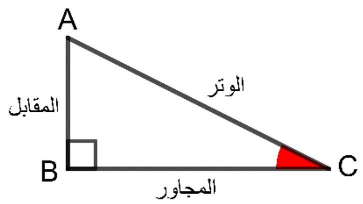
مقدمة في حساب المثلثات

الدوال المثلثية للزاوية الحادة الموجبة:



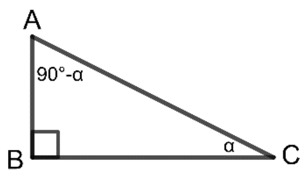
الزاوية الحادة الموجبة هي زاوية موجبة قياسها ينتمي إلى الفترة $]0°, 90°[$. وفي المثلث الذي إحدى زواياه قائمة يمكننا أن نقول أن النسبة بين طولي أي ضلعين من أضلاعه هي نسبة مثلثية ويمكننا توضيح ذلك كالتالي:

التعبير الرمزي	التعريف
$\sin C = \dfrac{AB}{AC}$	جيب قياس الزاوية C = $\dfrac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } C}{\text{طول الوتر}}$
$\cos C = \dfrac{BC}{AC}$	جيب تمام قياس الزاوية C = $\dfrac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } C}{\text{طول الوتر}}$
$\tan C = \dfrac{AB}{BC}$	ظل قياس الزاوية C = $\dfrac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } C}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } C}$
$\sec C = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{1}{\cos C}$	قاطع قياس الزاوية C = $\dfrac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } C}$
$\csc C = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{\sin C}$	قاطع تمام قياس الزاوية C = $\dfrac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } C}$
$\cot C = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{1}{\tan C}$	ظل تمام الزاوية C = $\dfrac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } C}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } C}$

ملاحظة: الزوايا المتكافئة تكون لها نفس الدوال المثلثية. أي أن: حيث $n \in \mathbb{Z}$

$$i)\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta$$
$$ii)\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta$$
$$iii)\tan(\theta + 2n\pi) = \tan\theta$$

العلاقة بين الدوال المثلثية لزاويتين متتامتين.



الزاويتان المتتامتان هما الزاويتان اللتان مجموع قياسهما $90°$، فإذا كانت $\angle\alpha$ تتم $\angle\beta$ فإن:

$\angle\alpha + \angle\beta = 90°$.

وتكون

$$\angle\beta = 90° - \angle\alpha \quad , \quad \angle\alpha = 90° - \angle\beta \, .$$

ومنها يمكننا الوصول منطقياً للعلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين كالتالي:

في ΔABC القائم في $\angle B$ تكون $\angle A, \angle C$ متتامتان، فإذا كان $\angle C = \alpha$ فإن $\angle A = 90^\circ - \alpha$.

إذن:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{BC}{AC}$$

ولكن

$$\cos\alpha = \frac{BC}{AC}$$

إذن:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

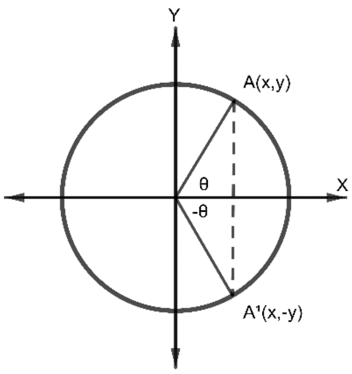
ويمكن تلخيص ذلك كما يلي :

القاعدة	مثال
$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$	$\sin 20^\circ = \cos 70^\circ$
$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$	
$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot\alpha$	$\tan 40^\circ = \cot 50^\circ$
$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan\alpha$	
$\sec(90^\circ - \alpha) = \csc\alpha$	$\sec 30^\circ = \csc 60^\circ$
$\csc(90^\circ - \alpha) = \sec\alpha$	

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياسهما $\theta, (-\theta)$

إذا كان الضلع النهائي للزاوية التي قياسها (θ) يقطع دائرة الوحدة في النقطة $A(X,Y)$، والضلع النهائي للزاوية التي قياسها $(-\theta)$ يقطع دائرة الوحدة في النقطة A'، فمن هندسة الشكل المجاور نجد أن: A' هي صورة النقطة A بالانعكاس حول المحور X. إذن: $A'(X,-Y)$، أي أن:

$$\cos(-\theta) = X = \cos\theta.$$



وكذلك

$$\sin(-\theta) = -Y = -\sin\theta.$$

ويمكن تلخيص ذلك كما يلي:

