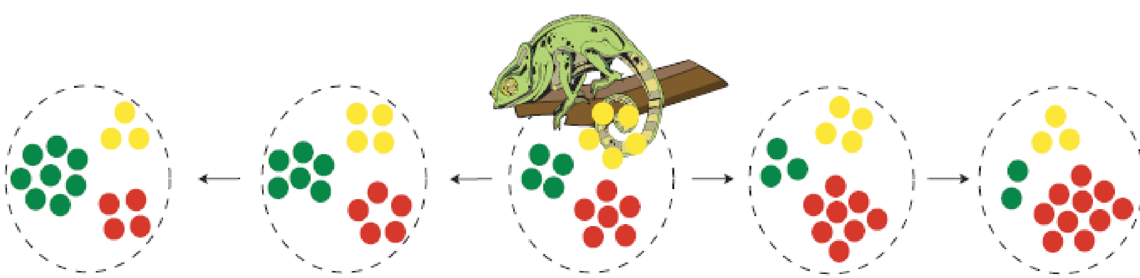
- ابحث عن اللاتغير: فهو غالباً المفتاح لفهم ما يحدث فعلاً.
- طريقة بسيطة ولكنها قوية: عندما نتعامل مع مسألة بها أعداد صحيحة أن نأخذ في الإعتبار زوجيتها: هل هي زوجية أم فردية.

الحرابيّ وثبات الباقي:

هذا نشاط مشابه ولكنه أصعب قليلاً في التحليل.

مسألة ٢. في كوكب بعيد سكانه فقط من الحرابي. كل حرباء لها لون واحد فقط من ثلاثة ألوان أخضر أوأصفر أوأحمر. علاوة على أن هناك قانون يحكم كيف تغير الحرباء لونها. عندما تتقابل حرباءان من لونين مختلفين يتغير لون كل منهما للون الثالث. معطى العدد الأصلي من كل لون للحرابي. هل من الممكن أن تصبح كل الحرابي من نفس اللون؟

تدريب ٦. هل يمكنك التفكير في إستراتيجية لتحويل حرابي ألوانها (g, y, r) وأعدادها $(4, 5, 5)$ إلى لون واحد فقط؟ ماذا عن الثلاثي $(4, 5, 6)$ هل يمكن تحويله إلى لون واحد فقط؟

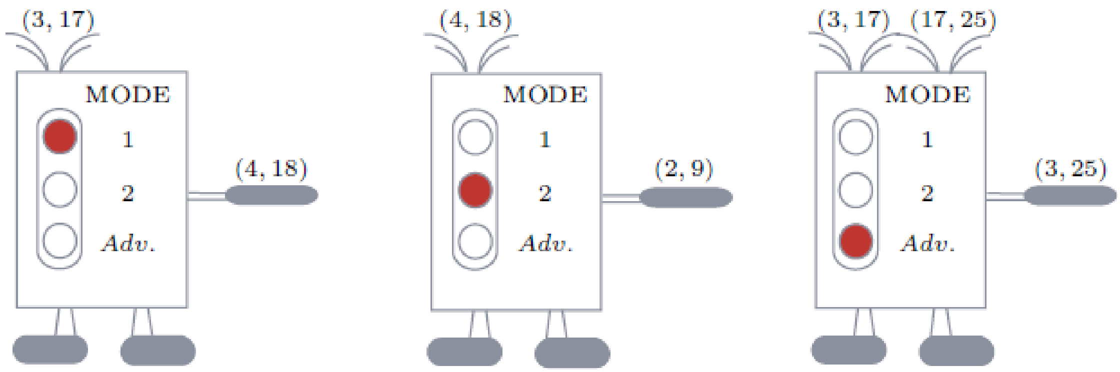


الشكل يوضح إعادة تلوين الحرباء من التكوين الأولي $(4, 5, 6)$.

تدريب ٧. اثبت أن بعد كل إعادة تلوين فإن الفرق $r - y$ إما لا يتغير أو يزيد أو ينقص بمقدار 3. استنتج أن الباقي عندما نقسم $r - y$ على 3 ثابت.

مسألة ٣. اثبت أن الحرابي التي أعدادها (g, y, r) يمكن تحويلها لنفس اللون إذا وفقط إذا كان لونان على الأقل عددا الحرابي فيهما لهما نفس الباقي عند القسمة على 3 .

