Practice Problems- 4

28 June, 2020

Level 2

Homework Problems

23. Let p be a prime. Show that there are infinitely many positive integers n such that p divides $2^n - n$.

يوجد عدد لا نهائي من الأعداد n التي تحقق أن

$$2^n \equiv n \pmod{p}$$

• إذا كانت $p=2$ ، فكل n زوجي يحقق المطلوب.

• إذا كانت $p>2$ ، $\gcd(p,2)=1$.

ولكن إذا كان $n \equiv a \pmod{p-1}$ ، $n \equiv b \pmod{p}$ حيث أن $0 \leq a \leq p-2$ ، $0 \leq b \leq p-1$ فإن

$\gcd(p,2)=1$ ، $2^n \equiv 2^a \pmod{p}$

$n \equiv b \pmod{p}$

$2^n \equiv n\,[p] \iff 2^a \equiv b \quad [p]$

أحد الحلول $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$

من CRT يوجد عدد لانهائي من الأعداد n التي تحقق أن $p|n-1$ ، $p-1|n$.

مثال $n=(p-1)^{2k}$.

24. Let n be an integer greater than three. Prove that $1! + 2! + \cdots + n!$ cannot be a perfect power.

أحد الأفكار الأساسية لإثبات أن عدد ليس قوة كاملة هي إيجاد قاسم تام له . مثال: إذا كان

- $3 \mid n$ و $3^2 \nmid n$ ، فإن n ليس قوة كاملة
- إذا كان m قوة كاملة و $5^3 \| m$ ، فإن قوة m هي 3 .

فكرة أخرى: يمكن استبعاد القوى الزوجية بإثبات أن n ليس مربع كامل

24. Let n be an integer greater than three. Prove that $1! + 2! + \cdots + n!$ cannot be a perfect power.

الحل :

$S = 1! + 2! + \cdots + n!$

لنفرض أن S قوة كاملة .

$n = 4$, $S = 33 \Rightarrow$ ليست قوة كاملة

$n \geq 5$

① قوة S ليست زوجية .

$S \equiv 3 \pmod{10}$, ولكن 3 ليست باقي لعدد مربع mod 10

$\Leftarrow$ قوة S ليست زوجية

② قوة S ليست فردية .

إذا كانت $n \geq 9$ ، فإن $S = \underbrace{1! + 2! + 3! + 4! + \cdots + 8!}_{\vdots 9} + \underbrace{9!(\cdots)}_{\vdots 27}$

$\Rightarrow 27 \nmid S$, $9 \mid S$ $\Rightarrow$ قوة $S = 2$

ولكن قوة S فردية وهذا تناقض .

إذا كانت $n < 8$: بتجريب جميع الحالات ، وليست قوة كاملة لعدد

25. Let k be an odd positive integer. Prove that

$$(1+2+\cdots+n) \mid (1^k+2^k+\cdots+n^k)$$

for all positive integers n.

القوة k فردية ، فالفكرة الأساسية هي التحليل .

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

① حالة n فردي :

$$n=2m+1$$

$$\Rightarrow 1+2+\cdots+n=(2m+1)(m+1)$$

$$m+1 \mid \left[1^k+(2m+1)^k\right]+\left[2^k+(2m)^k\right]+\cdots+\left[m^k+(m+2)^k\right]+\left[(m+1)^k\right]$$

كل قوس يقبل القسمة على $(m+1)$ ، بالمثل :

$$2m+1 \mid \left[(2m+1)^k\right]+\left[1^k+(2m)^k\right]+\left[2^k+(2m-1)^k\right]+\cdots+\left[m^k+(m+1)^k\right]$$

② حالة n زوجي : بنفس الطريقة

26. Let p be a prime greater than 5. Prove that $p-4$ cannot be the fourth power of an integer.

نفرض أن

$$p-4=n^4$$

$$\Rightarrow p=n^4+4$$

من متطابقة صوفي جيرمان أو بإكمال المربع :

$$p=(n^4+4n^2+4)-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2$$

$$=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)$$

بما أن p عدد أولي و $n^2+2n+2>2$ فإن

$$n^2-2n+2=1 \Rightarrow n^2-2n+1=0 \Rightarrow n=1$$

$$\Rightarrow p=5$$

ولكن $p>5$

$\Leftarrow$ لا يوجد حل

27. For a positive integer n, prove that

$$\sigma(1)+\sigma(2)+\cdots+\sigma(n) \le n^2.$$

الفكرة الأساسية هي العد بطريقتين .

$\sigma(k) =$ مجموع قواسم k

ولكن كل قاسم d ورد مرة واحدة في $\sigma(kd)$ حيث $k \in \mathbb{Z}^+$

$k \le \frac{n}{d} \Leftarrow kd \le n$

$\Leftarrow$ كل قاسم d ورد $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ مرة $*$

$$\sigma(1)+\sigma(2)+\cdots+\sigma(n) = 1\cdot\left\lfloor \frac{n}{1}\right\rfloor + 2\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor + 3\left\lfloor \frac{n}{3}\right\rfloor + \cdots + d\left\lfloor \frac{n}{d}\right\rfloor + \cdots + n\left\lfloor \frac{n}{n}\right\rfloor$$

ولكن $\left\lfloor \frac{n}{d}\right\rfloor \le \frac{n}{d}$. إذن

$$\text{L.H.S.} \le 1\cdot\frac{n}{1} + 2\cdot\frac{n}{2} + 3\cdot\frac{n}{3} + \cdots + n\cdot\frac{n}{n} = n + n + \cdots + n = n^2 \checkmark$$

28. Determine all finite nonempty sets S of positive integers satisfying

$$\frac{i+j}{\gcd(i,j)}$$

is an element of S for all i and j (not necessarily distinct) in S.

