Test 1

Levels 3 and 4, November 30

Problem 1.1. Find all positive integers k such that the product of the first k primes increased by 1 is a power of an integer (with an exponent greater than 1).

Problem 1.2. Let the function f is given. It is known that each line on the plane xOy has as many intersections with f as with the parabola $y = x^2$. Prove that $f(x) = x^2$.

Problem 1.3. Given is triangle ABC with $AB > AC$. Circles o_B, o_C are inscribed in angle BAC with o_B tangent to AB at B and o_C tangent to AC at C. Tangent to o_B from C different than AC intersects AB at K, and tangent to o_C from B different than AB intersects AC at L. Line KL and the angle bisector of BAC intersect BC at points P and M, respectively. Prove that $BP = CM$.

Problem 1.4. At a gala banquet, $12n + 6$ chairs, where $n \in N$, are equally arranged around a large round table. A seating will be called a proper seating of rank n if a gathering of $6n + 3$ married couples sit around this table such that each seated person also has exactly one sibling (brother/sister) of the opposite gender present (siblings cannot be married to each other) and each man is seated closer to his wife than his sister. Among all proper seatings of rank n find the maximum possible number of women seated closer to their brother than their husband. (The maximum is taken not only across all possible seating arrangements for a given gathering, but also across all possible gatherings.)

السؤال الأول

أوجد جميع الأعداد الصحيحة الموجبة k بحيث يكون حاصل ضرب أول k عدد أولي مضافًا لناتج الضرب 1 يساوي قوة لعدد صحيح (بحيث الأس أكبر من 1)؟

السؤال الثاني

معطى الدالة f. إذا علمت أن كل خط مستقيم في المستوى xOy، عدد نقاط تقاطعاته مع f يساوي عدد نقاط تقاطعه مع القطع المكافئ $y = x^2$. أثبت أن $f(x) = x^2$.

السؤال الثالث

ليكن ABC مثلثًا فيه $AB > AC$. كل من الدائرتان O_B, O_C محاطتان بالزاوية BAC حيث O_B مماسة ل AB عند B، O_C مماسة ل AC عند C. المماس من C ل O_B (يختلف عن AC) قطع AB في K، المماس من B ل O_C (يختلف عن AB) قطع AC في L. المستقيم KL ومنصف زاوية BAC يقطعان BC في P, M تواليًا. أثبت أن $BP = CM$.

السؤال الرابع

يوجد $12n + 6$ مقعدًا في مأدبة احتفالية، حيث $n \in \mathbb{N}$ ، تم وضعهم حول طاولة دائرية كبيرة بحيث تتساوى المسافة بين كل مقعدين متجاورين. يقال للجلوس أنه لائق ومن الرتبة n إذا كان هناك تجمع من $6n + 3$ من الأزواج المتزوجين يجلسون حول هذه الطاولة بحيث يكون لكل شخص جالس أيضًا شقيق واحد (أخ / أخت) من الجنس الآخر موجود (لا يمكن أن يكون الشقيقان متزوجين)، وكل رجل يجلس أقرب إلى زوجته من أخته. من بين جميع الجلسات المناسبة من الرتبة n، أوجد أكبر عدد ممكن من النساء جالسات أقرب لإخوانهن من أزواجهن (لا يتم أخذ الحد الأقصى فقط عبر جميع ترتيبات الممكنة لجلوس معين ، ولكن أيضًا في جميع الترتيبات الممكنة لكل الجلسات اللائقة).

الزمن 4 ساعات ونصف
كل سؤال 7 نقاط
مع أطيب التمنيات بالتوفيق