Wednesday, April 10, 2019

Problem 4. Let ABC be a triangle with incentre I. The circle through B tangent to AI at I meets side AB again at P. The circle through C tangent to AI at I meets side AC again at Q. Prove that PQ is tangent to the incircle of ABC.

Problem 5. Let $n \geq 2$ be an integer, and let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be positive integers. Show that there exist positive integers $b_1, b_2, \ldots, b_n$ satisfying the following three conditions:

(A) $a_i \leq b_i$ for $i = 1, 2, \ldots, n$;

(B) the remainders of $b_1, b_2, \ldots, b_n$ on division by n are pairwise different; and

(C) $b_1 + \cdots + b_n \leq n\left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right\rfloor\right)$.

(Here, $\lfloor x \rfloor$ denotes the integer part of real number x, that is, the largest integer that does not exceed x.)

Problem 6. On a circle, Alina draws 2019 chords, the endpoints of which are all different. Points are considered *marked* if they are either

(i) one of the 4038 endpoints of a chord; or

(ii) an intersection point of at least two chords.

Alina labels each marked point. Of the 4038 points meeting criterion (i), Alina labels 2019 points with a 0 and the other 2019 points with a 1. She labels each point meeting criterion (ii) with an arbitrary integer (not necessarily positive).

Along each chord, Alina considers the segments connecting two consecutive marked points. (A chord with k marked points has $k-1$ such segments.) She labels each such segment in yellow with the sum of the labels of its two endpoints and in blue with the absolute value of their difference.

Alina finds that the $N+1$ yellow labels take each value $0, 1, \ldots, N$ exactly once. Show that at least one blue label is a multiple of 3.

(A *chord* is a line segment joining two different points on a circle.)

P7)

Language: English

Time: 4 hours and 30 minutes
Each problem is worth 7 points

الأربعاء 10 أبريل 2019.

السؤال الرابع: لدينا النقطة I مركز الدائرة الداخلية للمثلث ABC . الدائرة المارة بالنقطة B والتي تمس AI عند I تلاقي الضلع AB في نقطة P . الدائرة المارة بالنقطة C والتي تمس AI عند I تلاقي الضلع AC في نقطة Q . أثبتي أن PQ مماساً للدائرة الداخلية للمثلث ABC .

السؤال الخامس: ليكن $n \geq 2$ عدداً صحيحاً ، ولتكن $a_1, a_2, \ldots, a_n$ أعداداً صحيحة موجبة. أثبتي أنه يوجد أعداداً صحيحة موجبة $b_1, b_2, \ldots, b_n$ تحقق الشروط التالية:

(i) $a_i \leq b_i$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

(ii) بواقي قسمة كلاً من $b_1, b_2, \ldots, b_n$ على n هي أعداداً مختلفة مثنى مثنى.

(iii) $b_1 + b_2 + \ldots + b_n \leq n\left(\dfrac{n-1}{2} + \left\lfloor \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \right\rfloor\right)$.

حيث $\lfloor x \rfloor$ هو صحيح العدد x .

السؤال السادس: رسمت شادن 2019 وتراً في دائرة. نقاط البداية والنهاية لهذه الأوتار مختلفة. نقول عن هذه النقاط أنها "مُعلمة" إذا كانت:

(i) أحد النقاط التي تقع على الدائرة والبالغ عددها 4038 ، أو

(ii) نقطة تقاطع وترين على الأقل داخل الدائرة.

بعد أن حددت شادن جميع النقاط التي تحمل صفة"مُعلمة".من الفقرة (i) والتي عددها 4038 نقطة، رمزت شادن لعدد 2019 نقطة منها بالقيمة 0 ، وللنقاط الـ 2019 الأخرى بالقيمة 1 . وكما جاء في الفقرة (ii) فقد وضعت لكل نقطة تقاطع قيمة لها تمثل عدداً صحيحاً و بشكل عشوائي (ليس بالضرورة أن تكون موجبة).

والآن على كل وتر قامت شادن بالنظر على كل القطع المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين متتاليتين ذات صفة"مُعلمة" (لاحظي أن الوتر الذي يحوي k من النقاط ذات صفة "مُعلمة" يحوي عدداً من القطع المستقيمة عددها $k-1$ قطعة) .حيث كتبت باللون الأصفر مجموع العددين الموجودين على نهايتي أي قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين ذات صفة"مُعلمة" على الوتر الواحد. وباللون الأزرق كتبت القيمة المطلقة للفرق بين نفس النقطتين.

إذا وجدت شادن أن الـ $N+1$ عدد ذات اللون الصفراء لها القيم $0, 1, \ldots, N$ (لاحظي عدم تكرار القيم).

أثبتي أن أحد الأعداد الزرقاء من مضعفات العدد 3 .

الوقت: 4 ساعات و نصف — **اللغة**: العربية

لكل سؤال 7 درجات