تمارين مراجعة1

(1) النقطة D تقع داخل $\triangle ABC$ بحيث $\angle BAD = 40°, \angle DAC = 30°, \angle BCD = 20°, \angle DCA = 50°$
أوجد قياس $\angle CBD$.

الأولمبياد الوطني – G7- رومانيا 2017.

(2) النقطة E تقع على الضلع DC في المربع $ABCD$ بحيث $\angle ABE = 60°$. النقطة F تقع على امتداد BA من ناحية A بحيث $BE = BF$. النقطة M هي نقطة تقاطع AD, EF.

(a) أوجد قياس $\angle BME$.

(b) إذا كان منصف $\angle CBE$ يقطع CD في N. أثبت أن المثلث $\triangle BMN$ متطابق الأضلاع.

الأولمبياد الوطني – G6- رومانيا 2017.

(3) في المثلث $\triangle ABC$ لدينا $\angle A < \angle C$. النقطة E تقع على منصف $\angle B$ بحيث $\angle EAB = \angle ACB$ النقطة D تقع على BC بحيث $BD = AB, B \in CD$.
اثبت أن منتصف AC والتي هي النقطة M تقع على المستقيم DE

الأولمبياد الوطني – G7- رومانيا 2017.

(4) في المثلث $\triangle ABC$ لدينا $\angle A = 90°, \angle B = 30°$. النقطة D هي مسقط العمود من A على BC. النقطة E تقع على AD بحيث $DE = 3AE$ النقطة F مسقط D على BE.

(a) أثبت أن $AF \perp FC$.

(b) أوجد قياس $\angle AFB$.

الأولمبياد الوطني – G7- رومانيا 2017.

(5) في المربع $ABCD$ لدينا بحيث M منتصف AB. النقطة P هي مسقط B على CM. النقطة N منتصف CP. منصف $\angle DAN$ يقطع DP في Q. اثبت أن الشكل $BMQN$ متوازي أضلاع.

الأولمبياد الوطني – G7- رومانيا 2017.

(6) في متوازي الأضلاع $ABCD$ منصف $\angle A$ يقطع الضلع BC في M كما يقطع امتداد DC في N. إذا كانت O هي مركز الدائرة المحيطة للمثلث $\triangle MCN$. فأثبت أن $\angle OBC = \angle ODC$.

المرحلة الثانية من أولمبياد سنغافورة 2019 للكبار

(7) لدينا $\triangle ABC$ مثلثاً فيه $AB < AC < BC$. رسمت دائرته المحيطة مركزها O . النقطة D هي منتصف القوس الأصغر AB . رسم المستقيم AD فقطع المستقيم BC في E . رسمت الدائرة المحيطة للمثلث $\triangle BDE$ فقطعت AB في Z . ثم رسمت الدائرة المحيطة للمثلث $\triangle ADZ$ فقطعت AC في H . أثبت أن $BE = AH$.

الأولمبياد الوطني اليوناني 2019 للكبار

(8) لدينا الشكل $ABCD$ رباعياً مرسوم داخل دائرة مركزها O . النقطة E منتصف BC . المستقيم العمودي المار بالنقطة E يقطع AB في Z . الدائرة المحيطة للمثلث $\triangle CEZ$ تقطع AB في نقطة أخرى هي H . المستقيم CD يقطع نفس الدائرة في W حيث $(W \neq D)$. النقطة K هي نقطة تقاطع المستقيمين WE, AD . النقطة F هي نقطة تقاطع المستقيمين WE, CH . اثبت أن الشكل $AHFK$ رباعياً دائرياً.

الأولمبياد الوطني اليوناني 2019 للناشئين

(9) لدينا $\triangle ABC$ مثلثاً حاد الزوايا. رسمت دائرته المحيطة مركزها O . النقطة D هي منتصف الضلع BC . رسم المستقيم ED عمودياً على الضلع AB ويقطعه في E . إذا قطع المستقيم AO القطعة ED في Z . اثبت أن النقاط A, Z, D, C تقع على دائرة واحدة.

اختبار الترشح لأولمبياد البلقان للناشئين –الفريق اليوناني 2019

(10) لتكن النقطة O هي مركز الدائرة المحيطة للمثلث الحاد الزوايا $\triangle ABC$. المستقيم العمودي على AO يقطع الضلعين AC, AB في D, E على الترتيب. النقطة K هي نقطة تقع على BC ولا تقع على المستقيم AO . المستقيم AK يقطع الدائرة المحيطة للمثلث $\triangle ADE$ في L . أخيرا لتكن النقطة M هي صورة النقطة A حول DE . اثبت أن النقاط K, L, M, O تقع على دائرة واحدة.

