

Test 6
Level 3, June 21, 2022

Problem 6.1. Find all quadruples (a, b, c, d) satisfying the system of equations

$$\begin{cases} ab + cd = 4 \\ ac + bd = -2 \\ ad + bc = -8 \\ a + b + c + d = 3 : \end{cases}$$

Problem 6.2. From a point O lying outside the line d , draw the projection A of O onto d . Take some point M on d differs from A and H is the projection of A onto OM . Denote D as the midpoint of HM and take N on OA such that $NH \perp AD$. Suppose that two circumcircles of triangles HMN and OAH are tangent, calculate the ratio $\frac{AM}{AO}$.

Problem 6.3. Find all solutions (p, q, a, m) of the equation

$$p^2 + 4^a q^2 = m^2,$$

where p and q are prime numbers and a, m are positive integers.

Problem 6.4. Each pair of vertices of a regular 1001-gon is joined with a segment, which is either red, or blue, or green. Prove that one can choose 11 vertices of this 1001-gon in such a way that they form a convex 11-gon, in which at least 10 sides have the same color.



Saudi Math Team 2022
JBMO team, Test– June 21

السؤال الأول:

أوجد كل الرباعيات المرتبة (a, b, c, d) التي تحقق نظام المعادلات:

$$\begin{cases} ab + cd = 4 \\ ac + bd = -2 \\ ad + bc = -8 \\ a + b + c + d = 3 \end{cases}$$

السؤال الثاني

لتكن النقطة O تقع خارج المستقيم d ، A هي مسقط O على D . لتكن M نقطة على d تختلف عن A ، H مسقط A على OM . لتكن D منتصف HM ، النقطة N تقع على OA بحيث $NH \perp AD$. افترض أن الدائرتين المحيطيتين بالمثلثين HMN , OAH متماستان. احسب النسبة $\frac{AM}{AO}$.

السؤال الثالث:

أوجد كل الحلول (p, q, a, m) للمعادلة:

$$p^2 + 4^a q^2 = m^2$$

حيث p, q عدداً أوليان، a, m عدداً صحيحان موجبان.

السؤال الرابع:

يتم ربط كل زوج من رؤوس مضلع منتظم ذي 1001 ضلعاً بقطعة إما حمراء أو زرقاء أو خضراء. أثبت أنه يمكن اختيار 11 رأساً من هذا المضلع بطريقة تشكل مضلعاً محدباً ذا 11 رأس، بحيث يكون به 10 أضلاع على الأقل لهم نفس اللون.

زمن الاختبار أربع ساعات ونصف
مع أطيب التمنيات بالتوفيق والسداد