Test 9

Level 4, June 29 , 2022

Problem 9.1. Solve the following equation in the set of nonnegative integers:

$$p^3 + 41 = 7(7q! - r^3).$$

Problem 9.2. Let ABC be a non-isosceles triangle with circumcircle (O) and I, J are incenter, ex-center of vertex A. Take M on (O) such that OM is perpendicular to AI. Lines MI, MJ cuts (O) again at P, Q, respectively. Take R, S on BC such that PR, QS are tangent to (O). Prove that the circumcircle of triangle ARS is tangent to (O).

Problem 9.3. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$\Big(f(a)-f(b)\Big)\Big(f(b)-f(c)\Big)\Big(f(c)-f(a)\Big) = f(ab^2+bc^2+ca^2)-f(a^2b+b^2c+c^2a)$$

for all reals a, b, c.

السؤال الأول

حل المعادلة التالية في مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة:

$$p^3 + 41 = 7(7q! - r^3)$$

السؤال الثاني

ليكن ABC مثلثًا غير متطابق الساقين ودائرته المحيطة (O) و I، J هما المركز الداخلي والمركز الخارجي المقابل للرأس A. لتكن M على (O) بحيث يكون OM عموديًا على AI. المستقيمان MI، MJ يقطعان (O) مرة أخرى عند P، Q ، على التوالي. ليكن R و S على BC بحيث يكون PR و QS مماسين لـ (O). أثبت أن الدائرة المحيطة بالمثلث ARS مماسة لـ (O).

السؤال الثالث

أوجد كل الدوال $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث

$$(f(a)-f(b))(f(b)-f(c))(f(c)-f(a)) = f(ab^2+bc^2+ca^2) - f(a^2b+b^2c+c^2a)$$

لكل الأعداد الحقيقية a,b,c

زمن الاختبار 4 ساعات ونصف

7 درجات لكل سؤال

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والسداد