اختبار الترشح لأولمبياد البلقان للناشئين –الفريق التركي 2018

(11) لتكن النقطة D تقع على الضلع BC في المثلث $\triangle ABC$ بحيث $\angle ABC = \angle DAC = 30°, \angle ADB = 45°$ اثبت أن $BD = DC$.

مسابقة فيبوناتشي– أيرلندا 2016

تمارين مراجعة2

(1) لدينا المربعان $EFGH, ABCD$ رسمهما بحيث الرأس C منتصف الضلع EF . وكذلك النقاط B, F, G على استقامة واحدة. المستقيم BC يقطع EH في K . المستقيم AC يقطع GH في M .النقطة L منتصف GH ، ورسمنا من K مستقيم يوازي GH ويقطع FG في N .

(a)أثبت أن: $CK = CL = CN$.

(b)أثبت أن: $LM = 2HK$.

الأولمبياد الوطني – G7– رومانيا 2020.

(2) النقاط P, Q, R, S هي أربعة نقاط مختلفة تقع على الدائرة التي مركزها O وقطرها PS ، $QR \parallel PS$ ، $PR \cap QS = A$. إذا كانت B نقطة تقع في نفس المستوى بحيث يكون الشكل الرباعي $POAB$ متوازي أضلاع. اثبت أن $BQ = BP$.

(3) المثلث المتطابق الأضلاع ABC مرسوم داخل دائرة، النقطة P تقع على القوس الأصغر BC . إذا كان $AP \cap BC = D$ ، $PC = 28, PB = 21$. أوجد طول PD .

(4) في المثلث الحاد الزوايا ABC النقطتان D, E مسقطي A, B على كل من BC, AC على الترتيب. إذا كانت P هي نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{AD}$ مع نصف الدائرة المنشأة على BC من الخارج، Q هي نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{BE}$ مع نصف الدائرة المنشأة على AC من الخارج. فاثبت أن $CP = CQ$.

(5) النقطة P تقع على القطر BD في المستطيل $ABCD$. النقطة F هي مسقط P على الضلع BC . إذا كانت H تقع على BC بحيث $BF = FH$. إذا كانت PC تقطع AH في Q . أثبت أن

$$[\triangle CHQ] = [\triangle APQ].$$

Dutch Mathematics Olympiad, 1994 (Second Round).

(6) المثلث الحاد الزوايا ABC المرسوم داخل الدائرة التي مركزها O فيه. D هي نقطة تقاطع المنصف الداخلي للزاوية A مع الضلع BC . إذا كان الشعاع الخارج من الرأس A يمر بالمركز O يعامد الشعاع الخارج من D عند نقطة ولتكن I ثم يقطع AC عند P . أثبت أن $AB = AP$.

XI Italian Mathematics Olympiad, 1995.

(7) في الشكل الرباعي $ABCD$. رسمت دائرة تمس أضلاعه AD, DC, CB من الداخل على الترتيب في النقاط K, L, M . إذا عرفنا نقطة ولتكن N تقع على $\overline{MK}$ بحيث $LN \parallel AD$ ، $\overline{KC} \cap \overline{LN} = \{P\}$. أثبت أن:

$$PL = PN .$$

Fourth National Mathematics Olympiad of Turkey, 1997.

(8) ثلاثة نقاط A, B, C تقع على استقامة واحدة بحيث B تقع بين A, C . القطع المستقيمة AB, BC, CA هي أقطار أنصاف دوائر مرسومة في اتجاه واحد. إذا كان العمود المقام من B يقطع نصف الدائرة الكبرى في D . أثبت أن المماس المشترك للدائرتين الأصغر (غير BD) يوازي مماس الدائرة الكبري عند D .

38th IMO Croatian Team Selection Test 1997.

(9) في المثلث ABC . النقطة M هي نقطة تقاطع CD ، BK حيث CD هو ارتفاع المثلث ABC ، BK هو منصف الزاوية $\angle ABC$ ($D \in \overline{AB}, K \in \overline{AC}$). رسم KL عمود على $\overline{BC}$ يقطع CD في N ، ($L \in \overline{BC}$) . الدائرة المحيطة للمثلث BKN تقطع AB في النقطة $P \neq B$. أثبت أن المثلث KPM مثلث متطابق الضلعين.

