Practice Problems- 7

5 July, 2020

Level 2

Homework Problems

47. Let $n > 1$ be an odd integer. Prove that n does not divide $3^n + 1$.

Assume that $n \mid 3^n+1$

$$\Rightarrow \quad 3^n \equiv -1 \pmod{n}$$

$$\Rightarrow \quad 3^n \equiv -1 \pmod{p_i} \quad \forall\, p_i \mid n$$

$$\Rightarrow \quad 3^{2n} \equiv 1 \pmod{p_i} \quad ; \quad 3^{p_i-1} \equiv 1 \pmod{p_i}$$

$$\Rightarrow \quad 3^{\gcd(2n,\, p_i-1)} \equiv 1 \pmod{p_i} \quad ①$$

Let $i=1 \Rightarrow p_1$ is the smallest prime divisor $\Rightarrow$ $\boxed{p_1 \text{ is odd}}$ ②

$$\gcd(2n, p_1-1) = \gcd(2, p_1-1) = 1 \text{ or } 2 \quad ③$$

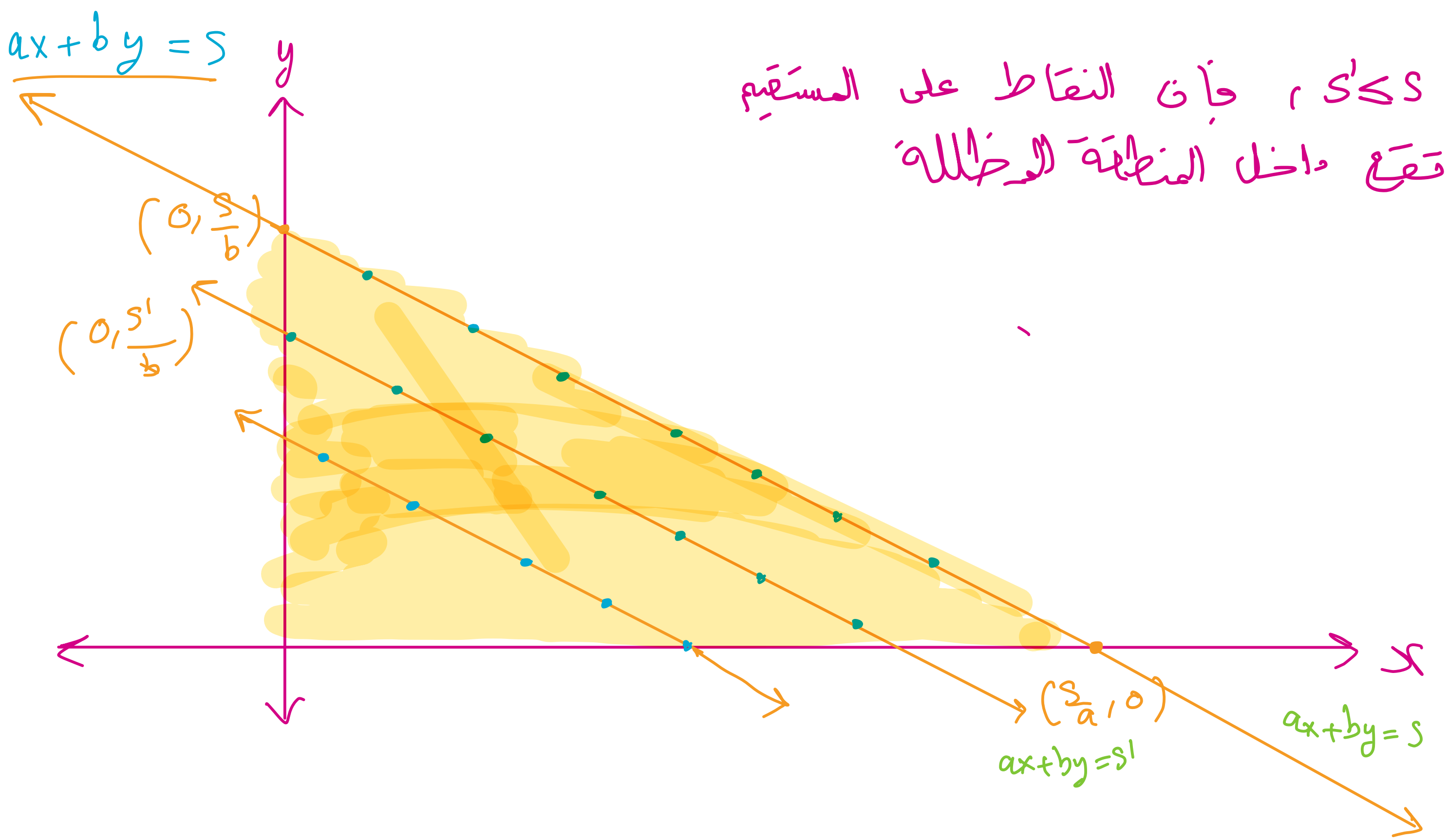
$$\Rightarrow \quad 3^2 \equiv 1 \pmod{p_1} \Rightarrow p_1 \mid 8 \Rightarrow p_1 = 2 \Rightarrow \Leftarrow !!$$