القاعدة	مثال
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$	$\tan(-60^\circ) = -\tan 60^\circ$
$\csc(-\theta) = -\csc\theta$	$\csc(-40^\circ) = -\csc 40^\circ$
$\sec(-\theta) = \sec\theta$	$\sec(-15^\circ) = \sec 15^\circ$
$\cot(-\theta) = -\cot\theta$	$\cot(-70^\circ) = -\cot 70^\circ$

وبما أن الزاوية التي قياسها $(-\theta)$ تكافئ الزاوية التي قياسها $(360^\circ - \theta)$، يمكن استنتاج العلاقات التالية:

القاعدة	مثال
$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta$	$\sin(330^\circ) = \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ$
$\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$	$\cos 315^\circ = \cos(360^\circ - 45^\circ) = \cos 45^\circ$
$\tan(360^\circ - \theta) = -\tan\theta$	$\tan(300^\circ) = -\tan 60^\circ$
$\csc(360^\circ - \theta) = -\csc\theta$	$\csc(320) = -\csc 40^\circ$
$\sec(360^\circ - \theta) = \sec\theta$	$\sec(300^\circ) = \sec 60^\circ$
$\cot(360^\circ - \theta) = -\cot\theta$	$\cot(290) = -\cot 70^\circ$

ملاحظة:

نعلم أن الزاوية التي قياسها $(-\theta)$ تكافئ الزاوية التي قياسها $(2n\pi - \theta)$ حيث $n \in \mathbb{Z}$، أي أن:

$$\sin(2n\pi - \theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(2n\pi - \theta) = \cos\theta$$
$$\tan(2n\pi - \theta) = -\tan\theta$$

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياسهما $\theta, (90^\circ + \theta)$

بوضع $(-\theta)$ بدلاً من (α) " في أولاً " نحصل على العلاقة:

$$\sin\ 90^\circ - (-\theta)\ = \cos(-\theta)$$

إذن:

$\sin\ 90^\circ + \theta\ = \cos(-\theta) = \cos\theta$ " من ثانياً ".

ومن ذلك يمكن استنتاج العلاقات التالية:

القاعدة	مثال
$\sin(90^\circ+\theta)=\cos\theta$	$\sin(120^\circ)=\sin(90^\circ+30^\circ)=\cos 30^\circ$
$\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta$	$\cos(120^\circ)=\cos(90^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ$
$\tan(90^\circ+\theta)=-\cot\theta$	$\tan(150^\circ)=\tan(90^\circ+60^\circ)=-\cot 60^\circ$
$\csc(90^\circ+\theta)=\sec\theta$	$\csc(135^\circ)=\csc(90^\circ+45^\circ)=\sec 45^\circ$
$\sec(90^\circ+\theta)=-\csc\theta$	$\sec(135^\circ)=\sec(90^\circ+45^\circ)=-\csc 45^\circ$
$\cot(90^\circ+\theta)=-\tan\theta$	$\cot(150^\circ)=\cot(90^\circ+60^\circ)=-\tan 60^\circ$

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياسهما $\theta,(180^\circ-\theta)$

بوضع $(90^\circ-\theta)$ بدلاً من (θ) " في ثالثاً " إذن:

$$\sin\ 90^\circ+(90^\circ-\theta)\ =\cos(90^\circ-\theta)$$

إذن

$$\sin\ 180^\circ-\theta)\ =\sin\theta$$ " من أولاً "

ومن ذلك يمكن استنتاج العلاقات التالية:

القاعدة	مثال
$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$	$\sin(120^\circ)=\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ$
$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$	$\cos(120^\circ)=\cos(180^\circ-60^\circ)=-\cos 60^\circ$
$\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta$	$\tan(150^\circ)=\tan(180^\circ-30^\circ)=-\tan 30^\circ$
$\sec(180^\circ-\theta)=-\sec\theta$	$\csc(135^\circ)=\csc(180^\circ-45^\circ)=\csc 45^\circ$
$\csc(180^\circ-\theta)=\csc\theta$	$\sec(135^\circ)=\sec(180^\circ-45^\circ)=\sec 45^\circ$
$\cot(180^\circ-\theta)=-\cot\theta$	$\cot(150^\circ)=\cot(90^\circ+60^\circ)=-\tan 60^\circ$

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياسهما $\theta,(180^\circ+\theta)$

بوضع $(90^\circ-\theta)$ بدلاً من (θ) " في ثالثاً "

