تحديات التحليل

حلل المقادير التالية :

(١) $63x^2 + 22x - 8$.

(٢) $x^4 - 11x^2 - 80$.

(٣) $(a^2 + 9b^2 - 1)^2 - 36a^2b^2$.

(٤) $x^3 - x^2y + y^3 - xy^2$.

(٥) $(a^2 + d^2)bc + (c^2 + b^2)ad$.

(٦) $abc + bcd + cde + def + efa + fab + ace + bdf$.

(٧) $a^5 + 2a^4 + a^3 - a^2 - 2a - 1$.

(٨) $m^4 + 6m^3 + 8m^2 - 6m - 9$.

(٩) $a^4 + 4, x^4 + 4y^4$.

(١٠) $a^4 + a^2 + 1, x^4 + y^4 + x^2y^2$.

(١١) $4x^2 + y^2 + 9z^2 - 6yz + 12zx - 4xy$

(١٢) $2a^3 + 6a^2 + 6a + 18$.

(١٣) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$.

(١٤) $x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 6x - 7$.

(١٥) $(a+1)(a+2)(a+3)(a+4) - 120$.

(١٦) $(x^2 - 1)(x+3)(x+5) + 16$.

(١٧) $x^5 + x + 1$.

(١٨) $x^2 + 5xy + 6y^2 + x + 3y$.

(١٩) $3x^2 - 7xy - 6y^2 + 7x + 12y - 6$.

(٢٠) $2x^2 + xy - 15y^2 - 3x + 13y - 2$.

(٢١) $x^3 - 3x^2 + (a+2)x - 2a$.

(٢٢) $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2$.

(٢٣) $(ab+1)(a+1)(b+1) + ab$.

طرق خاصة في التحليل

قابلية القسمة

١) حلل $4a^2b^2-(a^2+b^2+c^2)^2$.

٢) حلل $a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$.

٣) بفرض $f(x)=\left|x\right|^3-7x^2+23\left|x\right|-65$ و x عدد صحيح أوجد مجموع القيم الأولية المختلفة التي تأخذها $f(x)$.

٤) بين أن x^2+x+1 عامل لـ x^7+x^2+1 عن طريق الفرق بينهما .

٥) هل x^5+x^4+1 قابل للتحليل أم لا ؟

٦) حلل $x^4+y^4+(x+y)^4$.

٧) أوجد كل الأعداد الصحيحة k بحيث إما k^3-3k-2 أو k^3-3k+2 عدد أولي .

٨) عين كل القيم الممكنة للعدد a بحيث يكون للمعادلة $ax^2+(2a+3)x-(3-4a)=0$ حلان صحيحان موجبان لـ x .

٩) معطى a,b,c أعداد مختلفة بحيث $a+b+c=0$.

بسط المقدار $\dfrac{a^2}{2a^2+bc}+\dfrac{b^2}{2b^2+ca}+\dfrac{c^2}{2c^2+ab}$.

١٠) عين كل الأزواج المرتبة (m,n) الصحيحة الموجبة بحيث $1\leq m\leq n\leq 100$ والتي تجعل x^n+x^m+1 تقبل القسمة على x^2+x+1 .

١١) اثبت أنه يوجد عدد لا نهائي من الأعداد الصحيحة الموجبة a التي تجعل المقدار n^4-an^2+100 قابل للتحليل .

١٢) حلل $x^3-x^2y-2xy+y^2-1$.

١٣) أحمد سيختار ثلاث أعداد حقيقية غير صفرية و بدر سوف يرتبها كمعاملات للمعادلة التربيعية

$$\square x^2+\square x+\square=0$$

سيفوز أحمد فقط إذا وفقط إذا كانت المعادلة الناتجة لها حلان نسبيان مختلفان .

السؤال من الذي يمتلك فرصة دائمة للفوز ؟

١٤) حلل $(y+1)^4+(y+3)^4-272$.

١٥) أوجد كل العوامل الأولية لـ $3^{18}-2^{18}$.

١٦) أوجد قيمتين صحيحتين للعدد a بحيث المقدار $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ يقبل القسمة على كل من $19,29$.

١٧) عين عددين كل منهما مكون من أربعة أرقام بحيث حاصل ضربهما $4^8+6^8+9^8$.

١٨) خالد وسعد يلعبان لعبة في الدالة التكعيبية

$$x^3 + \square x^2 + \square x + \square = 0$$

يبدأ خالد أولاً بكتابة عدد صحيح غير الصفر في أحد المربعات الخالية . ثم يتبعه سعد بكتابة عدد صحيح في أحد المربعين الخاليين الباقيين , أخيراً تنتهي اللعبة بوضع خالد رقم صحيح في المربع الخالي الأخير . بين أن خالد يمكنه دائماً أن يجعل الدالة التكعيبية الناتجة قابلة للتحليل .