I

48. Let a and b be positive integers. Prove that the number of solutions (x, y, z) in nonnegative integers to the equation $ax + by + z = ab$ is

$$\frac{1}{2}[(a+1)(b+1) + \gcd(a, b) + 1].$$

إذا كانت $s' \leq s$ ، فإن النقاط على المستقيم $ax+by=s'$ تقع داخل المنطقة المظللة



48. Let a and b be positive integers. Prove that the number of solutions (x, y, z) in nonnegative integers to the equation $ax + by + z = ab$ is

$$\frac{1}{2}[(a+1)(b+1) + \gcd(a, b) + 1].$$

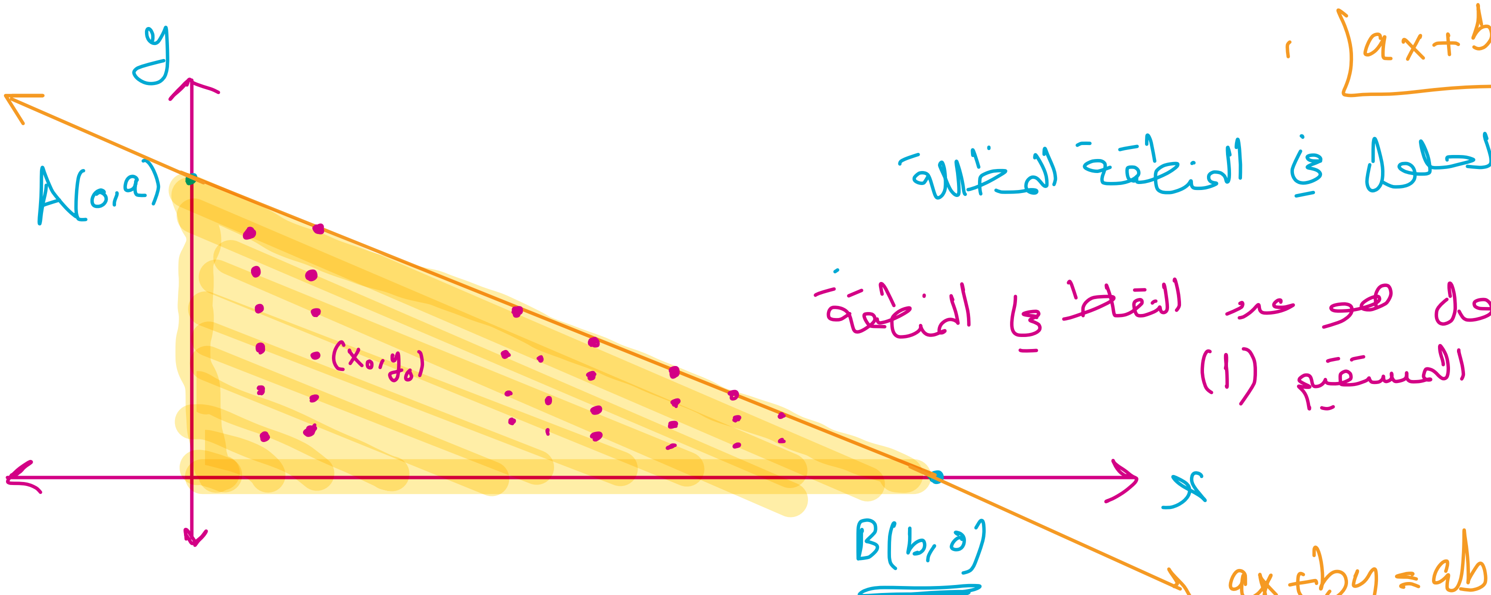
عدد الحلول (x,y,z) لـ $ax+by+z=ab$ $=$ عدد حلول (x,y) لـ $\boxed{ax+by\leq ab}$

