

Test 7  
Level 4+, June 22, 2022

**Problem 7.1.** Let  $ABC$  be an acute, non isosceles triangle which circumcircle  $(O)$ . Take  $M$  on segment  $BC$  and  $J$  on  $(O)$  such that  $\angle BAJ = \angle CAM$ . Take a point  $D$  on the segment  $AM$  and denote  $O_1, O_2$  as the circumcenters of triangles  $ABD$  and  $ACD$ . The line  $O_1O_2$  meets  $BC$  at  $T$  and  $G$  is the second intersection of circumcircles of triangles  $TBO_1$  and  $TCO_2$ . Prove that  $OA, JA$  respectively divide the segments  $O_1O_2, BC$  by the same ratio and  $A, G, O, J$  are concyclic.

**Problem 7.2.** Let a finite set of integers be given, such that each of its elements can be written as a sum of some two elements (not necessarily different) from the same set. For such a set we say that it is of *safety of order  $n$*  if it does not contain a subset of  $n$  or less elements whose sum is 0. Prove that there exist sets of arbitrarily large safety order.

**Problem 7.3.** Given is a convex  $n$ -gon with no four vertices concyclic. A triple of vertices is called *round* if the circle passing through these points covers the entire polygon. Determine, in terms of  $n$ , all possible values of the number of round triples.



## السؤال الأول

ليكن المثلث  $ABC$  حاد الزوايا وغير منطابق الضلعين، ودائرته المحيطة  $(O)$ . خذ  $M$  على القطعة  $BC$  و  $J$  على  $(O)$  بحيث  $\angle BAJ = \angle CAM$ . خذ  $D$  على القطعة  $AM$ ، لتكن  $O_1, O_2$  هما المركزين المحيطين للمثلثين  $ABD, ACD$  تواليًا. المستقيم  $O_1O_2$  يقطع  $BC$  في  $T$ ، و  $G$  التقاطع الثاني للدائرتين المحيطتين بالمثلثين  $TBO_1, TCO_2$ . أثبت أن  $OA, JA$  يقسمان  $O_1O_2, BC$  تواليًا بنفس النسبة، وأن  $A, G, O, J$  على دائرة واحدة.

## السؤال الثاني

لدينا مجموعة منتهية من الأعداد الصحيحة، بحيث يمكن كتابة كل عنصر من عناصرها كمجموع لعنصرين (ليس بالضرورة مختلفين) من نفس المجموعة. يقال لمثل هذه المجموعة أنها ذات درجة أمان  $n$  إذا لم تحتوي على مجموعة جزئية من  $n$  أو أقل من العناصر التي يكون مجموعها 0. أثبت وجود مجموعات ذات درجة أمان كبيرة (كثيرًا كافيًا).

## السؤال الثالث

لدينا مضلع محدب ذو  $n$  رأس، بدون أربعة رؤوس تقع على دائرة واحدة. تسمى ثلاثية الرؤوس مستديرة إذا كانت الدائرة التي تمر عبر هذه النقاط تغطي المضلع بأكمله. حدد بدلالة  $n$  جميع القيم الممكنة لعدد الثلاثيات المستديرة.

زمن الاختبار 4 ساعات ونصف

7 درجات لكل سؤال

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والسداد