(1) أثبت أن حاصل ضرب طولي قطري الرباعي الدائري يساوي مجموع حاصل ضربي كل زوج من الضلعين المتقابلين في الشكل. (نظرية بطليموس*).

(2) إذا كان حاصل ضرب طولي قطري شكل رباعي يساوي مجموع حاصل ضربي كل زوج من الضلعين المتقابلين فيه، فإن هذا الشكل الرباعي يكون دائرياً. (عكس نظرية بطليموس) .

(3) الشكل الرباعي $ABCD$ مرسوم داخل نصف دائرة قطرها AB . فإذا كان $AB = a, BC = d$ ، $CD = b, DA = c, AC = x, BD = y$ فاثبت أن

$$. a^3 - a(b^2 + c^2 + d^2) - 2bcd = 0$$

(4) إذا رسمت دائرة تمس من الداخل الشكل الرباعي الدائري $ABCD$ ، $A\ B= \ ,a\ \ B=C$ $D=A\ \ ,c\ \ C\ D=$. أثبت أن

$$. K_{ABCD} = \sqrt{abcd}$$

(5) الشكل الرباعي $ABCD$ فيه $AB \parallel CD$ ، فإذا كان h هو البعد بين المستقيمين AB, CD ، وكان $AC = BD$. أثبت أن

i النقاط A, B, C, D تقع على دائرة وحدة نصف قطرها R . ii $. h = \dfrac{AD \cdot AC}{2R}$

(6) في المثلث ABC تقع النقطة D تقع على متوسط المثلث من الرأس A . أثبت أنه إذا كان $\angle BDC = 180° - \angle BAC$ فإن.

$$. AB \cdot CD = AC \cdot BD$$

(7) إذا مرت أي دائرة بالرأس A في متوازي الأضلاع $ABCD$ وقطعت AB, AD في P, R على الترتيب كما قطعت قطر متوازي الأضلاع AC في Q ، فأثبت أن

$$. AQ \cdot AC = AB \cdot AP + AD \cdot AB$$

(8) إذا رسم ΔABC المتطابق الضلعين ($AB = AC$) داخل دائرة، وكانت النقطة $P \in BC$ فأثبت أن $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{PA}{PB + PC}$. وهو ثابت للمثلث المعطى.

(9) إذا رسم ΔABC المتطابق الأضلاع داخل دائرة ، وكانت النقطة P على القوس BC فأثبت أن :

$$. PA = PB + PC$$

(10) إذا رسم المربع $ABCD$ داخل دائرة، وكانت النقطة P على القوس BC فأثبت أن

$$. \frac{PA + PC}{PB + PD} = \frac{PD}{PA}$$

(11) الشكل $ABCD$ رباعيا تقع رؤوسه على دائرة واحدة . النقاط M,N,H,G هي منتصفات الأقواس AB,BC,CD,DA . اثبت أن $MH \perp NG$.

(12) لدينا AB وتر في دائرة. النقطة M منتصف القوس الأصغر AB . رسم QM,SM يقطعان الوتر AB في P,R . إذا كانت النقطتان Q,S تقعان على الدائرة فأثبت أن الشكل الرباعي $QSRP$ رباعيا دائريا.

(13) دائرتان متماستان من الخارج عند نقطة T . رسم المماس AB مماسا خارجيا لهما حيث A,B نقطتي التماس. اثبت ان AB قطر الدائرة الخارجية للمثلث ABT .

(14) في المعين $ABCD$ لدينا $\angle BAD = 60^\circ$. النقاط F,G,H تقع على الترتيب على AD,AC,DC بحيث يكون الشكل $DFGH$ متوازي أضلاع. أثبت أن المثلث BHF متطابق الأضلاع.

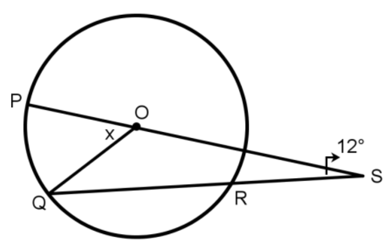
(15) في المثلث المتطابق الضلعين ABC لدينا $AB = AC$. النقطة D منتصف BC . النقطتان P,Q تقعان على الترتيب على AD,AB بحيث $PQ = PC$ ، $Q \neq B$. اثبت أن $\angle PQC = \frac{1}{2}\angle BAC$.