إذن:

$$\sin\ 90^\circ+(90^\circ-\theta)\ =\cos(90^\circ-\theta)$$

إذن

$$\sin\ 180^\circ-\theta)\ =\sin\theta$$ " من أولاً "

ومن ذلك يمكن استنتاج العلاقات التالية:

القاعدة	مثال
$\sin(180^\circ+\theta)=-\sin\theta$	$\sin(240^\circ)=\sin(180^\circ+60^\circ)=-\sin 60^\circ$
$\cos(180^\circ+\theta)=-\cos\theta$	$\cos(210^\circ)=\cos(180^\circ+30^\circ)=-\cos 30^\circ$
$\tan(180^\circ+\theta)=\tan\theta$	$\tan(225^\circ)=\tan(180^\circ+45^\circ)=\tan 45^\circ$
$\sec(180^\circ+\theta)=-\sec\theta$	$\sec(225^\circ)=\sec(180^\circ+45^\circ)=-\sec 45^\circ$
$\csc(180^\circ+\theta)=-\csc\theta$	$\csc(225^\circ)=\csc(180^\circ+45^\circ)=-\csc 45^\circ$
$\cot(180^\circ+\theta)=\cot\theta$	$\cot(240^\circ)=\cot(180^\circ+60^\circ)=\cot 60^\circ$

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياسهما $\theta,(270^\circ-\theta)$

بوضع $(90^\circ-\theta)$ بدلاً من (θ) في خامساً،

إذن:

$$\sin\ 180^\circ+(90^\circ-\theta)\ =-\sin(90^\circ-\theta)$$

إذن

$$\sin\ 270^\circ-\theta)\ =-\cos\theta$$

ومن ذلك يمكن استنتاج العلاقات التالية:

القاعدة	مثال
$\sin(270^\circ-\theta)=-\cos\theta$	$\sin(210^\circ)=\sin(270^\circ-60^\circ)=-\cos 60^\circ$
$\cos(270^\circ-\theta)=-\sin\theta$	$\cos(225^\circ)=\cos(270^\circ-45^\circ)=-\sin 45^\circ$
$\tan(270^\circ-\theta)=\cot\theta$	$\tan(210^\circ)=\tan(270^\circ-60^\circ)=\cot 60^\circ$
$\sec(270^\circ-\theta)=-\csc\theta$	$\sec(240^\circ)=\sec(270^\circ-30^\circ)=-\csc 30^\circ$
$\csc(270^\circ-\theta)=-\sec\theta$	$\csc(240^\circ)=\csc(270^\circ-30^\circ)=-\sec 30^\circ$
$\cot(270^\circ-\theta)=\tan\theta$	$\cot(225^\circ)=\cot(270^\circ-45^\circ)=\tan 45^\circ$

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياسهما $\theta,(270^\circ+\theta)$

بوضع $(90^\circ+\theta)$ بدلاً من (θ) في خامساً

إذن:

$$\sin\ 180^\circ+(90^\circ+\theta)\ =-\sin(90^\circ+\theta)$$

إذن

$$\sin\ 270^\circ+\theta)\ =-\cos\theta$$

ومن ذلك يمكن استنتاج العلاقات التالية:

مثال	القاعدة
$\sin(300^\circ) = \sin(270^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ$	$\sin(270^\circ + \theta) = -\cos\theta$
$\cos(330^\circ) = \cos(270^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ$	$\cos(270^\circ + \theta) = \sin\theta$
$\tan(315^\circ) = \tan(270^\circ + 45^\circ) = -\cot 45^\circ$	$\tan(270^\circ + \theta) = -\cot\theta$
$\sec(300^\circ) = \sec(270^\circ + 30^\circ) = \csc 30^\circ$	$\sec(270^\circ + \theta) = \csc\theta$
$\csc(315^\circ) = \csc(270^\circ + 45^\circ) = -\sec 45^\circ$	$\csc(270^\circ + \theta) = -\sec\theta$
$\cot(320^\circ) = \cot(270^\circ + 50^\circ) = -\tan 50^\circ$	$\cot(270^\circ + \theta) = -\tan\theta$

مثال (1)

في ΔXYZ والقائم الزاوية في Z ، اثبت الفقرات الثلاث الأوائل ثم أوجد القيمة في الفقرة الرابعة:

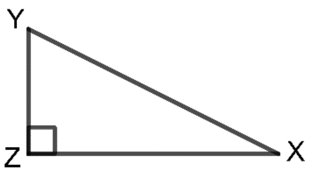
I $\sin x < 1$

II $\cos x < 1$

III $\sin x + \cos x > 1$

V $\sin x \cos y + \cos x \sin y$:

الحل



I بما أن: $\sin x = \dfrac{ZY}{XY}$

ولكن: $XY > ZY$. لأن $m\ Z > m\ X$.

