Test-5, April 26

Level 4

Problem 1. Let $P(x)$ be a monic polynomial of degree 100 with 100 distinct non-integer roots. Suppose that each of polynomials

$$P(2x^2 - 4x) \text{ and } P(4x - 2x^2)$$

has exactly 130 distinct real roots. Prove that there exist non constant polynomials $A(x), B(x)$ such that $A(x)B(x) = P(x)$ and $A(x) = B(x)$ has no root in $(-1; 1)$.

Problem 2. Let ABC be a triangle, the circle having BC as diameter cuts AB, AC at F, E respectively. Let P a point on this circle. Let C', B' be the projections of P upon the sides AB, AC respectively. Let H be the orthocenter of the triangle $AB'C'$. Show that $\angle EHF = 90°$.

Problem 3. All of the numbers $1, 2, 3, ..., 1000000$ are initially colored black. On each move it is possible to choose the number x (among the colored numbers) and change the color of x and of all of the numbers that are not co-prime with x (black into white, white into black). Is it possible to color all of the numbers white?

السؤال الأول

لتكن $P(x)$ كثيرة حدود من الدرجة 100 ولها 100 جذر غير صحيح. افترض أن كل كثيرة حدود

$$P(2x^2-4x) \quad , P(4x-2x^2)$$

لها بالضبط 130 جذر مختلف. اثبت أن يوجد كثيرات حدود غير ثابتة $A(x), B(x)$ بحيث $A(x)B(x)=P(x)$ و $A(x)=B(x)$ ليس لها جذور في الفترة $(-1,1)$.

السؤال الثاني

ليكن ABC مثلثاً، الدائرة التي قطرها BC تقطع AB, AC في F, E توالياً. لتكن P نقطة على تلك الدائرة، ولتكن C', B' هما مسقطي P على AB, AC توالياً. لتكن H هي نقطة تقاطع الإرتفاعات المثلث $AB'C'$. برهن أن $\angle EHF = 90^\circ$.

السؤال الثالث

كل الأرقام $1,2,3,....,1000000$ ملونة باللون الأسود في البداية. في كل خطوة، من الممكن اختيار الرقم n (من بين الأرقام الملونة) وتغيير لون n وجميع الأرقام التي ليست أولية نسبياً معه (أسود إلى أبيض أو أبيض إلى أسود).
هل من الممكن تلوين جميع الأرقام باللون الأبيض ؟

الزمن 4 ساعات ونصف

مع أطيب التمنيات بالتوفيق