Practice Problems- 9

11 July, 2020

Level 2

Homework Problems

52. Determine all positive integers n such that n has a multiple whose digits are nonzero.

الحل :

جميع الأعداد n التي لا تقبل القسمة على 10 تحقق المطلوب

الحالة الأولى : $\gcd(n,10)=1$

$10^{e(n)} \equiv 1 \pmod{n}$; $\gcd(n,10)=1$

$\Rightarrow n \mid 10^{e(n)}-1 \Rightarrow n \mid \underbrace{99\ldots9}_{e(n)\text{ مرة}}$. أو $n \mid \underbrace{11\ldots1}_{e(n)\text{ مرة}}$

الحالة الثانية : $n=5^k$ أو $n=2^k$

باستخدام الاستقراء الرياضي ، نفرض أن

$5^{k_0} \mid \overline{a_1 a_2 \ldots a_m}$

$5^{k_0+1} \mid \overline{\qquad}$

52. Determine all positive integers n such that n has a multiple whose digits are nonzero.

$$\overline{a_1a_2\cdots a_m} = 5^{k_0}t$$

$$\overline{1a_1a_2\cdots a_m} = 10^m + (5^{k_0}t) = 5^{k_0}(1\cdot 2^m \cdot 5^{m-k_0} + t)$$

$$\overline{3a_1a_2\cdots a_m} = 3\cdot 10^m + 5^{k_0}t = 5^{k_0}(3\cdot 2^m \cdot 5^{m-k_0} + t)$$

$$\overline{5a_1a_2\cdots a_m} = 5\cdot 10^m + 5^{k_0}t = 5^{k_0}(5\cdot 2^m \cdot 5^{m-k_0} + t)$$

$$\overline{7a_1a_2\cdots a_m} = 7\cdot 10^m + 5^{k_0}t = 5^{k_0}(7\cdot 2^m \cdot 5^{m-k_0} + t)$$

$$\overline{9a_1a_2\cdots a_m} = 9\cdot 10^m + 5^{k_0}t = 5^{k_0}(9\cdot 2^m \cdot 5^{m-k_0} + t)$$

نريد جعل بواقي الأقواس مختلفة (mod 5) ، لنثبت أن أحدهم يقبل

القسمة على 5 ، لذلك نفرض أن $m = k_0 \Leftarrow$ نغير فرضية

الاستقراء.

52. Determine all positive integers n such that n has a multiple whose digits are nonzero.

فرضية الاستقراء: لكل $k \in \mathbb{Z}^+$ يوجد عدد بـ k خانة فردية يقبل القسمة على 5^k.

الاثبات:

$$5^{k_0} \mid \overline{a_1 \cdots a_{k_0}}$$

بنفس الطريقة السابقة

$$\overline{1a_1 \cdots a_{k_0}} = 5^{k_0}(1 \cdot 2^{k_0} + t)$$

$$(3 \cdot 2^{k_0} + t)$$

$$\vdots$$

$$\overline{9a_1 \cdots a_{k_0}} = 5^{k_0}(9 \cdot 2^{k_0} + t)$$

جميع الأقواس لها بواقي مختلفة $(\bmod 5)$ $\Leftarrow$ أحدها يقبل القسمة على 5

$\Leftarrow$ أحد الأعداد المكونة من k_0+1 خانة فردية يقبل القسمة على 5^{k_0+1}

52. Determine all positive integers n such that n has a multiple whose digits are nonzero.

الحالة الثالثة : $n = a^s \cdot m$ حيث أن $a = 2$ أو 5

$\gcd(m, 10) = 1$

بالحالة الثانية أثبتنا وجود عدد s خانة مختلفة ويقبل القسمة على a^s.

