This file was provided by:
Muath Alghamdi

نظرية مينلاوس

MENELAUS' THEOREM

أ. صفوت الطناني

SAFWAT ALTANANY

نظرية مينيلاوس

سنتناول نظرية شبيهة بنظرية شيفا، تحول نظرية مينيلاوس اثبات أن 3 نقاط على استقامة واحدة إلى متطابقات مترية (ربما مثلثية)، وكثير من مسائل المسابقات تدور حول اثبات أن 3 نقاط على استقامة واحدة مما يعطيها أهمية خاصة.

قبل أن نخوض في النظرية وتطبيقاتها سنعرج على مفهوم سيسهل علينا الربط بين بعض النظريات (مثل شيفا ومينيلاوس مثلاً).

مبدأ المثنوية Duality : تتضمن حالات كثيرة في الهندسة الإقليدية علاقات بين النقاط والمستقيمات، وفي الحالة التي تتعلق بشأن النقاط والمستقيمات في المستوى, عندما نضع كلمة نقطة محل كلمة مستقيم وكلمة مستقيم محل كلمة نقطة في العبارات التي نستخدم فيها هاتين الكلمتين، فإن العبارة الجديدة يقال عنها إنها المقابل المثنوي (dual) للعبارة الأصلية. وفي بعض الأحيان قد تحتاج العبارة إلى بعض التعديلات لتحافظ على بنيتها الرياضية السليمة.

العبارة	**العبارة المقابلة**
1. أي نقطتين مختلفتين (غير متطابقتين) تعينان مستقيماً وحيداً .	1. أي مستقيمين مختلفين (غير متوازيين ولا متطابقين) يعينان نقطة وحيدة .
2. أي نقطة يحتويها عدداً غير منتهٍ من المستقيمات.	2. أي مستقيم يحوي عدداً غير منتهٍ من النقاط .
3. بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة نحصل على مثلث وحيد.	3. بثلاثة مستقيمات غير ملتقية في نقطة واحدة نحصل على ثلاثي أضلاع وحيد.

المثال الأخير يوضح أننا يجب أن نعدل قليلاً عند صياغة العبارة المقابلة, ولذا, وعلى وجه التحديد نجد أن التقاطع في نقطة واحدة concurrent يقابل نقاط على استقامة واحدة collinear كما أن لفظ مثلث triangle المقابل له لفظ ثلاثي أضلاع trilateral.

والآن دعونا نستدعي نظرية شيفا مرة أخرى والتي تنص على أنه " إذا كان لدينا ثلاثة مستقيمات تحوي الرؤوس A,B,C من المثلث ABC ، وتقطع الأضلاع المقابلة في النقاط A_1,B_1,C_1 على الترتيب, فإنها تتقاطع في نقطة واحدة إذا وفقط إذا كان $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$ " .

وقبل ذلك, نستطيع أن نقول إنه في معظم الأحيان فإن المقابل المثنوي لمسلمة هو أيضاً مسلمة، وأن المقابل المثنوي لتعريف هو أيضاً تعريف، وبالتالي في معظم الأحيان أيضاً: إذا كانت العبارة نظرية فإن المقابل المثنوي هو نظرية. بعد هذه المقدمة الطويلة لن تندهش أن تجد أن المقابل المثنوي لنظرية شيفا هو نظرية مينيلاوس!

نظرية مينيلاوس: ليكن ABC مثلثاً و $A_1\in BC, B_1\in AC, C_1\in AB$ بحيث أحدها بالضبط أو كل النقاط الثلاث تقع خارج القطع المستقيمة BC,CA,AB توالياً. فإن A_1,B_1,C_1 على استقامة واحدة إذا وفقط إذا كان:

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=-1$$

عليك برهان النظرية ثم طبق النظرية لتحصل على النتيجة المعروفة التالية

نتيجة: نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم أي متوسط فيه بنسبة $2:1$ من جهة القاعدة.

