تمارين على gcd و lcm.

1) إذا كان العدد $\overline{739ABC}$ يقبل القسمة على $7,8,9$. فأوجد كل قيم العدد $\overline{ABC}$.

2) ليكن n عدد صحيح . اثبت أن $\gcd(n!+1\,,(n+1)!+1)=1$.

3) ليكن $F_k=2^{2^k}+1$ ، $k\geq 0$. اثبت أن إذا كان $m\neq n$ فإن $\gcd(F_m,F_n)=1$.

(العدد F_k المعرف في السؤال حيث $k\geq 0$ يسمى عدد فيرما والخاصية المطلوبة خاصية أولية مثيرة لأعداد فيرما).

4) بفرض $m,n>0$ و $a>1$. اثبت أن : $\gcd(a^m-1,a^n-1)=a^{\gcd(m,n)}-1$.

(الخاصية المطلوبة في السؤال لها استخدامات كثيرة، لذا من المهم تذكرها جيدًا).

5) بفرض $m,n>0$. اثبت أن إذا كان $mn\mid(m^2+n^2)$ فإن $m=n$.

6) ليكن $\gcd(a,b,c)=1$ حيث a,b,c أعداد صحيحة موجبة ، $\dfrac{ab}{a-b}=c$.

اثبت أن $a-b$ مربع كامل .

7) ليكن k عدد صحيح موجب فردي ، اثبت أن :

$$(1+2+....+n)\mid(1^k+2^k+....+n^k)\ .$$

8) ليكن n عدد صحيح . اثبت أن $(12n+5,9n+4)=1$.

9) ليكن m,n عددين صحيحين موجبين ، m فردي . اثبت أن $(2^m-1,2^n+1)=1$.

10) ليكن $\gcd(a,b)=1$. اثبت $\gcd(a^2+b^2,ab)=1$.

11) بين أن الجذور النسبية لكثيرة حدود ذات معاملات صحيحة ومعامل رئيس ±1 تكون أعداد صحيحة .

12) لتكن m,n,k أعداد صحيحة موجبة تحقق أن $lcm(m+k,m)=lcm(n+k,n)$.

اثبت أن $m=n$.

13) أوجد كل الحلول الصحيحة (x,m) للمعادلة : $\left|x^2-1\right|+\left|x^2-4\right|=mx$ حيث m بارامتر .