$t = \overline{a_{s-1} a_{s-2} \cdots a_0}$, $a^s \mid t$

نعتبر المتتابعة :

$\overline{a_{s-1} a_{s-2} \cdots a_0}, \overline{a_{s-1} \cdots a_0 a_{s-1} \cdots a_0}, \cdots$

← بما أن المتسلسلة لانهائية ، فيوجد عددين متطابقين $(\mathrm{mod}\ m)$

$$\underbrace{\overline{a_{s-1} \cdots a_0\, a_{s-1} \cdots a_0 \cdots a_0}}_{\text{مرة } i} \equiv \underbrace{\overline{a_{s-1} \cdots a_0\, a_{s-1} \cdots a_0 \cdots a_0}}_{\text{مرة } j} \pmod m$$

نفرض $i > j$

52. Determine all positive integers n such that n has a multiple whose digits are nonzero.

$$\overline{\underbrace{a_{s-1}\cdots a_0\cdots a_{s-1}\cdots a_0}_{k\text{ مرة}}00\cdots 0} \equiv 0 \pmod m$$

ولكن $\gcd(m,10)=1$

$$\Rightarrow \quad m \mid \underbrace{\overline{a_{s-1}\cdots a_0 \cdots a_{s-1}\cdots a_0}}_{k\text{ مرة}}$$

ولكن

$$a^s \mid \overline{a_{s-1}\cdots a_0} \Rightarrow a^s \mid \underbrace{\overline{a_{s-1}\cdots a_0\cdots a_{s-1}\cdots a_0}}_{k\text{ مرة}}$$

وبما أن $\gcd(m,a^s)=1$ ، فإن

$$n \mid \underbrace{\overline{a_{s-1}\cdots a_0\cdots a_{s-1}\cdots a_0}}_{k\text{ مرة}}$$

37. Let a and b be two relatively prime positive integers, and consider the arithmetic progression $\{a, a+b, a+2b, a+3b, \ldots\} = S$.

(1) [G. Polya] Prove that there are infinitely many terms in the arithmetic progression that have the same prime divisors.

(2) Prove that there are infinitely many pairwise relatively prime terms in the arithmetic progression.

من الواضح أن

$n \in S \iff n \equiv a \pmod b$, $n \in \mathbb{N}$

(1) نريد إيجاد العددين s,t حيث أن

$$m_i \equiv a \pmod b$$
$$st^i \equiv a \pmod b$$
$$st^{i+1} \equiv a \pmod b$$

$$\boxed{\begin{array}{l} m_1 = st \\ m_2 = st^2 \\ m_3 = st^3 \\ \vdots \end{array}}$$

نختار $s \equiv a \pmod b$ ، و $t \equiv 1 \pmod b$

$m_i \in S \Leftarrow m_i \equiv a \pmod b \Leftarrow t \equiv 1 \pmod b$

$m_i \geq 1$

ومجموعة قواسم m_i هي قواسم s,t

مثال، $s = a+b$, $t = ax$ حيث أن $x \equiv a^{-1} \pmod b$

37. Let a and b be two relatively prime positive integers, and consider the arithmetic progression $a, a+b, a+2b, a+3b, \ldots$.

(1) [G. Polya] Prove that there are infinitely many terms in the arithmetic progression that have the same prime divisors.

(2) Prove that there are infinitely many pairwise relatively prime terms in the arithmetic progression.

2) نستطيع إيجاد متتابعة تحقق الشرط وجميع حدودها أولية نسبياً
مع a.

$t_i = a + b\,\underbrace{k}_{\text{حرية}}$

نبدأ ب t_1 وفي كل خطوة نضيف عدد أولي نسبياً مع جميع الأعداد
التي تسبقه.

نختار: $t_{i+1} > t_i$, $t_{i+1} = a + b(t_1 t_2 \cdots t_i)$ *

$\gcd(t_{i+1}, t_j) = 1 \Leftrightarrow \gcd(a, t_j) = 1$
$j < i+1$

وليكن $t_1 = a+b \Leftarrow \gcd(t_1, a) = 1$, $t_1 \in S$

يمكن بناء المتسلسلة كما في *

19. [Ireland 1999] Find all positive integers m such that the fourth power of the number of positive divisors of m equals m.