(16) في المثلث المتطابق الأضلاع ABC . النقطة D تقع داخله بحيث $DA = DB$. النقطة E تقع في مستوى المثلث ABC بحيث $\angle DBE = \angle DBC, BE = AB$. أوجد قياس $\angle BED$.

(17) ليكن $ABCD$ شكلا رباعيا بحيث $\angle BAC = 20^\circ, AB = AC, AD = CD$ وكذلك لدينا $\angle ADC = 100^\circ$. اثبت أن $AB = BC + CD$.

(18) ليكن $ABCD$ شكلا رباعيا فيه النقطتان E,F تقعان على الترتيب على AB بحيث $AE < AF$. إذا كانت $\angle ADE = \angle FCB, \angle EDF = \angle ECF$. اثبت أن $\angle FDB = \angle ACE$.

(19) على الشكل : P,Q,R ثلاثة نقاط تقع على دائرة مركزها O . تقاطع المستقيمان PO,QR خارج الدائرة في النقطة S . إذا كان $RS = OP$ ، $\angle PSQ = 12^\circ$ ، $\angle POQ = x$. أوجد قيمة x .



(20) في المثلث المتطابق الأضلاع ABC والمرسوم داخل دائرة. إذا كانت النقطة M تقع على القوس الأصغر BC . أثبت أن

$$AM = MB + MC .$$

(21) في دائرة مركزها O، نصف قطرها $r=5$. رسم AB,CD وتران متوازيان في الدائرة. إذا كان $AB=8, CD=6$. أوجد طول AC .

(22) الدائرة S هي الدائرة المحيطة للمثلث ABC حيث $AB>AC$. العمود الخارج من الرأس A إلى الضلع BC يقطع الدائرة S في P . النقطة L تقع على AC . رسم الشعاع BL فقطع الدائرة S في Q . أثبت أنه إذا وفقط إذا كان $BL=CL$ فإن PQ قطر في الدائرة.

(23) المثلث ABC مرسوم داخل دائرة مركزها O، بحيث يكون قطرها CD عمودي على AB ويقطعه في E . الوتر BF يقطع كل من CD,AC في M,N على الترتيب. إذا كان $AC=BF$.
إثبت أن:

$$i)\Delta ACM \cong \Delta BCM \qquad ii)AD\cdot BE=DE\cdot BC \qquad iii)BM^2=MN\cdot MF$$

(24) نصف قطر الدائرة التي مركزها O والمحيطة للشكل الرباعي $ABCD$ يساوي 2. إذا تقاطع AC,AB في النقطة E بحيث $AE=EC$. وكان $BD=2\sqrt{3}$ ، $AB=\sqrt{2}\,AE$. أوجد مساحة الشكل الرباعي $ABCD$.

(25) إذا كانت أقصر مسافة ممكنة من نقطة إلى دائرة ما تساوي 4 ، وأطول مسافة هي 9 . فأوجد طول نصف قطر هذه الدائرة.

(26) النقاط P,Q,R,S هي أربعة نقاط مختلفة تقع على الدائرة التي مركزها O وقطرها PS ، $QR \parallel PS$ ، $A = PR\cap QS$. إذا كانت B نقطة تقع في نفس المستوى بحيث يكون الشكل الرباعي $POAB$ متوازي أضلاه. اثبت أن $BQ=BP$.

(27) المثلث المتطابق الأضلاع ABC مرسوم داخل دائرة، النقطة P تقع على القوس الأصغر BC . إذا كان $D = AP\cap BC$ ، $PC=28, PB=21$. أوجد طول PD .

(28) دائرة مركزها O ونصف قطرها 1. النقاط A,B,P تقع عليها بحيث P تقع بين A,B ، وكذلك $\angle APB=\angle AOB$. أوجد طول AB .

(29) النقاط P,Q,R,S هي أربعة نقاط مختلفة تقع على دائرة (خذ في الإعتبار أنها مرتبة في إتجاه عقارب الساعة) بحيث $AB<AD, BC>CD$. إذا لاقى المنصف الداخلي للزاوية $\angle BAD$ الدائرة عند X ، و لاقى المنصف الداخلي للزاوية $\angle BCD$ الدائرة عند Y . إذا كانت أربعة اضلاع من الأضلاع الستة التي شكلت سداسيا داخل الدائرة لها نفس الطول فأثبت أن BD قطر في الدائرة.

