

Test 3
Level 2, January 9

Problem 3.1. Find all integer triples (a, b, c) satisfying the equation

$$5a^2 + 9b^2 = 13c^2.$$

Problem 3.2. Let I be the incenter of the triangle ABC . Let X lie on segment AB , such that $\angle AIX = 90^\circ$. The circumcircle of triangle BIX intersects circumcircle of triangle ABC at point $Y \neq B$ lying on the same side of AB as point C . Prove that YX is bisector of angle AYB .

Problem 3.3. Let $x, y \in \mathbb{R}$ be such that $x = y(3 - y)^2$ and $y = x(3 - x)^2$. Find all possible values of $x + y$.

Problem 3.4. In each cell of a 10×10 board one arrow is placed. Each arrow is pointing in one of the four directions $\{\uparrow, \rightarrow, \downarrow, \leftarrow\}$. Find the smallest number n with the following property: it is always (regardless of the initial placement of the arrows) possible to remove at most n arrows from the board in such a way that among the remaining ones no two are pointing at each other. Note: arrows are pointing at each other also if there are some other arrows or empty cells between them.



السؤال الأول

أوجد كل الثلاثيات الصحيحة (a, b, c) التي تحقق المعادلة $5a^2 + 9b^2 = 13c^2$.

السؤال الثاني

لتكن I المركز الداخلي للمثلث ABC . لتكن X تقع على القطعة المستقيمة AB ، بحيث أن $\angle AIX = 90^\circ$. الدائرة المحيطة للمثلث BIX تقطع الدائرة المحيطة للمثلث ABC في النقطة $Y \neq B$ والتي تقع في نفس جهة النقطة C من AB . أثبت أن XY ينصف الزاوية AYB .

السؤال الثالث

ليكن $x, y \in \mathbb{R}$ بحيث $x = y(3 - y)^2$ و $y = x(3 - x)^2$. أوجد كل القيم الممكنة لـ $x + y$.

السؤال الرابع

في كل خلية من رقعة 10×10 تم وضع سهم واحد. كل سهم يشير لأحد الاتجاهات الأربعة $\{\uparrow, \rightarrow, \downarrow, \leftarrow\}$. أوجد أصغر عدد صحيح n له الخاصية التالية: أنه دائماً (بغض النظر عن وضع الابتدائي للأسهم) من الممكن إزالة n سهم على الأكثر من الرقعة بحيث من بين الأسهم المتبقية لا يوجد سهمان يشير كل منهما للآخر. لاحظ: السهمان يشير كل منهما للآخر أيضاً إذا كان يوجد أسهم أخرى أو خلايا فارغة بينهما.

الزمن 4 ساعات ونصف

كل سؤال 10 نقاط

مع أطيب التمنيات بالتوفيق