خطة تدريب الهندسة:

الأسبوع	التاريخ	عدد الساعات	الموضوع
1	21- 25 مارس 2021	12.5 ساعة	مراجعة على ما سبق دراسته
2	4 – 8 ابريل 2021	12.5 ساعة	التقاطع في نقطة 1
3	18 – 27 إبريل 2021	12.5 ساعة	التقاطع في نقطة 2
4	2 – 6 مايو 2021	12.5 ساعة	مقدمة في حساب المثلثات

الأسبوع الرابع (2 – 6 مايو 2021)

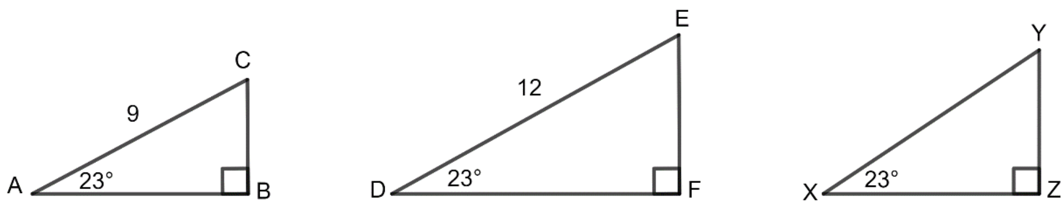
مقدمة في حساب المثلثات

بدأ علم حساب المثلثات عندما ظهرت الحاجة لإيجاد علاقات تربط بين قياسات الزوايا وأطوال أضلاع المثلث، ولعل علم الفلك والعمل في البحار وحركة السفن كانا هما المحركين الرئيسيين للبحث في هذا العلم. وقد بدأ هذا الاهتمام قبل أكثر من ألفي عام على يد علماء مصر القديمة في بنائهم للأهرامات وكذلك الإغريق واليونان بداية من إقليدس وبطليموس، ثم تولى المسلمون تطوير هذا العلم بداية من القرن الثامن الهجري وكان نصير الدين الطوسي هو أول من اعتبر علم حساب المثلثات علما مستقلا عن علم الفلك أو حساب النجوم.

وسوف نبدأ هنا بالعلاقات بين الزوايا والأضلاع في المثلث القائم الزاوية ثم نمتد بدراستنا لباقي أنواع المثلثات. وفي مسائل الأولمبياد نحن نعتبر حساب المثلثات "Trigonometry" أحد الأدوات الهامة لمهاجمة مسائل الهندسة. وهذا ما سنبدأ العمل عليه الآن وقد يمتد فترة طويلة نسبيا حتى نصل لأعظم استفادة من هذه الأداة الهامة.

مثال توضيحي:

(ربما تحتاج هنا الآلة الحاسبة).



(i)على الشكل أعلاه، إذا كانت $BC \approx 3.5$ ، ما هو طول EF لأقرب جزء من عشرة.

(ii)أوجد $\dfrac{YZ}{XY}$ لأقرب 0.01 .

الحل

(i) من تشابه المثلثين $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ نحصل على التناسب: $\frac{DE}{AC} = \frac{EF}{BC}$ ومنها:

$$EF = BC \cdot \frac{DE}{AC} = 3.5 \times \frac{12}{9} \approx 4.7$$

(ii) لاحظ أيضا أنه من تشابه المثلثين $\Delta ABC \sim \Delta XZY$ نحصل على:

$$\frac{YZ}{BC} = \frac{XY}{AC} \Leftrightarrow \frac{YZ}{XY} = \frac{BC}{AC} = \frac{3.5}{9} \approx 0.39$$

والآن نكتشف معاً أن:

$$\frac{YZ}{XY} \approx 0.39 \quad , \quad \frac{BC}{AC} = \frac{3.5}{9} \approx 0.39 \quad , \quad \frac{EF}{DE} = \frac{4.7}{12} \approx 0.39$$

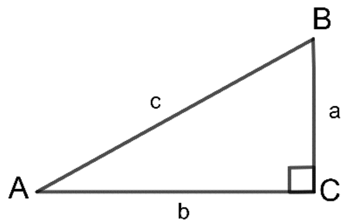
(لاحظ أن الزاوية الحادة ثابتة).