الصيغة المثلثية لمينيلاوس: ليكن المستوى المثلث ABC موجهاً و $\measuredangle$ تشير لقياس الزاويا الموجهة : فإن النقاط A',B',C' على استقامة واحدة إذا وفقط إذا كان

$$\frac{\sin\measuredangle BAA'}{\sin\measuredangle A'AC}\cdot\frac{\sin\measuredangle CBB'}{\sin\measuredangle B'BA}\cdot\frac{\sin\measuredangle ACC'}{\sin\measuredangle C'CB}=-1$$

هيا إلى بعض التطبيقات.

مثال1: ليكن ABC مثلثاً و P نقطة داخله. لتكن A_1,B_1,C_1 نقاط تقاطع AP,BP,CP مع BC,CA,AB توالياً. لتكن $C_1B_1\cap BC=X, A_1C_1\cap CA=Y, A_1B_1\cap BA=Z$.
اثبت أن X,Y,Z على استقامة واحدة.
يمكن حل المسألة بنظرية ديسارغ مباشرة ولكن نريد الحل بشيفا ومينيلاوس.

مثال2 (خط ليموان The Lemoine line): ليكن ABC مثلثاً و A_1 هي نقطة تقاطع المماس للدائرة المحيطة بالمثلث ABC مع BC. عرفنا B_1,C_1 بطريقة مماثلة. اثبت أن A_1,B_1,C_1 على استقامة واحدة.

مثال3 (رباعي مينيلاوس): ليكن $A_1A_2A_3A_4$ شكلاً رباعياً. المستقيم ℓ يقطع أضلاعه $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ في النقاط M_1, M_2, M_3, M_4 توالياً. اثبت أن:

$$\frac{M_1A_1}{M_1A_2}\cdot\frac{M_2A_2}{M_2A_3}\cdot\frac{M_3A_3}{M_3A_4}\cdot\frac{M_4A_4}{M_4A_1}=1$$

مثال4 (مضلع مينيلاوس): ليكن ℓ مستقيماً يقطع الأضلاع A_iA_{i+1} في المضلع $A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$ في النقاط M_i ، لكل $1\le i\le n$ (حيث $A_{n+1}=A_1$). اثبت أن

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{M_iA_i}{M_iA_{i+1}}=1$$

وبالرغم من جمال رباعي (ومضلع) مينيلاوس فإنهما ليسا على نفس درجة أهمية رباعي (ومضلع) شيفا ، لذا سنعود ثانية لمثلث مينيلاوس ونلقي نظرة على تطبيقات أخرى.

لدينا الآن نظرية فان أوبل وسألحق بها تمهيدية قوية ونتيجة عليها، علينا استخدامهم في الوقت المناسب.

مثال 5 : ليكن ABC مثلثاً و P نقطة داخله. لتكن A', B', C' نقاط تقاطع AP, BP, CP مع BC, CA, AB توالياً. اثبت أن

- $\dfrac{PA}{PA'}=\dfrac{C'A}{C'B}+\dfrac{B'A}{B'C}$. (نظرية فان أوبل Van Aubel' Theorem)
- $\dfrac{PA'}{AA'}+\dfrac{PB'}{BB'}+\dfrac{PC'}{CC'}=1$. (تمهيدية قوية)
- $\dfrac{PA}{AA'}+\dfrac{PB}{BB'}+\dfrac{PC}{CC'}=2$. (نتيجة على التمهيدية السابقة)

مثال 6 : ليكن ABC مثلثاً و O مركزه المحيط. اثبت أن مجموع مقلوبات أطوال الشيفيان الثلاثة التي تمر بـ O يساوي ضعف مقلوب نصف القطر المحيط.