الآلة العجيبة واللاتغير مع القواسم



تعمل الآلة العجيبة بثلاثة أنظمة مع الأزواج المرتبة لأعداد صحيحة موجبة (x,y) التي تدخلها كما بالشكل:

- في النظام الأول تضيف 1 لكلا الإحداثيين. بمعنى إذا أدخلنا فيها $(3,17)$ تخرج $(4,18)$.
- إذا كان كل من الإحداثيين زوجي فإن النظام الثاني أيضاً متاح: الآلة تأخذ نصفي الإحداثيين. بمعنى إذا أدخلنا فيها $(4,18)$ تخرج $(2,9)$.
- إذا كان لدينا زوجان بحيث يتساوى الإحداثي الأول لإحدهما مع الإحداثي الثاني للآخر، فإن الآلة بها نظام متقدم يسمح بأن ندخل هذين الزوجين معاً ونحصل على زوج واحد فيه الإحداثيين الغير متساويين بالترتيب. بمعنى إذا أدخلنا فيها $(3,17)$ و $(17,25)$ تخرج $(3,25)$.

الآلة تخزن كل الأزواج التي دخلت فيها أو أنتجتها ويمكنها أن تستخدمهم طوال الوقت.

تدريب ٩. إذا كان في البداية $(3,17)$ فقط متاح للآلة. اثبت أو انفي : الأزواج التالية يمكن أن تنتجها الآلة:

$$\text{(a) } (87,101) \quad \text{(b) } (20,27) \quad \text{(c) } (7,13)$$

تذكر إذا كانت إجابتك بالإثبات فعليك إعطاء طريقة معينة للوصول للزوج المطلوب. بينما إذا كانت إجابتك بالنفي فإن عرض طرق كثيرة لا توصل للزوج المطلوب غير كاف: ولكن مناقشة عامة ضرورية لتبين أن إنتاج مثل هذا الزوج مستحيل.

مسألة ٤. صف كل الأزواج المرتبة التي يمكن أن تنتجها الآلة العجيبة، إذا كان الزوج في البداية:

$$\text{(a) } (3,17) \quad \text{(b) } (x,y)$$

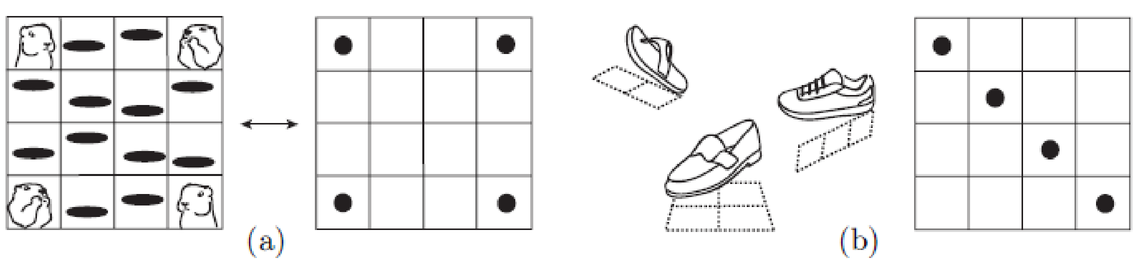
إرشاد. من الواضح أننا يجب أن نجد لاتغير ما، ادرس كل نظام على حدة، واستخدم نتيجة التدريب التالي.

تدريب ١٠. إذا كان الزوج الإبتدائي (x,y) فيه $x<y$ ، فإن أي زوج تنتجه الآلة سيكون أيضاً إحداثيه الأول هو الأصغر. أي الآلة العجيبة لا تغير أي الإحداثيين أصغر.

٣. ستومب *Stomp*

٣,١. قواعد الستومب. هذه اللعبة نشأت من تمشيتي مع ابنتي الصغيرة في الصباح للذهاب لمدرستها. في طريقنا نمر بحفر صغيرة يسكن كل منها سنجاب. إذا كان السنجاب مطل برأسه من الحفرة توقفت البنت عن السير وتسمرت في مكانها محملقة في السنجاب رافضة للتحرك حتي يختفي السنجاب داخل حفرتة. وحتى لا نتأخر اضطر إلى الضرب على حفرة السنجاب بقدمي حتى أرغمه على الدخول داخل حفرته. ولكن أثناء ذلك قدمي تكون قد ضربت حفر أخرى. وسناجب تلك الحفر المختفية داخلها وضربتها قدمي تطل برأسها من الحفر في فضول عجيب. هذا هو أصل تلك اللعبة التي سنسميها "ستومب".