بما أن m تساوي القوة الرابعة لعدد ، نفرض أن

$$m = k^4$$

$$m = p_1^{4\alpha_1} \cdots p_t^{4\alpha_t}$$

إذن عدد قواسم m هو

$$(4\alpha_1+1)\cdots(4\alpha_t+1)$$

⇐ العدد n فردي ، إذن يمكن كتابته ك :

$$k = 3^{\alpha_3}\cdot 5^{\alpha_5}\cdot 7^{\alpha_7}\cdots, \quad \alpha_i \geq 0$$

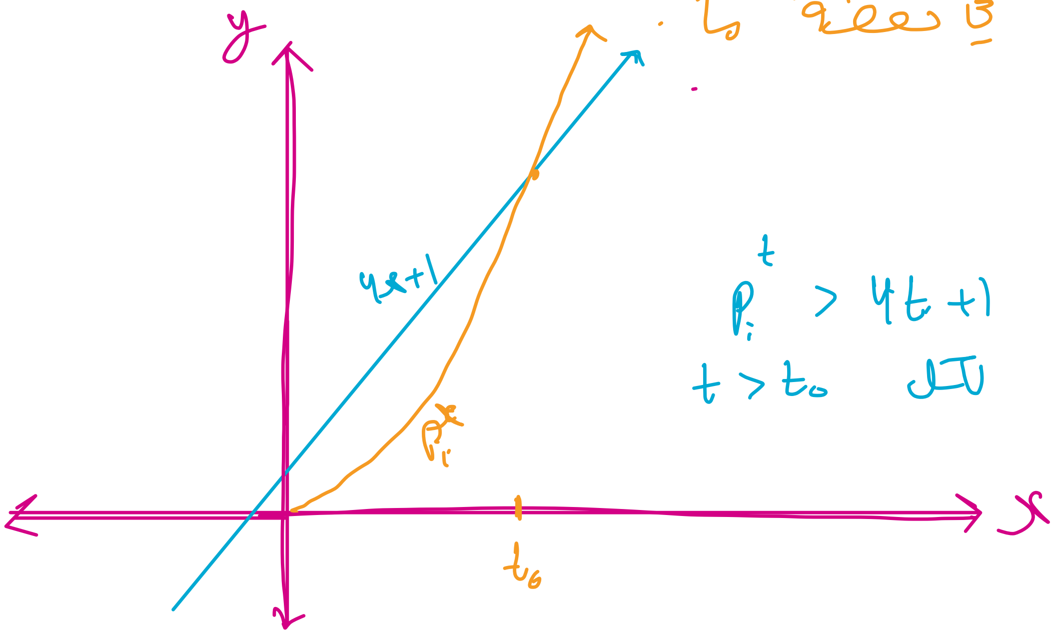
$$\Rightarrow p_1^{4\alpha_1}\cdots p_t^{4\alpha_t}\cdots = \left((4\alpha_1+1)\cdots(4\alpha_t+1)\cdots\right)^4$$

$$\Rightarrow p_1^{\alpha_1}\cdots p_t^{\alpha_t}\cdots = (4\alpha_1+1)\cdots(4\alpha_t+1)\cdots$$

$$\left(\frac{p_1^{\alpha_1}}{4\alpha_1+1}\right)\cdots\left(\frac{p_t^{\alpha_t}}{4\alpha_t+1}\right)\cdots = 1, \quad x_i = \frac{p_i^{\alpha_i}}{4\alpha_i+1} \Rightarrow x_3 x_5 \cdots = 1$$

19. [Ireland 1999] Find all positive integers m such that the fourth power of the number of positive divisors of m equals m.

الفكرة : الطرف الأيسر أكبر من الطرف الأيمن ، لأن الدالة الأسية أكبر من الدالة الخطية في نقطة ما .