أي أن النسبة:

$$\frac{\text{طول ضلع القائمة المقابل للزاوية الحادة في المثلث القائم الزاوية}}{\text{طول وتر المثلث القائم الزاوية}}$$

هي نسبة ثابته وعلينا أن نعطيها اسماً، والاسم هو $Sine$ الزاوية الحادة $\angle A$، وتكتب على الصورة $SinA$

أي أنه في المثلث القائم الزاوية ΔABC لدينا:



$$sin\ A = \frac{\text{طول ضلع القائمة المقابل للزاوية الحادة في المثلث القائم الزاوية}}{\text{طول الوتر في المثلث القائم الزاوية}} = \frac{a}{c}$$

بالمثل إذا أدخلنا الضلع الثالث في المثلث مع الوتر سوف نحصل على:

$$cos\ A = \frac{\text{طول ضلع القائمة المجاور للزاوية الحادة في المثلث القائم الزاوية}}{\text{طول الوتر في المثلث القائم الزاوية}} = \frac{b}{c}$$

وأخيرا يمكننا أن نحصل على النسبة بين ضلعي العامة على الصورة:

$$tan\ A = \frac{\text{طول ضلع القائمة المقابل للزاوية الحادة في المثلث القائم الزاوية}}{\text{طول ضلع القائمة المجاور للزاوية الحادة في القائم الزاوية}} = \frac{a}{b}$$

لاحظ أن:

$$tan\ A = \frac{sin\ A}{cos\ A}$$

تدريب 1

أوجد:

$$\sin 45°, \cos 45°, \tan 45°$$

تدريب 2

أوجد:

$$\sin 30°, \cos 30°, \tan 30°, \sin 60°, \cos 60°, \tan 60°$$

تدريب 3

في المثلث ΔPQR لدينا $\angle P = 90°, PQ = 3, QR = 7$ أوجد:

$(i) \sin Q, \cos R$

$(ii) \tan Q$

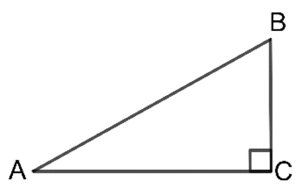
$(iii) \sin^2 R + \cos^2 R$

تدريب 4

في المثلث القائم الزاوية في $\angle C$.

(a) وضح لماذا $\sin A = \cos(90° - A)$.

(b) وضح لماذا $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.



الحل:

(a) لاحظ أن:

$$\angle B = 90^\circ - \angle A$$
$$\Rightarrow \cos B = \underline{\cos(90^\circ - A)} = \frac{BC}{AB} = \underline{\sin A}$$

(b) سوف نستدعي هنا فيثاغورس

$$\sin^2 A + \cos^2 B = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{AC^2 + BC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1 .$$

توجد أيضا ثلاث دوال مثلثية أخرى.

يمكن تعريفها كالتالي:

$$\csc X = \frac{1}{\sin X}$$

$$\sec X = \frac{1}{\cos X}$$

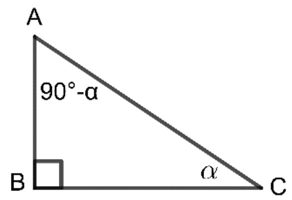
$$\cot X = \frac{1}{\tan X}$$

ملاحظة:

الزوايا المتكافئة تكون لها نفس الدوال المثلثية. أي أن: حيث $n \in \mathbb{Z}$

$$i)\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta$$
$$ii)\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta$$
$$iii)\tan(\theta + 2n\pi) = \tan\theta$$

العلاقة بين الدوال المثلثية لزاويتين متتامتين.



الزاويتان المتتامتان هما الزاويتان اللتان مجموع قياسهما $90°$، فإذا كانت $\angle\alpha$ تتم $\angle\beta$ فإن:

$$\angle\alpha+\angle\beta=90°.$$

وتكون

$$\angle\alpha=90°-\angle\beta \quad , \quad \angle\beta=90°-\angle\alpha.$$

ومن الوصول منطقياً للعلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين كالتالي:

في $\triangle ABC$ القائم في $\angle B$ تكون $\angle A,\angle C$ متتامتان، فإذا كان $\angle C=\alpha$ فإن $\angle A=90°-\alpha$.

