Test-6, April 2

Levels 3 and 4

$a_2 = a + 1$

Problem 1. Define sequence of positive integers $\{a_n\}$ as $a_1 = a$ and $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ for $n \geq \cancel{1}$ 2. Prove that there is no index n for which

$$\prod_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + a_k + 1 \right)$$

is a perfect square.

~~**Problem 2.**~~ A sequence $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ consisting of pairwise different cells of an $n \times n$ board is called a *cycle* if $k \geq 4$ and cell a_i shares a side with cell a_{i+1} for every $i = 1, 2, \ldots, k$, where $a_{k+1} = a_1$. We will say that a subset X of the set of cells of a board is *malicious* if every cycle on the board contains at least one cell belonging to X. Determine all real numbers C with the following property: for every integer $n \geq 2$ on an $n \times n$ board there exists a malicious set containing at most Cn^2 cells.

Problem 3. Determine all arithmetic sequences $a_1, a_2, \ldots$ for which there exists integer $N > 1$ such that for any positive integer k the following divisibility holds

$$a_1 a_2 \ldots a_k \mid a_{N+1} a_{N+2} \ldots a_{N+k}.$$

السؤال الأول

عرّفنا المتتابعة $\{a_n\}$ من الأعداد الصحيحة الموجبة على النحو: $a_1 = a$ و $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ لكل $n \geq 2$.

$a_2 = a + 1$

أثبت أنه لا يوجد عدد مرجعي n يحقق أن العدد

$$\prod_{k=1}^{n} (a_k^2 + a_k + 1)$$

مربع كامل.

السؤال الثاني

يقال لمتتابعة $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ من الخلايا المختلفة للوح ذي القياس $n \times n$ بأنها *دائرية* إذا كان $k \geq 4$ والخلية a_i تتشارك في ضلع مع الخلية a_{i+1} لكل $i = 1,2,\cdots,k$، بحيث $a_{k+1} = a_1$. كما يقال عن مجموعة جزئية X من خلايا اللوح بأنها *ماكرة* إذا احتوت كلٌّ متتابعة دائرية أحد خلايا X. أوجد جميع الأعداد الحقيقية C التي تحقق الخاصية التالية: لكل عدد صحيح موجب $n \geq 2$ هناك مجموعة جزئية ماكرة على لوح من القياس $n \times n$ تحتوي على الأكثر على Cn^2 خلية.

السؤال الثالث

أوجد جميع المتتابعات الحسابية $a_1, a_2, \cdots$ من الأعداد الصحيحة الموجبة التي تحقق وجود عدد صحيح $N > 1$ بحيث لكل عدد صحيح موجب k تتحقق قابلية القسمة التالية

الزمن 4 ساعات ونصف

مع أطيب التمنيات بالتوفيق