$p_i^{\alpha_i}$, $4\alpha_i+1$

$p_i^t > 4t+1$

لكل $t > t_0$

إذا كان $\underline{p_i \geq 5}$ ، فإن

$$p_i^t \geq \underline{5^t \geq 12t+1} \quad \forall \; t \geq 2$$

19. [Ireland 1999] Find all positive integers m such that the fourth power of the number of positive divisors of m equals m.

الإثبات بالاستقراء الرياضي :

$$5^t \geq 12t+1 \quad \forall\, t \geq 2$$

$t=2$, $\quad 5^2 = 12 \cdot 2+1$

نفرض أن العبارة صحيحة لـ t_0

$$5^{t_0} \geq 12t_0+1$$

$$\Rightarrow \quad 5^{t_0+1} \geq \underbrace{60t_0+5 > 12(t_0+1)+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad 48t_0 > 13-5 \Leftrightarrow 48t_0 > 8$$

وهذا صحيح

$$\Rightarrow \quad 5^{t_0+1} \geq 12(t_0+1)+1$$

تم الإثبات

19. [Ireland 1999] Find all positive integers m such that the fourth power of the number of positive divisors of m equals m.

$\Rightarrow \quad p^t \geq 12t+1$ دالة متزايدة $\quad \forall \quad p \geq 5$, $t \geq 2$

$\Rightarrow \quad \dfrac{p^t}{4t+1} \geq \dfrac{12t+1}{4t+1} \geq \dfrac{25}{9}$ → الدالة عند $t=2$ $\quad \Rightarrow \quad \boxed{x_p \geq \boxed{\dfrac{25}{9}}} \quad \forall \quad p \geq 5$, $t \geq 2$

$9(12t+1) > 25(4t+1)$

$108t+9 > 100t+25 \Leftrightarrow 8t > 16 \Leftrightarrow t > 2$

$t=0 \Rightarrow x_p = 1$

$t=1 \Rightarrow \quad x_p = \dfrac{p}{4.1+1} = \dfrac{p}{5} \geq 1$ "=" when $p=5$

$\begin{cases} \cdot\, x_3 = \boxed{\dfrac{3}{5}} & \text{when } t=1 \\ \cdot\, x_3 > 1 & \text{when } t>2 \end{cases}$, $\cdot\, t=2$, $x_3 = \dfrac{3^2}{4.2+1} = 1$

19. [Ireland 1999] Find all positive integers m such that the fourth power of the number of positive divisors of m equals m.

$x_3 \; x_5 \; x_7 \cdots\cdots = 1$

لو كانت $x_3 = \frac{3}{5}$ ، $x_p > \frac{25}{9}$ لعدد ما p ، فإن

$x_3 x_5 \cdots x_7 \cdots > \frac{3}{5} \cdot \frac{25}{9} = \frac{5}{3} > 1$

وهذا تناقض
إذن الحالات المتبقية :

- $x_3 = \frac{3}{5}$, $x_p = 1 \quad \forall p$

$\alpha_3 = 1$

$\alpha_p = 0 \quad \forall p$

$\alpha_5 = 1$, $\alpha_p = 0$

$\Rightarrow$ $k: 3 , 3.5$

- $x_3 = 1$, $x_p = 1 \quad \forall p$

$\alpha_p = 0 \quad \forall p \Longrightarrow k = 1$ ✓

$\alpha_5 = 1$, $\alpha_p = 0 \Longrightarrow k = 5$ ✓

$\alpha_3 = 2$, $\alpha_p = 0 \Longrightarrow k = 3^2$ ✓

$\alpha_5 = 2$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_p = 0 \Rightarrow k = 3^2 . 5$ ✓

$m \in \{1, 5^4, 3^8, 3^8 . 5^4\}$

More Problems ☺

24. Prove that any integer can be written as the sum of the cubes of five integers, not necessarily distinct.