إذن:

$$\sin(90°-\alpha)=\frac{BC}{AC}$$

ولكن

$$\cos\alpha=\frac{BC}{AC}$$

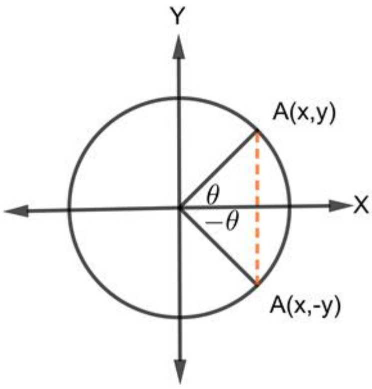
إذن:

$$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$$

ويمكن تلخيص ذلك كما يلي:

القاعدة	مثال
$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$	$\sin 20°=\cos 70°$
$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$	
$\tan(90°-\alpha)=\cot\alpha$	$\tan 40°=\cot 50°$
$\cot(90°-\alpha)=\tan\alpha$	
$\sec(90°-\alpha)=\csc\alpha$	$\sec 30°=\csc 60°$
$\csc(90°-\alpha)=\sec\alpha$	

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياسهما $\theta, (-\theta)$



إذا كان الضلع النهائي للزاوية التي قياسها (θ) يقطع دائرة الوحدة في النقطة $A(X,Y)$ ، والضلع النهائي للزاوية التي قياسها $(-\theta)$ يقطع دائرة الوحدة في النقطة A' ، فمن هندسة الشكل المجاور نجد أن: A' هي صورة النقطة A بالانعكاس حول المحور X . إذن: $A'(X,-Y)$ ، أي أن:

$\cos(-\theta) = X = \cos\theta$.

وكذلك

$\sin(-\theta) = -Y = -\sin\theta$.

ويمكن تلخيص ذلك كما يلي:

القاعدة	مثال
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$	$\tan(-60^\circ) = -\tan 60^\circ$
$\csc(-\theta) = -\csc\theta$	$\csc(-40^\circ) = -\csc 40^\circ$
$\sec(-\theta) = \sec\theta$	$\sec(-15^\circ) = \sec 15^\circ$
$\cot(-\theta) = -\cot\theta$	$\cot(-70^\circ) = -\cot 70^\circ$

وبما أن الزاوية التي قياسها $(-\theta)$ تكافئ الزاوية التي قياسها $(360^\circ - \theta)$ ، يمكن استنتاج العلاقات التالية:

القاعدة	مثال
$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta$	$\sin(330^\circ) = \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ$
$\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$	$\cos 315^\circ = \cos(360^\circ - 45^\circ) = \cos 45^\circ$
$\tan(360^\circ - \theta) = -\tan\theta$	$\tan(300^\circ) = -\tan 60^\circ$
$\csc(360^\circ - \theta) = -\csc\theta$	$\csc(320) = -\csc 40^\circ$
$\sec(360^\circ - \theta) = \sec\theta$	$\sec(300^\circ) = \sec 60^\circ$
$\cot(360^\circ - \theta) = -\cot\theta$	$\cot(290) = -\cot 70^\circ$

ملاحظة:

نعلم أن الزاوية التي قياسها $(-\theta)$ تكافئ الزاوية التي قياسها $(2n\pi - \theta)$ حيث $n \in \mathbb{Z}$ ، أي أن:

$\sin(2n\pi - \theta) = -\sin\theta$ ، $\cos(2n\pi - \theta) = \cos\theta$ ، $\tan(2n\pi - \theta) = -\tan\theta$

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياسهما $\theta, (90^\circ + \theta)$

بوضع $(-\theta)$ بدلاً من (θ) " في أولاً " نحصل على العلاقة:

$$\sin(90^\circ - (-\theta)) = \cos(-\theta)$$

إذن:

$$\sin(90^\circ + \theta) = \cos(-\theta) = \cos\theta$$ " من ثانياً ".