الفكرة الأولى: نبحث عن عناصر من المعطى.

الفكرة الثانية: بما أننا نتعامل مع أعداد صحيحة موجبة، فإنه يوجد عنصر يحقق أنه الأصغر.

نفرض أن $a \in S$، إذن $\frac{a+a}{\gcd(a,a)} \in S \Rightarrow$ $\boxed{2 \in S}$

الحالة الأولى: $|S| = 1$، $S = \{2\} \leftarrow$ وهنا حل

الحالة الثانية: $|S| \geq 2$.

ليكن m هو أصغر عنصر أكبر من 2 في S.

$$\Rightarrow \quad \frac{m+2}{\gcd(m,2)} \in S$$

28. Determine all finite nonempty sets S of positive integers satisfying

$$\frac{i+j}{\gcd(i,\, j)}$$

is an element of S for all i and j (not necessarily distinct) in S.

حالة ١: m زوجي

$$\Rightarrow \quad \frac{m+2}{\gcd(m,2)} = \frac{m+2}{2} = \frac{m}{2}+1 \in \mathbb{Z}$$

ولكن

$$2 = \frac{2}{2}+1 < \frac{m}{2}+1 < m$$

إذن $2 < \frac{m}{2}+1 < m$ وينتمي إلى S، ولكن m هو أصغر عنصر أكبر 2 $\Leftarrow$ تناقض

28. Determine all finite nonempty sets S of positive integers satisfying

$$\frac{i+j}{\gcd(i,\, j)}$$

is an element of S for all i and j (not necessarily distinct) in S.

الحالة 2: m فردي

$$\frac{m+2}{\gcd(m,2)} = m+2 \in S \longrightarrow$$ وهنا عنصر فردي أيضاً

$$\Rightarrow \frac{(m+2)+2}{\gcd(m+2,2)} = m+4 \in S \longrightarrow$$ وهنا عنصر فردي أيضاً

بالمثل $m+2k \in S$ لكل $k \in \mathbb{Z}^+$ ، ولكن S مجموعة منتهية $\Leftarrow$ تناقض

الحل الوحيد هو $S = \{2\}$

More Problems ☺

29. Knowing that 2^{29} is a nine-digit number all of whose digits are distinct, without computing the actual number determine which of the ten digits is missing. Justify your answer.

$$2^{29} = \overline{a_1 a_2 \cdots a_9} \, ,$$

$a_1, a_2, \longrightarrow a_9$ خانات مختلفة

ولتكن a_{10} هي الخانة الغيرموجودة

$$2^{29} \equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_9 \pmod 9$$

$$\Rightarrow 2^{29} \equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_9 + a_{10} - a_{10} \pmod 9$$

$$\Rightarrow 2^{29} \equiv (1+2+3+\cdots+9) - a_{10} \pmod 9 \, , \quad 2^3 \equiv -1 \pmod 9$$

$$\Rightarrow 2^{27} \cdot 2^2 \equiv 45 - a_{10} \pmod 9 \Rightarrow (-1)^3 \cdot 4 \equiv -a_{10} \pmod 9$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{10} = 4}$$

30. Prove that for any integer n greater than 1, the number $n^5 + n^4 + 1$ is composite.

الفكرة الأساسية هي التحليل :

$$n^5+n^4+1 = n^5+n^4+n^3\underbrace{-n^3-n^2-n}+n^2+n+1$$

$$= n^3(n^2+n+1) - n(n^2+n+1) + (n^2+n+1)$$

$$= \underbrace{(n^3-n+1)}_{>1}\underbrace{(n^2+n+1)}_{>1}$$

إذن n^5+n^4+1 ليس عدد أولي لكل $n>1$.

30. Prove that for any integer n greater than 1, the number $n^5 + n^4 + 1$ is composite.

اضافة على فكرة التحليل :

لتكن $1, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ جذور كثيرة الحدود $x^3 - 1 = 0$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_1^3 = \varepsilon_2^3 = 1 \qquad (1)$$

و $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ هي جذور $x^2 + x + 1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 + 1 = 0 \\ \varepsilon_2^2 + \varepsilon_2 + 1 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

من (1) و (2) . ε_1 و ε_2 جذور $x^5 + x^4 + 1$ ، لأن

$$\varepsilon^5 + \varepsilon^4 + 1 = \varepsilon^3(\varepsilon^2) + \varepsilon^3(\varepsilon) + 1 = \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$$

$\Leftarrow$ $\boxed{x^2 + x + 1}$ عامل لـ $x^5 + x^4 + 1$.

31. The product of a few primes is ten times as much as the sum of the primes. What are these (not necessarily distinct) primes?

32. A 10-digit number is said to be *interesting* if its digits are all distinct and it is a multiple of 11111. How many interesting integers are there?