ننظر للمستقيم $ax+by=ab$ ،

، $\boxed{ax+by\leq ab}$

يجب أن تقع الحلول في المنطقة المظللة

⟸ عدد الحلول هو عدد النقاط في المنطقة المظللة وعلى المستقيم (1)



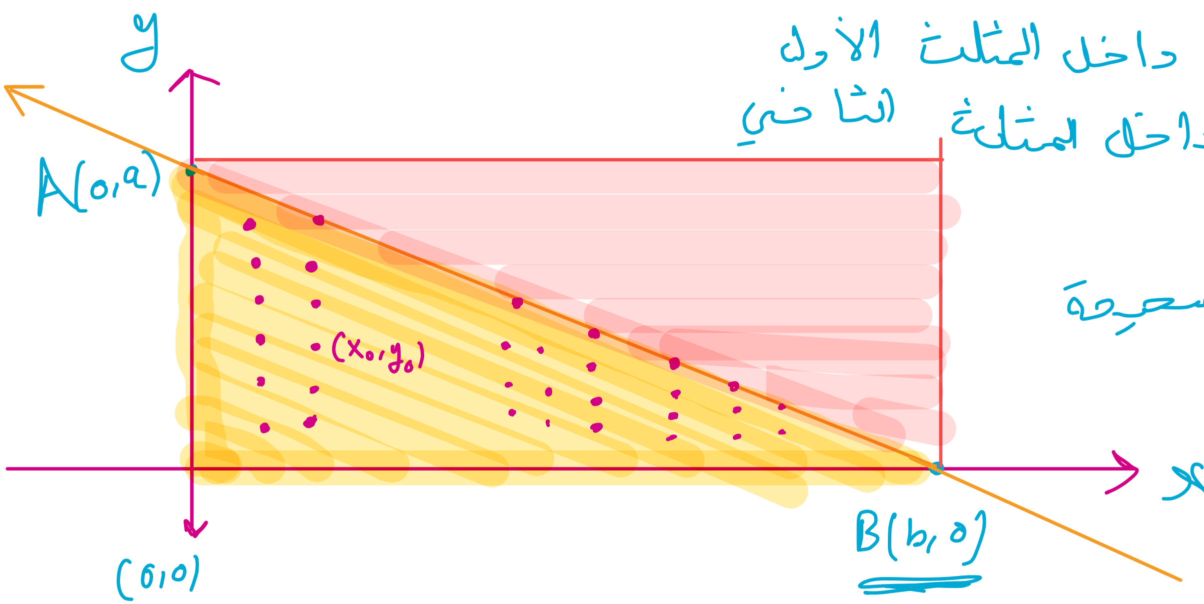
48. Let a and b be positive integers. Prove that the number of solutions (x, y, z) in nonnegative integers to the equation $ax + by + z = ab$ is

$$\frac{1}{2}[(a+1)(b+1) + \gcd(a, b) + 1].$$

نفرض أن عدد النقاط على الوتر هو d، وعددها تحته هو s

$\Leftarrow$ عدد النقاط الصحيحة داخل المثلث الأول

$=$ عدد النقاط الصحيحة داخل المثلث (الثاني)



