قابلية القسمة Divisibility

ليكن a,b عددين صحيحين غير صفريين. إذا وجد عدد صحيح c بحيث $a=bc$، يقال أن b يقسم a، ونكتب $b\,|\,a$. يقال في هذه الحالة b قاسم (أو عامل) ل a، أو a مضاعف ل b. كما سنستخدم الرمز $b \nmid a$ عندما لا b يقسم a (بمعنى أن c لا وجود له).

يمكن الحصول على الكثير من الخواص البسيطة لقابلية القسمة من التعريف السابق (البراهين متروكة لك).

(1) إذا كان $c\,|\,b$ و $a\,|\,c$ فإن $a\,|\,b$ (خاصية التعدي للقسمة).

(2) إذا كان $b\,|\,a$ و $b\,|\,c$ فإن $b\,|\,(a\pm c)$ (خاصية الانغلاق لجمع أو طرح مضاعفات عدد صحيح).

يمكن استخدام الخاصية (2) بشكل متكرر لنستنتج أن $b\,|\,(au+cv)$ لأي عددين صحيحين u,v. عمومًا إذا كان $a_1,a_2,\ldots,a_n$ مضاعفات للعدد b، فإن $b\,|\,(a_1+a_2+\ldots+a_n)$.

(3) إذا كان $b\,|\,a$، فإن $a=0$ أو $|a|\geq|b|$. وهكذا، إذا كان $b\,|\,a$ و $a\,|\,b$، فإن $|a|=|b|$.

من الواضح أن لأي عددين صحيحين a,b، ليس بالضرورة أن يقسم أحدهما الآخر. لذا كان الحاجة للنتيجة التالية، والتي تسمى خوارزمية القسمة. وهي النتيجة الأعظم في أوليات نظرية الأعداد.

(4) **(خوارزمية القسمة)** ليكن a,b عددين صحيحين، $a>b$. يوجد زوج وحيد من الأعداد الصحيحة q,r، بحيث

$$a=bq+r \;\; and \;\; 0\leq r<b$$

يقال للعدد a المقسوم (dividend)، للعدد b المقسوم عليه (divisor)، للعدد q خارج القسمة (quotient)، العدد r الباقي (remainder). لاحظ أن قيم r الممكنة هي: $0,1,\ldots,b-1$ وعددها b. إذا كان $r=0$ فإن a يقبل القسمة على b.

لاحظ أن القلب النابض لخوارزمية القسمة هو متباينة الباقي $0\leq r<b$. لاحظ أيضًا أن خارج القسمة q في خوارزمية القسمة هو في الواقع $\left[\frac{a}{b}\right]$ (هو أكبر عدد صحيح لا يزيد عن $\frac{a}{b}$).

الطريقة الأساسية لإثبات أن $b\,|\,a$ هي تحليل a إلى عاملين أحدهما a والآخر عدد صحيح آخر. لذا صيغ المتطابقات الجبرية مفيدة جدًا لإثبات ذلك. سنكتفي بذكر المتطابقتين القويتين التاليتين.

(5) إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا فإن

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

(6) إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا **فرديًا** فإن

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + ... - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

مثال 1: أثبت أن $1\underbrace{0....0}_{200}1$ يقبل القسمة على 1001.

مثال 2: بفرض $m > n \geq 0$، برهن أن $(2^{2^n}+1) \mid (2^{2^m}-1)$.

ملاحظة: عندما يكون من الصعب إثبات أن $a \mid b$، من الحيل القوية اختيار **"عدد وسيط"** c من الممكن معه إثبات أن $a \mid c, c \mid b$، ومن ثم نصل للمطلوب. مثال 2 تطبيق مثالي لهذه الحيلة.

مثال 3: لكل عدد صحيح موجب n، نكتب $S(n)$ ترمز لمجموع أرقام العدد في النظام العشري. برهن أن $9 \mid n$ إذا وفقط إذا كان $9 \mid S(n)$.

