المجموعة 21

1) ساعتان حائط معلقتان بجانب بعضهما وكلاهما مضبوطة على نفس الوقت. الأولى تدق كل ثانيتين، والثانية تدق كل ثلاث ثواني، عندما تدقان في نفس اللحظة تُسمع كأنها دقة واحدة.

(a) كم من الوقت يمر بين الدقة الأولى والدقة الثالثة عشر؟

(b) كم من الوقت يمر بين الدقة الأولى والدقة الألف؟

2) افترض أن لدينا كأسين وملعقة. أحد الكأسين فيه 150 لتر حليب والآخر فيه 150 لتر قهوة. أخذنا ملعقة من الحليب من الكأس الأول وقمنا بصبها في الكأس الثاني. وتم خلط السائل الناتج. ثم أخذنا ملعقة من المخلوط في الكأس الثاني وقمنا بصبها في الكأس الأول. أيهما أكبر القهوة في الكأس الأول أم الحليب في الكأس الثاني؟

3) القاعدة AD في شبه المنحرف $ABCD$ أكبر من القاعدة BC. أيهما أكبر مجموع الزاويتين A, D أم مجموع الزاويتين B, C؟

4) سعر دفتر عدد طبيعي من الهللات، سعر 9 دفاتر من نفس النوع أقل من 10 ريالات، سعر 10 دفاتر من نفس النوع أكبر من 11 ريال. كم سعر الدفتر؟

5) أُسقط من A الارتفاع على BC في المثلث ABC وهو ليس أصغر من BC. كما أُسقط من B الارتفاع على AC وهو ليس أصغر من AC.
أوجد قياسات زوايا المثلث ABC.

6) صف من المجندين يقف في مواجهة قائد التدريب. عندما يعطي الأمر بانتهاء التدريب والانصراف العديد منهم يتحول لليمين، والعديد منهم يتحول لليسار، والباقي يلف ويواجه الجهة العكسية. هل ممكن للقائد أن يجد موضعاً في التشكيل يقف فيه بحيث عدد الجنود المتجهين للجانبين يكونان متساويين؟

7) تم كتابة الأعداد $1,2,3,\ldots,10$ على السبورة. أي عددين a,b يمكن مسحهما واستبدالهما بالعدد $a-b$.
بعد إجراء هذه العملية العديد من المرات. هل يمكن أن يكون العدد المتبقي الوحيد 0؟

8) ما أصغر قيمة ممكنة لعدد الأشخاص في فريق أولمبياد الرياضيات السعودي إذا كان عدد البنات في الفريق أقل من 50% وأكثر من 48%؟

9) يمر طريق مستقيم عبر حقل كبير. يقف رجل على الطريق عند النقطة A. يستطيع المشي في الحقل بسرعة 3 كم / ساعة، وبسرعة 6 كم / ساعة عبر الطريق. ارسم كل النقاط التي يستطيع الرجل الوصول إليها خلال ساعة.

10) يلعب لاعبان مباراة في لوحة بيضاء 10×10. اللاعب الأول في دوره يمكنه أن يلون بالأسود أي 4 مربعات تكون مربعاً 2×2. بينما يليه اللاعب الثاني في دوره يمكنه أن يلون بالأسود 3 مربعات تكون زاوية (بلغة أخرى مربع 2×2 مقطوعاً منه مربع 1×1). اللاعبان يتبادلان اللعب، المربع لا يمكن أن يتلون أكثر من مرة. الفائز هو اللاعب الذي يلون آخر مربع. من يفوز دائماً؟ وما الاستراتيجية التي يتبعها ليضمن الفوز؟

11) مكعب $4 \times 4 \times 4$ سيقطع ل 64 مكعب وحدة. ما أقل عدد لمرات القطع نحتاجه لإتمام ذلك إذا سمح بإعادة ترتيب القطع بعد كل تقطيع؟ كل تقطيع يجب أن يكون موازياً لأحد أوجه المكعب الكبير.

المجموعة 22

1) أوجد أصغر عدد صحيح أكبر من 40500 ومربع عدد صحيح.

