Test 5

Level 4, March 5, 2022

Problem 5.1. On the sides of $\triangle ABC$, points $P, Q \in AB$ (P is between A and Q) and $R \in BC$ are chosen. The points M and N are defined as the intersection point of AR with the segments CP and CQ, respectively. If $BC = BQ$, $CP = AP$, $CR = CN$ and $\angle BPC = \angle CRA$, prove that $MP + NQ = BR$.

Problem 5.2. By $rad(x)$ we denote the product of all distinct prime factors of a positive integer n. Given $a \in \mathbb{N}$, a sequence (a_n) is defined by $a_0 = a$ and $a_{n+1} = a_n + rad(a_n)$. Prove that there exists an index n for which $\frac{a_n}{rad(a_n)} = 2022$.

Problem 5.3. Determine if there exist functions $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying for every $x \in \mathbb{R}$ the following equations

$$f(g(x)) = x^3 \quad \text{and} \quad g(f(x)) = x^2.$$

Problem 5.4. We consider all partitions of a positive integer n into a sum of (non-negative integer) exponents of 2 (i.e. $1, 2, 4, 8, \dots$). A number in the sum is allowed to repeat an arbitrary number of times (e.g. $7 = 2 + 2 + 1 + 1 + 1$) and two partitions differing only in the order of summands are considered to be equal (e.g. $8 = 4 + 2 + 1 + 1$ and $8 = 1 + 2 + 1 + 4$ are regarded to be the same partition). Let $E(n)$ be the number of partitions in which an even number of exponents appear an odd number of times and $O(n)$ the number of partitions in which an odd number of exponents appear an odd number of times. For example, for $n = 5$ partitions counted in $E(n)$ are $5 = 4 + 1$ and $5 = 2 + 1 + 1 + 1$, whereas partitions counted in $O(n)$ are $5 = 2 + 2 + 1$ and $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, hence $E(5) = O(5) = 2$. Find $E(n) - O(n)$ as a function of n.

السؤال الأول

تم اختيار نقاط على أضلاع المثلث ABC كالتالي: $P,Q \in AB$ (بحيث P تقع بين A و Q) و $R \in BC$. ليكن AR يقطع القطعتين المستقيمتين CP,CQ في النقطتين M,N تواليًا. إذا كان $BC = BQ, CP = AP, CR = CN$ و $\angle BPC = \angle CRA$. أثبت أن $MP + NQ = BR$.

السؤال الثاني

ليكن $rad(x)$ يرمز إلى حاصل ضرب كل القواسم الأولية المختلفة للعدد الصحيح الموجب x. معطى أن $a \in \mathbb{N}$، متتابعة (a_n) معرفة كالتالي: $a_0 = a$ و $a_{n+1} = a_n + rad(a_n)$. أثبت أنه يوجد ترقيم للعدد n يحقق أن:

$$\frac{a_n}{rad(a_n)} = 2022.$$

السؤال الثالث

حدد ما إذا كان يوجد دالتين $f,g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تحقق لكل $x \in \mathbb{R}$ المعادلتين التاليتين:

$$g(f(x)) = x^2 \quad \text{و} \quad f(g(x)) = x^3$$

السؤال الرابع

سنأخذ بالاعتبار كل التجزئة لعدد صحيح موجب n كمجموع قوى العدد 2 الغير سالبة (نقصد $1,2,4,8,...$). يُسمح للعدد في المجموع بالتكرار عدد ما من المرات (على سبيل المثال المجموع $7 = 2+2+1+1+1$ معتبر)، وسنعتبر التجزئة المختلفة في الترتيب فقط متساوية (على سبيل المثال $8 = 4+2+1+1$ و $8 = 1+2+1+4$ نفس التجزئة). ليكن $E(n)$ هو عدد التجزئة التي تظهر فيها العدد الزوجي عددًا فرديًا من المرات، و $O(n)$ عدد التجزئة التي يظهر فيها العدد الفردي عددًا فرديًا من المرات. على سبيل المثال، بالنسبة إلى $n = 5$، ستكون التجزئة المحسوبة في $E(n)$ هي $5 = 4+1$ و $5 = 2+1+1+1$، في حين أن التجزئة المحسوبة في $O(n)$ هي $5 = 2+2+1$ و $5 = 1+1+1+1+1$، ومن ثم $E(5) = O(5) = 2$. أوجد $E(n) - O(n)$ كدالة في n.

الزمن 4 ساعات ونصف

كل سؤال 7 نقاط

مع أطيب التمنيات بالتوفيق