ملاحظة: ربما تستخدم البواقي لإثبات مثال 3 (وهو الطريقة الأسهل في الواقع)، ولكن يمكننا إثبات المطلوب بإثبات النتيجة القوية $9 \mid n - S(n)$، فقط ستحتاج استخدام أنيق لخاصية التطابق "إذا كان $a \mid b_1, a \mid b_2, ..., a \mid b_n$ فإن $a \mid b_1 + b_2 + ... + b_n$".

مثال 4: بفرض $k \geq 1$ عددًا فرديًا، n عددًا صحيحًا موجبًا. أثبت أن $1^k + 2^k + ... + n^k$ لا يقبل القسمة على $n+2$.

ملاحظة: الحيلة الأهم لحل مثال 4 هي "طريقة المزاوجة pairing method" وهي طريقة شائعة للتعامل مع المقادير.

مثال 5 تحدي: بفرض m, n عددين صحيحين موجبين، $m > 2$. أثبت أن $(2^m - 1)$ لا يقسم $(2^n + 1)$.

ملاحظة: لحل مثال 5، ستحتاج لدراسة كل الحالات: $m = n, m > n, m < n$.

تمارين

1) ليكن n, k عددين صحيحين موجبين. برهن أن من بين الأعداد $1, 2, ..., n$ يوجد بالضبط $\left[\frac{n}{k}\right]$ عددًا تقبل القسمة على k (حيث $[x]$ يعني أكبر عدد صحيح أصغر من أو يساوي x).

2) ذهب 11 بنتًا و n ولدًا لقطف الورود. قطف كل طفل نفس عدد الورود. فإذا قطف كل الأطفال n^2+9n-2 وردة، فأيهم أكثر عددًا الأولاد أم البنات؟

3) بفرض n عددًا صحيحًا موجبًا، تم كتابته على الصورة $\overline{a_k....a_1a_0}$ (حيث $0 \le a_i \le 9, a_k \neq 0$)، بوضع $T(n)=a_0-a_1+...+(-1)^k a_k$ (الجمع التبادلي لأرقام n يبدأ برقم آحاد n). برهن أن 11 تقسم n إذا وفقط إذا كان $9 \mid T(n)$.

4) ليكن هناك n من الأعداد الصحيحة الموجبة لهم الخاصية التالية: الفرق بين حاصل ضرب أي $n-1$ عددًا منها والعدد المتبقي يقبل القسمة على n. أثبت أن مجموع مربعات هذه ال n عددًا أيضًا يقبل القسمة على n.

5) لتكن a,b,c,d أعداد صحيحة بحيث $ad-bc>1$. أثبت أن أحد هذه الأعداد الأربعة على الأقل لا يقبل القسمة على $ad-bc$.

6) تحدي IMO: إذا كانت A مجموع أرقام العدد 4444^{4444}، و B مجموع أرقام العدد A. أوجد مجموع أرقام العدد B.

7) تحدي: إذا علمت أن $\dfrac{p}{q}=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+....+\dfrac{1}{1333}-\dfrac{1}{1334}+\dfrac{1}{1335}$ حيث p,q أوليان نسبيًا، بين أن p مضاعف ل 2003.

8) أوجد كل الأعداد المكونة من رقمين بحيث إذا ضربنا العدد في أي من $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ مجموع أرقامه لا يتغير.

9) إذا كان العدد $\overline{739ABC}$ يقبل القسمة على $7,8,9$. فأوجد كل قيم A,B,C الممكنة.

10) **IMO Longlists**: إذا كان a,b عددين طبيعيين. أثبت أن $a!b! \mid (a+b)!$.

11) أثبت أن المعادلة $x!y!=z!$ لها عدد لا نهائي من الحلول الصحيحة الموجبة (x,y,z) حيث $x<y<z$.

12) تحدي **IMO Longlists**: أوجد كل الحلول الصحيحة (x,m) للمعادلة: $\left|x^2-1\right|+\left|x^2-4\right|=mx$ حيث m بارامتر.