مثال 7 (تحدي من TST China): لتكن A_1, B_1, C_1 نقاط تماس الدائرة الداخلية للمثلث ABC مع الأضلاع BC, CA, AB توالياً . لتكن A_2 هي انعكاس A_1 على B_1C_1 ، A_3 هي نقطة تقاطع AA_2 مع BC. عرفنا B_3, C_3 بطريقة مماثلة. اثبت أن A_3, B_3, C_3 على استقامة واحدة.

مثال 8 : ليكن ABC مثلثاً و I مركزه الداخلي. لتكن D, E, F هي نقاط تماس دائرته الداخلية مع الأضلاع BC, CA, AB توالياً. اثبت أن الدوائر المحيطة بالمثلثات AID, BIE, CIF تتقاطع في نقطتين (بلغة أخرى لها نقطة مشتركة أخرى غير I) .

مثال 9 (USAMO): لتكن P نقطة في مستوى المثلث ABC ، ℓ مستقيم يمر بنقطة P. لتكن A', B', C' هي نقاط تقاطع انعكاسات PA, PB, PC على ℓ مع BC, CA, AB توالياً.
اثبت أن A', B', C' على استقامة واحدة.

تمارين متنوعة:

(1) أثبت أن المنصفين الداخليين لزاويتين في مثلث مختلف الأضلاع، والمنصف الخارجي للزاوية الثالثة من نفس المثلث تلاقي الأضلاع المقابلة في ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.

(2) أثبت أن المنصفات الخارجية لزوايا مثلث مختلف الأضلاع تلاقي أضلاع نفس المثلث المقابلة في ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.

(3) إذا كان لدينا دائرة تمر بالرأسين B, C في المثلث ABC , وتقطع كلاً من $\overline{AB}, \overline{AC}$ في P, R على الترتيب، و $\overleftrightarrow{PR}$ يلاقي $\overleftrightarrow{BC}$ في النقطة Q, فأثبت أن $\dfrac{QC}{QB} = \dfrac{(RC)(AC)}{(PB)(AB)}$.

(4) في الشكل الرباعي $ABCD$ ، يتقاطع كل من $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ في P بينما يتقاطع $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BC}$ في Q، القطران $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BD}$ يقطعان $\overleftrightarrow{PQ}$ في X, Y على الترتيب. أثبت أن $\dfrac{PX}{XQ} = -\dfrac{PY}{YQ}$.

(5) نظرية ديزارغ (Desargues's Theorem): إذا تم وضع $\Delta A_1B_1C_1, \Delta A_2B_2C_2$ بحيث كانت المستقيمات $\overleftrightarrow{A_1A_2}, \overleftrightarrow{B_1B_2}, \overleftrightarrow{C_1C_2}$ والتي تمر برؤوسهما المتناظرة تتقاطع في نقطة واحدة، فإن أزواج الأضلاع المتناظرة فيهما تتقاطع في ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.

(6) نظرية باسكال (Pascal's Theorem): إذا رسم سداسي غير منتظم داخل دائرة بحيث كانت أضلاعه المتقابلة غير متوازية، فإن نقاط تقاطع هذه الأضلاع المتقابلة تقع على استقامة واحدة.

(7) نظرية بابوس (Pappus 's Theorem): النقاط A, B, C تقع على خط مستقيم واحد، والنقاط A', B', C' تقع على مستقيم آخر وبأي ترتيب. فإذا تقاطع $\overleftrightarrow{AB'}, \overleftrightarrow{A'B}$ في C'' , وتقاطع $\overleftrightarrow{AC'}, \overleftrightarrow{A'C}$ في B'' ، وتقاطع $\overleftrightarrow{BC'}, \overleftrightarrow{B'C}$ في A''. فإن النقاط A'', B'', C'' تقع على استقامة واحدة.

(8) خط سيمسون (The Simson Line): نقاط تقاطع الأعمدة المرسومة من أي نقطة على دائرة محيطة بمثلث على أضلاع هذا المثلث تقع على استقامة واحدة .

