Test-4, April 22
Level 4

Problem 1. Let pairwise different positive integers a, b, c with $gcd(a, b, c) = 1$ are such that

$$a \mid (b-c)^2, \quad b \mid (c-a)^2, \quad c \mid (a-b)^2.$$

Prove that there is no non-degenerate triangle with side lengths a, b and c.

Problem 2. Find all functions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ that for all real numbers x, y, z satisfies to the equation

$$f\big(f(x,z), f(z,y)\big) = f(x,y) + z.$$

Problem 3. Let ABC be an acute, non isosceles triangle with O, H are circumcenter and orthocenter. Prove that the centers of nine-point circle of triangles OHA, OHB, OHC are collinear.

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

السؤال الأول

لتكن الأعداد الصحيحة الموجبة a,b,c مختلفة مثنى مثنى بحيث $\gcd(a,b,c)=1$ تحقق أن:

$$a\mid(b-c)^2,\quad b\mid(c-a)^2,\quad c\mid(a-b)^2$$

اثبت أنه لا يوجد مثلث (غير منعدم) أطوال أضلاعه a,b,c.

السؤال الثاني

أوجد كل الدوال $f:(R,R)\to R$ والتي لأي أعداد حقيقية x,y,z تحقق المعادلة :

$$f(f(x,z),f(z,y))=f(x,y)+z$$

السؤال الثالث

لتكن O,H هما المركز المحيط ونقطة تقاطع ارتفاعات المثلث ABC.

برهن أن مراكز دوائر النقاط التسع للمثلثات OHA,OHB,OHC على استقامة واحدة.

الزمن 4 ساعات ونصف

مع أطيب التمنيات بالتوفيق