

Test-4, January 10
Level 4

Problem 1. The rectangle is called even if both its side lengths are even numbers. Let n is odd integer and let $n \times n$ square is dissected into even rectangles and some number of unit squares. Find the smallest possible number of unit squares.

Problem 2. Find all functions $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ satisfying both conditions a) and b)

a) $f(p) > 0$ for every prime p ,

b) p divides $(f(x) + f(p))^{f(p)} - x$ for every $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and every prime p .

Problem 3. Let $ABCD$ be a trapezoid with the bases AD and BC . Let E and F be points on the segments AB and CD , respectively. Circumcircle of the triangle AEF intersects segment AD at point A_1 . Circumcircle of the triangle CEF intersects segment BC at point C_1 . Prove that A_1C_1 , BD and EF concur.

Problem 4. Let $a, b, c \in \mathbb{N}$. Prove the following inequality

$$a + b + c + \gcd(a, b + c) + \gcd(b, c + a) + \gcd(c, a + b) \geq 2(\gcd(a, b) + \gcd(b, c) + \gcd(c, a))$$

and find all triples (a, b, c) for which the equality holds.



السؤال الأول

نقول عن مستطيل بأنه زوجي إذا كانت أطوال أضلاعه أعدادًا زوجية. ليكن n عددًا فرديًا وليكن المربع من القياس $n \times n$ مقسمًا إلى مستطيلات زوجية بالإضافة لعدد من مربعات الوحدة. أوجد أقل عدد ممكن من مربعات الوحدة.

السؤال الثاني

أوجد جميع الدوال $f: \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ التي تحقق كلاً من الشرطين (أ) و (ب).

(أ) $f(p) > 0$ لكل عدد أولي p .

(ب) p يقسم $x - (f(x) + f(p))^{f(p)}$ لكل $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ وكل عدد أولي p .

السؤال الثالث

ليكن $ABCD$ شبه منحرف قاعدته AD و BC . لتكن E و F نقطتين على القطعتين AB و CD ، على الترتيب. الدائرة المحيطة بالمثلث AEF تقطع القطعة AD في النقطة A_1 . والدائرة المحيطة بالمثلث CEF تقطع القطعة BC في النقطة C_1 . أثبت أن A_1C_1 و BD و EF تتقاطع في نقطة.

السؤال الرابع

لتكن $a, b, c \in \mathbb{N}$. أثبت المتباينة التالية

$$a + b + c + \gcd(a, b + c) + \gcd(b, c + a) + \gcd(c, a + b) \geq 2(\gcd(a, b) + \gcd(b, c) + \gcd(c, a))$$

وأوجد جميع الثلاثيات (a, b, c) التي تحقق حالة المساواة.

الزمن 4 ساعات ونصف

كل سؤال 10 نقاط

مع أطيب التمنيات بالتوفيق