المجموعة 14

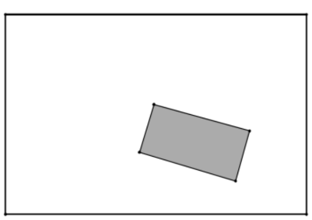
1 . ساعي البريد يأخذ البريد من صندوق البريد خمس مرات في اليوم. فإذا كان يفتح صندوق البريد في فترات زمنية متساوية الأولى في السابعة صباحاً والأخيرة في السابعة مساءاً. ما طول كل فترة؟

2 . خماسي كل زواياه متساوية. هل بالضرورة أن يكون منتظماً؟

3 . لدينا قلاية تستوعب فقط قطعتين من الخبز، زمن تسوية أحد وجهي قطعة الخبز هو دقيقة واحدة. ما أقل وقت نحتاج لتسوية وجهي ثلاث قطع من الخبز؟

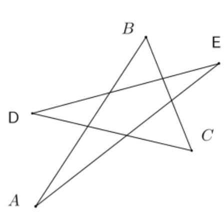
4 . أربع كرات كل منها إما أبيض أو أسود وضعت في صندوق لا يبين ألوانها. أجريت عليها 100 محاولة كالتالي: في كل محاولة يأخذ شخص كرتين من الصندوق ينظر إليهما ويعيدهما إلى الصندوق، بعد ذلك نهز الصندوق لنخلط الكرات ثم نجري المحاولة التالية. قمنا بتسجيل نواتج ال 100 محاولة، فإذا عُلم أن 50 محاولة بالضبط من ال 100 محاولة حدث فيها أن كلا الكرتين المسحوبتين سوداوين. كم كرة سوداء وكم كرة بيضاء على الأرجح في الصندوق؟ ولماذا؟

5 . عبد الحميد يقضي ربع يومه في المدرسة، وخمسه في كرة الطائرة، وسدسه في ألعاب الفيديو، وسبعه في واجب الرياضيات، وثلثه في الأشياء الأخرى. هل يمكن أن يعيش بهذه الطريقة؟



6 . ورقة مستطيلة بيضاء رسمنا داخلها مستطيل صغير ملون باللون الرمادي كما بالشكل. باستخدام القلم الرصاص والمسطرة الغير مدرجة، بين كيف ترسم مستقيم يقسم المنطقة البيضاء حول المستطيل الصغير إلى قسمين متساويين في المساحة.

7 . افترض أننا كتبنا 1000 عدد صحيح واحداً بعد الآخر على مستقيم (الأعداد ليست بالضرورة مختلفة). أثبت أن إما أحد هذه الأعداد يقبل القسمة على 1000 أو يوجد عدة أعداد متجاورة على المستقيم مجموعها يقبل القسمة على 1000.



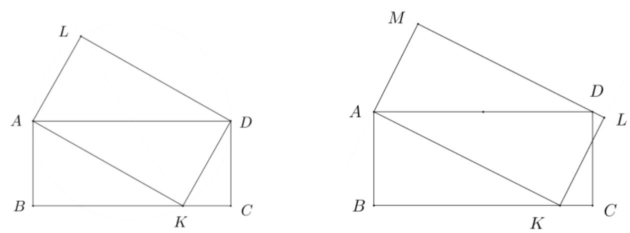
8 . أوجد مجموع قياسات النجمة الخماسية (انظر الشكل).

9 . مدرس الرياضيات أعطى لطلابه في أحد الفصول 20 مسألة للواجب. في الحصة التالية، وجد أن كل طالب حل مسألتين بالضبط، بينما كل مسألة حلها طالبين بالضبط.

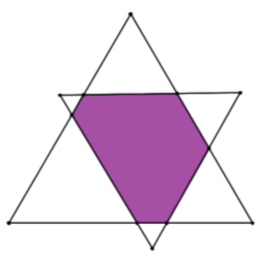
(a) كم طالب في هذا الفصل.

(b) هل من الممكن إجراء مناقشة بحيث كل طالب يشرح مسألة حلها وفي نفس الوقت يتم شرح ال 20 مسألة.

10 . (a) بين أن المستطيلين $ABCD, AKDL$ في الشكل الأيسر التالي لهما نفس المساحة.



(b) بين أن المستطيلين $ABCD, AKLM$ في الشكل الأيمن السابق لهما نفس المساحة.



11 . تقاطع مثلثين متطابقي الأضلاع هو سداسي له ثلاثة أزواج من الأضلاع المتقابلة المتوازية كما بالرسم. أوجد محيط السداسي إذا كان محيطي المثلثين هما $9,12cm$.