(9) أثبت أنه إذا كان الخط المستقيم المار بنقطة تقاطع المتوسطات G في المثلث ABC ويقطع كلاً من $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{AC}$ في النقطتين M,N على الترتيب فإن

$$(AM)(NC)+(AN)(MB)=(AM)(AN).$$

(10) الدائرة التي تمس الضلع $\overline{BC}$ عند نقطة منتصفه M في المثلث ABC، تقطع أيضا $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{AC}$ في $\{S,S'\},\{R,R'\}$ على الترتيب. إذا مددنا $\overline{RS},\overline{R'S'}$ ليقطعا $\overleftrightarrow{BC}$ في P,P' على الترتيب.
فأثبت أن

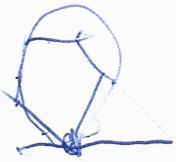
$$(BP)(BP')=(CP)(CP')$$

(11) في المثلث ABC، النقاط P,Q,R هي منتصفات الأضلاع $\overline{AB},\overline{BC},\overline{AC}$ على الترتيب، $\overleftrightarrow{AN},\overleftrightarrow{BL},\overleftrightarrow{CM}$ تتقاطع في نقطة واحدة وتقطع الأضلاع المقابلة في N,L,M على الترتيب. إذا كان $\overrightarrow{PL}$ يقطع $\overleftrightarrow{BC}$ في النقطة J، $\overleftrightarrow{MQ}$ يقطع $\overleftrightarrow{AC}$ في النقطة I، $\overleftrightarrow{RN}$ يقطع $\overleftrightarrow{AB}$ في النقطة H, فأثبت أن النقاط H,I,J تقع على استقامة واحدة.

(12) (نظرية مونجيه- دالمبيرت): إذا التقى المماسان المشتركان الخارجيان للدائرتين O,Q في النقطة M, والتقى المماسان المشتركان الخارجيان للدائرتين O,S في النقطة N, والتقى المماسان المشتركان الخارجيان للدائرتين Q,S في النقطة L, فأثبت أن M,N,L تقع على استقامة واحدة إذا علمت أن الدوائر الثلاث لا يوجد منها اثنتان متطابقتان ولا يوجد منها اثنتان لهما المركز نفسه.

(13) أثبت أن نقاط تقاطع المنصفات العمودية للمنصفات الزوايا الداخلية لأي مثلث مع أضلاع المثلث المقابلة لتلك الزوايا تقع على استقامة واحدة.

(14) ليكن $ABCDEF$ سداسياً منتظماً. لتكن M,N نقطتين داخليتين على القطعتين المستقيمتين AC,CE بحيث $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=k$. عين k إذا كانت B,M,N على استقامة واحدة.



(15) ليكن ABC مثلثاً و ℓ مستقيماً لا يمر بأي رأس للمثلث ويقطع أضلاعه BC,CA,AB في D,E,F توالياً. لتكن انعكاسات المستقيمات AD,BE,CF حول منصفات الزوايا A,B,C توالياً تقطع BC,CA,AB في النقاط D',E',F' توالياً. اثبت أن D',E',F' على استقامة واحدة.

(16) ليكن ABC مثلثاً و ℓ مستقيماً لا يمر بأي رأس للمثلث ويقطع أضلاعه BC,CA,AB في D,E,F توالياً. لتكن P,Q,R منتصفات EF,FD,DE توالياً. المستقيمات AP,BQ,CR تقطع BC,CA,AB في X,Y,Z توالياً. اثبت أن X,Y,Z على استقامة واحدة.

(17) الدائرة الداخلية للمثلث ABC تمس أضلاعه BC,CA,AB في D,E,F توالياً.

إذا كان $EF\cap BC=X, FD\cap CA=Y, DE\cap AB=Z$.

اثبت أن إحدى الكميات الثلاث $\frac{1}{XD},\frac{1}{YE},\frac{1}{ZF}$ تساوي مجموع الأخرتين.