(30) في المثلث الحاد الزوايا ABC النقطتان D,E مسقطي A,B على BC,AC على الترتيب. إذا كانت P هي نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{AD}$ مع نصف الدائرة المنشأة على BC من الخارج، Q هي نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{BE}$ مع نصف الدائرة المنشأة على AC من الخارج. فاثبت أن $CP = CQ$.

(31) النقطة P تقع على القطر BD في المستطيل $ABCD$. النقطة F هي مسقط P على الضلع BC. إذا كانت H تقع على BC بحيث $BF = FH$. إذا كانت PC تقطع AH في Q. أثبت أن $[\triangle CHQ] = [\triangle APQ]$.

Dutch Mathematics Olympiad, 1994 (Second Round).

(32) المثلث الحاد الزوايا ABC المرسوم داخل الدائرة التي مركزها O فيه. D هي نقطة تقاطع المنصف الداخلي للزاوية A مع الضلع BC. إذا كان الشعاع الخارج من الرأس A يمر بالمركز O يعامد الشعاع الخارج من D عند نقطة ولتكن I ثم يقطع AC عند P. أثبت أن $AB = AP$.

XI Italian Mathematics Olympiad, 1995.

(33) في الشكل الرباعي $ABCD$. رسمت دائرة تمس أضلاعه AD, DC, CB من الداخل على الترتيب في النقاط K, L, M. إذا عرفنا نقطة ولتكن N تقع على $\overline{MK}$ بحيث $LN \parallel AD$، $\overline{KC} \cap \overline{LN} = \{P\}$. أثبت أن:

$PL = PN$.

Fourth National Mathematics Olympiad of Turkey, 1997.

(34) ثلاثة نقاط A,B,C تقع على استقامة واحدة بحيث B تقع بين A,C. القطع المستقيمة AB, BC, CA هي أقطار أنصاف دوائر مرسومة في اتجاه واحد. إذا كان العمود المقام من B يقطع نصف الدائرة الكبرى في D. أثبت أن المماس المشترك للدائرتين الأصغر (غير BD) يوازي مماس الدائرة الكبري عند D.

38th IMO Croatian Team Selection Test 1997.

(35) في المثلث ABC. النقطة M هي نقطة تقاطع CD، BK حيث CD هو ارتفاع المثلث ABC، BK هو منصف الزاوية $\angle ABC$ ($D \in \overline{AB}$, $K \in \overline{AC}$). رسم KL عمود على $\overline{BC}$ يقطع CD في N، ($L \in \overline{BC}$). الدائرة المحيطة للمثلث BKN تقطع AB في النقطة $P \neq B$. أثبت أن المثلث KPM مثلث متطابق الضلعين.

Ukrainian Mathematics Olympiad 1998 (11th Grade).

(36) النقطة P تقع خارج الدائرة Ω . رسم من P مماسان للدائرة عند A, B . النقطة M تقع على PB بحيث AM متوسط في المثالث ABP . النقطة C هي نقطة تقاطع الدائرة Ω مع AM . الشعاع PC يقطع الدائرة Ω مرة أخرى في D . أثبت أن $AD \parallel BP$.

19st Junior Balkan Mathematical Olympiad (Short List) 2015 .

(37) النقطة C تقع على $\overline{AB}$. المستقيم المار بالنقطة C (غير AB) يقطع الدائرة التي قطرها $\overline{AB}$ عند E, F (E أقرب إلى B) كما يقطع الدائرة قطرها $\overline{AC}$ عند M . وأخيرا يقطع الدائرة قطرها $\overline{BC}$ عند N . أثبت أن $MF = NE$.

St. Petersburg Mathematical Contest.

(38) إذا كانت O هي مركز متوازي الأضلاع $ABCD$. النقطة P تقع في مستوى متوازي الأضلاع. النقطتان M, N منتصفي AP, BP على الترتيب. النقطة Q هي نقطة تقاطع ND, MC . أثبت أن O, P, Q تقع على استقامة واحدة.

