Test 6

Level 4+, June 21, 2022

Problem 6.1. Five positive reals a, b, c, d, e have product equal to 1. Prove that

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{d^2} + \frac{d^2}{e^2} + \frac{e^2}{a^2} \geq a + b + c + d + e$$

Problem 6.2. Given is an odd integer $n \geq 1$. Let S be the set of all points in the three-dimensional space, whose all coordinates belong to the set $\{0, 1, \dots, n\}$. Determine the maximum size of a subset $A \subseteq S$ with the following property: For every two distinct points $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in A$ among the three numbers

$$x_1 - y_1, \quad x_2 - y_2, \quad x_3 - y_3$$

there is at least one positive number and at least one negative number.

Problem 6.3. Let ABC be an acute, non isosceles triangle with orthocenter H and circumcenter O. Denote D, E as midpoints of segments AB, AC. Take M, N on BC such that $MB = BC = CN$ (B is between M, C and C is between N, B). Denote P, Q as the projections of H onto the lines BE, CD. The circumcircles of triangle ABN, ACM respectively meets AQ, AP again at Y, X. Suppose that the line XY cuts BC at K. Prove that AK is perpendicular to OH.

السؤال الأول

الأعداد الحقيقية الموجبة a,b,c,d,e حاصل ضربها 1. أثبت أن

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{d^2}+\frac{d^2}{e^2}+\frac{e^2}{a^2}\geq a+b+c+d+e$$

السؤال الثاني

لدينا العدد الصحيح الفردي $n \geq 1$. لتكن S هي مجموعة كل النقاط في الفراغ الثلاثي الأبعاد، والتي كل إحداثياتها تنتمي للمجموعة $\{0,1,...,n\}$. عين القيمة العظمى لعدد عناصر المجموعة الجزئية $A \subseteq S$ والتي لها الخاصية التالية: لكل نقطتين مختلفتين $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\in A$ ، من بين الأعداد الثلاثة

$$x_1-y_1,\quad x_2-y_2,\quad x_3-y_3$$

يوجد عدد موجب على الأقل، وعدد سالب على الأقل.

السؤال الثاني عشر

ليكن المثلث ABC حاد الزوايا وغير متطابق الضلعين، نقطة تقاطع ارتفاعاته ومركزه المحيط هما H,O تواليًا. لتكن D,E هما منتصفي القطعتين AB,AC تواليًا. لتكن M,N على BC بحيث $MB=BC=CN$ (B بين M,C و C بين N,B). لتكن P,Q هما مسقطي H على المستقيمين BE,CD تواليًا. الدائرتان المحيطتان بالمثلثين ABN,ACM تقطعان AQ,AP مرة أخرى في Y,X تواليًا. افترض أن المستقيم XY يقطع BC في K. أثبت أن $AK\perp OH$.

زمن الاختبار 4 ساعات ونصف

7 درجات لكل سؤال

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والسداد