$\Leftarrow$ $2s+d$ هو عدد النقاط الصحيحة داخل المستطيل (2)

$$\Rightarrow 2s+d = (a+1)(b+1)$$

$$\Rightarrow s+d = \frac{(a+1)(b+1)}{2} + \frac{d}{2} \quad (3)$$

48. Let a and b be positive integers. Prove that the number of solutions (x, y, z) in nonnegative integers to the equation $ax + by + z = ab$ is

$$\frac{1}{2}[(a+1)(b+1) + \gcd(a, b) + 1].$$

من (3) نجد أن عدد الحلول هو $\frac{(a+1)(b+1)}{2} + \frac{d}{2}$ حيث

أن d هو عدد النقاط التي تحقق أن $ax+by=ab$

$\frac{b}{\gcd(a,b)} \mid x \Leftrightarrow b \mid ax$ و $y = a - \frac{a}{b}x \Leftarrow$

$\Rightarrow x \in \left\{0, \frac{1b}{\gcd(a,b)}, \frac{2b}{\gcd(a,b)}, \dots, \frac{\gcd(a,b)\cdot b}{\gcd(a,b)}\right\}$

إذن عدد الحلول (x,y) للمعادلة $ax+by=ab$ هو (4) $\boxed{d = \gcd(a,b)+1}$

من (3) و (4) عدد الحلول $\frac{((a+1)(b+1) + \gcd(a,b) + 1)}{2}$

30. For a positive integer k, let $p(k)$ denote the greatest odd divisor of k. Prove that for every positive integer n,

$$\frac{2n}{3} < \underline{\frac{p(1)}{1} + \frac{p(2)}{2} + \cdots + \frac{p(n)}{n}} < \frac{2(n+1)}{3}.$$

نلاحظ أن $p(2m) = p(m)$ ، $p(2m+1) = 2m+1$. إذن الفكرة بشكل عام هي الاستقراء. ليكن

$$s(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p(i)}{i} \quad ،$$

نريد إثبات $\frac{2n}{2} < s(n) < \frac{2(n+1)}{3}$ بالاستقراء الرياضي.

Base Case:

$n = 1, 2$ ✓

نفرض أن $\frac{2k}{3} < s(k) < \frac{2(k+1)}{3}$ لكل $k = 1, 2, \dots, k_0$

30. For a positive integer k, let $p(k)$ denote the greatest odd divisor of k. Prove that for every positive integer n,

$$\frac{2n}{3} < \frac{p(1)}{1} + \frac{p(2)}{2} + \cdots + \frac{p(n)}{n} < \frac{2(n+1)}{3}.$$

Induction Step:

$k_0+1 = 2m+1$

الحالة الأولى : k_0+1 فردي

$$\Rightarrow s(k_0+1) = s(2m+1) = \frac{p(1)}{1} + \frac{p(2)}{2} + \cdots + \frac{p(2m+1)}{2m+1}$$

$$= \left(\frac{p(1)}{1} + \frac{p(3)}{3} + \cdots + \frac{p(2m+1)}{2m+1}\right) + \left(\frac{p(2)}{2} + \frac{p(4)}{4} + \cdots + \frac{p(2m)}{2m}\right)$$

نستخدم أن $p(2i) = p(i)$ و $p(2i+1) = 2i+1$:

$$= \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{m+1 \text{ مرة}} + \frac{1}{2}\left(\frac{p(1)}{1} + \frac{p(2)}{2} + \cdots + \frac{p(m)}{m}\right)$$

