Practice Problems- 3

27 June, 2020

Level 2

Homework Problems

6. [AMC12A 2005] Call a number *prime looking* if it is composite but not divisible by 2, 3, or 5. The three smallest prime-looking numbers are 49, 77, and 91. There are 168 prime numbers less than 1000. How many prime-looking numbers are there less than 1000?

$$\begin{cases} a \text{ is composite} \\ 3 \nmid a,\ 5 \nmid a,\ 2 \nmid a \end{cases}$$

في مجموعة الأعداد 1, 2, 3, ..., 999 :

- عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 2 : $499 = \left\lfloor \frac{999}{2} \right\rfloor$
- عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 3 : $333 = \left\lfloor \frac{999}{3} \right\rfloor$
- عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 5 : $199 = \left\lfloor \frac{999}{5} \right\rfloor$
- عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 6 : $166 = \left\lfloor \frac{999}{6} \right\rfloor$
- عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 10 : $99 = \left\lfloor \frac{999}{10} \right\rfloor$
- عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 15 : $66 = \left\lfloor \frac{999}{15} \right\rfloor$

عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 30 :

$$\left\lfloor \frac{999}{30} \right\rfloor = 33$$

6. [AMC12A 2005] Call a number *prime looking* if it is composite but not divisible by 2, 3, or 5. The three smallest prime-looking numbers are 49, 77, and 91. There are 168 prime numbers less than 1000. How many prime-looking numbers are there less than 1000?

$$A_k = \{ i \mid k \mid i \ , \ 1 \le i \le 999 \}$$

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_5|$$
$$- |A_2 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5|$$

$$= 499 + 333 + 199 - 166 - 99 - 66 + 33$$

$$= 733$$

إذن لدينا 733 عدد تقبل القسمة على 2 أو 3 أو 5 .

$\Leftarrow$ إذن لدينا $\underbrace{999-733}_{=266}$ عدد لا يقبل القسمة على كلاً من 2 و 3 و 5

6. [AMC12A 2005] Call a number *prime looking* if it is composite but not divisible by 2, 3, or 5. The three smallest prime-looking numbers are 49, 77, and 91. There are 168 prime numbers less than 1000. How many prime-looking numbers are there less than 1000?

ولكن يوجد 165 عدد أولي من ضمن هذه الأعداد ،

prime looking numbers $< 100 = 266 - 165 - 1$

$= 101 - 1 = 100$

7. A positive integer k greater than 1 is given. Prove that there exist a prime p and a strictly increasing sequence of positive integers $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ such that the terms of the sequence

$$p + ka_1, p + ka_2, \ldots, p + ka_n, \ldots$$

are prime numbers.

المطلوب :

يوجد عدد أولي $p \pmod{k}$ يحقق أنه يوجد عدد لا نهائي من الأعداد الأولية التي تطابق $p \pmod{k}$

الحل :

$\pmod{k}$

$0, 1, 2, 3, \ldots, (k-1)$

لدينا k باقي ولدينا عدد لا نهائي من الأعداد الأولية

$\Leftarrow$ يوجد باقي لديه عدد لا نهائي من الأعداد الأولية

7. A positive integer k greater than 1 is given. Prove that there exist a prime p and a strictly increasing sequence of positive integers $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ such that the terms of the sequence

$$p + ka_1, p + ka_2, \ldots, p + ka_n, \ldots$$

ولتكن الأعداد الأولية هذه هي

$P_1, P_2, \ldots, P_n \ldots$

$P_i \equiv r \pmod{k} \Rightarrow P_i \equiv P_1 \pmod{k}$

و P_1 عدد أولي

$\boxed{P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots}$ أعداد أولية

وكلاً منها يطابق $P_1 \pmod{k}$ و P_1 عدد أولي

$P_i = P_1 + km_i$, $a_i = m_{i+1}$

8. [AIME 1994] Given a positive integer n, let $p(n)$ be the product of the nonzero digits of n. (If n has only one digit, then $p(n)$ is equal to that digit.) Let

$$S = p(1) + p(2) + \cdots + p(999).$$

What is the largest prime factor of S?

في مجموعة الأعداد $1, 2, \ldots, 999$ ، لتكن $f(n)$ هي حاصل ضرب خانات العدد :

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(999) = \big((0\cdot0\cdot0)+(0\cdot0\cdot1)+\cdots(9\cdot9\cdot9)\big) - 0\cdot0\cdot0$$

$$= \underbrace{(0+1+2+3+\cdots+9)}_{\text{الخانة الأولى}}\underbrace{(0+1+2+\cdots+9)}_{\text{الخانة الثانية}}\underbrace{(0+1+\cdots+9)}_{\text{الخانة الثالثة}} - 0\cdot0\cdot0$$

$$= (0+1+2+\cdots+9)^3 - 0\cdot0\cdot0 \quad *$$

ولكن بالنسبة لـ $p(n)$ ، الصفر لا يحتسب في حاصل الضرب ، نستطيع أن نبدل كل صفر في بـ ١ .