إذن: $\sin x$ تساوي كسراً أقل من الواحد الصحيح

إذن: $\sin x < 1$.

II بما أن: $\cos x = \dfrac{ZX}{XY}$

ولكن: $XY > ZX$ إذن: $\cos x < 1$.

III $\sin x + \cos x = \dfrac{ZY}{XY} + \dfrac{ZX}{XY} = \dfrac{ZY + ZX}{XY}$

ولكن: $ZY + ZX > XY$. (مجموع طولي ضلعين في المثلث أكبر من الضلع الثالث)

إذن: $\sin x + \cos x$ كسر بسطه أكبر من مقامه.

إذن:

$\sin x + \cos x > 1$.

V $$\sin x\cos y+\cos x\sin y=\frac{ZY}{XY}\cdot\frac{ZY}{XY}+\frac{ZX}{XY}\cdot\frac{ZX}{XY}=\frac{ZY^2+ZX^2}{XY^2}$$

ولكن $ZY^2+ZX^2=1$. (نظرية فيثاغورس).

إذن: $\sin x\cos y+\cos x\sin y=\dfrac{XY^2}{XY^2}=1$.

مثال (2)

ابحث إشارات الدوال المثلثية التالية:

I $\tan 320^\circ$

II $\sin 160^\circ$

III $\csc\dfrac{4\pi}{5}$

V $\sec 750^\circ$

IV $\cos(-200^\circ)$

الحل

I $270^\circ<320^\circ<360^\circ$ أي تقع في الربع الرابع، إذن $\tan 320^\circ$ سالبة.

II $90^\circ<160^\circ<180^\circ$ أي تقع في الربع الثاني، إذن $\sin 160^\circ$ موجبة.

III $\dfrac{4\pi}{5}=\dfrac{4\times180^\circ}{8}=144^\circ$ ، إذن

$90^\circ<144^\circ<180^\circ$ أي تقع في الربع الثاني

إذن

$\sin160^\circ\csc\dfrac{4\pi}{5}$ موجبة.

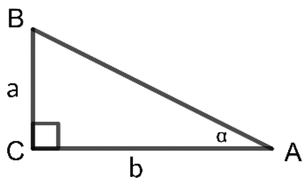
V بما أن $\sec750^\circ=\sec(30^\circ+2\times360^\circ)=\sec30^\circ$ أي تقع في الربع الأول، إذن $\sec30^\circ$ موجبة

IV بما أن $\cos(-200^\circ)=\cos(160^\circ-360^\circ)=\cos160^\circ$ أي تقع في الربع الأول، إذن $\cos(-200^\circ)$ سالبة.

مثال (4)

إذا كان $\tan\alpha = \frac{a}{b}$ حيث $b \neq 0$. فأثبت أن المقدار $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ مستقل عن قيمتي a,b

الحل



باستخدام نظرية فيثاغورس نحصل على:

إذن: $(AB)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow AB = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} \\ &= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \\ &= 1\end{aligned}.$$

إذن: المقدار $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ مستقل عن قيمتي a,b .

مثال (4)

إذا كان $\sin\beta = \cos 3\beta$ حيث 3β .قياس زاوية حادة موجبة فأوجد قياس الزاوية β

الحل

$$\sin\beta = \cos 3\beta \Rightarrow \beta + 3\beta = 90^\circ \Rightarrow 4\beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = \frac{90^\circ}{4}$$

مثال (5)

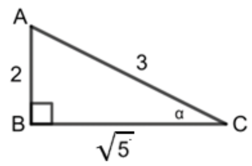
إذا كان $\frac{2}{\sqrt{5}} = \tan\alpha = \cos\beta$ حيث α, β . هما قياسا زاويتين حادتين موجبتين. أوجد قيمة المقدار:

$$\frac{\cos^2(90^\circ-\alpha)+\sin^2(90^\circ-\beta)}{\sec^2(90^\circ-\alpha)+\cot^2(90^\circ-\beta)}.$$

الحل

بما أن: $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ، إذن نستطيع رسم ΔLMN حيث قياس زاوية $N = \beta$.فيكون:

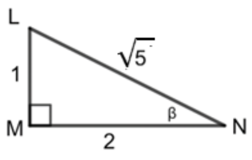
$(ML)^2 = 5 - 4 = 1 \Rightarrow ML = 1$.