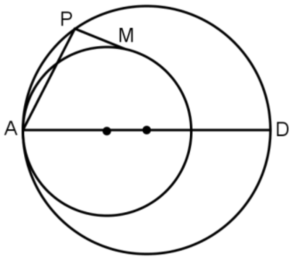
(39) في المثلث ABC يتقاطع المنصفين الخارجيين للزاويتين $\angle A, \angle B$ في نقطة D . أثبت أن مركز الدائرة المحيطة للمثلث ABD يقع على المستقيم المار بالنقطتين C, D .

(40) في المثلث ABC النقاط D, E, F تقع على الترتيب على الأضلاع BC, CA, AB بحيث $FE \parallel BC$ ، $DF \parallel AC$ النقطة P هي تقاطع DF, BE . النقطة Q هي تقاطع AD, FE . أثبت أن $AB \parallel PQ$.

(41) في المثلث ABC النقطة I هي نقطة تقاطع المنصفين الداخليين للزاويتين $\angle A, \angle B$. النقطة D هي مسقط النقطة I على BC أثبت أن منصف $\angle BIC$ يعامد منصف $\angle AID$.

(42) في شبه المنحرف $ABCD$. لدينا $AD \parallel BC$ وكذلك $BC = 3AD$. النقطة F منتصف AB . النقطة E تقع على امتداد BC من ناحية C بحيث $BC = 3CE$. إذا كان EF يقطع DC في G ومساحة المثلث GCE تساوي 15 . أوجد مساحة شبه المنحرف $ABCD$.

(43) في المثلث ABC الحاد الزوايا لدينا $AC > AB$. النقطة D هي مسقط العمود من A على BC . النقطة E هي مسقط العمود من D على AC . النقطة F تقع على DE بحيث $EF \cdot DC = BD \cdot DE$. أثبت أن $AF \perp BF$.



(44) على الشكل المجاور: دائرتان Γ_1, Γ_2 متماستان من الداخل عند A ونصفي قطريهما $10, 8$. رسم AD قطر في الدائرة الكبرى. P, M تقعان على الترتيب على Γ_1, Γ_2 بحيث PM يمس الدائرة Γ_2. إذا كان $PM = \sqrt{20}$ فأوجد قياس $\angle PAD$.

(45) في المثلث المنفرج الزاوية $\triangle ABC$ لدينا $\angle A > 90^\circ$. رسم AD بحيث $D \in \overline{BC}$، $\angle DAC = 90^\circ$ إذا كان $\angle BAD = \angle DAE = 12^\circ$ حيث $E \in \overline{DC}$ وكذلك $AB + AE = BC$ فأوجد قياس $\angle ABC$.

(46) في الشكل الرباعي $ABCD$ يتقاطع AC, BD في E حيث E منتصف BD، $\angle ACB = 90^\circ$. النقطة H هي مسقط A على BD إذا كان $CE = 12, EH = 15, AH = 40$. أوجد طول CD.

(47) في المثلث $\triangle ABC$ لدينا $AB = AC$. النقطتان D, E يقعان على الترتيب على AB, AC بحيث $AD = CE, DE = BC$. إذا كان $\angle AED = 18^\circ$ أوجد قياس $\angle BDE$.

(48) في المثلث ABC لدينا $AB = AC$، $\angle ABC = 40^\circ$. النقطة D تقع على $\overline{AC}$ بحيث BD منصفا داخليا للزاوية $\angle ABC$. النقطة E تقع على امتداد BD من ناحية D بحيث $DE = AD$. أوجد قياس $\angle ECA$.

(49) في المثلث ABC النقاط E, F, D تقع على الترتيب على أضلاع المثلث AC, AB, BC بحيث $BD = BF, CD = CE$ إذا كانت $\angle BAC = 48^\circ$. أوجد $\angle EDF$.

(50) في الشكل الرباعي المحدب $ABCD$ لدينا $\angle ABC = 135^\circ, \angle BCD = 120^\circ$. وكذلك إذا كان $CD = 4\sqrt{2}, BC = 4 - 2\sqrt{2}, AB = 2\sqrt{3}$ أوجد قيمة AD.

(51) أثبت أنه إذا كان الشكل الثماني متطابق الزوايا وأطوال أضلاعه أعداد صحيحة فإن كل ضلعين فيه متقابلين متطابقين.