Test 2

Level 4, December 2

Problem 2.1. Define $a_0 = 2$ and $a_{n+1} = a_n^2 + a_n - 1$. Prove that a_n is coprime to $2n + 1$.

Problem 2.2. Given is an acute triangle ABC with $BC < CA < AB$. Points K and L lie on segments AC and AB and satisfy $AK = AL = BC$. Perpendicular bisectors of segments CK and BL intersect line BC at points P and Q, respectively. Segments KP and LQ intersect at M. Prove that $CK + KM = BL + LM$.

Problem 2.3. In an $n \times n$ table for $n \geq 2$ at least $\lceil n(\sqrt{n} + \frac{1}{2}) \rceil$ fields have been colored. Prove that there exist 4 colored fields whose centers form (the vertices of) a rectangle or a square.

Problem 2.4. Find all integer numbers a, b, c such that

$$x(x-a)(x-b)(x-c) + 1$$

can be expressed as product of two polynomials (non constant) with integer coefficients.

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

السؤال الأول

معطى $a_0 = 2$ و $a_{n+1} = a_n^2 + a_n - 1$. أثبت أن a_n أولي نسبيًا مع $2n+1$.

السؤال الثاني

معطى المثلث الحاد الزوايا ABC فيه $BC < CA < AB$. النقطتان K, L على القطعتين المستقيمتين AC, AB تواليًا تحققان أن $AK = AL = BC$. العمودان المنصفان للقطعتين المستقيمتين CK, BL يقطعان المستقيم BC في النقطتين P, Q تواليًا. القطعتان المستقيمتان KP, LQ تتقاطعان في M . أثبت أن $CK + KM = BL + LM$.

السؤال الثالث

في جدول $n \times n$ ، لكل $n \geq 2$ تم تلوين $\left\lceil n(\sqrt{n} + \frac{1}{2}) \right\rceil$ خلية. أثبت أنه يوجد 4 خلايا مراكزها تعتبر رؤوس مستطيل أو مربع.

السؤال الرابع

أوجد كل الأعداد الصحيحة a, b, c التي تجعل من الممكن كتابة المقدار $x(x-a)(x-b)(x-c)+1$ كحاصل ضرب كثيرتي حدود (غير ثابتتين) ومعاملات كل منهما أعداد صحيحة.

الزمن 4 ساعات ونصف
كل سؤال 7 نقاط
مع أطيب التمنيات بالتوفيق