١٩) إذا كان a, b, c ثلاث أعداد صحيحة موجبة مختلفة ، فأثبت أن من بين الأعداد $a^5b - ab^5, b^5c - bc^5, c^5b - ca^5$ لابد أن يكون أحدها يقبل القسمة على 8 .

٢٠) اكتب $(x^2 + x + 1)^2$ كمجموع ثلاثة مربعات.

٢١) إذا كان a, b, c, d أعداد حقيقية موجبة تحقق أن $(a+b)(1-cd) + (c+d)(1-ab) = 0$ ، فأثبت أن: $\dfrac{a^2+1}{a+b} + \dfrac{b^2+1}{b+c} + \dfrac{c^2+1}{c+d} + \dfrac{d^2+1}{d+a} = a+b+c+d$.

كثيرات الحدود المتماثلة والدائرية

يقال لكثيرة حدود في أكثر من متغير أنها متماثلة إذا كانت كثيرة الحدود لا تتغير لتبديل متغيراتها مثل:
$x+y+z, x^2+y^2+z^2, xyz, \ldots$.

المقدار المتماثل في متغيرين x, y دائما ما يحلل لعوامل، كل عامل يعبر عن أحد المقادير المتماثلة الأساسية مثل $x+y, xy$ ، كذلك المقدار المتماثل في ثلاثة متغيرات x, y, z دائماً ما يحلل لعوامل كل منها يعبر عن أحد المقادير المتماثلة مثل $x+y+z, xy+yz+zx, xyz$ الأساسية.

كثيرة الحدود في أكثر من متغير تسمى دائرية إذا بدلنا متغيراتها دائرياً ولم تتغير كثيرة الحدود مثل:
$xy+yz+zx, x^2y+y^2z+z^2x, (x+y)(y+z)(z+x)$ وغيرها.

كثيرة الحدود المتماثلة دائرية، ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح.

إذا كانت كثيرة الحدود دائرية لها عامل عند تبديل متغيرات العامل نحصل في كل تبديل على عامل آخر لكثيرة الحدود ، ولأن التحليل أيضاً دائرياً ، فمن هذا المنطلق يمكننا إعتبار أحد المتغيرات هو المتغير الأساسي ، والمتغيرات الباقية ثوابت ، ومن ثم نحصل على كثيرة حدود في متغير واحد ، وعندها من السهل إيجاد عامل لها بإستخدام نظرية العامل ، ثم نستخدم خاصية عوامل كثيرة الحدود دائرية السابق ذكرها فنحصل في الحال على باقي العوامل، أخيراً إذا كان هناك بعض الثوابت التي يجب تعيينها فطريقة تعيين المعاملات تكون مفيدة .

(١) الأعداد a, b, c صحيحة موجبة ومختلفة تحقق العلاقة $abc+ab+bc+ca+a+b+c=1989$; *أوجد* كل القيم الممكنة لـ a, b, c .

(٢) حلل $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

(٣) حلل $(2y-3z)^3+(3z-4x)^3+(4x-2y)^3$.

(٤) $(x-y)^3+(y-x-2)^3+8$.

(٥) $a^3+b^3+c^3+(a+b)(b+c)(c+a)-2abc$

(٦) حلل $(3a+3b-18ab)(3a+3b-2)+(1-9ab)^2$.

(٧) حلل $(ab+cd)(a^2-b^2+c^2-d^2)+(ac+bd)(a^2+b^2-c^2-d^2)$.

(٨) حلل $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$.

(٩) حلل $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$.

(١٠) حلل $x^4+y^4+(x+y)^4$.

(١١) حلل $xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-x^2)$.

(١٢) حلل $(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$.

(١٣) حلل

$$(a+b+c)(a+b-c)(-a+b+c)+(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)$$
$$+(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)-8abc$$

(١٤) حلل $a^2b+b^2c+c^2a-ab^2-bc^2-ca^2$.

(١٥) حلل $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+8abc$.

(١٦) إذا كانت $x+y+z$ عامل لـ $x^4+y^4+z^4+K(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)$.
فأوجد قيمة K .

(١٧) احسب قيمة $\dfrac{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3}{(x-y)(y-z)(z-x)}$.

(١٨) احسب

$$\frac{(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3-3(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{a^3+b^3+c^3-3abc}$$