الثلاثاء 9 أبريل 2019.

**السؤال الأول**: أوجدي كل الثلاثيات $(a, b, c)$ من الأعداد الحقيقية التي تحقق $ab + bc + ca = 1$ و كذلك

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b$$

**السؤال الثاني**: لتكن $n$ عدد صحيح موجب. وضعنا قطع دومينو على لوح $2n \times 2n$ بطريقة ما بحيث كل خلية في اللوح تجاور خلية واحدة فقط مغطاة بقطعة دومينو. لكل عدد $n$، أوجدي أكبر عدد ممكن من قطع الدومينو يمكن وضعها بحيث تحقق الطريقة الموضحة. ( قطعة الدومينو هي بلاطة من النوع $1 \times 2$ أو $2 \times 1$. يتم وضعها على اللوح بحيث تغطي خليتين متجاورتين ولا يوجد أي قطعتين فوق بعضهما (لا يوجد تقاطع) ، نقول عن خليتين أنهما متجاوتان إذا كانا يشتركان في ضلع واحد فقط).

**السؤال الثالث**:

في المثلث $ABC$ لدينا $\angle CAB > \angle ABC$. النقطة $I$ هي مركز الدائرة الداخلية للمثلث $ABC$. النقطة $D$ تقع على القطعة المستقيمة $BC$ بحيث $\angle CAD = \angle ABC$. الدائرة $\omega$ تمس المستقيم $AC$ عند $A$ وتمر بالنقطة $I$. ولتكن النقطة $X$ هي نقطة التقاطع الثانية بين الدائرة $\omega$ والدائرة المحيطة للمثلث $ABC$. أثبتي أن منصفي الزاويتين $\angle DAB$ و $\angle CXB$ يتقاطعان في نقطة واحدة تقع على المستقيم $BC$.

**الوقت**: 4 ساعات و نصف

**اللغة**: العربية

**لكل سؤال 7 درجات**

*Tuesday, April 9, 2019*

**Problem 1.** Find all triples $(a, b, c)$ of real numbers such that $ab + bc + ca = 1$ and

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

**Problem 2.** Let $n$ be a positive integer. Dominoes are placed on a $2n \times 2n$ board in such a way that every cell of the board is adjacent to exactly one cell covered by a domino. For each $n$, determine the largest number of dominoes that can be placed in this way.

(A *domino* is a tile of size $2 \times 1$ or $1 \times 2$. Dominoes are placed on the board in such a way that each domino covers exactly two cells of the board, and dominoes do not overlap. Two cells are said to be *adjacent* if they are different and share a common side.)

**Problem 3.** Let $ABC$ be a triangle such that $\angle CAB > \angle ABC$, and let $I$ be its incentre. Let $D$ be the point on segment $BC$ such that $\angle CAD = \angle ABC$. Let $\omega$ be the circle tangent to $AC$ at $A$ and passing through $I$. Let $X$ be the second point of intersection of $\omega$ and the circumcircle of $ABC$. Prove that the angle bisectors of $\angle DAB$ and $\angle CXB$ intersect at a point on line $BC$.

Language: English

Time: 4 hours and 30 minutes
Each problem is worth 7 points