Practice Problems- 6

4 July, 2020

Level 2

Homework Problems

Introductory problems

I) 33. [Russia 1999] Do there exist 19 distinct positive integers that add up to 1999 and have the same sum of digits?

$a_1, a_2, \longrightarrow a_{19} \in \mathbb{Z}^+ , \quad a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{19}$

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{19} = 1999$

ليكن $s(a)$ حاصل جمع خانات a .

$\rightarrow \; s(a_1) = s(a_2) = \cdots = s(a_{19}) = m$

حاصل جمع الخانات يوحي باستخدام mod 9

$s(a_i) \equiv a_i \pmod 9$

$\Rightarrow \; \sum s(a_i) \equiv \sum a_i \pmod 9 \Rightarrow 19m \equiv 1999 \pmod 9$

$\Rightarrow \boxed{m \equiv 1 \pmod 9} \; *$

ولكن مجموع الخانات محدود ، لأن

$a_1 < \dfrac{1999}{19} \Rightarrow a_1 \leqslant 105 \Rightarrow s(a_1) \leqslant 18$

لأن $s(99) = 18$ وهو أكبر مجموع من إلى 105

33. [Russia 1999] Do there exist 19 distinct positive integers that add up to 1999 and have the same sum of digits?

بما أن $s(a_1) \leq 18$ ، إذن $** \quad \boxed{m \leq 18}$

بالتالي من $*$ و $**$: $m = 1$ أو 10

الحالة الأولى : $m = 1$

$\Rightarrow a_i = 1, 10, 100 \text{ or } 1000 \quad \forall i \in \{1, \ldots, 19\}$

وهذا غير ممكن لأن ال 19 عدد مختلف

33. [Russia 1999] Do there exist 19 distinct positive integers that add up to 1999 and have the same sum of digits?

الحالة الثانية: $m = 10$

أصغر 20 عدد مجموع خاناتهم 10 هي :

$19, 28, 37, \ldots, 91, 109, 118, 127, \ldots, \underline{190}, 208$

حاصل جمع أول 9 أعداد منهم هو :

$(10+20+\cdots+90)+(9+8+7+\cdots+1) = 450 + 45 = 495$

حاصل جمع الأعداد الـ 9 التالية

$900 + (10+20+\cdots+80)+(9+8+\cdots+1) = 900 + 360 + 45$
$= 1305$

$\Leftarrow$ حاصل جمع أصغر 18 عدد هو 1800

33. [Russia 1999] Do there exist 19 distinct positive integers that add up to 1999 and have the same sum of digits?

ولكن $1800 + 190 \neq 1999$ ، إذن أكبر عدد من ضمن

ال 19 عدد يجب أن يكون $\geq \underline{\underline{208}}$

$\Leftarrow$ أقل مجموع لأول 18 عدد هو 1800

$\Leftarrow$ أقل مجموع لل 19 عدد هو $1999 < 1800 + 208$

$\Leftarrow$ لا يوجد حل

40. Fractions in modular arithmetic.

(1) [ARML 2002] Let a be the integer such that

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{23} = \frac{a}{23!}.$$

Compute the remainder when a is divided by 13.

(2) Let $p > 3$ be a prime, and let m and n be relatively prime integers such that

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Prove that m is divisible by p.

(3) [Wolstenholme's Theorem] Let $p > 3$ be a prime. Prove that

$$p^2 \mid (p-1)!\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1}\right).$$

(1) $a = 23! + \frac{23!}{1} + \text{——} + \frac{23!}{23}$

$13 \mid \frac{23!}{i} \quad \forall \quad i = \{1, 2, 3, -, 12, 14, —, 23\}$

$\Rightarrow \quad a \equiv \frac{23!}{13} \pmod{13}$

$\Rightarrow \quad a \equiv \frac{12!}{\downarrow} (14 \cdot 15 \cdot - , 23) \pmod{13}$

ولكن $12! \equiv -1 \, [13]$ من نظرية ويلسون

$\Rightarrow \quad a \equiv (-1)(1 \cdot 2 \cdot \,\text{--}\, \cdot 10) \pmod{13}$

$\Rightarrow \quad a \equiv -10! \pmod{13} \; *$

$10! \equiv \frac{-1}{(11\times 12)^{-1}} \pmod{13} \Leftarrow 10! = \frac{12!}{(11\times 12)} \pmod{13}$ بذات الوقت

$10! \equiv \frac{-1}{(-1\times -2)} \pmod{13} \Rightarrow 10! \equiv \frac{-1}{2} \pmod{13}$

