TEAM SELECTION TEST
BALKAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
Day 1, April 3 2021

Problem 1. Do there exist two polynomials P and Q with integer coefficient such that:

i) both P and Q have a coefficient with absolute value bigger than 2021,
ii) all coefficients of $P \cdot Q$ by absolute value are at most 1.

Problem 2. Let ABC be an acute, non-isosceles triangle with H is the orthocenter and M is the midpoint of AH. Denote O_1, O_2 as the centers of circles pass through H and respectively tangent to BC at B, C. Let X, Y be the ex-centers which respect to angle H in triangles HMO_1, HMO_2. Prove that XY is parallel to O_1O_2.

Problem 3. Let x, y and z be odd positive integers such that $\gcd(x, y, z) = 1$ and the sum $x^2 + y^2 + z^2$ is divisible by $x + y + z$. Prove that $x + y + z - 2$ is not divisible by 3.

Problem 4. In the popular game of Minesweeper, some fields of an $a \times b$ board are marked with a mine and on all the remaining fields the number of adjacent fields that contain a mine is recorded. Two fields are considered adjacent if they share a common vertex. For which $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ is it possible for some a and b , $ab > 2021$, to create a board whose fields are covered in mines, except for 2021 fields who are all marked with k?

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

السؤال الأول

هل يوجد كثيرتا حدود P,Q معاملات كل منهما أعداد صحيحة بحيث:

i) كل من P,Q لهما معامل قيمته المطلقة أكبر من 2021.

ii) كل معاملات $P\cdot Q$ القيمة المطلقة لها تكون 1 على الأكثر.

السؤال الثاني

ليكن ABC مثلثًا حاد الزوايا وغير متطابق الضلعين، H هي نقطة تقاطع ارتفاعاته و M منتصف AH. لتكن O_1,O_2 هما مركزي الدائرتين المارتين وتمسان BC عند B,C تواليًا. لتكن X,Y هما مركزي الدائرتين الخارجيتين المقابلتين للرأس H في المثلثين HMO_1,HMO_2 تواليًا. أثبت أن XY يوازي O_1O_2.

السؤال الثالث

لتكن x,y,z أعداد صحيحة موجبة فردية بحيث $\gcd(x,y,z)=1$ ، المجموع $x^2+y^2+z^2$ يقبل القسمة على $x+y+z$. أثبت أن $x+y+z-2$ لا يقبل القسمة على 3.

السؤال الرابع

في لعبة كاسحة الألغام الشهيرة، يتم تمييز بعض حقول لوحة $a\times b$ بعلامة لغم وفي الحقول المتبقية يتم تسجيل عدد جميع الحقول المجاورة التي تحتوي على لغم. يعتبر حقلين متجاورين إذا كانا يشتركان في رأس مشترك .

لأي قيم $k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ من الممكن للقيمتين a,b و $ab>2021$ إنشاء لوحة حقولها مغطاة بالألغام ما عدا 2021 حقل يسجل على كل منها k؟

الزمن 4 ساعات ونصف

مع أطيب التمنيات بالتوفيق