# Test-3, March 19

Level 3

**Problem 1.** Find the smallest positive integer $n$ with the following property: After painting black exactly $n$ cells of a $7 \times 7$ board there always exists a $2 \times 2$ square with at least three black cells.

**Problem 2.** Sequence $x_1, x_2, x_3, \ldots$ of real numbers is given by $x_1 = 1$ and $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$ for $n \geq 1$. Prove that for all $n \geq 1$ holds

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} + \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} = 1.$$

**Problem 3.** Let $n$ be a positive integer and $p > n+1$ a prime. Prove that $p$ divides the following sum

$$S = 1^n + 2^n + \ldots + (p-1)^n.$$

**Problem 4.** Let $ABC$ be a triangle, let $D$ be the touchpoint of the side $BC$ and the incircle of the triangle $ABC$, and let $J_b$ and $J_c$ be the incentres of the triangles $ABD$ and $ACD$, respectively. Prove that the circumcentre of the triangle $AJ_bJ_c$ lies on the bisector of the angle $BAC$.

## السؤال الأول

أوجد أصغر عدد صحيح موجب $n$ يحقق الخاصية التالية: بعد تظليل $n$ خلية بالضبط باللون الأسود من لوح قياسه $7 \times 7$ ، هناك دائمًا مربع من القياس $2 \times 2$ فيه ثلاث خلايا سوداء على الأقل.

## السؤال الثاني

المتتابعة $x_1, x_2, x_3, \cdots$ من الأعداد الحقيقية معطاة بحيث $x_1 = 1$ و $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$ لكل $n \geq 1$ .
أثبت أنه لكل $n \geq 1$ لدينا:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + x_i} + \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + x_i} = 1$$

## السؤال الثالث

ليكن $n$ عددًا صحيحًا موجبا و $p > n + 1$ عددًا أوّليًا. أثبت أن $p$ يقسم المجموع التالي:

$$S = 1^n + 2^n + \cdots + (p-1)^n$$

## السؤال الرابع

ليكن $ABC$ مثلثًا، ولتكن $D$ نقطة تماس الضلع $BC$ مع الدائرة الداخلية للمثلث $ABC$ ، وليكن $J_b$ و $J_c$ مركزا الدائرتين الداخليتين للمثلثين $ABD$ و $ACD$ ، على الترتيب. أثبت أن مركز الدائرة المحيطة بالمثلث $AJ_bJ_c$ يقع على منصف الزاوية $BAC$.