اعتبر حذائك هو قطعة الستومب وحفر السناجب مربعات. المربعات التي فيها نقاط تمثل الحفر التي تطل السناجب برأسها منها. مسموح لك أن تضع قطعة الستومب بأكملها في أي مكان داخل الشبكة في كل ضربة. كل المربعات التي تغطى بقطعة الستومب ستتغير حالتها، بمعنى المربع المغطى إذا كان به نقطة يصبح فارغاً ، والمربع الفارغ يصبح به نقطة. الهدف تنظيف الشبكة بمعنى جعلها خالية من النقاط بعد أقل عدد ممكن من الضربات.



٣,٢. مسائل الستومب التقليدية غالباً ما تتطلب لاتغير في الزوجية أو التلوين. هيا ابدأ بأول تحدي في الستومب التالي.

تدريب ١١ (تهيئة) . حاول حل شكل a والسناجيب في الأركان الأربعة باستخدام قطعة ستومب دومينو 1×2 ؛ ثم باستخدام قطعة ستومب تيترومينو 2×2 ؛ ثم أخيراً باستخدام قطعة ستومب ترومينو 1×3 .

مسألة ٥. أعد حل تدريب ١١ ولكن مع الشكل b . إذاكنت تعتقد أن أياً من الحالات الست مستحيلة. هل يمكنك إيجاد لاتغير مناسب لإثبات ذلك؟

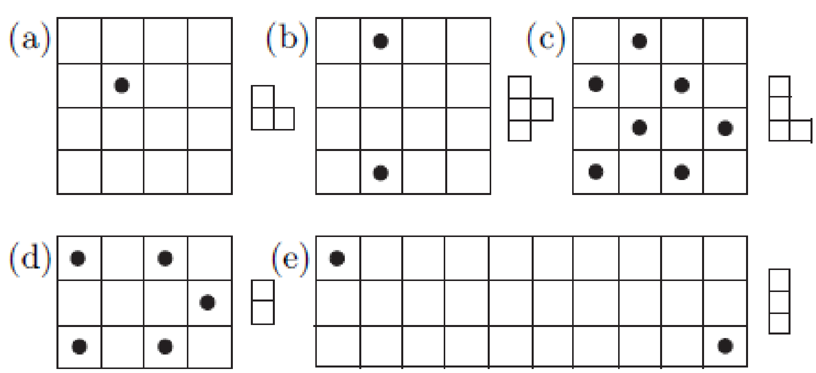
من الممتع البحث واللعب في هذه المسائل. يجب أن تحاول في كل حالة في وقت معقول. وإذا تعثرت، اقرأ أسفل لتجد إرشادات في النهاية. في هذه الأثناء سنناقش طريقتين هامتين تظهران في الحلول. للمبتدأ إذا أنت حاولت بجدية كافية مع 2×2 تيترومينو في الشكل $4b$ ، ستكتشف سريعاً أن الحل يتطلب ابتكار ثبات ما.

إستراتيجية لحل المسائل. لاثبات استحالة مسألة ستومب ، حاول إيجاد لوحة جزئية من اللوحة الأصلية بحيث تأثير قطعة الستومب ينتج لاتغير ما داخل اللوحة الجزئية.

إرشاد. على سبيل المثال، كم نقطة في الصف العلوي للوحة الستومب في شكل $4b$ عندما قطعة ستومب تيترومينو 2×2 تؤثر فيها؟ بين أن زوجية عدد النقاط تظل ثابتة. هل تصلح هذه الإستراتيجية لحل حالة قطع الترومينو 1×3 في الشكل $4b$ ؟

إستراتيجية لحل المسائل. تجزيء لوحة الستومب إلى العديد من اللوحات الجزئية الغير متداخلة بحيث أياًكانت الطريقة التي نضع بها قطع الستومب على اللوحة، ستغطي مربع واحد بالضبط من كل لوحة جزئية. مما يمكننا من استنتاج أن في كل لوحة جزئية زوجية عدد النقاط ستنعكس في كل خطوة. وحتى يكون التأثير ملموساً لوّن كل مجموعة جزئية بلون مختلف. ولكن كيف يمكننا إيجاد المجموعات الجزئية التي ستعمل تماماً لتحقيق المطلوب.