Ukrainian Mathematics Olympiad 1998 (11th Grade).

(10) النقطة P تقع خارج الدائرة Ω . رسم من P مماسان للدائرة عند A, B . النقطة M تقع على PB بحيث AM متوسط في المثالث ABP . النقطة C هي نقطة تقاطع الدائرة Ω مع AM . الشعاع PC يقطع الدائرة Ω مرة أخرى في D . أثبت أن $AD \parallel BP$.

19st Junior Balkan Mathematical Olympiad (Short List) 2015.

(11) في المثلث ABC لدينا $\angle B < \angle C, \angle A = 90°$. مماس الدائرة المحيطة له عند الرأس A يقطع BC في النقطة D . النقطة E هي صورة A حول BC . النقطة X هي مسقط A على BE . النقطة Y منتصف AX . إذا قطع BY الدائرة في Z . اثبت أن BD مماس للدائرة المحيطة للمثلث ADZ .

Mongolian Team Selection Test for 40thIMO 1999.

(12) لدينا دائرة مركزها O وقطرها BD . رسم من النقطة A مماسان للدائرة فمسا الدائرة في B, C . رسم من C عمود على BD فقطعه في E . أثبت أن $CE \cdot AB = BO \cdot BE$.

تمارين 3

(1) ليكن $ABCD$ شبه منحرف فيه $AD \parallel BC$. النقطتان K, L تقعان على الترتيب على ضلعي شبه المنحرف AB, DC بحيث $\angle BAL = \angle KDC$. اثبت أن $\angle ALB = \angle DKC$.

(2) النقاط A, B, C, D تقع على دائرة واحدة، النقطة P تقع على القطعة المستقيمة AD. رسم من P العمود المنصف للقطعة المستقيمة CD فقطع DB في Q. اثبت أن $\angle ACQ = \angle PCB$.

(3) ليكن AB قطر في دائرة. النقطة P تقع خارج هذه الدائرة ولا تقع على المستقيم AB. المستقيم AP يقطع الدائرة في U. المستقيم BP يقطع الدائرة في V من ناحية B . إذا كان $\frac{PU}{PA} = \frac{1}{2}, \frac{PV}{PB} = \frac{3}{2}$. أوجد قياس $\angle APB$.

(4) النقطة C تقع على $\overline{AB}$. المستقيم المار بالنقطة C (غير AB) يقطع الدائرة التي قطرها $\overline{AB}$ عند E, F (E أقرب إلى B) كما يقطع الدائرة قطرها $\overline{AC}$ عند M. وأخيرا يقطع الدائرة قطرها $\overline{BC}$ عند N. أثبت أن $MF = NE$

St. Petersburg Mathematical Contest. .

(5) في المثلث ABC النقاط D, E, F تقع على الترتيب على الأضلاع BC, CA, AB بحيث $FE \parallel BC$ $DF \parallel AC$، النقطة P هي تقاطع DF, BE. النقطة Q هي تقاطع AD, FE. أثبت أن $PQ \parallel AB$.

(6) في المثلث ABC النقطة I هي نقطة تقاطع المنصفين الداخليين للزاويتين $\angle A, \angle B$. النقطة D هي مسقط النقطة I على BC أثبت أن منصف $\angle BIC$ يعامد منصف $\angle AID$.

(7) في شبه المنحرف $ABCD$. لدينا $AD \parallel BC$ وكذلك $BC = 3AD$. النقطة F منتصف AB. النقطة E تقع على امتداد BC من ناحية C بحيث $BC = 3CE$. إذا كان EF يقطع DC في G ومساحة المثلث GCE تساوي 15. أوجد مساحة شبه المنحرف $ABCD$.

(8) في المثلث ABC الحاد الزوايا لدينا $AC > AB$. النقطة D هي مسقط العمود من A على BC. النقطة E هي مسقط العمود من D على AC. النقطة F تقع على DE بحيث $EF \cdot DC = BD \cdot DE$. أثبت أن $AF \perp BF$.

