



# 中国科学技术大学

University of Science and Technology of China

地址: 中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编: 230026

电话: 0551-63602184 传真: 0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

SA24221465

赵乐君

1/3

31.  $3 \times 4$  棋盘用多米诺牌的完美覆盖有多少种.

先将  $3 \times 4$  的棋盘看作  $1 \times 4$  和  $2 \times 4$  棋盘的拼接.

$1 \times 4$  棋盘有一种完美覆盖.

$2 \times 4$  棋盘有 5 种.

拼接时有  $2 \times 4$  在上和  $1 \times 4$  在上两种可能.

共记  $2 \times 5 = 10$  种可能, 而又重复了 1 种: , 即全部横置的可能, 故减去 1 种共 9 种.

再加上无法被分割的 2 种情况

共  $9 + 2 = 11$  种.

代入 Fischer 公式  $P(m, n) = \prod_{j=0}^{m/2-1} \prod_{k=0}^{n/2-1} (4 \cos^2(\frac{(j+1)\pi}{2m+2n}) + 4 \cos^2(\frac{(k+1)\pi}{2n+2}))$

$P(3, 4) = 11$ , 也可得出答案.

41. 设 3 阶幻方为

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ d & e & f \end{bmatrix}, \text{ 则}$$

$$\begin{cases} a+b+c=15 & ① \\ d+e+f=15 & ② \\ a+y+f=15 & ③ \\ b+y+e=15 & ④ \\ c+y+d=15 & ⑤ \end{cases}$$

$$② + ④ + ⑤ - ① - ③$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y = 15 \\ y = 5 \end{cases}$$

得证 3 阶幻方中心必为 5.

2) 由 1) 可知, 3 阶幻方可记为  $\begin{bmatrix} a & b & c \\ x & 5 & z \\ d & e & f \end{bmatrix}$

可知  $x+z=10$ . 在剩余的数中,  $\begin{cases} 1+9=10 \\ 2+8=10 \\ 3+7=10 \\ 4+6=10 \end{cases}$  不妨设  $x, z$  为 1, 9.

可得到  $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 5 & 9 \\ d & e & f \end{bmatrix}$ , 则  $a, d$  必为 8,  $b, c, e, f$  任一定

这样得到的幻方有  $C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 = 16$  种.  $C_4^1$  为  $(x, z)$  可从  $(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6)$  中任选,  $C_3^1$  为  $x, z$  互换. 第二个  $C_2^1$  为  $a, d$  互换. 由于  $x, z$  互换带来了重复的结果

(如  $\begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$  和  $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ ), 故再除以 2, 得证 3 阶幻方有 8 种.





# 中国科学技术大学

University of Science and Technology of China

地址: 中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编: 230026  
电话: 0551-63602184 传真: 0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

SA24225465

赵乐君

2/3

52. 假设一个  $2n \times 2n$  的棋盘. 纵向分割线有  $(2n-1)$  条. 若不存在断层线, 则每条纵向分割线对应的左右两列必有一个横向的多米诺牌挡住了该分割线.

并且, 由于行数为偶数, 为了分割线左右两侧的列都能放置纵向多米诺. 挡住了该条分割线的横向多米诺牌数必须是大于等于 2 的偶数. 横向分割线同理.

综上, 挡住所有分割线共需  $2 \times 2 \times (2n-1)$   
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 横、纵 最少两张  $(2n-1)$  条线.

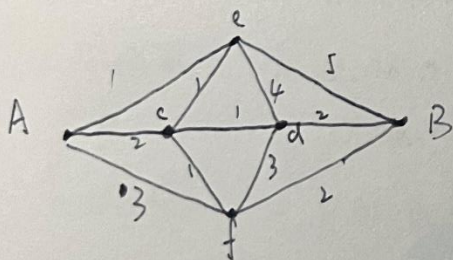
$2n \times 2n$  的棋盘有  $2n^2$  张多米诺牌.

应当满足的不等式是:  $2n^2 \geq 2 \times 2 \times (2n-1)$

$n \geq 4$  时, 该式成立.  $n=3$  时不成立, 取得证.

$6 \times 6$  棋盘每种完美覆盖都有断层线.

54.



最短路径为: A, c, d, B

A, c, f, B

A, e, c, d, B

A, e, c, f, B

A, f, B

长度为 5.





# 中国科学技术大学

University of Science and Technology of China

地址: 中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编: 230026  
电话: 0551-63602184 传真: 0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

SA24225465

赵乐君

313

57.

$$10 = 001010_{(2)}$$

$$20 = 010100_{(2)}$$

$$30 = 011110_{(2)}$$

$$40 = 101000_{(2)}$$

$$\oplus 50 = 110010_{(2)}$$

$$011010_{(2)} = 26 \neq 0$$

因为二进制异或和不为0

所以这局游戏不平衡。

第一个取石子玩家有必胜的手段。

若从10堆中取:  $20 \oplus 30 \oplus 40 \oplus 50 = 010000_{(2)} = 16 > 10$

不能从10堆中取。

从20堆中取:  $60 \oplus 30 \oplus 40 \oplus 50 = 001110 = 14$

从20堆中取6个, 将20堆变为14个即可。

从30堆中取:  $10 \oplus 20 \oplus 40 \oplus 50 = 000100 = 4$

从30堆取26个, 将30堆变为4个即可。

从40堆取:  $10 \oplus 20 \oplus 30 \oplus 50 = 110010 = 50 > 40$

不能从40堆中取。

从50堆取:  $10 \oplus 20 \oplus 30 \oplus 40 = 101000 = 40$

从50堆取10个, 将50堆变为40个即可。