8. [AIME 1994] Given a positive integer n, let $p(n)$ be the product of the nonzero digits of n. (If n has only one digit, then $p(n)$ is equal to that digit.) Let

$$S = p(1) + p(2) + \cdots + p(999).$$

What is the largest prime factor of S?

ويصبح المجموع الكلي S عبارة عن

$S = (1+1+2+ \text{—} +9)^3 - 1.1.1$

$S = 46^3 - 1$

$S = 45(46^2 + 46 + 1) = 3^3 . 5 . 7 . 103$

9. [Russia 1995] Let m and n be positive integers such that

$$\operatorname{lcm}(m, n) + \gcd(m, n) = m + n.$$

Prove that one of the two numbers is divisible by the other.

$d = \gcd(m, n)$

$m = dm'$

$n = dn'$

$\Rightarrow \begin{cases} \gcd(m', n') = 1 \\ \operatorname{lcm}(m, n) = dm'n' \end{cases}$

$\Rightarrow \quad dm'n' + d = dm' + dn'$

$\Rightarrow \quad m'n' + 1 = m' + n'$

$\Rightarrow \quad (m' - 1)(n' - 1) = 0 \Rightarrow m' = 1$ or $n' = 1$

$\Rightarrow m = d$ or $n = d$

$\Rightarrow m \mid n$ or $n \mid m$

9. [Russia 1995] Let m and n be positive integers such that

$$\operatorname{lcm}(m,n)+\gcd(m,n)=m+n.$$

Prove that one of the two numbers is divisible by the other.

طريقة أخرى :

$$\operatorname{lcm}(m,n)\cdot\gcd(m,n)=mn$$

وبما أن $\operatorname{lcm}(m,n)+\gcd(m,n)=m+n$

فإن $\operatorname{lcm}(m,n)$, $\gcd(m,n)$ هي عبارة عن جذور للمعادلة

$$x^2-(m+n)x+mn=0$$

ولكن جذور هذه المعادلة هي m,n ، إذن

$$\{\operatorname{lcm}(m,n),\gcd(m,n)\}=\{m,n\}$$

إذن من الواضح أن أحد العددين يقسم الآخر

10. [AIME 1995] Let $n = 2^{31}3^{19}$. How many positive integer divisors of n^2 are less than n but do not divide n?

$$n = p^a q^b \Rightarrow n^2 = p^{2a} q^{2b}$$

① لدى n^2 $(2a+1)(2b+1)$ قاسم موجب

② كل قاسم d يقابله قاسم d' يحقق أن $d d' = n^2$ ⇐ أحدهما أقل من n أو يساوي n
والآخر أكبر من أو يساوي n

⇐ عدد القواسم لـ n^2 التي تكون أقل من n هي:

حالة $n.n$

$$\frac{(2a+1)(2b+1) - 1}{2} = \frac{2a+2b+4ab}{2} = 2ab+a+b$$

③ كل قاسم لـ n هو قاسم لـ n^2، وعدد قواسم n المختلفة عن n هو $(a+1)(b+1)-1$

⇐ عدد قواسم n^2 التي تكون أقل من n ولا تقسم n هي: $(2ab+a+b) - (ab+a+b)$

$$= ab = 31(19) = 589$$

11. [APMO 1998] Show that for any positive integers a and b, the number

$$(36a + b)(a + 36b)$$

cannot be a power of 2.

$a = 2^{c} \cdot a'$, such that a' is odd

$b = 2^{d} \cdot b'$ such that b' is odd

$\Rightarrow$ $36a + b = 36 \cdot 2^{c} a' + 2^{d} b'$ كلاً منهما قوة لل 2 .

$36b + a = 36\, 2^{d} b' + 2^{c} a'$

دون فقد العمومية نفرض أن $c \geq d$

$\Rightarrow$ $36a + b = 2^{d}\left(\underbrace{36 \cdot 2^{c-d} a'}_{\text{يقبل القسمة على 4}} + \underbrace{b'}_{\text{فردي}}\right)$ $\rightarrow$ عدد فردي أكبر من 1

تناقض

12. Compute sum of the greatest odd divisor of each of the numbers 2006, 2007, . . . , 4012.

ليكن $P(n)$ أكبر قاسم فردي لـ n ، إذن: $n = 2^k \underline{P(n)}$

إذا كان $P(n_1) = P(n_2)$ ، فإن أحدهما مضاعف للآخر،

ولكن في المجموعة $S = \{2007, \ldots, 4012\}$ لا يوجد عدد يقسم الآخر لأن $2i > 4012$ لكل $i \in S$

