

ТРИДЦАТЬ ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 18 марта 2012 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- 4 1. В бригаде сторожей у каждого есть разряд (натуральное число). Сторож N -го разряда N суток дежурит, потом N суток спит, снова N суток дежурит, N — спит, и так далее. Известно, что разряды любых двух сторожей различаются хотя бы в три раза. Может ли такая бригада осуществлять ежедневное дежурство? (Приступить к дежурству сторожа могут не обязательно одновременно, в один день могут дежурить несколько сторожей.)

А. С. Бердников

- 5 2. Внутри круга отмечены 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что их можно разбить на пары и провести прямую через каждую пару так, чтобы все точки пересечения прямых лежали в круге.

А. В. Шаповалов

- 6 3. Докажите, что для любого натурального n существуют такие целые числа a_1, a_2, \dots, a_n , что при всех целых x число $(\dots((x^2 + a_1)^2 + a_2)^2 + \dots + a_{n-1})^2 + a_n$ делится на $2n - 1$.

А. С. Бердников

- 6 4. Внутри каждой грани единичного куба выбрали по точке. Затем каждые две выбранные точки, лежащие на соседних гранях, соединили отрезком. Докажите, что сумма длин этих отрезков не меньше, чем $6\sqrt{2}$.

В. В. Произволов

- 8 5. Дан треугольник ABC и прямая l , касающаяся вписанной в него окружности. Обозначим через l_a, l_b, l_c прямые, симметричные l относительно биссектрис внешних углов треугольника. Докажите, что треугольник, образованный этими прямыми, равен треугольнику ABC .

А. А. Заславский

- 3 6. а) В бесконечной последовательности бумажных прямоугольников площадь n -го прямоугольника равна n^2 (для $n = 1, 2, 3, \dots$). Обязательно ли можно покрыть ими плоскость? Наложения допускаются.

- 6 б) Дана бесконечная последовательность бумажных квадратов. Обязательно ли можно покрыть ими плоскость (наложения допускаются), если известно, что для любого числа N найдутся квадраты суммарной площади больше N ?

А. С. Бердников

- 6 7. У Кости была кучка из 100 камешков. Каждым ходом он делил какую-то из кучек на две меньших, пока у него в итоге не оказалось 100 кучек по одному камешку. Докажите, что
3 а) в какой-то момент в каких-то 30 кучках было в сумме ровно 60 камешков;
3 б) в какой-то момент в каких-то 20 кучках было в сумме ровно 60 камешков;
3 в) Костя мог действовать так, чтобы ни в какой момент не нашлось 19 кучек, в которых в сумме ровно 60 камешков.

К. Кноп