30. For a positive integer k, let $p(k)$ denote the greatest odd divisor of k. Prove that for every positive integer n,

$$\frac{2n}{3} < \frac{p(1)}{1} + \frac{p(2)}{2} + \cdots + \frac{p(n)}{n} < \frac{2(n+1)}{3}.$$

$$\Rightarrow \quad S(k_0+1) = (m+1) + \boxed{\frac{1}{2}} S(m)$$

ولكن $\quad \frac{2m}{3} < S(m) < \frac{2(m+1)}{3} \Leftarrow$

$$(m+1) + \frac{m}{3} < S(k_0+1) < (m+1) + \frac{m+1}{3}$$

$$\frac{4m+3}{3} < S(k_0+1) < \frac{4m+4}{3}$$

ولكن $\quad k_0+1 = 2m+1 \Leftarrow m = \frac{k_0}{2}$

$$\frac{2(k_0+1)}{3} < \frac{2k_0+3}{3} < S(k_0+1) < \frac{2k_0+4}{3} = \frac{2((k_0+1)+1)}{3}$$

$\Leftarrow$ تم اثبات فرضية الاستقراء

A

30. For a positive integer k, let $p(k)$ denote the greatest odd divisor of k. Prove that for every positive integer n,

$$\frac{2n}{3} < \frac{p(1)}{1} + \frac{p(2)}{2} + \cdots + \frac{p(n)}{n} < \frac{2(n+1)}{3}.$$

الحالة الثانية : $\therefore k_0+1 = 2m$

$$S(2m) = \left(\frac{P(1)}{1} + \frac{P(3)}{3} + \cdots + \frac{P(2m-1)}{2m-1}\right) + \left(\frac{P(2)}{2} + \frac{P(4)}{4} + \cdots + \frac{P(2m)}{2m}\right)$$

$$= m + \frac{1}{2}\left(\frac{P(1)}{1} + \frac{P(2)}{2} + \cdots + \frac{P(m)}{m}\right)$$

$$= m + \frac{1}{2} S(m)$$

$$S(2m) = (m) + \frac{S(m)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4m}{3} = m + \frac{m}{3} < S(2m) < m + \frac{m+1}{3} = \frac{4m+1}{3}$$

تم إثبات فرضية الاستقراء $\Leftarrow \frac{2(2m)}{3} < S(2m) < \frac{2(2m+1)}{2}$

More Problems ☺

45. Let $p \geq 3$ be a prime. Determine whether there exists a permutation

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1})$$

$$(1, 2, \text{---}, p-1)$$

of $(1, 2, \ldots, p-1)$ such that the sequence $\{ia_i\}_{i=1}^{p-1}$ contains $p-2$ distinct congruence classes modulo p.

• أثبتنا سابقاً "أنه إذا كانت $(a_1, a_2, \text{---}, a_{p-1})$ ، $(b_1, b_2, \text{---}, b_{p-1})$

مجموعتي بواقي كاملة باستثناء الصفر، فإن $(a_1b_1, a_2b_2, \text{---}, a_{p-1}b_{p-1})$

لا يمكن أن تكون مجموعة بواقي مختلفة. إذن $\{ia_i\}_{i=1}^{p-1}$ لا يمكن

أن تكون مجموعة بواقي كاملة.

فكرة الحل بشكل عام:

$$ia_i \equiv i+1 \pmod{p}$$

$$\{ia_i\}_{i=1}^{p-1} = \{1+1, 2+1, \text{---}, (p-1)+1\}$$

$$a_i \equiv (i+1)\, i^{-1} \pmod{p}$$

$$a_i \equiv i i^{-1} + i^{-1} \equiv 1 + i^{-1} \pmod{p}$$

I

45. Let $p \geq 3$ be a prime. Determine whether there exists a permutation

$$(a_1, a_2, \dots, a_{p-1})$$

of $(1, 2, \dots, p-1)$ such that the sequence $\{ia_i\}_{i=1}^{p-1}$ contains $p-2$ distinct congruence classes modulo p.

