Saudi International Olympiad Math Teams
November 2019
Level 4 Test I

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity
موهبة

السؤال الأول:

Let P(x) be a polynomial of degree n > 1 with integer coefficients. What is the largest possible number of consecutive integers that can be presented in the following set $P(k) \mid k \in \mathbb{Z}$?

لتكن $P(x)$ كثيرة حدود من الدرجة $n > 1$ ومعاملاتها أعداد صحيحة. ما أكبر عدد ممكن من الأعداد الصحيحة المتتالية التي يمكن تمثيلها في المجموعة التالية $P(k) \mid k \in \mathbb{Z}$.

السؤال الثاني

الشكل $ABCD$ رباعي دائري تقاطع قطراه AC, BD في X ، والنقطتان E, F منتصفا AB, CD على الترتيب. أثبت أنه إذا كان $\angle AFD = \angle CEB$ فإن $\angle XFC = \angle ABC$.

السؤال الثالث:

Let $n \geq 2$ be an integer and $a_{i,j}$ for $1 \leq i \leq n+2$ and $1 \leq j \leq n$ be real numbers. Prove that one can find indices $1 \leq i_0 < i_1 \leq n+2$ such that:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{i_1,k} - a_{i_2,k})^2 \neq 1$$

لتكن $n \geq 2$ عدد صحيح و $a_{i,j}$ لكل $1 \leq i \leq n+2$ و $1 \leq j \leq n$ أعداد حقيقية. اثبت أنه يمكن إيجاد ترقيم $1 \leq i_0 < i_1 \leq n+2$ بحيث:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{i_1,k} - a_{i_2,k})^2 \neq 1$$

السؤال الرابع:

Let $n \geq 2$ be a fixed integer. Consider the sequence $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ defined by

لتكن $n \geq 2$ عدد صحيح ثابت. اعتبر المتتابعة $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ المعرفة كالتالي

$$a_k = \operatorname{lcm}(k, k+1, \ldots, k+n-1).$$

Find all integers n such that there exist number M such that $a_{k+1} > a_k$ for all $k \geq M$.

أوجد كل الأعداد الصحيحة n بحيث يوجد عدد صحيح M يحقق أن $a_{k+1} > a_k$ لكل $k \geq M$.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والسداد