Case 2: $p \mid a^2+a+1$

$\Rightarrow a-1 \mid p-1 \Rightarrow p > a-1 \Rightarrow \gcd(p, a-1) = 1$

$$m = \frac{a^2+a+1}{p} \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} a^2+a+1 \equiv 3 \pmod{a-1} \\ p \equiv 1 \pmod{a-1} \end{cases} \Rightarrow a^2+a+1 \equiv 3p \pmod{a-1}$$

$$\Rightarrow \quad mp \equiv 3p \pmod{a-1}$$

since $\gcd(p, a-1) = 1$ $\quad m \equiv 3 \pmod{a-1}$

$\Rightarrow \quad m = 3 \quad$ or $\quad m \geqslant (a-1)+3$

- if $m = 3$:

$$\begin{rcases} a^2+a+1 = 3p \\ p-1 = 3(a-1) \end{rcases} \Rightarrow a^2+a+1 = 9a-6$$

$\Rightarrow a^2-8a+7 = 0$

$\Rightarrow (a-7)(a-1) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a=7 \\ p=19 \end{matrix}} \;\Big|\; \begin{matrix} a=1 \\ p=0 \end{matrix} \times$

- if $m \geqslant a+2$

$\Rightarrow a^2+a+1 \geqslant (a+2)p$

$\Rightarrow \dfrac{a^2+a+1}{a+2} \geqslant p \Rightarrow a > p$

$\Rightarrow a-1 > p-1$

but $a-1 \mid p-1 \Rightarrow \Leftarrow !!$