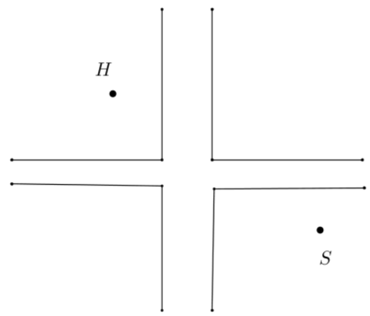
12 . ستة أرقام كتبت على السبورة. هل من الممكن ترتيبهم بحيث الفرق بين مجموع الثلاثة الأولى منهم ومجموع الثلاثة الأخيرة يكون أقل من 10 ؟

13 . بفرض a, b, c أعداد صحيحة بحيث $ax^2 + bx + c$ يقبل القسمة على 5 لكل عدد صحيح x . أثبت أن a, b, c تقبل القسمة على 5 .

14 . أوجد الأربعة أرقام الأولى من العدد 5^{1000} .

15 . معطى 20 عدد صحيح، كل منها لا يقبل القسمة على 5 . أثبت أن مجموع القوى العشرين لهذه العشرين عدداً يقبل القسمة على 5 .

16 . الشكل يبين مدرسة S ، ومنزل فواز H . فإذا كان يجب عليه عبور الشارع عمودياً عليه. ما أقصر مسار من البيت للمدرسة؟



17 . مسافر بدأ من نقطة A مشى 1 كيلو متر شمالاً، ثم مشى 1 كيلو متر شرقاً، ثم 1 كيلو متر جنوباً. فانتهى لنقطة A ثانية. في أي مكان على سطح الكرة الأرضية يمكن أن يحدث هذا؟ أوجد عدد كل الإجابات.

18 . وضعت مرآتان بحيث تكونان زاوية حادة. أسقط شعاع ضوء على أحد المرآتين وينعكس تبعاً للقانون المعتاد زاوية السقوط تساوي زاوية الانعكاس. أثبت أن الشعاع سيصنع عدد محدود من الإنعكاسات مع المرآتين.

19 . في فجر أحد الأيام غادر سائحان في وقت واحد المنطقتين A, B متجهاً كل منهما نحو المنطقة الأخرى في نفس المسار بشكل عكسي. تقابل السائحان في الظهر دون توقف. وصل الأول المنطقة B الساعة 4 عصراً، بينما وصل الأول المنطقة A الساعة 9 مساءاً. إذا كان كل منهما يمشي بسرعة منتظمة. ففي أي وقت أشرقت الشمس في ذلك اليوم بالتقريب؟

20 . بافتراض أن لدينا شبكة متعامدة (خطوطها تقسمها لمربعات متطابقة). إخترنا أي خمس نقاط شبكية (أي تنتج من تقاطع مستقيمات الشبكة)، وكل نقطتين وصلناهم بقطعة مستقيمة. أثبت أن إحدى منتصفات هذه القطع المستقيمة على الأقل منها شبكية.

21 . وضع 77 كوب على طاولة، في كل دور مسموح للاعب أن يقلب أي 4 أكواب أي يعكس وضعهم بمعنى يجعل عينهم لأعلى بدلاً من عينهم لأسفل أو يجعل عينهم لأسفل بدلاً من عينهم لأعلى. فإذا بدأنا بالأكواب كلها عينها لأسفل، هل من الممكن جعل كل الأكواب عيونها لأعلى؟

22 . (a) خمس كرات متطابقة تتحرك على خط مستقيم في نفس الإتجاه بسرعات متساوية والمسافات بينها متساوية. بينما تتحرك نحوهم خمس كرات أخرى على نفس الخط بنفس الأسلوب. فإذا كانت الكرات كلها لها نفس السرعات، كل كرة عند إصطدامها بأخرى ترتد في عكس الإتجاه. كم عدد التصادمات بين الكرات؟

(b) ماذا لو المسافات بين الكرات مختلفة في البداية؟

23 . (a) رسم مثلث في شبكة متعامدة بحيث رؤوسه نقاط شبكية. أثبت أن مساحة المثلث تساوي مساحة عدد صحيح من المربعات الشبكية، أو تختلف بمقدار نصف مساحة مربع شبكي عن مساحة عدد صحيح من المربعات الشبكية.

(b) أثبت أن من المستحيل إنشاء مثلثاً متطابق الأضلاع ورؤوسه نقاط شبكية. حقيقة أن $\sqrt{3}$ عدد غير نسبي ربما تكون مساعدة.

24 . ثمانية عشر قطعة دومينو 1×2 تغطي لوحة 6×6 بدون تداخل بعضها مع بعض أو مع أضلاع اللوحة. أثبت أن أياً كان وضع قطع الدومينو بهذه الشروط، من الممكن أن نقطع اللوحة لقطعتين بخط رأسي أو أفقي (أي موازي لأضلاع اللوحة) دون أن نقطع أي قطعة دومينو.

25 . فيصل وعمر يتبادلان اللعب في المباراة التالية. في دور فيصل يستطيع أن يضع X في أي مربعين خاليين في شبكة غير منتهية. وفي دور عمر الذي يليه يستطيع أن يضع 0 في أي مربع خالي. يريد فيصل وضع 100 من ال X متجاورة في صف. هل يستطيع عمر أن يوقفه؟