تمارين على قابلية القسمة

متطابقات جبرية مهمة:

- إذا كانت n عدد صحيح موجب فإن:

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

- إذا كانت n عدد صحيح فردي موجب فإن:

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

1) اثبت أن $1\underbrace{0....0}_{200}1$ يقبل القسمة على 1001 .

2) بفرض $m > n \geq 0$. اثبت أن $(2^{2^n}+1) \mid (2^{2^m}-1)$.

3) لكل عدد صحيح موجب n ، نكتب $S(n)$ ترمز لمجموع أرقام العدد في النظام العشري ، بين أن $9 \mid n$ ، إذا وفقط إذا كان $9 \mid S(n)$.

4) إذا كانت A مجموع منازل العدد 4444^{4444} ، و كانت B مجموع منازل العدد A . أوجد مجموع منازل العدد B .

5) بفرض $k \geq 1$ عدد فردي ، n عدد صحيح موجب ، اثبت أن $1^k + 2^k + ... + n^k$ لا يقبل القسمة على $n+2$.

6) بفرض m,n عددين صحيحين موجبين ، $m > 2$. اثبت أن $(2^m - 1)$ لا يقسم (2^n+1) .

7) 11 بنتاً و n ولداً ذهبوا لالتقاط الورود ، فإذا قطف كل الأطفال n^2+9n-2 وردة ، وكل طفل قطف نفس العدد من الورود. أيهم أكثر عدداً من بين الأطفال الأولاد أم البنات ؟

8) بفرض n صحيح موجب ، كتب على الصورة $\overline{a_k....a_1a_0}$ (حيث $0 \leq a_i \leq 9, a_k \neq 0$) ، بوضع $T(n) = a_0 - a_1 + ... + (-1)^k a_k$ (الجمع التبادلي لأرقام n يبدأ برقم آحاد n) . بين أن 11 تقسم n إذا وفقط إذا كان $9 \mid T(n)$.

9) ليكن هناك n عدد صحيح لهم الخاصية التالية : الفرق بين حاصل ضرب أي $n-1$ عدداً منها والعدد الباقي يقبل القسمة على n . اثبت أن مجموع مربعات هذه ال n عدداً أيضاً يقبل القسمة على n .

10) لتكن a, b, c, d أعداد صحيحة بحيث $ad - bc > 1$. اثبت أن أحد هذه الأعداد الأربعة على الأقل لا يقبل القسمة على $ad - bc$.

11) أوجد كل الأعداد المكونة من رقمين بحيث إذا ضربنا العدد في أي من $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ مجموع أرقامه لا يتغير .