مسألة ٦. لكل من لوحات الستومب في شكل ٥، أوجد طريقة لتنظيف اللوحة بأقل عدد ممكن من الخطوات أو اثبت استحالة ذلك على حسب الحالة. قطع البليومينو الصغيرة المجاورة للوحة تمثل " طبعة القدم".



إستراتيجية لحل المسائل. الوضع المثالي في لعبة الستومب هو إمكانية تغيير حالة مربع واحد دون أن يتأثر مربعات باقي اللوحة.

الستومب في لوحات كبيرة. من الطبيعي أن نستحضر نتائج المسائل السابقة.

مسألة ٧. افترض أن لديك لوحة مستطيلة كل من طولها وعرضها على الأقل وحدتين، أياً كان الترتيب الإبتدائي للنقاط وضح لماذا يمكن دائماً تنظيف اللوحة باستخدام L ترومينو (شكل a).

إستراتيجية لحل المسائل. تحويل المسألة لمسألة سبق حلها طريقة محببة للرياضيين. بشكل أكثر عمومية، انشاء روابط بين الحالات (المسائل، النظريات، التعريفات، التخمينات، الأفكار) يمكن القول أنه أكبر المهارات الرياضية قيمة.

مسألة ٨. الآن افترض أنك تلعب ستومب في لوحة لا نهائية ليس لها حدود، وأن نقطتين في البداية وُضعت في أي مربعين. اثبت أنه من الممكن تنظيف اللوحة باستخدام T تيترومينو(شكل b).

هذه مسألة صعبة تحتاج لنتائج وسيطة، انظر الإستراتيجية والتدريب التالي.

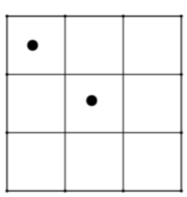
إستراتيجية لحل المسائل. في اللعب ابحث عن متتابعات خاصة من الحركات بحيث يكون خلاصة تأثيرها هي نقلة بسيطة ومرغوب فيها.

تدريب ١٢. استخدم T تيترومينو في اللوحة 3×3 فيها نقطة واحدة في المربع الأوسط العلوي، بين كيف من الممكن أن ننتهي بالنقطة في

(a) في المربع المركزي بثلاث حركات.

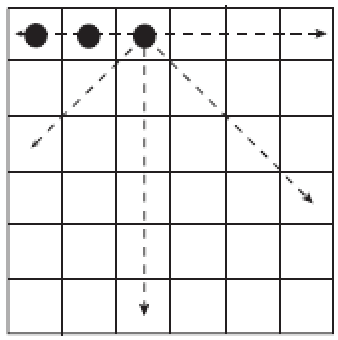
(b) في المربع الأوسط السفلي فقط بحركتين.

تمرين إضافي: اثبت أو انفي أنه يمكن تنظيف لوحة 3×3 باستخدام T تيترومينو إذا كان في اللوحة نقطتان واحدة في المربع الأيسر العلوي،والثانية في المربع المركزي.



٣,٤. بندقية السناجيب.

تخيل الآن أن لدينا بندقية والتي يمكننا فقط أن نطلقها عبر صف كامل أو عمود كامل أو قطر كامل، وكل سنجاب في الصف (أو العمود أو القطر) الذي أطلقنا عليه تنعكس حالته بمعنى إذا كان داخل الحفرة يخرج منها وإذا كان داخلها يخرج منها.



مسألة ٩. مربعات لوحة شطرنج 6×6 كلها إما فارغة أو تحتوي نقطة واحدة (تمثل سنجاباً). في كل خطوة مسموح لك أن تعكس حالة كل المربعات في صف أو عمود أو قطر (يشتمل ذلك على القطر المكون من مربع ركني). يوجد بالضبط ثلاث نقاط في اللوحة في الوضع الإبتدائي. يقعون في أقصى يسار الصف العلوي. اثبت أن من المستحيل تنظيف اللوحة من النقاط.

إرشاد. الفكرة إيجاد مجموعة جزئية من مربعات اللوحة S . بحيث أي صف أو عمود أو قطر يتقاطع مع S في عدد زوجي من المربعات. مما يضمن لنا لاتغير زوجية عدد النقاط طوال اللعبة أياً كان طريقة اللعب. استغل ذلك لإثبات الإستحالة.

المشكلة التالية تحدي آخر لك.

مسألة ١٠(امتداد لمسألة ٩). في نفس لوحة مشكلة ٩، سنستخدم بندقية السناجيب .