ومن ذلك يمكن استنتاج العلاقات التالية:

مثال	القاعدة
$\sin(120^\circ) = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ$	$\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$
$\cos(120^\circ) = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ$	$\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$
$\tan(150^\circ) = \tan(90^\circ + 60^\circ) = -\cot 60^\circ$	$\tan(90^\circ + \theta) = -\cot\theta$
$\csc(135^\circ) = \csc(90^\circ + 45^\circ) = \sec 45^\circ$	$\csc(90^\circ + \theta) = \sec\theta$
$\sec(135^\circ) = \sec(90^\circ + 45^\circ) = -\csc 45^\circ$	$\sec(90^\circ + \theta) = -\csc\theta$
$\cot(150^\circ) = \cot(90^\circ + 60^\circ) = -\tan 60^\circ$	$\cot(90^\circ + \theta) = -\tan\theta$

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياسهما $\theta, (180^\circ - \theta)$

بوضع $(90^\circ - \theta)$ بدلاً من (θ) " في ثالثاً " إذن:

$$\sin(90^\circ + (90^\circ - \theta)) = \cos(90^\circ - \theta)$$

إذن

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$$ " من أولاً "

ومن ذلك يمكن استنتاج العلاقات التالية:

مثال	القاعدة
$\sin(120^\circ) = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ$	$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$
$\cos(120^\circ) = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ$	$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$
$\tan(150^\circ) = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ$	$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$
$\csc(135^\circ) = \csc(180^\circ - 45^\circ) = \csc 45^\circ$	$\sec(180^\circ - \theta) = -\sec\theta$
$\sec(135^\circ) = \sec(180^\circ - 45^\circ) = \sec 45^\circ$	$\csc(180^\circ - \theta) = \csc\theta$
$\cot(150^\circ) = \cot(90^\circ + 60^\circ) = -\tan 60^\circ$	$\cot(180^\circ - \theta) = -\cot\theta$

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياسهما $\theta, (180^\circ + \theta)$

بوضع $(90^\circ - \theta)$ بدلاً من (θ) " في ثالثاً " إذن:

$$\sin(90^\circ + (90^\circ - \theta)) = \cos(90^\circ - \theta)$$

إذن

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$$ " من أولاً "

ومن ذلك يمكن استنتاج العلاقات التالية:

القاعدة	مثال
$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta$	$\sin(240^\circ) = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ$
$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$	$\cos(210^\circ) = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ$
$\tan(180^\circ + \theta) = \tan\theta$	$\tan(225^\circ) = \tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ$
$\sec(180^\circ + \theta) = -\sec\theta$	$\sec(225^\circ) = \sec(180^\circ + 45^\circ) = -\sec 45^\circ$
$\csc(180^\circ + \theta) = -\csc\theta$	$\csc(225^\circ) = \csc(180^\circ + 45^\circ) = -\csc 45^\circ$
$\cot(180^\circ + \theta) = \cot\theta$	$\cot(240^\circ) = \cot(180^\circ + 60^\circ) = \cot 60^\circ$

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياسهما $\theta, (270^\circ - \theta)$

بوضع $(90^\circ - \theta)$ بدلاً من (θ) في خامساً، إذن:

$$\sin(180^\circ + (90^\circ - \theta)) = -\sin(90^\circ - \theta)$$

إذن

$$\sin(270^\circ - \theta) = -\cos\theta$$

ومن ذلك يمكن استنتاج العلاقات التالية:

القاعدة	مثال
$\sin(270^\circ - \theta) = -\cos\theta$	$\sin(210^\circ) = \sin(270^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ$
$\cos(270^\circ - \theta) = -\sin\theta$	$\cos(225^\circ) = \cos(270^\circ - 45^\circ) = -\sin 45^\circ$
$\tan(270^\circ - \theta) = \cot\theta$	$\tan(210^\circ) = \tan(270^\circ - 60^\circ) = \cot 60^\circ$
$\sec(270^\circ - \theta) = -\csc\theta$	$\sec(240^\circ) = \sec(270^\circ - 30^\circ) = -\csc 30^\circ$
$\csc(270^\circ - \theta) = -\sec\theta$	$\csc(240^\circ) = \csc(270^\circ - 30^\circ) = -\sec 30^\circ$
$\cot(270^\circ - \theta) = \tan\theta$	$\cot(225^\circ) = \cot(270^\circ - 45^\circ) = \tan 45^\circ$

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياسهما $\theta, (270^\circ + \theta)$

بوضع $(90^\circ + \theta)$ بدلاً من (θ) في خامساً إذن:

$$\sin(180^\circ + (90^\circ + \theta) = -\sin(90^\circ + \theta)$$

إذن

$$\sin(270^\circ + \theta) = -\cos\theta$$

ومن ذلك يمكن استنتاج العلاقات التالية:

