Practice Problems- 8

7 July, 2020

Level 2

Homework Problems

21. [APMO 1998] Find the largest integer n such that n is divisible by all positive integers less than $\sqrt[3]{n}$.

إذا كانت $\sqrt[3]{n} \geqslant m$

فإن $1,2,3,\dots,m \mid n$

ولأننا مهتمون بأكبر قيمة لـ m فنفرض أن

1 $m+1 > \sqrt[3]{n} \geqslant m$

من معطى السؤال

2 $1,2,3,\dots,m \mid n \Rightarrow \mathrm{lcm}(1,2,\dots,m) \mid n$

من 1 و 2 :

3 $\mathrm{lcm}(1,2,\dots,m) \leqslant n < (m+1)^3 \leftarrow$ درجة 3

معامل قائد =1

21. [APMO 1998] Find the largest integer n such that n is divisible by all positive integers less than $\sqrt[3]{n}$.

$\operatorname{lcm}(1,2,3,\ldots,m)$ نحاول معروفة حجم

نجرب حدود مختلفة للطرف الأيسر

① $\operatorname{lcm}(m, m-1) = m(m-1) \leftarrow$ درجة 2 ×

② $\operatorname{lcm}(m, m-1, m-2) = \begin{cases} m(m-1)(m-2) & \text{if } m \text{ is odd} \\ \dfrac{m(m-1)(m-2)}{2} & \text{if } m \text{ is even} \end{cases}$

$\Rightarrow \operatorname{lcm}(m, m-1, m-2) \geq \dfrac{m(m-1)(m-2)}{2} \leftarrow$ درجة 3 ، معامل قائد = $\frac{1}{2}$ ×

③ $\operatorname{lcm}(m, m-1, m-2, m-3) \geq$ ④ $\dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{6} \leftarrow$ درجة 4

$\gcd(m, m-3) = 1, 3$

$\gcd(m-1, m-3) = 2$ ، أ $\gcd(m, m-2) = 2$

21. [APMO 1998] Find the largest integer n such that n is divisible by all positive integers less than $\sqrt[3]{n}$.

بالتعويض ب ④ في ③ :

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{6} \leq n < (m+1)^3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{6} \leq \frac{(m+1)}{(m-1)} \cdot \frac{m+1}{(m-2)} \cdot \frac{m+1}{(m-3)}$$

$$\Rightarrow \uparrow \underline{\frac{m}{6}} \leq \underline{\left(\frac{2}{m-1}+1\right)\left(\frac{3}{m-2}+1\right)\left(\frac{4}{m-3}+1\right)} \downarrow$$

يزيد بزيادة m يتناقص بزيادة m

ولكن عندما $m=13$ ، الطرف الأيسر أكبر من الأيمن ، إذن ل $m \geq 13$ ، المتباينة خاطئة

$\Leftarrow$ ⑤ $\boxed{m \leq 13}$

21. [APMO 1998] Find the largest integer n such that n is divisible by all positive integers less than $\sqrt[3]{n}$.

$$\begin{cases} \mathrm{lcm}(1,2,\dots,7) = 420 \\ \sqrt[3]{420} < 8 \end{cases} \Rightarrow n = 420 \quad \text{حل}$$

$$\Rightarrow n \geq 420 \quad *$$

الآن نفرض أن $n > 420$ ،

$$\mathrm{lcm}(1,2,\dots,7) \mid n \Leftarrow \sqrt[3]{n} > 7$$

$$\Rightarrow 420 \mid n, \quad n > 420 \Rightarrow n \geq (420)\cdot 2 \Rightarrow n \geq 840$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{n} > 9 \Rightarrow \mathrm{lcm}(1,2,\dots,9) \mid n$$

$$\Rightarrow 2520 \mid n \Rightarrow n \geq 2520 \Rightarrow \sqrt[3]{n} > 13$$

$$\Rightarrow m > 13$$

$** \; n \leq 420 \Leftarrow$ وهذا غير ممكن

من $*$ و $**$: $n = 420$ ، وهو حل

43. For a positive integer n, let $r(n)$ denote the sum of the remainders of n divided by $1, 2, \ldots, n$. Prove that there are infinitely many n such that $r(n) = r(n-1)$.