(a) أوجد عدد كل المجموعات الجزئية S التي لا تتغير زوجية عدد النقاط فيها طوال اللعب.

(b) اثبت أن عدد حالات النقاط الغير قابلة للتنظيف أكثر من عدد حالات النقاط القابلة للتنظيف.

التبليط واللاتغير.

لن يكون درس اللاتغير مكتملاً بدون تبليط. تبليط شكل بقطع لها شكل معين تعني تغطية الشكل تماماً بهذه القطع دون تداخل. على سبيل المثال من الممكن تبليط لوحة 4×4 بثمانية قطع دومينو 2×1. في التالي سنعتبر القطعتين متماثلتين (متطابقتين) إذاكان يمكن الحصول على إحداهما من الأخرى بالدوران أو بالإزاحة أو بالقلب، أو أي تركيبة منهم.

تمرين ١٣ (تهيئة). تبدو إمكانية تبليط لوحة 4×4 بقطعتين مستطيلتين 4×2 واضحة. هناك أشكال أخرى. كل منها مكون من ثمانية مربعات وحدة، بحيث أي نسختين لشكل من هذه الأشكال يمكن تبليط اللوحة 4×4 بهما. أوجد هذه الأشكال.

تمرين ١٤. يوجد خمس أشكال مختلفة كل منها يتكون من أربع مربعات وحدة في قطعة ورق شبكية. وتسمى هذه الأشكال تيترومينو. ارسم هذه الأشكال الخمسة وقرر من منها يمكن استخدامه لتبليط لوحة 4×4 (نوع واحد من التيترومينو في تبليط اللوحة).

كل من التمرينين١٣، ١٤ يتطلب استعمال نهج "المحاولة والخطأ" بذكاء. من الواضح أن التماثل (حول مركز اللوحة أو حول محور) سيلعب دوراً يجب أن تنظم إجابتك بطريقة متماثلة بحيث يمكن تعميمها في لوحات أكبر بمقاسات مناسبة.

مسألة ١١. بين أن من المستحيل تغطية مستطيل 5×4 باستخدام الخمس قطع تيترومينو المختلفة كل قطعة مرة واحدة فقط.

تمرين ١٥ (تهيئة). ارسم مستطيل 3×7 ، منزوع منه المربع الأوسط في الصف العلوي. أوجد طريقة لتبليط هذا الشكل باستخدام الخمس قطع تيترومينو المختلفة كل قطعة مرة واحدة فقط. هل يمكنك إيجاد شكل آخر شيق مكون من عشرين مربع وحدة يمكن تبليطة باستخدام الخمس قطع تيترومينو المختلفة كل قطعة مرة واحدة فقط؟

مسألة ١٢. اعتبر لوحة 7×7 . أي مربع يمكن إزالته لنتمكن من التبليط بقطع ترومينو 3×1 للوحة التي تحتوي على ال 48 مربع المتبقية؟ مثلاً إزالة مربع ركني أحد الإجابات الممكنة: أوجد طريقة لتبليط اللوحة الناتجة. ما هي الإجابات الأخرى الممكنة؟

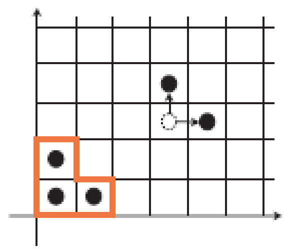
إرشاد. هناك إجابات أخرى مثل إزالة المربع الأوسط العلوي وكذلك المربع المركزي. من التماثل عليك أن تجد ٩ مربعات، وعين طريقة لتبليط كل منها، وفسر لماذا أي مربع آخر لا تعمل.

مسألة التبليط التالية ربما هي الأكثر إثارة لأنها تتطلب إختيار طرق إبداعية في التبرير اللوني.

مسألة ١٣. لكل من الخمس قطع تيترومينو المختلفة (كل منها يحتوي على أربع مربعات وحدة)، عين إذا كان ممكن أو لا بكل نوع على حدة تبليط لوحة 6×6.

٥. هروب النقاط

٥,١. الإعداد للعبة. اعتبر أن الربع الأول في المستوى الإحداثي قد قُسم لمربعات وحدة بخطوط أفقية ورأسية تمر بمواضع الأعداد الصحيحة الموجبة على المحورين. ضع ثلاث نقاط في شكل L ترومينو المربعات السفلى أقصى اليسار، وارسم "سياج من سلك شائك" يحيط بمربعات النقاط الثلاث: هذا السياج البرتقالي في شكل ٨ .