القاعدة	مثال
$\sin(270^\circ + \theta) = -\cos\theta$	$\sin(300^\circ) = \sin(270^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ$
$\cos(270^\circ + \theta) = \sin\theta$	$\cos(330^\circ) = \cos(270^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ$
$\tan(270^\circ + \theta) = -\cot\theta$	$\tan(315^\circ) = \tan(270^\circ + 45^\circ) = -\cot 45^\circ$
$\sec(270^\circ + \theta) = \csc\theta$	$\sec(300^\circ) = \sec(270^\circ + 30^\circ) = \csc 30^\circ$
$\csc(270^\circ + \theta) = -\sec\theta$	$\csc(315^\circ) = \csc(270^\circ + 45^\circ) = -\sec 45^\circ$
$\cot(270^\circ + \theta) = -\tan\theta$	$\cot(320^\circ) = \cot(270^\circ + 50^\circ) = -\tan 50^\circ$

مثال (1)

في ΔXYZ والقائم الزاوية في Z، اثبت أن:

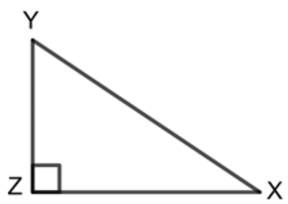
I) $\sin x < 1$

II) $\cos x < 1$

III) $\sin x + \cos x > 1$

V) $\sin x \cos y + \cos x \sin y = 1$:

الحل



(I) بما أن: $\sin x = \dfrac{ZY}{XY}$

ولكن: $XY > ZY$. لأن $m\ Z > m\ X$.

إذن: $\sin x$ تساوي كسراً أقل من الواحد الصحيح

إذن: $\sin x < 1$.

(II) بما أن: $\cos x = \dfrac{ZX}{XY}$

ولكن: $XY > ZX$ إذن: $\cos x < 1$.

$$\sin x+\cos x=\frac{ZY}{XY}+\frac{ZX}{XY}=\frac{ZY+ZX}{XY} \quad \text{(III)}$$

ولكن: $ZY+ZX>XY$. (مجموع طولي ضلعين في المثلث أكبر من الضلع الثالث)

إذن: $\sin x+\cos x$ كسر بسطه أكبر من مقامه.

إذن: $\sin x+\cos x>1$.

$$\sin x\cos y+\cos x\sin y=\frac{ZY}{XY}\cdot\frac{ZY}{XY}+\frac{ZX}{XY}\cdot\frac{ZX}{XY}=\frac{ZY^2+ZX^2}{XY^2} \quad \text{(V)}$$

ولكن: $ZY^2+ZX^2=XY^2$. (نظرية فيثاغورس).

إذن: $\sin x\cos y+\cos x\sin y=\frac{XY^2}{XY^2}=1$.

مثال (2)

ابحث إشارات الدوال المثلثية التالية:

I) $\tan 320^\circ$

II) $\sin 160^\circ$

III) $\csc\frac{4\pi}{5}$

V) $\sec 750^\circ$

IV) $\cos(-200^\circ)$

الحل

(I) $360^\circ>320^\circ>270^\circ$ أي تقع في الربع الرابع، إذن $\tan 320^\circ$ سالبة.

(II) $180^\circ>160^\circ>90^\circ$ أي تقع في الربع الثاني، إذن $\sin 160^\circ$ موجبة.

(III) $\frac{4\pi}{5}=\frac{4\times 180^\circ}{5}=144^\circ$

إذن

$180^\circ>144^\circ>90^\circ$ أي تقع في الربع الثاني

إذن

$\sin 160^\circ \csc\frac{4\pi}{5}$ موجبة.

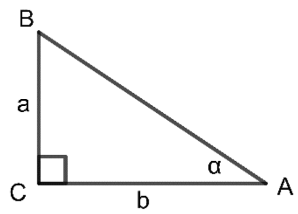
(V) بما أن $\sec 750^\circ = \sec(30^\circ + 2\times 360^\circ) = \sec 30^\circ$ أي تقع في الربع الأول، إذن $\sec 30^\circ$ موجبة

(IV) بما أن $\cos(-200^\circ) = \cos(160^\circ - 360^\circ) = \cos 160^\circ$ أي تقع في الربع الثاني، إذن $\cos(-200^\circ)$ سالبة.