بالتعويض في * :

$a \equiv 2^{-1} \pmod{13} \Rightarrow a \equiv 7 \pmod{13}$

$$(2)\quad \frac{m}{n} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(p-1)^2}$$

$$\Rightarrow [(p-1)!]^2 \cdot \frac{m}{n} = (p-1)!^2 \left[\frac{1}{1^2} + \cdots + \frac{1}{(p-1)^2} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{((p-1)!)^2 m}{n} = \frac{(p-1)!^2}{1^2} + \cdots + \frac{(p-1)!^2}{(p-1)^2}$$

يكفي إثبات أن الطرف الأيمن يقبل القسمة على p ، لأن $*^1$ $\gcd((p-1)!^2, p) = 1$

$$\frac{(p-1)!}{i^2} \equiv (p-1)!\,(i^2)^{-1} \equiv (p-1)!\,(i^{-1})^2 \equiv -(i^{-1})^2 \pmod p$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{i^2} \equiv -\sum_{i=1}^{p-1} (i^{-1})^2 \pmod p \quad *^2$$

ولكن مجموعة $\{i^{-1}\}_{i=1}^{p-1}$ هي مجموعة بواقي كاملة ، أي أن

$$\{1^{-1}, 2^{-1}, \ldots, (p-1)^{-1}\} = \{1, 2, \ldots, p-1\}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p-1} (i^{-1})^2 \equiv \sum_{j=1}^{p-1} j^2 \equiv \frac{(p-1)(p)(2p-3)}{6} \equiv 0 \pmod p \quad : p \geq 5 \text{ عندما } *^3$$

$\gcd(p, 6) = 1$ لأن

من $*^1$, $*^2$, $*^3$ نستنتج أن $p \mid m$ عندما $p \geq 5$

(3) $\quad p^2 \mid (p-1)!\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+ \cdots +\frac{1}{p-1}\right)$

$$S = (p-1)!\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+ \cdots +\frac{1}{p-1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 2S = (p-1)!\left(\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i}+\frac{1}{p-i}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 2S = (p-1)!\left(\sum_{i=1}^{p-1} \frac{(p-i)+i}{i(p-i)}\right) = (p-1)! \cdot p \cdot \underline{\underline{\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i(p-i)}}}$$

$$\Rightarrow 2S = p\,(p-1)! \underline{\underline{\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{(p-i)i}}}$$

نريد إثبات أن

$$p \mid \left(\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i(p-i)}\right)(p-1)!$$

ولكن

$$\frac{(p-1)!}{i(p-i)} \equiv (p-1)!\,[\underline{i(p-i)}]^{-1} \equiv (-1)\,[\underline{-i^2}]^{-1} \pmod p$$

$$\equiv (-1)(-1)^{-1}\, i^{-1} \cdot i^{-1} \pmod p$$

$$\equiv (i^{-1})^2 \pmod p$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{i(p-i)} \equiv \sum_{i=1}^{p-1} (i^{-1})^2 \pmod p \equiv \underline{0} \pmod p$$

$$\Rightarrow \quad p \mid 2S \quad \Rightarrow \quad p \mid S$$

3. Most positive integers can be expressed as a sum of two or more consecutive positive integers. For example, $24 = 7 + 8 + 9$ and $51 = 25 + 26$. A positive integer that cannot be expressed as a sum of two or more consecutive positive integers is therefore *interesting*. What are all the interesting integers?

لتكن S هي مجموعة الحل

$$n = m + (m+1) + \cdots + (m+k) \quad , \quad k \geq 1$$

$$= m(k+1) + \frac{k(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(2m+k)}{2}$$

واضح أن كلا القوسين $k+1$ و $2m+k$ لهم زوجية مختلفة، أكبر من 1، إذن أحدهما فردي $\Longrightarrow n \neq 2^k \Longrightarrow 2^k \in S$

$$n = 2^s u \quad , \quad u : \text{odd} \; , \; s \geq 0$$

3. Most positive integers can be expressed as a sum of two or more consecutive positive integers. For example, $24 = 7 + 8 + 9$ and $51 = 25 + 26$. A positive integer that cannot be expressed as a sum of two or more consecutive positive integers is therefore *interesting*. What are all the interesting integers?

$$n = 2^s u = \frac{(k+1)(2m+k)}{2}, \quad u \text{ is odd}, \; u > 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^{s+1} u = (k+1)(2m+k)$$

