Test 7

Level 3, June 25, 2022

Problem 7.1. From a point A lying outside the circle (O), draw two tangent lines AB, AC of (O) with B, C are tangent points. A line passes through A, lies inside the angle OAC, cuts (O) at R, S (R is between A and S). The segments BR, BS cut the ray AO respectively at D, E. Denote H as orthocenter and BT as the diameter of circumcircle of triangle BDE. Prove that $\Delta DHT \sim \Delta RBS$.

Problem 7.2. Donald Duck is standing in front of a blackboard on which a positive integer is written, whose two digits have been erased by a sponge, and between them there is an even number of (known) digits. Donald knows the remainders of the initial number upon division by 9 and by 11, and he is trying to deduce the erased digits. It turns out that Donald is unable to fulfill his desire—that is, there are multiple ordered pairs (x, y) such that, for each such pair, after the digits from that pair are written in the corresponding spots, the obtained number upon division by 9 and by 11 gives precisely the remainders known to Donald. Determine which are the possibilities for the ordered pair (x, y) that Donald cannot decide on.

Problem 7.3. On a 9×9 board, several cells are shaded in such a way that from any shaded cell you can get to any other shaded cell, visiting only the shaded cells and moving only between cells neighboring with a side. Determine the largest possible perimeter of the shaded region.

Problem 7.4. Let $n \geq 3$ be an integer and let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be n distinct integers. Prove that

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_n - x_1)^2 \geq 4n - 6.$$

Saudi Math Team 2022
JBMO team, Test– June 25

السؤال الأول:

من نقطة A خارج الدائرة (O) رسمنا المماسين AB, AC يمسان الدائرة عند B, C تواليًا. المستقيم المار بنقطة A ويقع داخل الزاوية $\angle OAC$ يقطع الدائرة في R, S (R بين A, S). القطعتان المستقيمتان BR, BS تقطعان الشعاع AO في D, E تواليًا. لتكن H هي نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث BDE ، و BT قطر في الدائرة المحيطة لهذا المثلث. أثبت أن $\Delta DHT \sim \Delta RBS$.

السؤال الثاني

يقف دونالد دك أمام سبورة مكتوب عليها عدد صحيح موجب، تم مسح رقمين من هذا العدد بواسطة مشاغب، وبينهما رقم زوجي معلوم. يعرف دونالد بواقي قسمة العدد الأصلي على 9 و 11، وهو يحاول استنتاج الرقمين المحذوفين. اتضح أن دونالد غير قادر على تلبية رغبته – أي أن هناك عدة أزواج مرتبة (x, y) بحيث، لكل زوج من هذه الأزواج، بعد كتابة الرقمين من هذا الزوج في الموضعين المناظرين، يتم الحصول على عدد له بالضبط نفس بواقي القسمة على 9 و 11 المعروف لدونالد. حدد الإمكانات للزوج المرتب (x, y) الذي لا يستطيع دونالد التحديد معها.

السؤال الثالث:

على لوحة 9×9 ، يتم تظليل العديد من الخلايا بطريقة بحيث يمكنك من أي خلية مظللة الوصول إلى أي خلية مظللة أخرى ، وزيارة الخلايا المظللة فقط والانتقال فقط بين الخلايا المتجاورة المشتركة في ضلع. حدد أكبر محيط ممكن للمنطقة المظللة.

السؤال الرابع:

ليكن $n \geq 3$ عددًا صحيحًا و $x_1, x_2, \dots, x_n$ أعداد صحيحة مختلفة عددها n. أثبت أن

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_n - x_1)^2 \geq 4n - 6$$

زمن الاختبار أربع ساعات ونصف

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والسداد