الأسس واللوغاريتمات Exponents and Logarithms

من قوانين الأسس:

$$x^a x^b = x^{a+b}$$
$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$
$$\left(xy\right)^a = x^a y^b$$
$$\left(x^a\right)^b = x^{ab}$$
$$x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x}$$

ومن قوانين اللوغاريتمات

$$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$$
$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$
$$\log_a x^b = b\log_a x$$
$$a^{\log_a x} = x$$

وهي متحققة طالما كانت الحدود معرفة.

وللربط بين الأسس واللوغاريتمات يمكننا استخدام التعريف $x = a^b \Leftrightarrow \log_a x = b$ حيث $a, x > 0$.

وينبغي دائما تذكر أن

$$\log_a \frac{x}{y} \neq \frac{\log_a x}{\log_a y}$$
$$\log_a xy \neq \log_a x \log_a y$$
$$\log_a(x+y) \neq \log_a x + \log_a y$$

أمثلة : Examples

(1) احسب $\log_4 128$.

(2) إذا كان $\log_a b = x$ و $\log_a b^c = y$، فما العلاقة بين x و y؟

(3) برهن أن $\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$.

(4) أوجد قيمة $\frac{1}{\log_{100} 100!} + ... + \frac{1}{\log_4 100!} + \frac{1}{\log_3 100!} + \frac{1}{\log_2 100!} = S$.

(5) حل المعادلتين
$$\begin{cases} x^{\log_y x} = 2 \\ y^{\log_x y} = 16 \end{cases}$$

تمارين: Exercises

(A) أوجد قيمة $\frac{2}{\log_4 5} - \frac{4}{\log_{10} 5}$.

(B) برهن أن $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

(C) إذا عرّفنا $a_n = \frac{1}{\log_n 14}$. فاحسب $a_2 + a_3 + a_4 - a_6 - a_7 - a_8$.

(D) يقال عن مثلث أضلاعه $a \leq b \leq c$ إنه قائم لوغاريتمياً إذا حقق $\log_{10} a^2 + \log_{10} b^2 = \log_{10} c^2$.
أوجد أكبر قيمة ممكنة لـــ a في مثلث قائم الزاوية و قائم لوغاريتمياً.

(E) إذا كان $\log_2 \left(\log_8 x\right) = \log_8 \left(\log_2 x\right)$ ، فاحسب $\log_2 x$.

(F) ما أكبر قيمة ممكنة للمقدار $\log_a \frac{a}{b} + \log_b \frac{b}{a}$؟ حيث $a \geq b > 1$.

(G) إذا علمت أن $x, y, z > 1$، وأن $\log_x w = 24, \log_y w = 40, \log_{xyz} w = 12$، فاحسب $\log_z w$.

(H) برهن أن $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$.

(I) أوجد جميع الأزواج المرتبة (a, b) بحيث $\log_b(9a) = 3 \log_a b = -3$.

(J) احسب قيمة $5^{\log_{10} 9} \cdot 2^{\log_{10} 6} \cdot 2^{\log_{10} 3} \cdot 5^{\log_{10} 2}$.