بما أن: $\tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ، إذن نستطيع رسم ΔABC

حيث قياس زاوية $C = \alpha$ فيكون:

$(AC)^2 = 5 + 4 = 9 \Rightarrow AC = 3$.



وباستخدام العلاقة بين الدوال المثلثية لزاويتين متتامتين. يمكننا صياغة المطلوب على الصورة:

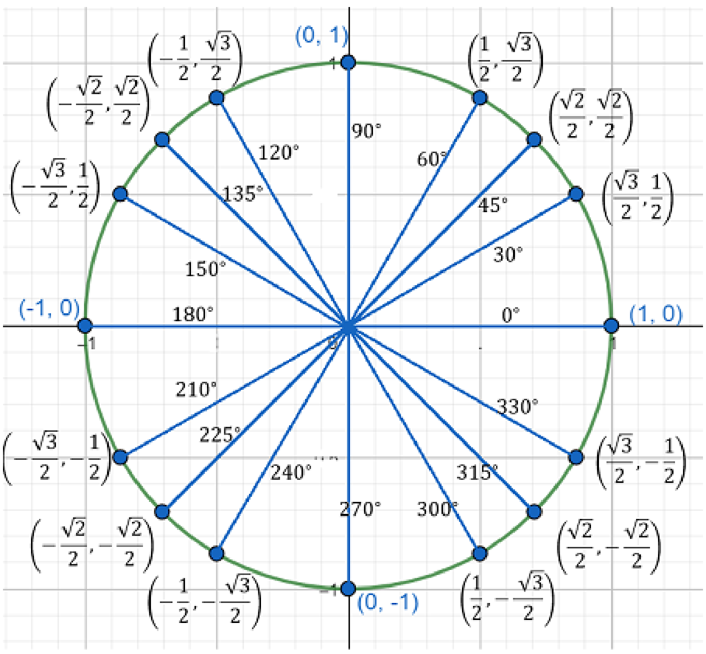
$$\frac{\cos^2(90^\circ-\alpha)+\sin^2(90^\circ-\beta)}{\sec^2(90^\circ-\alpha)+\cot^2(90^\circ-\beta)} \Leftrightarrow \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\beta}{\csc^2\alpha+\tan^2\beta}$$

وبالتعويض باستخدام النسب الموضحة على الرسم:

$$.\frac{(\frac{2}{3})^2+(\frac{2}{\sqrt{5}})^2}{(\frac{3}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{\frac{4}{9}+\frac{4}{5}}{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\frac{56}{45}}{\frac{10}{4}}=\frac{112}{225}$$

النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة:

degrees	radians	sin θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
0°	0	0	1	0	–	1	–
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	–	1	–	0



والآن لنقدم بعض من العلاقات الهامة والتي تساعدنا كثيرا في حل المسائل:

1 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

ومنها:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$
$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

2 $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

3 $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

4 $\tan(x + y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

$\tan(x - y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

5 $\sin 2x = 2\sin x \cos y$

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 y - \sin^2 x\\ &= 1 - 2\sin^2 x\\ &= 2\cos^2 x + 1\end{aligned}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

تدريبات1

(1)أحسب:

$$(1)\ \ \cos\frac{5\pi}{7}\cos\frac{13\pi}{28}+\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{13\pi}{28}$$

$$(2)\ \cos(x+\frac{\pi}{3})\cos x+\sin(x+\frac{\pi}{3})\sin x$$

(2) اثبت العلاقات التالية حيث $x,y\in\mathbb{R}$.

