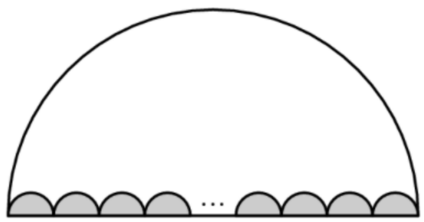
التدريب الالكتروني، الأسبوع الثاني

المستوى الأول، سبتمبر 21-26

2.1 ليكن x عدد حقيقي بحيث أن $\sqrt{225-x^2}-\sqrt{100-x^2}=5$ أوجد قيمة $\sqrt{225-x^2}+\sqrt{100-x^2}$

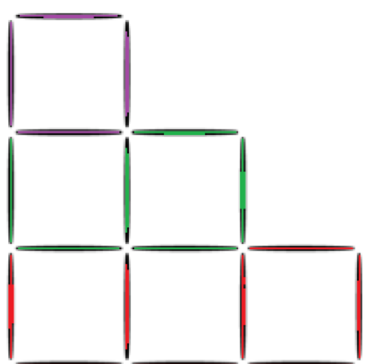
الحل: لنفرض أن قيمة $\sqrt{225-x^2}+\sqrt{100-x^2}=a$. بضرب هذه المعادلة ضرب $\sqrt{225-x^2}-\sqrt{100-x^2}=5$. سوف نحصل على أن: $(225-x^2)-(100-x^2)=5a \Leftrightarrow 125=5a \Leftrightarrow a=25$

2.2 ليكن عدد أنصاف الدوائر المرسومة داخل النصف دائرة الكبيرة هو n أوجد نسبة المساحة المظللة الى نسبة مساحة نصف الدائرة الكبيرة.



الحل: لنفرض أن نص قطر الدائرة الصغيرة الواحدة هو r، إذن، نصف قطر الدائرة الكبيرة هو nr، مما يعني أن مساحة نصف الدائرة الكبيرة هو $\frac{1}{2}\pi r^2 n^2$ ومساحة نصف الدائرة الصغيرة الواحدة هو $\frac{1}{2}\pi r^2$ أي أن اجمالي مساحة المقدار المظللة هي $\frac{1}{2}\pi r^2 n$ مما يعني أن الجواب النهائي هو $\frac{1}{n}$

2.3 في هذا الشكل، يوجد 18 عود لتكوين 3 أدوار من الدرج. أوجد عدد الأعواد المطلوبة لتكوين n دور من الدرج



الحل: نستطيع أن نثبت أن عدد الأعواد الإضافية المحتاجة لتكوين الدور رقم n هو $2(n+1)$ (نصفها بشكل عمودي ونصفها بشكل افقي). إذن، اجمالي عدد الاعواد هو $2\big(2+3+\cdots+(n+1)\big)=(n+1)(n+2)-2$

2.4 ليكن العدد p عدد أولي فردي، والأعداد a,b,c أعداد صحيحة مختلفة. ولتكن جميع الأعداد $ab+1, bc+1, ca+1$ تقبل القسمة على p. أثبت أن $\frac{a+b+c}{3}\geq p+2$

الحل: نلاحظ أن $p|ab+1 \Leftrightarrow ab\equiv -1[mod\ p], bc\equiv -1[mod\ p], ca\equiv -1[mod\ p] \Longrightarrow$

$$a\equiv -\frac{1}{b}\equiv c[mod\ p] \Longrightarrow a\equiv b\equiv c[mod\ p]$$

نفرض أن باقي هذه الاعداد على p هو r مما يعني أن $a+b+c\geq r+(p+r)+(2p+r) \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3}\geq p+r$

نلاحظ أنه من المستحيل أن $a\equiv b\equiv c\equiv 1[mod\ p]$ (لأن $1\times 1\not\equiv -1[mod\ p]$) مما يعني أن $r\geq 2$ و هو المطلوب