problem 1 : $\sqrt{a+7} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} \overset{?}{\le} 12$

$\Longleftrightarrow \left(\sqrt{a+7} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a}\right)^2 \le 144$

$\left(\sqrt{a+7} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a}\right)^2 \overset{C.S.}{\le} (1+7+1)(a+7+2a-3+50-3a) = 3 \cdot 48 = 144$

problem 2 :

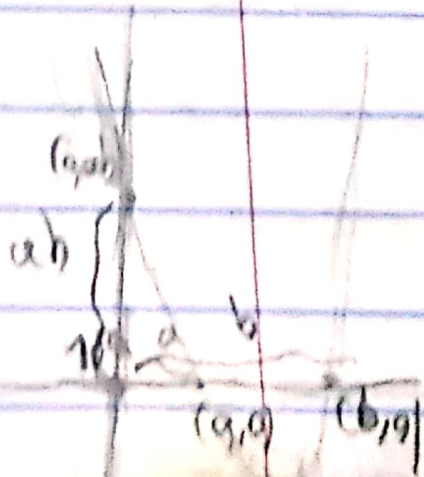النقطة الثابتة هي $(0,1)$ الإثبات :

أرزم حلول المعادلة هي a,b

تقاطعات المنحنى مع المحور x هي $(a,0) , (b,0)$

ومع المحور y هي $(0, ab)$

● من صورة النقطة $(9,0)$

$$7.ab = a \cdot b$$

إذن النقاط $(0,1), (0,ab), (b,0), (a,0)$

على مارّة واحدة

problem 4 a: $44 \cdot 45 < 2021$

$(44-k)(45+k) = 44 \cdot 45 - k - k^2 < 44 \cdot 45 < 2021$

$(44, 45, 44 \cdot 45) \longrightarrow$ we need to remove at least 44

$(43, 46, 43 \cdot 46)$ example: remove 1 to 44

$(42, 47, 42 \cdot 47)$ $\{45, 46, \cdots, 2021\}$

$(1, 99, 1 \cdot 99)$ طالما أكثر من i, j

$i \cdot j \geq 45 \cdot 46 > 2021$ ✓

problem 4 b: example for any k:

$$\frac{1}{k!}, \frac{2}{k!}, \frac{3}{k!}, \dots, \frac{k}{k!} \in \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$$

problem 5:

$(x-n) \times 2 (x^n + nx^{n-1} + \cdots + n^n) - x^n) = 0 \times (x-n)$

$\Rightarrow 2x^{n+1} - 2n^{n+1} - x^{n+1} + n x^n = 0$

$\Rightarrow x^{n+1} + n x^n - 2n^{n+1} = 0$

If $x \geq 0$

$x = n$ is a zero

$x > n$

$\Rightarrow x^{n+1} + n x^n - 2n^{n+1} > n^{n+1} + n \cdot n^n - 2n^{n+1} = 0$

$x < n$

$\Rightarrow x^{n+1} + n x^n - 2n^{n+1} < n^{n+1} + n \cdot n^n - 2n^{n+1} = 0$

if $x < 0$, $x = -y$

n is odd $\Rightarrow y^{n+1} - n y^n - 2n^{n+1} = 0$

$y > n$ $y^n (y-n)$ is increasing

$\Rightarrow \exists$ one root for $y > n \Rightarrow$ Just 2 zeros

always there is complex solution

exept $n = 1$

n is even $\Rightarrow n y^n - y^{n+1} - 2n^{n+1} = 0$ $(y > 0)$

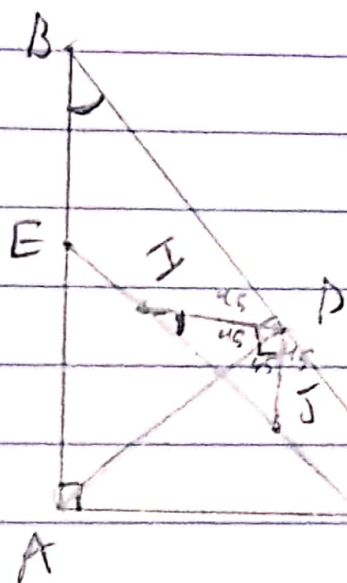if $y \geq n \Rightarrow y^{n+1} \geq n y^n \Rightarrow n y^n - y^{n+1} - 2n^{n+1} < 0$

if $y < n$

$n y^n - y^{n+1} - 2n^{n+1} < n y^n - 2n^{n+1} < 0$

only one zero of the polynomial

problem 7:

$$AE = AF \Leftarrow BC \parallel IJ \qquad \text{أي} \quad AB = AC$$

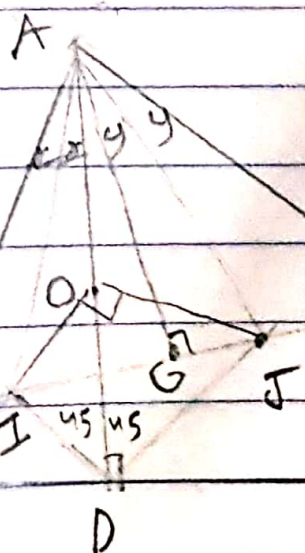$$\triangle BDA \sim \triangle ADC \qquad\qquad : \angle BAC = 90$$

$$\Rightarrow \frac{DI}{DJ} = \frac{AB}{AC}, \quad \angle IDJ = 90$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DIJ$$

$$\angle DIJ = \angle ABC$$

$$\Rightarrow BDIE \text{ cyclic}$$

$$\Rightarrow \angle AEF = \angle BDI = 45 \Rightarrow AE = AF$$

إذا كان $AB \neq AC$, $AE = AF$

$$\angle IAE = \angle IAD = x$$

$$\angle JAF = \angle JAD = y$$

ارسم منصف الزاوية A

وهو العامود المنصف لـ EF

يقطعه من G

$$\angle GAF = \angle GAE \Rightarrow \angle GAJ = x, \angle GAI = y$$

AG و AD مترافقتان زاويا للزاوية $\overline{IAJ}$ على أن AG عامود و

AD غير يجر كز AIJ , وليكن O

إذاً O على العامود المنصف لـ IJ وعلى منصف الزاوية IDJ

إذاً O منتصف القوس IJ في الرباعي DIJ

$$\Rightarrow \angle IOJ = 180 - \angle IDJ = 90 \Rightarrow \angle IAJ = 45 \Rightarrow \angle BAC = 90$$