Test-3, January 7

Level 4

Problem 1. Find all functions $f : R \to R$ such that

$$f\Big(xf(y) - f(f(x))\Big) = yf(x) - y + 1.$$

for every $x, y \in R$.

Problem 2. Let $n > 1$ be an integer and $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ its standard prime factorization. We will call $\deg(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$ the degree of n and $\deg(1) = 0$. Prove that there exists a sequence of 2020 consecutive positive integers among which there are exactly 1000 terms of the degree less than 10.

Problem 3. Consider a simple graph with $n \geq 2$ vertices and $m \geq 1$ edges. Define *trianglity* of an edge to be the number of triangles to which this edge belongs. Denote by Δ the average edge trianglity in the given graph. Prove that

$$\frac{4m - n^2}{n} \leq \Delta \leq \sqrt{2m}.$$

Problem 4. Let ABC be an acute triangle with incenter I, circumcenter O, and circumcircle Γ. Let M be the midpoint of AB. Ray AI meets BC at D. Denote by ω and γ the circumcircles of BIC and BAD, respectively. Line MO meets ω at X and Y, while line CO meets ω at C and Q. Assume that Q lies inside ABC and $\angle AQM = \angle ACB$.

Consider the tangents to ω at X and Y and the tangents to γ at A and D. Given that $\angle BAC \neq 60^o$, prove that these four lines are concurrent on Γ.

السؤال الأول

أوجد جميع الدوال $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ التي تحقق المعادلة

$$f\Big(xf(y) - f(f(x))\Big) = yf(x) - y + 1$$

لكل $x, y \in \mathbb{R}$.

السؤال الثاني

ليكن $n > 1$ عددًا صحيحًا وليكن $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ تحليله المعتاد إلى عوامل أولية. سنقول عن المقدار $\deg(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$ درجة العدد n بحيث $\deg(1)=0$. أثبت وجود متتابعة من 2020 عدد صحيح موجب متتالي تحقق أن من بينها هناك 1000 عدد بالضبط من الدرجة أقل من 10.

السؤال الثالث

اعتبر الرسم المكون من $n \geq 2$ رأسًا و $m \geq 1$ ضلعًا. نعرّف *مثلثيّة* الضلع على أنها عدد المثلثات التي تحتوي هذا الضلع. ليكن Δ الوسط الحسابي لكافّة مثلثيات أضلاع الرسم المعطى. أثبت أن

$$\frac{4m - n^2}{n} \leq \Delta \leq \sqrt{2m}.$$

$\Delta = \frac{3}{m}$ all Δ $\leq \Delta_A \leq \binom{n}{3}$

السؤال الرابع

ليكن ABC مثلثًا حاد الزوايا ومركزه الداخلي I، ومركزه المحيط O، ودائرته المحيطة Γ. لتكن M نقطة منتصف AB. الشعاع AI يقطع BC في D. لتكن ω و γ الدائرتين المحيطتين بـ BIC و BAD على الترتيب. المستقيم MO يقطع ω في X و Y، في حين أن المستقيم CO يقطع ω في C و Q. افترض أن Q تقع داخل ABC وأن $\angle AQM = \angle ACB$.

اعتبر المماسين لـ ω عند X و Y والمماسين لـ γ عند A و D. معطى أن $\angle BAC \neq 60°$، أثبت أن هذه المستقيمات الأربع تتقاطع على Γ.

الزمن 4 ساعات ونصف

كل سؤال 10 نقاط

مع أطيب التمنيات بالتوفيق