中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

SA24227465 赵乐君 1/4

306. $h_n = \begin{cases} 0 & n\text{为偶} \\ 2^{n-1} & n\text{为奇} \end{cases}$

307. $h_0 = 2$, $h_1 = 6$, $h_2 = 24$, $h_3 = 120$.

通过观察可以得出 $h_n = (n+2)!$

假设 $h_n = (n+2)!$

$h_{n+1} = (n+3)\cdot h_n = (n+3)(n+2)! = (n+3)!$

且 h_0 满足该式，得证 $h_n = (n+2)!$

324.) $h_n = 4h_{n-2}$ $h_0 = 0$ $h_1 = 1$

$g(x) = h_0 + h_1 x + \cdots + h_n x^n$

$-4x^2 g(x) = -4h_0 x^2 - 4h_1 x^3 - 4h_2 x^4 - 4h_n x^{n+2}$

$(1-4x^2)g(x) = h_0 + h_1 x + (h_2 - 4h_0)x^2 + \cdots + (h_n - 4h_{n-2})x^n$

由于 $h_n - 4h_{n-2} = 0$.

$(1-4x^2)g(x) = h_0 + h_1 x = x$

$g(x) = \frac{x}{1-4x^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1+2x}\right)$

$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + (2x)^2 + \cdots + (2x)^n$

$\frac{1}{1+2x} = 1 - 2x + (-2x)^2 + \cdots + (-2x)^n$

$4g(x) = 1 + 2x + (2x)^2 + \cdots + (2x)^n + 1 - 2x + (-2x)^2 + \cdots + (-2x)^n$

$4g(x) = 2 + 2\cdot(2x)^2 + 2\cdot(2x)^4 + \cdots + 2\cdot(2x)^{2n}$

$2g(x) = 1 + (2x)^2 + \cdots + (2x)^{2n}$

生成函数为 $g(x) = \frac{x}{1-4x^2}$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

3>4. ii) $h_n = h_{n-1} + h_{n-2}$ $h_0=1$ $h_1=3$

设 $g(x) = h_0 + h_1x + \cdots + h_nx^n$

$-xg(x) = -xh_0 - h_1x^2 - \cdots - h_nx^{n+1}$

$-x^2g(x) = -h_0x^2 - h_1x^3 - \cdots - h_nx^{n+2}$

$(1-x-x^2)g(x) = h_0 + (h_1-h_0)x + (h_2-h_1-h_0)x^2 + \cdots + (h_n-h_{n-1}-h_{n-2})x^n$

又 $h_n - h_{n-1} - h_{n-2} = 0$ 故 $(1-x-x^2)g(x) = 1+2x$

生成函数 $g(x) = \dfrac{1+2x}{1-x-x^2}$

iii) $h_n = h_{n-1} + 9h_{n-2} - 9h_{n-3}$ $h_0=0$ $h_1=1$ $h_2=2$

设生成函数 $g(x) = h_0 + h_1x + \cdots + h_nx^n$

$-xg(x) = -h_0x - h_1x^2 - \cdots - h_nx^{n+1}$

$-9x^2g(x) = -9h_0x^2 - 9h_1x^3 - \cdots - 9h_nx^{n+2}$

$9x^3g(x) = 9h_0x^3 + 9h_1x^4 + \cdots + 9h_nx^{n+3}$

$(1-x-9x^2+9x^3)g(x) = h_0 + (h_1-h_0)x + (h_2-h_1-9h_0)x^2 + (h_3-h_2-9h_1+9h_0)x^3 + \cdots + (h_n-h_{n-1}-9h_{n-2}+9h_{n-3})x^n$

又 $h_n - h_{n-1} - 9h_{n-2} + 9h_{n-3} = 0$ 故 $(1-x-9x^2+9x^3)g(x) = x+x^2$

生成函数 $g(x) = \dfrac{x+x^2}{1-x-9x^2+9x^3}$

iv) $h_n = 8h_{n-1} - 16h_{n-2}$ $h_0=-1$ $h_1=0$.

设生成函数 $g(x) = h_0 + h_1x + \cdots + h_nx^n$

$-8xg(x) = -8h_0x - 8h_1x^2 + \cdots - 8h_nx^{n+1}$

$16x^2g(x) = 16h_0x^2 + 16h_1x^3 + \cdots + 16h_nx^{n+2}$

$(1-8x+16x^2)g(x) = h_0 + (h_1-8h_0)x + (h_2-8h_1+16h_0)x^2 + \cdots + (h_n-8h_{n-1}+16h_{n-2})x^n$

又 $h_n - 8h_{n-1} + 16h_{n-2} = 0$ 故 $(1-8x+16x^2)g(x) = 8x-1$

$g(x) = \dfrac{8x-1}{16x^2-8x+1}$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

SA24225445 赵行君 314

324. v) $h_n = 3h_{n-1} - 2h_{n-3}$ $h_0=1$ $h_1=0$ $h_2=0$.