إذن $P(2007), P(2008) \longrightarrow P(4012)$ أعداد فردية مختلفة، تنتمي للمجموعة

$$\{1, 3, 5, \ldots, 4011\}$$

$$\underbrace{\{P(2007), \ldots, P(4012)\}}_{\text{2006 عدد}} \subseteq \underbrace{\{1, 3, 5, \ldots, 4011\}}_{\text{2006 عدد}}$$

$$\Rightarrow \{P(2007) \longrightarrow P(4012)\} = \{1, 3, 5, \longrightarrow 4011\}$$

12. Compute sum of the greatest odd divisor of each of the numbers 2006, 2007, . . . , 4012.

إذن المطلوب يساوي

$$P(2006)+P(2007)+\cdots+P(4012)=P(2006)+(1+3+5+\cdots+4011)$$

$$=P(2006)+2006^2$$

$$=1003+2006^2$$

$$=1003\cdot 4013=4025039$$

13. Compute the sum of all numbers of the form a/b, where a and b are relatively prime positive divisors of 27000.

$$27000 = 2^3 . 3^3 . 5^3$$

$$\frac{a}{b} = 2^x . 3^y . 5^z ,$$

$x \in \{-3, -2, \ldots, 3\}$

$y \in \{-3, -2, \ldots, 3\}$

$z \in \{-3, -2, \ldots, 3\}$

كل عدد على الصيغة $2^x 3^y 5^z$ حيث أن $x,y,z \in [-3,3]$ يمكن كتابته كـ $\frac{a}{b}$

حيث أن a و b أوليان نسبياً و $a \mid 27000$ ، $b \mid 27000$

$$\sum_{x=3}^{3} \sum_{y=-3}^{3} \sum_{z=-3}^{3} \underline{2^x 3^y 5^z} = \left(2^{-3} + 2^{-2} + \ldots + 2^3\right)\left(3^{-3} + \ldots + 3^3\right)\left(5^{-3} + \ldots + 5^{-3}\right)$$

$$= 2^{-3} 3^{-3} 5^{-3} \left(1 + 2 + \ldots + 2^6\right)\left(1 + 3 + \ldots + 3^6\right)\left(1 + \ldots + 5^6\right)$$

$$= \frac{1}{3^3 \cdot 2^3 \, 5^3} \; \frac{2^7 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^7 - 1}{3 - 1} \; \frac{5^7 - 1}{5 - 1}$$

15. [UK 1998] Let x, y, z be positive integers such that

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}.$$

Let h be the greatest common divisor of x, y, z. Prove that $hxyz$ and $h(y-x)$ are perfect squares.

$\gcd(x, y, z) = h$

$$\begin{cases} x = hx' \\ y = hy' \\ z = hz' \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{hx'} - \frac{1}{hy'} = \frac{1}{hz'}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x'} - \frac{1}{y'} = \frac{1}{z'}$$

$\gcd(x', y') = g$

$$\begin{aligned} x' &= ga \\ y' &= gb \end{aligned} \Rightarrow \frac{1}{ga} - \frac{1}{gb} = \frac{1}{z'} \Rightarrow \frac{b-a}{gab} = \frac{1}{z'}$$

$$\Rightarrow \boxed{z'(b-a) = gab}$$

15. [UK 1998] Let x, y, z be positive integers such that

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}.$$

Let h be the greatest common divisor of x, y, z. Prove that $hxyz$ and $h(y-x)$ are perfect squares.

$z'(b-a) = g\,ab$ و $\gcd(a,b) = 1$

بما أن $g = \gcd(x', y')$ و $\gcd(x', y', z') = 1$ فإن $\gcd(z', g) = 1$

بما أن $\gcd(a,b) = 1$ $\Leftarrow$ $\gcd(ab, a-b) = 1$

كلا الكسرين $\frac{g}{z'} = \frac{b-a}{ab}$ في أبسط صورة $\Leftarrow$ $\begin{cases} b-a = g & (1) \\ ab = z' & (2) \end{cases}$

ولكن

15. [UK 1998] Let x, y, z be positive integers such that

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}.$$

Let h be the greatest common divisor of x, y, z. Prove that $hxyz$ and $h(y-x)$ are perfect squares.

بالتالي :

$$y - x = hy' - hx' = hgb - hga$$
$$= hg(b-a)$$

باستعمال (1) :

$$\Rightarrow \quad y - x = hg^2 \quad (3)$$

بالمثل

$$xyz = h^3 x'y'z'$$

باستعمال (2) :

$$xyz = h^3 z^2 \quad (4)$$

من (3) و (4) :

$$\boxed{h(y-x) = h^2 g^2} \text{ و } \boxed{hxyz = h^4 z^2}$$

More Problems ☺

23. Let p be a prime. Show that there are infinitely many positive integers n such that p divides $2^n - n$.

24. Let n be an integer greater than three. Prove that $1! + 2! + \cdots + n!$ cannot be a perfect power.

25. Let k be an odd positive integer. Prove that

$$(1+2+\cdots+n) \mid (1^k+2^k+\cdots+n^k)$$

for all positive integers n.

26. Let p be a prime greater than 5. Prove that $p-4$ cannot be the fourth power of an integer.