

JUNIOR BALKAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
TEAM SELECTION TEST

Test 1, June 2, 2022

Problem 1.1. Ali wrote down 21 pairwise distinct positive integers, each not greater than 1,000,000. For every pair (a, b) of numbers written down by Ali, Baba wrote the number

$$F(a; b) = a + b - \gcd(a; b)$$

on his piece of paper. Prove that one of Baba's numbers differs from all of Ali's numbers.

Problem 1.2. Let BB' , CC' be the altitudes of an acute-angled triangle ABC . Two circles passing through A and C' are tangent to BC at points P and Q . Prove that A , B' , P , Q are concyclic.

Problem 1.3. 2000 consecutive integers (not necessarily positive) are written on the board. A student takes several turns. On each turn, he partitions the 2000 integers into 1000 pairs, and substitutes each pair by the difference and the sum of that pair (note that the difference does not need to be positive as the student may choose to subtract the greater number from the smaller one; in addition, all the operations are carried simultaneously). Prove that the student will never again write 2000 consecutive integers on the board.

Problem 1.4. Determine the smallest positive integer a for which there exist a prime number p and a positive integer $b \geq 2$ such that

$$\frac{a^p - a}{p} = b^2.$$



السؤال الأول:

كتب علي 21 زوجًا من الأعداد الصحيحة الموجبة المختلفة، الأعداد كلها ليست أكبر من 1000000. لكل زوج (a, b) كتب علي، كتب مقابله بابا العدد

$$F(a; b) = a + b - \gcd(a; b)$$

في ورقته الخاصة. أثبت أن أحد أعداد بابا يختلف عن كل أعداد علي.

السؤال الثاني

ليكن BB', CC' ارتفاعين في مثلث الحاد الزوايا ABC . يوجد دائرتان تمران بالنقطتين A, C' ، وتسمان BC عند P, Q . أثبت أن A, B', P, Q على دائرة واحدة.

السؤال الثالث:

تم كتابة 2000 عدد صحيح متالي (ليس بالضرورة موجبًا) على السبورة. يقوم طالب بعدة حركات. في كل حركة، يقسم الـ 2000 عدد صحيح إلى 1000 زوج، ويستبدل عددي كل زوج بالفرق بينهما ومجموعهما (لاحظ أن الفرق هنا لا يلزم أن يكون موجبًا لأن الطالب قد يختار طرح العدد الأكبر من الأصغر واحد؛ بالإضافة إلى ذلك، يتم تنفيذ جميع العمليات في وقت واحد). أثبت أن الطالب لن يكتب مرة أخرى 2000 عدد صحيح متالي على السبورة.

السؤال الرابع:

عين أصغر عدد صحيح موجب a بحيث يوجد عدد أولي p و عدد صحيح موجب $b \geq 2$ بحيث

$$\frac{a^p - a}{p} = b^2$$

زمن الاختبار أربع ساعات ونصف

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والسداد