

Test-2, March 15
Level 3

Problem 1. There are 2016 digits written around a circle. If you write down these digits going around the circle clockwise and starting with a certain digit, you get a number divisible by 81. Prove that if you write down the digits going around the circle clockwise, but starting with any other digit, you will again get a number divisible by 81.

Problem 2. In triangle ABC $\angle B = 60^\circ$, O is the circumcenter, and L is the foot of an angle bisector of angle B . The circumcircle of triangle BOL meets the circumcircle of ABC at point $D \neq B$. Prove that $BD \perp AC$.

Problem 3. Given is an $2n \times 2n$ board with black and white squares. It is known that all border squares are black and no 2×2 subboard has all four squares of the same color. Prove that there exists a 2×2 subboard painted like a chessboard, i.e. with two opposite black corners and two opposite white corners.

Problem 4. Find all triples of real numbers (x, y, z) such that

$$\begin{cases} x^4 + y^2 + 4 = 5yz \\ y^4 + z^2 + 4 = 5zx \\ z^4 + x^2 + 4 = 5xy. \end{cases}$$



السؤال الأول

يوجد 2016 رقماً (الأرقام هي 0 و 1 و ... و 9) مكتوبة حول دائرة. إذا أخذت هذه الأرقام في اتجاه عقارب الساعة ابتداءً من رقم معين وكونت منها عدداً وكان هذا العدد يقبل القسمة على 81. اثبت أنه إذا أخذنا هذه الأرقام في اتجاه عقارب الساعة ابتداءً من أي رقم آخر وكونا منها عدداً فإن هذا العدد يقبل القسمة على 81.

السؤال الثاني

ليكن ABC فيه $\angle B = 60^\circ$ ، O مركز دائرته المحيطة، L تقاطع المنصف الداخلي لزاوية $\angle B$ مع AC . الدائرة المحيطة بالمثلث BOL تقطع الدائرة المحيطة بالمثلث ABC في نقطة $D \neq B$. اثبت أن $BD \perp AC$.

السؤال الثالث

لدينا لوحة من القياس $2n \times 2n$ مربعاتها بيضاء أو سوداء. إذا علم أن كل المربعات الحدودية سوداء، ولا يوجد مربع جزئي من القياس 2×2 كل مربعاته الأربعة من نفس اللون. اثبت أنه يوجد مربع جزئي من القياس 2×2 على هيئة شطرنج، بمعنى يوجد فيه مربعان ركنيان أبيضان ومربعان ركنيان أسودان.

السؤال الرابع

أوجد كل الثلاثيات المرتبة الحقيقية التي تحقق نظام المعادلات:

$$\begin{cases} x^4 + y^2 + 4 = 5yz \\ y^4 + z^2 + 4 = 5zx \\ z^4 + x^2 + 4 = 5xy \end{cases}$$

$\frac{2}{3} \quad 6 \quad \frac{1}{2}$
 12

الزمن 4 ساعات

مع أطيب التمنيات بالتوفيق

$Am = 40$
 $Am = 40$