$$(1)\ \cos(x-\frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{4}-\cos(x+\frac{\pi}{4})\sin\frac{\pi}{4}=\sin x$$

$$(2)\ \cos(x-y)\cos y-\sin(x-y)\sin y=\cos x$$

$$(3)\ \cos^2(x-y)-\cos^2(x+y)=4\sin x\cos x\sin y\cos y$$

$$(4)\ \cos^2 x+\cos^2 y-(\cos x-\cos y)^2=\cos(x+y)+\cos(x-y)$$

$$(5)\ \cos(x-y)\cdot\cos(x+y)=\cos x^2-\sin y^2$$

$$(6)\ \sin(x+y)+\cos(x-y)=(\sin x+\cos x)(\sin y+\cos y)$$

(3)إذا كان النقطة $\cos c=\dfrac{7}{25}, \sin b=\dfrac{1}{2}, \sin a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\cos a<0, \cos b>0$ وكذلك $\sin c<0$. فأحسب:

$$\cos(a+b+c), \cos(a+b-c) .$$

(4)أثبت العلاقات التالية:

$$(1)\ \ \cos^4 x-\sin^4 x=\cos 2x$$

$$(2)\ (\cos x-\sin x)^2=1-\sin 2x$$

$$(3)\ \cos 2x+2\sin^2 x=1$$

$$(4)\ \sin 2x=1-2\sin^2(\frac{\pi}{4}-x)$$

$$(5)\ \sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$$

(5)إذا كان $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=3$. أوجد $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}$

(6)أوجد قيمة:

$$\cos 36^\circ-\cos 72^\circ .$$

(7) اثبت أن:

(1) $(\sin 60^\circ - \sin 45^\circ)(\cos 30^\circ + \cos 45^\circ) = \dfrac{1}{4}$

(2) $(\tan 60^\circ + 1)(3 - \sqrt{3}) = \cot^3 30^\circ - 2\cos 30^\circ$

(3) $\sqrt{2\sin^2 45^\circ - \sin^2 30^\circ} = \cos 30^\circ$

(8) إذا كان $\cos(90^\circ - \theta) = \dfrac{3}{5}$ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة، وكانت $\cos 2x = \sin x$ حيث $0 < x < 90^\circ$. فأثبت أن $x = 30^\circ$ ثم أوجد قيمة:

$$9\cot\theta - 4\sin^2 x + \frac{4\sin^2 45^\circ}{\cos^2 60^\circ}.$$

(9) اثبت أن

(1) $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x$

(2) $\sin^2 x - \cos^2 x = 2\sin^2 x - 1$

(3) $\tan x + \cot x = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$

(4) $\sin x \cos x = \dfrac{\cot x}{\cot^2 x + 1}$

(5) $\tan^2 x \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

تدريبات2

(1) إذا كانت أطوال اضلاع المثلث ABC هي $BC=a, AC=b, AB=c$ ، ومساحة المثلث K فأثبت أن

$$K=\frac{ab\cdot\sin C}{2}.$$

(2) إذا كانت أطوال اضلاع المثلث ABC هي a,b,c ، فأثبت أن

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A.$$

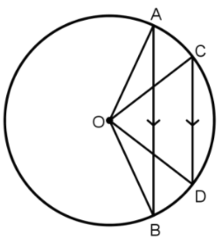
(3) إذا كانت أطوال اضلاع المثلث ABC هي a,b,c ، R نصف قطر الدائرة المحيطة له فأثبت أن

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

(4) إذا كانت m_a هو متوسط المثلث ABC الخارج من الرأس A إلى الضلع BC والذي أطوال اضلاعه a,b,c . فأثبت أن

$$m_a^2=\frac{2\ b^2+c^2\ \ -a^2}{4}.$$

(5) أوجد مساحة ΔABC إذا كان $\angle A=60^\circ$ و $a=\sqrt{6}, b+c=3+\sqrt{3}$.



(6) على الشكل. AB,CD وتران متوازيان في دائرة مركزها O ونصف قطرها r . إذا كان $AB=46, CD=18$ ، $\angle AOB=3\angle COD$. أوجد قيمة r .

(7) في المربع $ABCD$ تقع P,Q بحيث $DP=QB=PQ$ ، $QB \parallel DP$. أوجد أقل قيمة ممكنة للزاوية $\angle ADP$.

(8) المثلث ABC فيه $AB=AC$ ، $D\in AB$ ، $\angle BDC=60^\circ$ ، $\frac{AD}{BC}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\angle A$.أوجد قياس $\angle A$.

(9) الشكل الرباعي $ABCD$ والمرسوم داخل دائرة قطرها AC . رسمنا $\overrightarrow{DE}\perp\overline{AB}$ حيث E تقع على AB . إذا كان $AD=DC$ ، ومساحة الشكل $ABCD$ تساوي 24 وحدة مربعة. أوجد طول DE

(10) دائرة مركزها O ونصف قطرها 1. النقاط A,B,P تقع عليها بحيث P تقع بين A,B ، وكذلك $\angle APB=\angle AOB$. أوجد طول AB .