(9) دائران w_1, w_2 يتقاطعان في A, B. رسم المستقيم t يمس الدائرتين w_1, w_2 على الترتيب في K, L بحيث تقع النقطة B داخل المثلث KAL. المستقيم ℓ يمر بالنقطة A ويقطع w_1, w_2 على الترتيب M, N. اثبت أن المستقيم ℓ مماس للدائرة المحيطة للمثلث KAL إذا وفقط إذا كان الشكل $KLNM$ رباعيا دائريا.

(Czech & Slovak 2010)

(10) في المثلث القائم ABC لدينا $\angle A = 90°$، النقطة D تقع على BC بحيث $AD \perp BC$. إذا كانت r, r_1, r_2 هي أنصاف أقطار الدوائر المارة برؤوس المثلثات ABC, ABD, ACD على الترتيب. اثبت أن:

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

تمارين 4

(1) لدينا $ABCD$ مربع. فيه النقاط $E \in AB, N \in DC, F, M \in BC$. بحيث أن $\triangle ANM, \triangle DEF$ مثلثان متطابقا الأضلاع. إذا كان $P = AN \cap ED$, $Q = AM \cap EF$. اثبت أن $PQ = FM$.

(2) لدينا $\triangle ABC$ مثلث منفرج الزاوية في $\angle C$. وكذلك $\angle BAC = \frac{4}{3}\angle ABC$. الشعاع AE ينصف $\angle BAC$ حيث $E \in BC$. النقطة F تقع على AE بحيث $\angle ABF = \frac{1}{2}\angle BAC$. إذا كانت $AF = AC$. أوجد قياس $\angle BCF$.

(3) لدينا $\triangle ABC$ مثلث قائم في $\angle B$. الدائرة الداخلية له مركزها I. النقاط E, F, D هي نقاط التماس على الأضلاع AC, AB, BC على الترتيب. إذا كان $N = DM \cap AB$, $M = CI \cap EF$. اثبت أن:

(a) $AI = ND$

(b) $FM = \dfrac{EI \cdot EM}{EC}$

(4) لدينا $\triangle ABC$ مثلث قائم في $\angle A$. فيه $AC < AB$. وكذلك $E \in \overrightarrow{BA}, D \in \overrightarrow{AC}$ بحيث $AE = AC$. $AD = AB$. النقطتين M, N منتصفي BC, ED. إذا كان $R = \overrightarrow{EC} \cap BD$. أثبت أن $MN = RA$.

(5) لدينا دائرة ω تمر بمركز الدائرة الداخلية للمثلث $\triangle ABC$، وتمس AB عند A كما تقطع BC في D وتقطع امتداد BC في E. المستقيم CI يقطع ω في M. اثبت أن $DM = EM$.

(6) النقطة D تقع داخل $\triangle ABC$ بحيث $\angle BAD = \angle BCD$, $\angle BDC = 90°$. النقطة M منتصف AC إذا كان $AB = 5, BC = 6$. أوجد قيمة $8DM^2$.

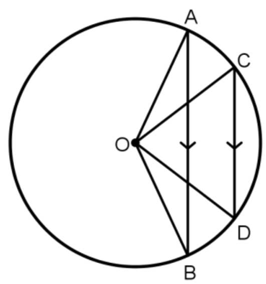
(7) إذا كانت أطوال اضلاع المثلث ABC هي a, b, c، فأثبت أن

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$

(8) إذا كانت أطوال اضلاع المثلث ABC هي a, b, c، R نصف قطر الدائرة المحيطة له فأثبت أن

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

(9) على الشكل ادناه. AB,CD وتران متوازيان في دائرة مركزها O ونصف قطرها r. إذا كان $AB=46, CD=18$ ، $\angle AOB = 3\angle COD$. أوجد قيمة r.



(10) في المثلث $\triangle ABC$ لدينا $AB=AC$ $\angle BDC = 60°, D \in AB,$ إذا كان $\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. أوجد قياس $\angle A$.

مسائل 5

(1) (نظرية منيلوس) النقاط الثلاث P,Q,R والتي تقع على الترتيب على الأضلاع $\overleftrightarrow{AC},\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{BC}$ في المثلث تكون على استقامة واحدة إذا وفقط إذا كان

$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CP}{PA}=1 .$$

(2) أثبت أن المنصفين الداخليين لزاويتين في مثلث مختلف الأضلاع، والمنصف الخارجي للزاوية الثالثة من نفس المثلث تلاقي الأضلاع المقابلة في ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.

(3) أثبت أن المنصفات الخارجية لزوايا مثلث مختلف الأضلاع تلاقي أضلاع نفس المثلث المقابلة في ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.