① $u > 2^{s+1}$

$$2^{s+1} = k+1 \Rightarrow k = 2^{s+1} - 1$$

$$u = 2m + k \Rightarrow u = 2m + 2^s - 1$$

$$\Rightarrow \quad k = 2^{s+1} - 1 \in \mathbb{Z}^+$$

$$m = \frac{u - 2^s + 1}{2} \in \mathbb{Z}^+$$

3. Most positive integers can be expressed as a sum of two or more consecutive positive integers. For example, $24 = 7 + 8 + 9$ and $51 = 25 + 26$. A positive integer that cannot be expressed as a sum of two or more consecutive positive integers is therefore *interesting*. What are all the interesting integers?

(2) $u < 2^{s+1}$

$2^{s+1} = 2m + k \Rightarrow \underline{2^{s+1}} = 2m + \underline{u-1}$

$u = k+1 \Rightarrow k = u-1$

$\Rightarrow$ $k = u-1 \in \mathbb{Z}^+$

$m = \dfrac{2^{s+1} - u + 1}{2} \in \mathbb{Z}^+$

More Problems ☺

4. Set $S = \{105, 106, \ldots, 210\}$. Determine the minimum value of n such that any n-element subset T of S contains at least two non-relatively prime elements.

الفكرة الأساسية هي استخدام مبدأ برج الحمام، لذا سندرس
مضاعفات $2,3,5,7,11$ ، لما لا ندرس مضاعفات 13؟ لأن 13 لا تضيف لي
عنصر غير 13^2 ، (لاحظ أن $13\cdot 17 > 210$)

$P = \{2, 3, 5, 7, 11\}$

لتكن A_k مجموعة مضاعفات k في S :

$$A_k = \{ a \mid a \in S ,\ k \mid a \}$$

نريد عد مضاعفات $2,3,5,7,11$ في S :

$$A = A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7 \cup A_{11}$$

$$|A| = \sum_{k \in P} |A_k| - \sum_{i<j \in P} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k \in P} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum_{i<j<k<l \in P} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7 \cap A_{11}|$$

4. Set $S = \{105, 106, \ldots, 210\}$. Determine the minimum value of n such that any n-element subset T of S contains at least two non-relatively prime elements.

$$|A| = 137 - 66 + 16 - 1 + 0$$
$$= 86$$

إذن يوجد 86 عدد مضاعف لأعداد P في المجموعة S.

⇐ عدد الأعداد المؤلفة في S هو 87 $\left(A \cup \{13^2\} \right)$

(لا توجد أعداد مؤلفة أخرى جميع قواسمها الأولية ≥ 17)

⇐ عدد الأعداد الأولية في S:

$$|S| - 87 = 19$$

4. Set $S = \{105, 106, \ldots, 210\}$. Determine the minimum value of n such that any n-element subset $\underline{T}$ of S contains at least two non-relatively prime elements.

$S_0 = \{\underbrace{11^2, 5^3, 2^7, 3^2\cdot 17, 7\cdot 29}_{\text{5 أعداد}}\} \cup \{\underline{13^2}\} \cup \{$ الأعداد الأولية في $S\}$

عددها 19 عدد

S_0 تحتوي 25 عدد أولية نسبياً مثنى مثنى

$\Rightarrow \boxed{n \geq 26}$

$n = 26$ حل ، لأنه في أي مجموعة T تحتوي 26 .

• يوجد على الأكثر 19 عدد أولي

• 13^2 ترد مرة واحدة على الأكثر

$\Leftarrow$ يوجد على الأقل 6 أعداد مؤلفة غير 13^2 $\Leftarrow$ ال 6 أعداد موجودة في A ، ولكن $A = A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7 \cup A_{11}$

يوجد عددان ينتميان لنفس المجموعة A_k $\Leftarrow$ غير أوليان نسبياً

47. Let $n > 1$ be an odd integer. Prove that n does not divide $3^n + 1$.

48. Let a and b be positive integers. Prove that the number of solutions (x, y, z) in nonnegative integers to the equation $ax + by + z = ab$ is

$$\frac{1}{2}[(a+1)(b+1) + \gcd(a, b) + 1].$$

30. For a positive integer k, let $p(k)$ denote the greatest odd divisor of k. Prove that for every positive integer n,

$$\frac{2n}{3} < \frac{p(1)}{1} + \frac{p(2)}{2} + \cdots + \frac{p(n)}{n} < \frac{2(n+1)}{3}.$$