تبسيط بعض القيم الجبرية

١) إذا كان: $A=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{21\cdot 22},\ \ B=\frac{1}{12\cdot 22}+\frac{1}{13\cdot 21}+...+\frac{1}{22\cdot 12}$

فأثبت أن: $\frac{A}{B}$ عدد صحيح.

٢) لكل $n=1,2,3,\cdots$ بفرض أن $u_n=1+2+3+\cdots+n$

أوجد قيمة المقدار $\frac{1}{(\frac{1}{u_1})}+\frac{2}{(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2})}+\frac{3}{(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3})}+\cdots+\frac{100}{(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\cdots+\frac{1}{u_{100}})}$.

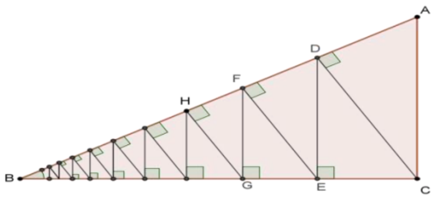
٣) إذا كانت $x=1+\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{16}$ فاحسب قيمة المقدار $(1+\frac{1}{x})^{30}$.

٤) احسب $p=2^{\frac{1}{3}}.4^{\frac{1}{3^2}}.8^{\frac{1}{3^3}}.16^{\frac{1}{3^4}}....$.

٥) إذا كانت $\frac{\pi^4}{90}=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+........$ فأوجد قيمة $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+........$.

٦) إذا كان ABC مثلث فيه $\angle A=60^\circ$ وَ $\angle ACB=90^\circ$ وَ $|AC|=4$ وَ $CD\perp AB$ وَ $DE\perp BC$ و $EF\perp AB$ وهكذا إلى ما لانهاية كما هو موضح بالشكل. أوجد قيمة المجموع

$|CD|+|DE|+|EF|+|FG|+......$



٧) باعتبار f_n متتابعة فيبوناتشي، احسب المجموع غير المنتهي

$$S=\frac{f_1}{3^1}+\frac{f_2}{3^2}+\frac{f_3}{3^3}+.........+\frac{f_n}{3^n}+.....$$

(متتابعة فيبوناتشي تعرف كما يلي $f_0=f_1=1, f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$).

٨) أوجد $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

٩) أوجد العدد الموجب الصحيح x الذي يحقق

$$1\cdot 1987+2\cdot 1986+3\cdot 1985+\cdots+1986\cdot 2+1987\cdot 1=1987\cdot 994\cdot x$$

١٠) لتكن $a_1,a_2,...,a_n$ متتابعة حسابية لها الفرق المشترك غير الصفري d. أوجد المجموع $\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i a_{i+1}}$

بدلالة a_1,a_n,n .

١١) لتكن $T_n = 1+2+3+...+n$ وَ $P_n = \frac{T_2}{T_2-1}.\frac{T_3}{T_3-1}.\frac{T_4}{T_4-1}...\frac{T_n}{T_n-1}$ لكل $n = 2,3,...$. أوجد P_{2017} .

١٢) بفرض n عدد صحيح موجب أوجد المجموع $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{n-1}{n!}$.

١٣) أوجد المجموع $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{255\cdot 257}$.

١٤) احسب قيمة $\prod_{n=1}^{20}\left(1+\frac{2n+1}{n^2}\right)$.

١٥) احسب قيمة $\sum_{k=1}^{7}\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}+\sqrt[3]{k(k+1)}+\sqrt[3]{(k+1)^2}}$.

١٦) لتكن $H_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ ولتكن $T_n = \frac{1}{(n+1)H_nH_{n+1}}$. أثبت أن

$$T_1+T_2+T_3+\cdots = 1$$

١٧) أوجد مجموع المتسلسلة $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$ حيث $x \neq 1$.

١٨) أوجد المجموع $1\cdot 2-2\cdot 3+3\cdot 4-4\cdot 5+\cdots+2001\cdot 2002$

١٩) أوجد العدد الموجب الصحيح n الذي يحقق

$$2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+4\cdot 2^4+5\cdot 2^5+\cdots+n\cdot 2^n = 2^{n+10}$$

٢٠) أوجد العدد الموجب الصحيح x الذي يحقق

$$1\cdot 1987+2\cdot 1986+3\cdot 1985+\cdots+1986\cdot 2+1987\cdot 1 = 1987\cdot 994\cdot x$$

٢١) إذا كانت a_n متتابعة من الأعداد معرفة كالتالي $a_n = 3n^2+3n+1$ فاحسب $\sum_{1}^{100} a_n$.

٢٢) لتكن $f(n+1) = (-1)^{n+1}n-2f(n)$ لكل عدد صحيح $n \geq 1$ ولتكن $f(1) = f(1986)$.
احسب المجموع $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(1985)$.

٢٣) أوجد بدلالة n صيغة عامة للمجموع $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

٢٤) احسب المجموع $S = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{1999^2}+\frac{1}{2000^2}}$

٢٥) احسب المجموع $\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{4^2+2}+\frac{1}{5^2+3}+\cdots$.

٢٦) أوجد بدلالة n صيغة عامة للمجموع $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^4+k^2+1}$.

٢٧) احسب $\prod_{2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

٢٨) احسب $\sum_{k=1}^{n}k!.k$.

٢٩)احسب $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$.

٣٠) إذا كانت المتتابعة x_n معرفة بحيث أن $x_{k+1}=x_k{}^2+x_k$, $x_1=\frac{1}{2}$. أوجد أكبر عدد صحيح أقل من

$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\frac{1}{x_3+1}+\cdots+\frac{1}{x_{100}+1}$.

٣١) لتكن F_n متتابعة فيبوناتشي $(F_1=1,F_2=1,F_{n+1}=F_n+F_{n-1})$ احسب

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}},\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}}$.

٣٢) أثبت أن $24 < \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}$.

٣٣)أثبت أن $2 > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$.

٣٤) احسب قيمة $A=\frac{1}{2\left[\sqrt{1}\right]+1}+\frac{1}{2\left[\sqrt{3}\right]+1}+\cdots+\frac{1}{2\left[\sqrt{100}\right]+1}$.

٣٥)احسب $\sum_{k=1}^{n}k!.k$.