الحل :

إذن

$$a_i \equiv 1 + i^{-1} \pmod p \quad \forall\ i \in \{1, \dots, p-2\} \Rightarrow a_i \not\equiv 0 \pmod p$$

$$\Rightarrow a_i \in \{1, 2, \dots, p-1\} \ * \ \forall\ 1 \leq i \leq p-2$$

① $a_i \not\equiv a_j \pmod p \quad \forall\ 1 \leq i < j \leq p-2$ **

$a_i \equiv a_j \pmod p \Leftrightarrow 1 + i^{-1} \equiv 1 + j^{-1} \pmod p$

$\Leftrightarrow i \equiv j \pmod p \Leftrightarrow i = j$ ×

② $ia_i \not\equiv ja_j \pmod p \quad \forall\ 1 \leq i < j \leq p-2$

$\Leftrightarrow i+1 \not\equiv j+1 \pmod p$ ***

وهذا صحيح

أو

$a_i \equiv a_j \pmod p$

$ia_i \equiv i+1 \pmod p$ −

$ia_j \equiv j+1 \pmod p$

$a_i(i-j) \equiv i-j \pmod p$

$\Rightarrow a_i = 1$ or $i - j \equiv 0 \pmod p$ ×

$\Rightarrow i \equiv i+1 \pmod p$

$\Rightarrow 0 \equiv 1 \pmod p$ ×

إذن $(a_1, 2a_2, \dots, (p-2)a_{p-2})$ مجموعة بواقي مختلفة

18. Let m and n be integers greater than 1 such that $\gcd(m, n-1) = \gcd(m, n) = 1$. Prove that the first $m-1$ terms of the sequence $n_1, n_2, \ldots,$ where $n_1 = mn + 1$ and $n_{k+1} = n \cdot n_k + 1$, $k \geq 1$, cannot all be primes.

$$n_{k+1} = n \, n_k + 1$$

$$n(n_k) = n(n \, n_{k-1} + 1) = n^2 n_{k-1} + n$$

$$n^2 n_{k-1} = n^2(n \, n_{k-2} + 1) = n^3 n_{k-2} + n^2$$

$$\vdots$$

$$n^{k-2}(n_3) = n^{k-2}(n \, n_2 + 1) = n^{k-1} n_2 + n^{k-2}$$

$$n^{k-1}(n_2) = n^{k-1}(n \, n_1 + 1) = n^k n_1 + n^{k-1}$$

$$n^k \quad n_1 = (mn+1) n^k = n^{k+1} m + n^k$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} n_{k+1} &= n \, n_k + 1 \\ n \, n_k &= n^2 n_{k-1} + n \\ n^2 n_{k-1} &= n^3 n_{k-2} + n^2 \\ &\vdots \\ n^k n_1 &= n^{k+1} m + n^k \end{aligned} \right.$$

بجمع المعادلات

$$\Longrightarrow n_{k+1} = n^{k+1} m + (1 + n + \cdots + n^k)$$

$$\boxed{n_{k+1} = n^{k+1} m + \frac{n^{k+1} - 1}{n-1}}$$

A

18. Let m and n be integers greater than 1 such that $\gcd(m, n-1) = \gcd(m, n) = 1$. Prove that the first $m-1$ terms of the sequence $n_1, n_2, \ldots,$ where $n_1 = mn + 1$ and $n_{k+1} = n \cdot n_k + 1$, $k \geq 1$, cannot all be primes.

$$n_k = \underline{m n^k} + \underline{\frac{n^k - 1}{n-1}}$$

$\underline{\gcd(m, n-1)} = \gcd(m,n) = 1$

نريد إيجاد k تحقق أن

$$m \mid n^k - 1 \iff m \mid \frac{n^k-1}{n-1}$$

يكفي اختيار $k = \varphi(m)$ ، وبما أن $\gcd(m,n)=1$

$$m \mid n^{\varphi(m)} - 1 \Rightarrow m \mid n_{\varphi(m)}$$ و $n_{\varphi(m)} > m$

لأن $n > 1 \Leftarrow$

$n_{\varphi(m)}$ عدد مؤلف

21. [APMO 1998] Find the largest integer n such that n is divisible by all positive integers less than $\sqrt[3]{n}$.

43. For a positive integer n, let $r(n)$ denote the sum of the remainders of n divided by $1, 2, \ldots, n$. Prove that there are infinitely many n such that $r(n) = r(n-1)$.