

أسئلة جبر

AoMP

بسم الله الرحمن الرحيم

أوجد جميع الدوال $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ بحيث

$$f(f(m) + n) + f(m) = f(n) + f(3m) + 2014$$

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}$$

(IMO 2014 Shortlist A4)

أوجد جميع الدوال $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ التي تحقق أن:

$$f(f(m) + n) + 2m = f(n) + f(3m), \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\exists d \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } f(d) - f(0) = 2$$

$$f(1) - f(0) : 2$$

(2018 Thailand October Camp 1.3)

لتكن $P(x)$ كثيرة حدود ذات معاملات حقيقية، تحقق أن

$$|y^2 - p(x)| \leq 2|x| \Leftrightarrow |x^2 - p(y)| \leq 2|y|$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}$$

أوجد جميع القيم الممكنة لـ $P(0)$.

(IMO 2014 Shortlist A5)

أوجد جميع الدوال $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ بحيث

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) f(y) = f(xy) + f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\forall x, y > 0$$

(IMO 2018 Shortlist A5)

لتكن x_1, x_2, \dots, x_n أعدادًا حقيقية مختلفة، حيث $n \in \mathbb{Z}^+$ أثبت أن

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \prod_{j \neq i} \frac{1 - x_i x_j}{x_i - x_j} = \begin{cases} 0, & \text{if } 2 \mid n \\ 1, & \text{if } 2 \nmid n \end{cases}$$

(IMO 2019 Shortlist A5)

أوجد جميع الدوال $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ بحيث

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}$$

(IMO 1999 P6)