



الإثنين, 19 يوليو 2021

المسألة رقم 1 ليكن $n \geq 100$ عدداً صحيحاً. تكتب إيمان كل عدد من الأعداد $n, n+1, \dots, 2n$ على بطاقة. ثم تقوم بخلط هذه الـ $n+1$ بطاقة عشوائياً، وتقسمها إلى مجموعتين. أثبت أن إحدى هاتين المجموعتين على الأقل تحتوي بطاقتين مجموع عدديهما يكون مربعاً كاملاً.

المسألة رقم 2 أثبت أن المتباينة

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

تتحقق لكل الأعداد الحقيقية x_1, \dots, x_n .

المسألة رقم 3 لتكن D نقطة داخل المثلث الحاد الزوايا ABC الذي فيه $AB > AC$ و $\angle DAB = \angle CAD$. النقطة E تقع على القطعة المستقيمة AC بحيث $\angle ADE = \angle BCD$. النقطة F تقع على القطعة المستقيمة AB بحيث $\angle FDA = \angle DBC$. النقطة X تقع على AC بحيث $CX = BX$. أخيراً النقطتان O_1 و O_2 هما المركزان المحيطان بالمثلثين ADC و EXD توالياً. أثبت أن BC, EF, O_1O_2 تتقاطع في نقطة واحدة.



الثلاثاء, 20. يولييه 2021

المسألة رقم 4 لتكن Γ دائرة مركزها I ، و $ABCD$ رباعياً محدباً بحيث تماس جميع القطع المستقيمة AB, BC, CD, DA الدائرة Γ . لتكن Ω الدائرة المحيطة بالمثلث AIC . امتداد BA خلف A يقطع Ω في X ، وامتداد BC خلف C يقطع Ω في Z . امتداد كل من AD, CD خلف D يقطع Ω في Y, T على الترتيب. أثبت أن

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

المسألة رقم 5 قام اثنان من السناجيب، بوشي وجامبي، بجمع 2021 حبة بندق للبندق للشتاء. قام جامبي بترقيم حبات البندق من 1 إلى 2021، ثم حفر 2021 حفرة صغيرة في نمط دائري على الأرض حول شجرته المفضلة. في صباح اليوم التالي لاحظ جامبي أن بوشي قد وضع حبة بندق في كل حفرة، ولكنه لم ينتبه للترقيم. قرر جامبي إعادة ترتيب حبات البندق عن طريق إجراء سلسلة من 2021 حركة. في الحركة رقم k يقوم جامبي بتبديل مواضع حبيتي البندق المجاورتين للحبة رقم k . أثبت أنه يوجد k بحيث في الحركة رقم k قام جامبي بتبديل الحبتين a, b بحيث $a < k < b$.

المسألة رقم 6 ليكن $m \geq 2$ عدداً صحيحاً، و A مجموعة منتهية من الأعداد الصحيحة (ليست بالضرورة موجبة)، و $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$ مجموعات جزئية من A . بفرض أنه لكل $k = 1, 2, \dots, m$ فإن مجموع عناصر B_k يساوي m^k . أثبت أن A تحوي على الأقل $m/2$ عنصراً.