٥,٢. قواعد اللعبة. في كل خطوة يمكنك حذف نقطة واستبدالها بنسختين في مربعين متجاورين، أحدهما لأعلى مباشرة والثاني يمين مباشرة، طالما هذين المربعين غير مأهولين. بمعنى آخر، عندما تختفي نقطة تستبدل بنسختين جديدتين أحدهما على اليمين والثانية لأعلى، ودائماً في أي مربع لا يوجد أكثر من نقطة.

لاحظ أن ذلك يشبه لعبة "الستومب" ولكن فيها

* اللوحة غير منتهية يمثلها الربع الأول.

* قطعة الستومب "موضع القدم" على شكل L ترومينو مسموح بوضعها فقط في وضع حرف L (أي دون تدوير أو قلب)، وفقط عندما المربع الركني في L يغطي نقطة بينما المربعين الآخرين في L يهبطان على مربعين خاليين من النقاط.

٥,٣. تحرير النقاط!

مشكلة ١٤(متقدمة). اثبت أن من المستحيل تحرير كل النقاط التي في السجن.

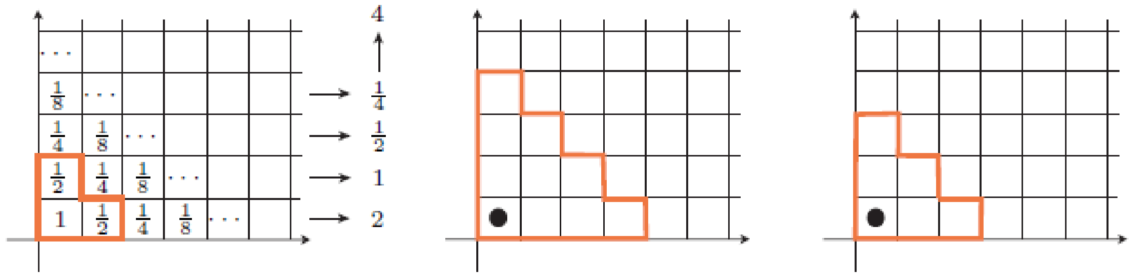
بالرغم من أن المسألة تبدو شيقة لدرجة أن أي شخص يمكنه أن يلعبها ويستمتع بها. ولكن الحل الفعلي صعب المنال ، ويتطلب الوصول إليه إلمام بصيغ المجاميع.

٥,٤. البحث عن لاتغير. ما هو اللاتغير الذي يمنع كل النقاط الثلاث من الهروب من السجن؟ ربما تحاول ايجاده باستخدام الزوجية أو التبرير اللوني أو أي طرق أخرى معتاده، ولكن بعد وقت ليس بالطويل ستكتشف أن من العسير حل المسألة من هذا السبيل. نحتاج لطريقة مختلفة تكون أقوى في هذه الحالة.

إرشاد: خصص عدد مناسب لكل مربع للحصول على لاتغير.

ولكن ماذا يمكن أن يكون هذا العدد؟ دعنا نتفق على تسمية كل مربع بالنقطة (a,b) في ركنه الأيسر السفلي. ومن ثم النقاط الثلاثة الأصلية نرمز لمربعتها $(0,0),(1,0),(0,1)$. فعلى سبيل المثال لو رمزنا للمربع $(0,0)$ بالعدد ١ ولنسميه وزنه ربما يبدو من المناسب أن نجعل وزن كل من المربعين $(1,0),(0,1)$ هو $1/2$ ، وبذلك نكون قد جعلنا الوزن لامتغير طوال اللعب، وبنفس الأسلوب يمكننا أن نعتبر وزن النقاط $(0,2),(1,1),(2,0)$ هو $1/4$. وهكذا بالنسبة لباقي النقاط.

تمرين ١٦. لكل مربع (x,y) وباعتبار وزنه $\frac{1}{2^{x+y}}$. بين أن وزن جميع النقاط قبل وبعد كل نقلة يكون لامتغير.



مسألة ١٥. وضعت نقطة واحدة في المربع والسجن يتضمن

(a) العشر مربعات (i,j) حيث $i+j\le 3$ (شكل $9b$).

(b) الست مربعات (i,j) حيث $i+j\le 2$ (شكل $9c$).

بين أن دائماً سيكون في السجن نقطة واحدة على الأقل.