Test-5, January 14

Level 4

Problem 1. In a scalene triangle ABC, I is the incenter and CN is the bisector of angle C. The line CN meets the circumcircle of ABC again at M. The line l is parallel to AB and touches the incircle of ABC. The point R on l is such that $CI \perp IR$. The circumcircle of MNR meets the line IR again at S. Prove that $AS = BS$.

Problem 2. Determine all possible values of the expression

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC$$

where A, B, and C are nonnegative integers.

Problem 3. Some squares of a $n \times n$ table ($n > 2$) are black, the rest are white. In every white square we write the number of all black squares having at least one common vertex with it. Find the maximum possible sum of all these numbers.

Problem 4. Let convex hexagon $ABCDEF$ is inscribed to the circle. Prove that

$$AC \cdot BD \cdot CE \cdot DF \cdot AE \cdot BF \geq 27 \cdot AB \cdot BC \cdot CD \cdot DE \cdot EF \cdot FA.$$

السؤال الأول

في المثلث المختلف الأضلاع ABC I هي المركز الداخلي و CN هو منصف الزاوية C. المستقيم CN يقطع الدائرة المحيطة بـ ABC مرة أخرى في M. المستقيم l يوازي AB ويمس الدائرة الداخلية لـ ABC. النقطة R على l بحيث $CI \perp IR$. الدائرة المحيطة بـ MNR تلتقي المستقيم IR مرة أخرى في S. أثبت أن $AS = BS$.

السؤال الثاني

حدد جميع القيم الممكنة للمقدار

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC$$

بحيث A, B, C أعداد صحيحة غير سالبة.

السؤال الثالث

بعض مربعات الجدول من القياس $n \times n$ $(2 < n)$ سوداء، والبقية بيضاء. في كل مربع أبيض نكتب عدد المربعات السوداء التي تشترك معه في رأس على الأقل. أوجد أكبر عدد ممكن لمجموع هذه الأعداد.

السؤال الرابع

ليكن $ABCDEF$ سداسيًا دائريًا محدبًا. أثبت أن

$$AC \cdot BD \cdot CE \cdot DF \cdot AE \cdot BF \geq 27 \cdot AB \cdot BC \cdot CD \cdot DE \cdot EF \cdot FA$$

الزمن 4 ساعات ونصف

كل سؤال 10 نقاط

مع أطيب التمنيات بالتوفيق