

Test 8
Level 4, June 28 , 2022

Problem 8.1. Given is a graph G , whose every vertex is initially white. In a single move we can choose any vertex and toggle the color (black/white) of this vertex and all of its neighbors. Can you always (regardless of the choice of G) make all vertices black after a finite number of moves?

Problem 8.2. Suppose a, b, c, d, e, f are real numbers whose sum is 0 and sum of squares is 3. Find the minimum and maximum possible values of the expression

$$S = ab + bc + cd + de + ef + fa$$

Problem 8.3. Let ABC be a non-isosceles triangle with circumcircle (O) and take T on BC such that TA is tangent to (O) . Let D be some point on the arc BAC and suppose that there are two distinct points E, F on BC such that the circumcircles of triangles ADE and ADF are tangent to BC . Denote I as the circumcenter of triangle AEF and L as projection of O on IT . Prove that the reflection of the line LA over LT is perpendicular to BC .



السؤال الأول

معطى رسم G ، كل رؤوسه بيضاء في البداية. في حركة واحدة، يمكننا اختيار أي رأس وتبديل اللون (أسود / أبيض) لهذا الرأس وكلا جاريه. هل يمكنك دائمًا (بغض النظر عن اختيار G) جعل جميع الرؤوس سوداء بعد عدد محدود من الحركات؟

السؤال الثاني

ليكن a, b, c, d كلها أعداد حقيقية مجموعها 0 ومجموع مربعاتها 3. أوجد القيم العظمى والصغرى للمقدار

$$S = ab + bc + cd + de + ef + fa$$

السؤال الثالث

ليكن ABC مثلثًا غير متطابق الساقين ودائرته المحيطة (O) . خذ T على BC بحيث يكون TA مماسًا لـ (O) . لتكن D نقطة ما على القوس BAC وافترض أن هناك نقطتين مختلفتين E و F على BC بحيث تكون الدائرتان المحيطتان بالمثلثين ADE و ADF مماسيتين لـ BC . لتكن I المركز المحيط للمثلث AEF و L مسقط O على IT . أثبت أن انعكاس الخط LA على LT عمودي على BC .

زمن الاختبار 4 ساعات ونصف

7 درجات لكل سؤال

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والسداد