

الاختبار الثالث عشر Level 2 Test 13

10 ذو القعدة 1441هـ، 1 July 2020

يمنع استخدام الانترنت أو الآلة الحاسبة

القسم الأول: الأسئلة القصيرة (إجابة كل سؤال هي عدد صحيح بين 000 و 999، اكتب الناتج النهائي فقط).

السؤال الأول

رسم عمر 40 مستقيماً في المستوي، وبذلك تم تقسيم المستوي إلى عدد r من المناطق (المحدودة وغير المحدودة). ما هي أكبر قيمة ممكنة لـ r ؟

السؤال الثاني

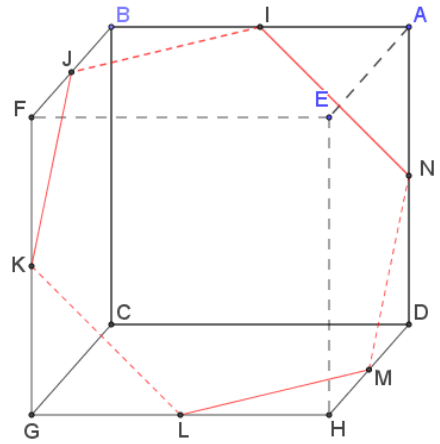
ما هو أكبر قاسم أولي للعدد 40081 ؟

السؤال الثالث

المجموعة A تحتوي m عدداً صحيحاً متتالياً مجموعها $2m$ ، في حين أن المجموعة B تحتوي $2m$ عدداً صحيحاً متتالياً مجموعها m . إذا كان الفارق العددي بين أكبر عدد في B وأكبر عدد في A يساوي 100، فأوجد قيمة m .

السؤال الرابع

ليكن $ABCDEFGH$ مكعباً طول ضلعه 5. ولتكن I, J, K, L, M, N منتصفات القطع AB, BF, FG, GH, HD, DA على الترتيب. مساحة السداسي $IJKLMN$ تساوي $\frac{m\sqrt{p}}{n}$ ، حيث m, n عددان صحيحان موجبان أوليان فيما بينهما، و p لا يقبل القسمة على مربع أي عدد أولي. أوجد قيمة $m + n + p$.



السؤال الخامس

العدد $x = \frac{a+b\sqrt{c}}{d}$ هو أصغر عدد حقيقي أكبر من 1 يحقق المعادلة

$$\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1$$

حيث $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ تحقق أن $\gcd(a, b, d) = 1$ وأن c لا يقبل القسمة على مربع أي عدد أولي. أوجد قيمة $a + b + c + d$.
(ملاحظة: $\{x\}$ هو الجزء العشري لـ x ، أي أن $\{x\} = x - [x]$)

السؤال السادس

ليكن ABC مثلثاً فيه $\angle B = 30^\circ$. إذا كانت D نقطة منتصف الضلع BC وتحقق أن $\angle ADC = 45^\circ$ ، فأوجد قياس $\angle C$ بالدرجات.

السؤال السابع

احسب مجموع خانات العدد $N = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99 \dots 9}_{999 \text{ times}}$.

السؤال الثامن

لدينا تسعة كروت مرقمة من 1 إلى 9. إذا اختيرت مجموعة من الكروت عشوائيًا فإن احتمال أن يكون حاصل ضرب الأعداد المكتوبة على هذه الكروت مضاعفًا لـ 10 يساوي $\frac{m}{n}$ ، حيث m, n عدنان صحيحان موجبان أوليان فيما بينهما. أوجد قيمة $m + n$.

السؤال التاسع

قام الجلاد بوضع 1000 من المحكوم عليهم بالإعدام على دائرة كبيرة، وقام بترقيهم من 0 إلى 999 مع عقارب الساعة. ثم أعطى السيف للمحكوم رقم 0 وجعله يقتل رقم 1 ويعطي السيف لرقم 2، ومن ثم جعل رقم 2 يقتل رقم 3 ويعطي السيف لرقم 4، وهكذا... (في كل مرة يمسك أحدهم بالسيف يقوم بقتل الذي يليه ويعطي السيف لمن يليه مع اتجاه عقارب الساعة) حتى تبقى محكوم واحد. أوجد رقم هذا المحكوم. (لاحظ أن الدائرة تصغر كلما يقتل أحد المحكومين)

السؤال العاشر

كم عدد الأعداد الصحيحة $1 \leq n \leq 256^2$ التي تجعل آخر ثلاث خانات من n^2 هي 256؟

نهاية القسم الأول

كل سؤال بدرجتين

القسم الثاني: الأسئلة المطولة (اكتب الحل كاملاً مع توضيح جميع الخطوات، لن تعطى درجات للنتائج النهائي فقط)

السؤال الحادي عشر

ليكن $n > 1$ عددًا صحيحًا. يشارك اللاعبون P_1, P_2, \dots, P_n في بطولة للتنس، حيث يتبارى كل لاعبين مرة واحدة، وتنتهي كل مباراة بفوز أحد اللاعبين. ليكن w_i عدد المباريات التي فاز فيها اللاعب P_i ، و l_i عدد المباريات التي خسر فيها. أثبت أن

$$\binom{w_1}{2} + \binom{w_2}{2} + \dots + \binom{w_n}{2} = \binom{l_1}{2} + \binom{l_2}{2} + \dots + \binom{l_n}{2}$$

السؤال الثاني عشر

$ABCD$ رباعي دائري ودائرته المحيطة ω . لتكن M نقطة على القوس AD (الذي لا يحوي B) في الدائرة ω . لتكن X, Y, Z, W مساقط M على AB, BC, CD, DA تواليًا. أثبت أن $MX \cdot MZ = MY \cdot MW$.

السؤال الثالث عشر

أثبت أن كل عدد صحيح مكون من 2^n خانة متطابقة له على الأقل n قاسم أولي مختلف.

نهاية القسم الثاني

كل سؤال به 10 درجات

المدة: 4 ساعات ونصف (9:00 - 13:30)

مع تمنياتنا لكم بالتوفيق