(4) إذا كان لدينا دائرة تمر بالرأسين B,C في المثلث ABC , وتقطع كلاً من AB,AC في P,R على الترتيب، و PR يلاقي BC في النقطة Q , فأثبت أن:

$$\frac{QC}{QB}=\frac{RC\cdot AC}{PB\cdot AB} .$$

(5) في المثلث القائم ABC ، النقطتان P,Q تقع على $\overline{BC},\overline{AC}$ على الترتيب، بحيث $CP=CQ=2$ ، تتقاطع القطعتان $\overline{BQ},\overline{AP}$ في النقطة R ، رسمنا $\overleftrightarrow{CR}$ يمر بالرأس C وبالنقطة R ويقطع $\overleftrightarrow{AB}$ في S ، ورسمنا $\overleftrightarrow{QP}$ يقطع $\overleftrightarrow{AB}$ في T ، فإذا كان طول الوتر $AB=10$ ، $AC=8$. أوجد TS .

(6) في الشكل الرباعي $ABCD$ ، يتقاطع كل من $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{CD}$ في P بينما يتقاطع $\overleftrightarrow{AD},\overleftrightarrow{BC}$ في Q ، القطران $\overleftrightarrow{AC},\overleftrightarrow{BD}$ يقطعان $\overleftrightarrow{PQ}$ في X,Y على الترتيب. أثبت أن:

$$\frac{PX}{XQ}=\frac{PY}{YQ} .$$

(7) في الشكل الرباعي المحدب $ABCD$ لدينا $F = \overrightarrow{AD}\cap\overrightarrow{BC}$ ، $E = \overrightarrow{BA}\cap\overrightarrow{CD}$. إذا كانت النقاط N,L,M منتصفات $\overline{EF},\overline{AC},\overline{BD}$ على الترتيب. أثبت أن النقاط N,L,M على استقامة واحدة.

(8) في السداسي المنتظم $ABCDEF$ لدينا القطران AC,CE تقسمهما النقطتين M,N على الترتيب بالنسبة:

$$\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=r.$$

أوجد قيمة r إذا كانت النقاط B,M,N على استقامة واحدة.

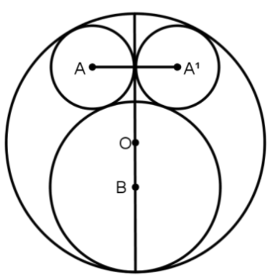
(9) المثلث ABC مرسوم داخله دائرة تمس أضلاعه $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ في L,M,N على الترتيب، إذا كان $\overrightarrow{MN}\cap\overrightarrow{CB}=\{P\}$. فأثبت أن:

أولا:

$$\frac{BL}{LC}=\frac{BP}{PC}.$$

ثانيا: إذا كان $\overleftrightarrow{NL}\cap\overleftrightarrow{AC}=\{Q\},\overleftrightarrow{ML}\cap\overleftrightarrow{AB}=\{R\}$ فإن في النقاط P,Q,R على استقامة واحدة.

(10) دائرة مركزها O وقطرها $AB=a$. النقطة C تقع على مماس الدائرة عن A ، $AB=AC$. إذا كانت النقطة D هي نقطة تقاطع OC مع الدائرة، و E نقطة تقاطع امتداد BD مع AC . أوجد طول AE بدلالة a .



(11) دائرة كبرى مركزها O وقطرها $2R$، ودائرة أصغر منها مركزها B ونصف قطرها $2r$ ، ودائرتان أخريتان مركزيهما A,A' نصف قطر كل منهما r . جميعا يتماسا مثنى مثنى كما بالشكل. أوجد $\frac{r}{R}$.

(12) لتكن w هي الدائرة المحيطة للمثلث ABC . مماس الدائرة w من A يقطع BC في A_1 . يمكننا ان نعرف النقاط B_1,C_1 بنفس الطريقة أثبت أن A_1,B_1,C_1 تقع على استقامة واحدة.

(13) في الشكل الرباعي $ABCD$ لدينا $AB \parallel CD$. إذا كان $\angle ADB+\angle DBC=180^\circ$.

اثبت أن:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{AD}{BC}.$$

(14) لدينا $ABCD$ شكل رباعي قطراه متعامدان مرسوم داخل دائرة نصف قطرها R . اثبت أن:

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=8R^2.$$