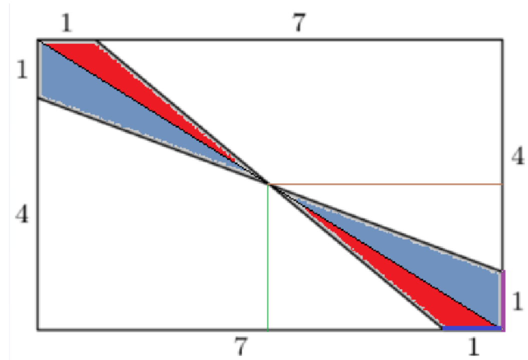
التدريب الالكتروني، حلول الأسبوع الأول

المستوى الأول

1.1 أثبت أن حاصل ضرب أربعة اعداد صحيحة موجبة متتالية يقبل القسمة على 24

الحل: 24=8*3. لكل أربعة أعداد متتالية، يوجد عدد يقبل على 3. وكذلك بواقي الأعداد على 4 هي 0و1و2و3 (ليست بالترتيب هذا بالضرورة، قد تكون بترتيب مختلف، لكن جميع البواقي موجودة). إذن، يوجد عددين زوجية وأحدهم يقبل القسمة على 4. إذن حاصل الضرب سوف يقبل على 2*4*3=24

1.2 أوجد مساحة المنطقة المضللة



الحل: مساحة المثلثين الملونين بالأحمر متساوية ومساحة كل واحد منهم هي $(1 * 2 * \frac{1}{2})$ (الارتفاع هو القطعة المستقيمة الخضراء والقاعدة هي القطعة الزرقاء)

ومساحة المثلث الأزرق الواحد هي $(1 * 3.5 * \frac{1}{2})$إذن، مجموع المساحة المظللة هي $2 + 3.5 = 5.5$

1.3 لدينا مثلث مقسم الى صفوف معبأ بقطع النقود. في الصف الأول قطعة واحدة، وفي الصف الثاني قطعتين، وفي الصف الثالث ثلاث قطع، ... هكذا وفي الصف الأخير n قطعة. إذا كان هنالك 2016 قطعة في المثلث، أوجد قيمة n

الحل: مجموع القطع هو $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = 2016 \Leftrightarrow n^2 + n - 4032 = 0 \Leftrightarrow$ $(n - 63)(n + 64) = 0$ إذن، قيمة n هي 63 (لأنه عدد موجب بالتأكيد)

1.4 S هي مجموعة مكونة من 1011 عدد من الأعداد $\{1,2,3, \dots ,2020\}$. أثبت وجود عددين داخل S بحيث يقسم أحدهما الآخر

الحل: لنكتب كل عدد من الاعداد ال 2020 على الصورة $2^a b$ بحيث أن b عدد فردي $(1 = 2^0 1, 2 = 2^1 1, 3 = 2^0 3, 4 = 2^2 1, 5 = 2^1 5, \dots)$. القيم الفردية المختلفة الممكنة هي $1,3,5, \dots ,2019$ وهي 1010 عدد مختلف. لذا، في ال 1011 عدد المختارين، يوجد عددين لديهم نفس العدد الفردي، لذا، أحد هذه العددين يقسم الآخر (قسمة الأكبر على الأصغر سوف يكون عدد صحيح "وهي قوى ل 2 في هذه الحالة")

1.5 كم عدد المجموعات الجزئية من الأعداد $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ والتي تحوي على الأقل على عدد أولي

الحل: اجمالي المجموعات الجزئية هو 2^9، والمجموعات الجزئية التي تحتوي على أعداد مؤلفة فقط هو 2^5 (هي مجموعة جزئية من الاعداد 4،6،8،9،10) إذن، الجواب النهائي هو: $2^9 - 2^5$

1.6 العدد a عدد حقيقي. أثبت أنه لو كان العدد $a + \frac{1}{a}$ عدد صحيح فإن العدد $a^n + \frac{1}{a^n}$ عدد صحيح (العدد n عدد صحيح)

الحل: سوف نثبت الحل بالاستقراء الرياضي. نفترض أن المقدار $a^m+\frac{1}{a^m}$ عدد صحيح لكل قيم $m=1,\dots,k$.

سوف نثبت أن المقدار $a^{m+1}+\frac{1}{a^{m+1}}$ عدد صحيح.

بما أن $a+\frac{1}{a}$، إذن، العدد $\left(a+\frac{1}{a}\right)^{m+1}$ عدد صحيح. مما يعني أن:

$$a^{m+1}+\binom{m+1}{1}a^{m-1}+\binom{m+1}{2}a^{m-3}+\cdots+\binom{m+1}{2}\frac{1}{a^{m-3}}+\binom{m+1}{1}\frac{1}{a^{m-1}}+\frac{1}{a^{m+1}}$$

$$=\left(a^{m+1}+\frac{1}{a^{m+1}}\right)+\left[\binom{m+1}{1}a^{m-1}+\binom{m+1}{1}\frac{1}{a^{m-1}}\right]+\cdots$$

جميع ما داخل الاقواس (سوى المظلل) هو عدد صحيح من فرض الاستقراء، والمجموع كامل هو عدد صحيح، إذن القيمة المظللة عدد صحيح.

1.7 $34!=295232799039a041408476186096435b0000000$ أوجد a,b

الحل: $34!$ يقبل القسمة على 5^7 ولا يقبل القسمة على 5^8. (الاعداد التي تقبل القسمة على 5 في $34!$ هي: 5,10,15,20,25,30 والعدد 25 فيه قوتين ل 5) وقوى ال 2 في $34!$ كثيرة وهي بالتأكيد أكثر من 2^7 مما يعني أن عدد الأصفار في قيمة العدد $34!$ هي 7 مما يعني أن b هو آحاد العدد $\frac{34!}{10^7}$. نستطيع إيجاد هذه الآحاد بضرب آحاد الأعداد التي لدينا (لكل عدد يقبل على 5، سوف نستبدله بقيمة قسمته على 5 سوى 25 سوف نستبدله ب 1، ونترك اعداد حاصل ضربها هو بالضبط 2^7. أي، نستطيع ترك الأعداد: 32,4 وتعويض الاعداد 5,10,15,20,25,30 بالأعداد 1,2,3,4,1,6. نلاحظ أننا نستطيع تبديل العددين المحذوفين من 32,4 بعددين من الاعداد الإضافية التي أتت من الإضافات التابعة لمضاعفات الخمسة وهم الأربعة والاثنين. أي انه بالمحصلة، نضرب آحاد جميع الاعداد من 1 الى 34 باستثناء مضاعفات الخمسة، ثم نضرب الناتج في $6*3$ (يكافئ ضرب الآحاد في 8). نستطيع تقسيم الاعداد من 1 الى 34 الى قروبات:

(1و2و3و4) (احاده 4) و (6و7و8و9) (آحاده 4)

(11و12و13و14) و (16و17و18و19) وهكذا، أي أننا نضرب 4 في نفسها 7 مرات ثم نضربها في 8، والذي هو من الواضح انه 2. إذن، $b=2$

الآن، نعلم أن $34!$ يقبل بالضرورة على 9، أي أن مجموع الخانات يقبل على 9. نستطيع دائما عدم جمع كل 9 او اختصار ما مجموعه 9 من اجمالي الاعداد لأنها لا تفرق. وبهذه الطريقة، نستطيع بسهولة استنتاج أن $a=6$ لأن باقي مجموع الاعداد غيره على ال 9 يساوي 3.