ماهي $r(n)$ ؟ نستطيع إيجاد صيغة لـ $r(n)$ ؟

باقي n على k هو $k\left\{\frac{n}{k}\right\} = n - k\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$

$$r(n) = \sum_{k=1}^{n} k\left\{\frac{n}{k}\right\} = \sum_{k=1}^{n}\left(n - k\left\lfloor \frac{n}{k}\right\rfloor\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} n - \sum_{k=1}^{n} k\left\lfloor \frac{n}{k}\right\rfloor$$

$$= n^2 - \sum_{k=1}^{n} k\left\lfloor \frac{n}{k}\right\rfloor \quad *$$

إذن من $*$:

$$r(n) = r(n-1)$$

$$\Longleftrightarrow \quad n^2 - \sum_{k=1}^{n} k\left\lfloor \frac{n}{k}\right\rfloor = (n-1)^2 - \sum_{n=1}^{n-1} k\left\lfloor \frac{n-1}{k}\right\rfloor$$

43. For a positive integer n, let $r(n)$ denote the sum of the remainders of n divided by $1, 2, \ldots, n$. Prove that there are infinitely many n such that $r(n) = r(n-1)$.

$$\Leftrightarrow \quad n^2-(n-1)^2=\sum_{k=1}^{n} k\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor-\sum_{k=1}^{n-1} k\left\lfloor\frac{n-1}{k}\right\rfloor$$

$$\Leftrightarrow \quad 2n-1 = n\cdot\left\lfloor\frac{n}{n}\right\rfloor+\sum_{k=1}^{n-1} k\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor-k\left\lfloor\frac{n-1}{k}\right\rfloor$$

$$\Leftrightarrow \quad 2n-1=n+\sum_{k=1}^{n-1} k\left(\underline{\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-1}{k}\right\rfloor}\right) \quad *$$

يساوي 0 أو 1

نلاحظ أن

- $\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n-1}{k}\right\rfloor$ if $k \nmid n$ $\quad **$
- $\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n-1}{k}\right\rfloor+1$ if $\underline{k \mid n}$

43. For a positive integer n, let $r(n)$ denote the sum of the remainders of n divided by $1, 2, \ldots, n$. Prove that there are infinitely many n such that $r(n) = r(n-1)$.

بالتعويض ب ** في * :

$$2n-1 = n + \sum_{\substack{k \mid n \\ k \le n-1}} k \cdot 1$$

$$\iff \boxed{2n-1 = \sum_{k \mid n} k}$$

نريد ايجاد n تحقق المساواة

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$$

$$\sum_{k \mid n} k = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdots \frac{p_m^{\alpha_m+1}-1}{p_m-1}$$

$$2n-1 = 2 \cdot p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m} - 1$$

43. For a positive integer n, let $r(n)$ denote the sum of the remainders of n divided by $1, 2, \ldots, n$. Prove that there are infinitely many n such that $r(n) = r(n-1)$.

أكثر من طريقة لإكمال الحل :

① الاعتماد على عدد أولي واحد $(m=1)$ من باب التبسيط

(بما أن الهدف الحصول على مثال)

$$2p_1^{\alpha_1}-1 = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \iff 2p_1^{\alpha_1+1}-2p_1^{\alpha_1}-p_1+1 = p_1^{\alpha_1+1}-1$$

$$\iff p_1^{\alpha_1+1}-2p_1^{\alpha_1}-p_1+2=0$$

$$\iff p_1 \mid 2 \Rightarrow p_1=2$$ حل

$$\Rightarrow p_1=2,\quad n=2^{\alpha_1}$$ مثال $\forall \alpha_1 \in \mathbb{Z}^+$

② المقارنة بحجم الطرفين :

$2p_1^{\alpha_1}\cdots p_n^{\alpha_n} \approx 2n-1$ حجم

$p_1^{\alpha_1}\cdots p_n^{\alpha_n} \approx \sum_{k\mid n} k$ حجم

More Problems ☺

17. [MOSP 1997] Prove that the sequence 1, 11, 111, … contains an infinite subsequence whose terms are pairwise relatively prime.

