Test-3, April 16

Levels 3 and 4

Problem 1. In a school there are 30 different clubs, each of them contains exactly 40 children. For every i from 1 to 30 define n_i as a number of children who attend exactly i clubs. Prove that it is possible to organize 40 new clubs with 30 children in each of them such, that the analogical numbers $n_1, n_2, \ldots, n_{30}$ will be the same for them.

Problem 2. Let Pascal triangle be an equilateral triangular array of number, consists of 2019 rows and except for the numbers in the bottom row, each number is equal to the sum of two numbers immediately below it. How many ways to assign each of numbers a_0, a_1, $\ldots$, a_{2018} (from left to right) in the bottom row by 0 or 1 such that the number S on the top is divisible by 1009 .

Problem 3. Find all functions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ such that

$$f\left(3\left(f\left(xy\right)\right)^2 + \left(xy\right)^2\right) = \left(xf\left(y\right) + yf\left(x\right)\right)^2 .$$

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

السؤال الأول

يوجد في إحدى المدارس 30 ناديًا مختلفًا ، يحتوي كل منها على 40 طفلًا بالضبط. لكل i من 1 إلى 30 ، عرفنا n_i على أنه عدد الأطفال الذين يشتركون في i نادي بالضبط. إثبت أنه من الممكن تنظيم 40 ناديًا جديدًا يوجد 30 طفلًا في كل منها، بحيث الأرقام المناظرة $n_1, n_2, \dots, n_{30}$ ستكون هي نفسها بالنسبة لهم.

السؤال الثاني

ليكن مثلث باسكال هو صفوف من الأعداد تكون مثلثاً متطابق الأضلاع ، يتكون من 2019 من الصفوف وباستثناء الأعداد الموجودة في الصف السفلي ، كل عدد يساوي مجموع اثنين من الأعداد التي تحته مباشرة. كم عدد طرق كتابة الأعداد $a_0, a_1, \dots\dots, a_{2018}$ (من اليسار إلى اليمين) في الصف السفلي بحيث قيمة كل منها إما 0 أو 1 بحيث يكون العدد S في الأعلى قابلاً للقسمة على 1009.

السؤال الثالث

أوجد كل الدوال $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ التي تحقق أن

$$f(3(f(xy))^2 + (xy)^2) = (xf(y) + yf(x))^2$$

الزمن 4 ساعات ونصف

مع أطيب التمنيات بالتوفيق