



### السؤال الأول

ليكن  $ABC$  مثلثًا متطابق الضلعين فيه  $BC = CA$ ،  $D$  نقطة على الضلع  $AB$  بحيث  $AD < DB$ . لتكن  $P, Q$  نقطتان على الضلعين  $BC, CA$  توالياً، بحيث  $\angle DPB = \angle DQA = 90^\circ$ . ليكن العمود المنصف لـ  $PQ$  يقطع القطعة المستقيمة  $CQ$  في  $E$ ، ولتكن الدائرتين المحيطيتين بالمثلثين  $ABC, CPQ$  تتقاطعان ثانية في  $F$  التي تختلف عن  $C$ . افترض أن  $P, E, F$  على استقامة واحدة. أثبت أن  $\angle ACB = 90^\circ$ .

### السؤال الثاني

تُعرف أعداد فيبوناتشي  $F_0, F_1, F_2, \dots$  استقرائياً بأنها  $F_0 = 0, F_1 = 1$  و  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ، لكل  $n \geq 1$ . معطى عدد صحيح  $n \geq 2$ . عيّن أقل عدد من العناصر لمجموعة  $S$  عناصرها أعداد الصحيحة بحيث لكل  $k = 2, 3, \dots, n$  يوجد  $x, y \in S$  بحيث  $x - y = F_k$ .

### السؤال الثالث

لكل  $n$  عدداً صحيحاً موجباً، ليكن  $d(n)$  عدد القواسم الموجبة للعدد  $n$ ،  $\varphi(n)$  هو عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي لا تزيد عن  $n$  وأولية نسبياً مع  $n$ . أثبت أن لأي عدد  $C$  يوجد عدد صحيح  $n$  بحيث:

$$\frac{\varphi(d(n))}{d(\varphi(n))} > C$$

زمن الاختبار 4 ساعات ونصف

7 درجات لكل سؤال

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والسداد