أثبت أن المتتابعة $1, 11, 111, \ldots$ تحتوي متسلسلة جزئية لا نهائية
التي عناصرها أولية نسبياً مثنى مثنى.

$$x_n = \underbrace{11\cdots1}_{n} = \frac{\underbrace{99\cdots9}_{n}}{9} = \frac{10^n - 1}{9} \Rightarrow x_n = \frac{10^n - 1}{9}$$

السؤال يكافئ: إيجاد $m_1, m_2, \ldots$ حيث أن المتسلسلة تحقق الشرط

$x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots$

$$\gcd(x_{m_i}, x_{m_j}) = 1 \iff \gcd\left(\frac{10^{m_i} - 1}{9}, \frac{10^{m_j} - 1}{9}\right) = 1$$

$$\iff \gcd(10^{m_i} - 1, 10^{m_j} - 1) = 9$$

17. [MOSP 1997] Prove that the sequence 1, 11, 111, ... contains an infinite subsequence whose terms are pairwise relatively prime.

ولكن نعلم أن

$$\gcd(10^a-1,\ 10^b-1) = 10^{\gcd(a,b)} - 1$$

أي أننا نريد:

$$\gcd(10^{m_i}-1,\ 10^{m_j}-1) = 9 \iff 10^{\gcd(m_i,m_j)} - 1 = 9$$

$$\iff \gcd(m_i, m_j) = 1$$

إذن نختار العناصر $m_1, m_2, \ldots$ لتكون أولية نسبياً مثنى مثنى

ويكفي اختيارها لتكون أعداد أولية.

مثال:

$$x_2, x_3, x_5, x_7, \ldots \ldots x_{p_i}, \ldots$$

41. Find all pairs (x, y) of positive integers such that $x^2 + 3y$ and $y^2 + 3x$ are simultaneously perfect squares.

أوجد جميع الأزواج (x,y) من الأعداد الصحيحة التي تحقق أن x^2+3y و y^2+3x مربعات كاملة بذات الوقت.

دون فقد العمومية نفرض أن $x \geq y$

$$\Rightarrow \quad x^2+3x \geq x^2+3y$$

$$(x+2)^2 > x^2+3x \geq x^2+3y > x^2$$

$$\Rightarrow \quad (x+2)^2 > x^2+3y > x^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+3y = (x+1)^2$$

$$x^2+3y = x^2+2x+1 \Rightarrow 3y = 2x+1$$

$$\Rightarrow \quad x \equiv 1 \pmod{3}$$

41. Find all pairs (x, y) of positive integers such that $x^2 + 3y$ and $y^2 + 3x$ are simultaneously perfect squares.

$x = 3k+1$

$\Rightarrow 3y = 2\cdot(3k+1)+1 \Rightarrow 3y = 6k+3$

$\Rightarrow y = 2k+1$

بدارسة y^2+3x :

$$y^2+3x = (2k+1)^2+3\cdot(3k+1)$$
$$= 4k^2+4k+1+9k+3$$
$$= 4k^2+13k+4$$

بالحصر بين مربعين :

$$(2k+3)^2 < 4k^2+13k+4 < (2k+4)^2$$

2.2.3 2.2.4

41. Find all pairs (x, y) of positive integers such that $x^2 + 3y$ and $y^2 + 3x$ are simultaneously perfect squares.

$$4k^2+12k+9 < 4k^2+13k+4 \iff \boxed{5 < k}$$

$$4k^2+13k+4 < 4k^2+16k+16$$

إذن

$$(2k+3)^2 < \underbrace{4k^2+13k+4}_{y^2+3x} < (2k+4)^2$$

لكل $5 < k$

$\Leftarrow$ $k \leq 5$ ، بالتجريب $4k^2+13k+4$ مربع كامل عندما

$k = 0, 5$

إذن

$(x, y) = (1,1), (16,11)$ و

$\Leftarrow$ مجموعة الحل هي $\{(1,1), (16,11), (11,16)\}$

52. Determine all positive integers n such that n has a multiple whose digits are nonzero.

أوجد جميع الأعداد الصحيحة الموجبة n حيث أن n
له مضاعف جميع خاناته غير صفرية .

37. Let a and b be two relatively prime positive integers, and consider the arithmetic progression $a, a+b, a+2b, a+3b, \ldots$.

(1) [G. Polya] Prove that there are infinitely many terms in the arithmetic progression that have the same prime divisors.

(2) Prove that there are infinitely many pairwise relatively prime terms in the arithmetic progression.

19. [Ireland 1999] Find all positive integers m such that the fourth power of the number of positive divisors of m equals m.