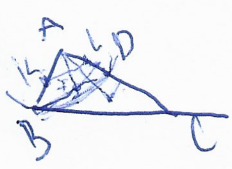
(18) (IMO Shortlist) : الدائرة الداخلية للمثلث ABC تمس أضلاعه BC,CA,AB في D,E,F توالياً. X نقطة داخل المثلث ABC بحيث الدائرة الداخلية للمثلث XBC تمس BC في D، وتمس CX,XB في Y,Z توالياً. برهن أن E,F,Z,Y على دائرة واحدة.

~~(19)~~ لتكن Γ دائرة و B نقطة على مماس ل Γ عند النقطة A. تم إجراء دوراناً للقطعة المستقيمة AB حول مركز Γ بزاوية ما لتصبح القطعة المستقيمة $A'B'$. اثبت أن AA' يمر بمنتصف BB'. A, M, A'

~~(20)~~ لتكن P نقطة داخل المثلث ABC و D,E,F هي مساقط P على BC,CA,AB توالياً. لتكن X نقطة على EF بحيث $PX\perp PA$. عرفنا Y,Z بطريقة مماثلة. اثبت أن X,Y,Z على استقامة واحدة. tangent not

(21) ليكن ABC مثلثاً متطابق الضلعين فيه $AC=BC$. دائرته الداخلية تمس AB,BC في D,E توالياً. تم رسم مستقيم يختلف عن AE يمر بنقطة A ويقطع الدائرة الداخلية في F,G. المستقيم AB يقطع المستقيمين EF,EG في K,L توالياً. اثبت أن $DK=DL$.

(22) تحدي من (IMO Shortlist) : ليكن ABC فيه $\angle ACB<\angle BAC<90^\circ$. لتكن D نقطة على AC بحيث $BD=BA$. الدائرة الداخلية للمثلث ABC تمس AB,AC عند K,L توالياً. لتكن J مركز الدائرة الداخلية للمثلث BCD. اثبت أن KL ينصف AJ.



(23) تحدي : لتكن O هو المركز المحيط للمثلث ABC ، AA_1 قطر في تلك الدائرة، A_2 هي انعكاس O على BC . عرفنا B_1, B_2, C_1, C_2 بطريقة مماثلة. اثبت أن الدوائر المحيطة بالمثلثات $OA_1A_2, OB_1B_2, OC_1C_2$ تتقاطع في نقطتين.

(24) (BMO): ليكن ABC مثلثاً حاد الزوايا مختلف الأضلاع. لتكن X و Y نقطتين داخليتين مختلفتين على القطعة المستقيمة BC بحيث $\angle CAX = \angle YAB$. لنفرض أن:

- النقطتان K و S هما مسقطي B على كل من المستقيمين AX و AY على التوالي.
- النقطتان T و L هما مسقطي C على كل من المستقيمين AX و AY على التوالي.

برهن أن KL و ST يتتقاطعان في نقطة تقع على المستقيم BC .

(25) تحدي من (Saudi TST): ليكن ABC مثلثاً حاد الزوايا و O مركز دائرته المحيطة. لتكن A_1, B_1, C_1 هي نقاط تقاطع أقطار دائرته المحيطة المارة بالنقاط A, B, C مع الأضلاع BC, CA, AB توالياً. افترض أن نصف قطر المحيط للمثلث ABC هو $2p$ حيث p عدد أولي ما، الأطوال OA_1, OB_1, OC_1 أعداد صحيحة. ما أطوال أضلاع المثلث ABC ؟

(26) (تحدي الدوائر المتداخلة): لتكن Ω الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ولتكن ω_a الدائرة المماسة لكل من Ω والقطعتين CA, AB . وعرفنا ω_b, ω_c بالمثل. لتكن $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ تمس Ω في النقاط A', B', C' توالياً. اثبت أن AA', BB', CC' تتقاطع في نقطة واحدة.