设 $g(x) = h_0 + h_1x + h_2x^2 + \cdots + h_nx^n$

$-3x^3g(x) = -3h_0x^2 - 3h_1x^3 - \cdots - 3h_nx^{n+2}$

$2x^3g(x) = 2h_0x^3 + 2h_1x^4 + \cdots + 2h_nx^{n+3}$

$(1-3x^2-2x^3)g(x) = h_0 + h_1x + (h_2-3h_0)x^2 + (h_3-3h_1+2h_0)x^3 + \cdots + (h_n - 3h_{n-1} + 2h_{n-3})x^n$

又 $h_n - 3h_{n-2} + 2h_{n-3} = 0$ 故：$(1-3x^2-2x^3)g(x) = 1-3x^2$

生成函数 $g(x) = \dfrac{1-3x^2}{1-3x^2-2x^3}$

vi) $h_n = 5h_{n-1} - 6h_{n-2} - 4h_{n-3} + 8h_{n-4}$ $h_0=0$ $h_1=1$ $h_2=1$ $h_3=2$

设 $g(x) = h_0 + h_1x + \cdots + h_nx^n$

$-5xg(x) = -5h_0x - 5h_1x^2 - \cdots - 5h_nx^{n+1}$

$6x^2g(x) = 6h_0x^2 + 6h_1x^3 + \cdots + 6h_nx^{n+2}$

$4x^3g(x) = 4h_0x^3 + 4h_1x^4 + \cdots + 4h_nx^{n+3}$

$-8x^4g(x) = -8x^4h_0 - 8h_1x^5 - \cdots - 8h_nx^{n+4}$

$(1-5x+6x^2+4x^3-8x^4)g(x) = h_0 + (h_1-5h_0)x + (h_2-5h_1+6h_0)x^2 + (h_3-5h_2+6h_1+4h_0)x^3 + (h_4-5h_3+6h_2+4h_1-8h_0)x^4$

$+ \cdots + (h_n - 5h_{n-1} + 6h_{n-2} + 4h_{n-3} - 8h_{n-4})x^n$

又 $h_n - 5h_{n-1} + 6h_{n-2} + 4h_{n-3} - 8h_{n-4} = 0$. 故：$(1-5x+6x^2+4x^3-8x^4)g(x) = x - 4x^2 + 3x^3$

生成函数 $g(x) = \dfrac{x-4x^2+3x^3}{1-5x+6x^2+4x^3-8x^4}$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

SA24227465 赵行君 4/4

331. $h_n = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$

生成函数 $g(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \cdots + h_n x^n$

$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$　　$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$

因此 $g(x) = \frac{x(1+x)}{2(1-x)^3} - \frac{x}{2(1-x)^2}$

341. 根据n位数中1,3的奇偶进行分类.

	1的数量	3的数量	
令	奇	奇	为 a_n
令	奇	偶	为 b_n
令	偶	奇	为 c_n
令	偶	偶	为 h_n.

对于 a_n，考虑最后一位数字

若为1：其数量对等于 c_{n-1}

若为3：其数量等于 b_{n-1}

若为5.7.9：~~3c~~ $3a_{n-1}$

$a_n = c_{n-1} + b_{n-1} + 3a_{n-1}$ ①

同理：$b_n = h_{n-1} + a_{n-1} + 3b_{n-1}$ ②

$c_n = a_{n-1} + h_{n-1} + 3c_{n-1}$ ③

$h_n = b_{n-1} + c_{n-1} + 3h_{n-1}$ ④ ⑥

且 $a_n + b_n + c_n + h_n = 5^n$ ⑤

初始条件：$a_0 = b_0 = c_0 = 0$　　$h_0 = 1$

由对称性知：$b_n = c_n$.

故：$a_n + 2b_n + h_n = 5^n$　　$h_n - 3h_{n-1} = 2b_{n-1}$ ⑥

$\Rightarrow a_n + 2h_{n+1} - 2h_n = 5^n$ ⑦

$\Rightarrow a_{n-1} + h_n - 2h_{n-1} = 5^{n-1}$ ⑧.

结合 ⑦,⑥

⑦ − 3⑧ $\Rightarrow h_{n+1} - 4h_n + 3h_{n-1} = 2\cdot 5^{n-1}$

$h_n - 4h_{n-1} + 3h_{n-2} = 2\cdot 5^{n-2}$

齐次递推式为 $h_n - 4h_{n-1} + 3h_{n-2} = 0$.

$x^2 - 4x + 3 = 0$. $\Rightarrow x_1 = 3$　$x_2 = 1$

$h_n = c_1 3^n + c_2 1^n$　　$h_0 = 1$　~~h_1~~ $h_1 = 3$.

特解 $h_n^* = \frac{1}{4}\cdot 5^n$

$\Rightarrow h_n = c_1 3^n + c_2 + \frac{1}{4}\cdot 5^n$

代入初值：$h_n = \frac{1}{2}\cdot 3^n + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot 5^n$

$= \frac{5^n + 3^{n+1} + 1}{4}$