

Test 4
Level 2, January 12, 2022

Problem 4.1. Different positive a, b, c are such that $a^{239} = ac - 1$ and $b^{239} = bc - 1$. Prove that $238^2(ab)^{239} < 1$.

Problem 4.2. What is the maximum number of $2 \times 3 \times 3$ bricks that can be fit inside an $8 \times 8 \times 9$ box?

Problem 4.3. Let O be the circumcenter of triangle ABC . Points X and Y on side BC are such that $AX = BX$ and $AY = CY$. Prove that the circumcircle of triangle AXY passes through the circumcenters of triangles AOB and AOC .

Problem 4.4. You are given n different primes p_1, p_2, \dots, p_n . Consider the polynomial

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

where a_i is the product of the first i given prime numbers. For what n can it have an integer root?



$$\begin{array}{r} 18 \\ 32 \\ \hline 36 \\ 540 \\ \hline 576 \end{array}$$

185

370

السؤال الأول

الأعداد a, b, c موجبة مختلفة، تحقق أن $a^{239} = ac - 1$ و $b^{239} = bc - 1$. أثبت أن $238^2(ab)^{239} < 1$.

السؤال الثاني

ما هو أكبر عدد من قوالب طوب التي أبعادها $2 \times 3 \times 3$ ، التي يمكن وضعها داخل صندوق أبعاده $8 \times 8 \times 9$ ؟
 32×18
11
18

السؤال الثالث

لتكن O المركز المحيط للمثلث ABC . تقع النقطتان X, Y على الضلع BC بحيث $AX = BX, AY = CY$. أثبت أن الدائرة المحيطة بالمثلث AXY تمر بمركزي الدائرتين المحيطتين بالمثلثين AOB, AOC .

السؤال الرابع

لدينا n من الأعداد الأولية المختلفة ولتكن P_1, P_2, \dots, P_n . اعتبر كثيرة الحدود

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

حيث a_i هو حاصل ضرب أول i من الأعداد الأولية المعطاة. لأي قيم n يكون لتلك كثيرة الحدود جذور صحيحة؟

$$a_1 = P_1$$

$$a_2 = P_1 \cdot P_2$$

الزمن 4 ساعات ونصف

كل سؤال 10 نقاط

مع أطيب التمنيات بالتوفيق