2) أثبت أن (a) $a^2+b^2 \geq 2ab$ لكل a,b ؛ (b) $x+\dfrac{1}{x} \geq 2$ إذا كانت $x>0$ ؛ (c) $a^2 \,/\, b \geq 2a-b$ إذا كان $b>0$.

3) (a) هل من الممكن كتابة 11 عدد في صف مجموع أي ثلاثة متتالية منها موجب، ومجموع كل الأعداد سالب ؟ (b) نفس السؤال مع 12 عدد.

4) (a) أثبت أن أي مستطيل محيطه $4\,cm$ مساحته على الأكثر $1\,cm^2$. (b) هل يوجد مربع محيطه $4\,cm$ مساحته $1\,cm^2$ بالضبط ؟

5) في المثلث ABC ، رُسم مستقيم موازي ل AC يمر بنقطة تقاطع منصفات الزوايا للمثلث. وقطع هذا المستقيم كلاً من AB, BC في M, N تواليًا. أثبت أن $MN = AM + CN$.

6) موظف الخزنة يحصي مجموع الريالات في الفواتير التي لديه كالتالي: في البداية يعد الفواتير بغض النظر عن قيمة كل منها، ثم يضيف عدد الفواتير التي قيمتها تزيد عن 1 ريال، ثم يضيف عدد الفواتير التي قيمتها تزيد عن 2 ريال، وهكذا. لماذا سينتهي لعدد مساوي لمجموع الريالات في الفواتير؟

7) أثبت أن لأي ثلاث أعداد x, y, z فإن :

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \ .$$

8) (a) تم إدخالك غرفة بها طاولتان معصوب العينين. الطاولة على يسارك بها طبقة من العملات الفضية بجانب بعضها، لكل عملة وجهان وجه به صورة والآخر به كتابة. والطاولة على يمينك فارغة. في يديك قفازات تمنعك من معرفة الوجه العلوي للعملة، ولكنك تعلم أن هناك 31 عملة الكتابة فيها لأعلى والباقيات الصورة فيها لأعلى. يمكنك أن تنقل أي عدد من العملات من طاولة لأخرى، بشرط أن تقلب تلك العملات المنقولة. هل يمكنك أن ترتب الأشياء بحيث من الممكن بعد عدد ما من النقلات أن يكون عدد العملات التي الكتابة فيها لأعلى متساوية على الطاولتين؟ (b) ماذا إذا كان الوضع الابتدائي يوجد عملات على كل من الطاولتين، 31 منها على اليسرى، 8 على اليمنى وفي كل عملة الكتابة فيها لأعلى؟

9) طريقان مستقيمان متعامدان عبر حقل كبير. شخص يقف عند نقطة تقاطعهما يمكنه أن يمشي في الحقل بسرعة لا تزيد عن 3 كم | ساعة ، وعلى الطريق بسرعة لا تزيد عن (a) 6 كم | ساعة ؛ (b) $3\sqrt{2}$ كم | ساعة . في كل حالة ، ارسم كل النقاط التي يستطيع الشخص أن يصل إليها خلال 1 ساعة .

10) ذهب فلاح للسوق لبيع بندقه، هو الآن أمام ميزان كفتيه على بعدين غير متساويين من نقطة ارتكاز عارضة الميزان، وقطعة وزن 1 كجم. ليزن 2 كجم لأحد الزبائن، الفلاح يضع قطعة الوزن 1 كجم في الكفة اليمنى للميزان ثم يضيف حبات بندق في الكفة اليسرى حتى تتزن الكفتان. بعد ذلك يفرغ الكفتين ثم يضع قطعة الوزن 1 كجم في الكفة اليسرى، ثم يضيف حبات بندق جديدة للكفة اليمنى حتى تتزن الكفتان. (a) أثبت أن كمية البندق التي وزنها في الوزنتين أكثر من 2 كجم. (b) كيف يمكن للبائع أن يزن بالضبط 2 كجم من البندق؟

11) الأعداد من 1 إلى 64 وضعت في لوحة شطرنج معتادة 8×8 بحيث كل عدد يظهر مرة واحدة في مربع واحد بالضبط. أثبت أنه سيكون هناك مربعان مشتركان في ضلع وعدديهما الفرق بينهما يزيد عن 4 .