مثال (3)

إذا كان $\tan\alpha = \dfrac{a}{b}$ حيث $b \neq 0$. فأثبت أن المقدار $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ مستقل عن قيمتي a,b

الحل



باستخدام نظرية فيثاغورس نحصل على:

$$(AB)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow XZ = \sqrt{a^2 + b^2}$$

إذن:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \quad .$$

$$= 1$$

إذن: المقدار $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ مستقل عن قيمتي a,b.

مثال (4)

إذا كان $\sin\beta = \cos 3\beta$ حيث 3β قياس زاوية حادة موجبة فأوجد قياس الزاوية β

الحل

$$\sin\beta = \cos 3\beta \Rightarrow \beta + 3\beta = 90^\circ \Rightarrow 4\beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = \frac{90^\circ}{4}$$

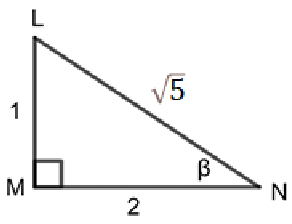
مثال (5)

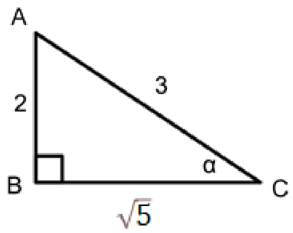
إذا كان $\frac{2}{\sqrt{5}} = \tan\alpha = \cos\beta$ حيث α, β . هما قياسا زاويتين حادتين موجبتين.

فأوجد قيمة المقدار:

$$\frac{\cos^2(90^\circ-\alpha)+\sin^2(90^\circ-\beta)}{\sec^2(90^\circ-\alpha)+\cot^2(90^\circ-\beta)} .$$

الحل





بما أن: $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$، إذن نستطيع رسم ΔLMN حيث قياس زاوية $N = \beta$.

فيكون:

$$(ML)^2 = 5 - 4 = 1 \Rightarrow ML = 1 .$$

بما أن: $\tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$، إذن نستطيع رسم ΔABC

حيث قياس زاوية $C = \alpha$

فيكون:

$$(AC)^2 = 5 + 4 = 9 \Rightarrow AC = 3 .$$

وباستخدام العلاقة بين الدوال المثلثية لزاويتين متتامتين. يمكننا صياغة المطلوب على الصورة:

$$\frac{\cos^2(90^\circ-\alpha)+\sin^2(90^\circ-\beta)}{\sec^2(90^\circ-\alpha)+\cot^2(90^\circ-\beta)} \Leftrightarrow \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\beta}{\csc^2\alpha+\tan^2\beta}$$

وبالتعويض باستخدام النسب الموضحة على الرسم:

$$\frac{(\frac{2}{3})^2+(\frac{2}{\sqrt{5}})^2}{(\frac{3}{2})^2+(\frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{4}{9}+\frac{4}{5}}{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{56}{45}}{\frac{10}{4}} = \frac{112}{225} .$$

والآن لنقدم بعض من العلاقات الهامة والتي تساعدنا كثيرا في حل المسائل:

1 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

ومنها:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$
$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

2 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

3 $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

4 $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

5 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 1 - 2\sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \end{aligned}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

تدريبات

(1) إذا كانت أطوال اضلاع المثلث ABC هي $BC=a, AC=b, AB=c$، ومساحة المثلث K فأثبت أن

$$K=\frac{ab\cdot \sin C}{2}.$$

(2) إذا كانت أطوال اضلاع المثلث ABC هي a,b,c، فأثبت أن

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A.$$

(3) إذا كانت أطوال اضلاع المثلث ABC هي a,b,c، R نصف قطر الدائرة المحيطة له فأثبت أن

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

(4) إذا كانت m_a هو متوسط المثلث ABC الخارج من الرأس A إلى الضلع BC والذي أطوال اضلاعه a,b,c فأثبت أن

$$m_a^2=\frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}.$$

(5) في المثلث ABC $AB=c, BC=a, AC=a$ إذا كان $a=4, b=5, c=6$. اثبت أن $\angle C=2\angle A$.

(6) أوجد مساحة ΔABC إذا كان $a=\sqrt{6}, b+c=3+\sqrt{3}, \angle A=60^\circ$