组合数学习题课-期中样卷

1.1

A 和 B 询问 C 的生日, C 告诉他们 10 个可能的日期:

6 月: 6 日, 8 日,
7 月: 4 日, 5 日, 8 日.
8 月: 4 日, 7 日.
9 月: 5 日, 7 日, 9 日.

然后 C 告诉了 A 月份, 告诉了 B 日子. A 说: 我不知道 C 的生日, 但我知道 B 也不知道. B 说: 一开始我不知道, 但我现在知道了. A说: 现在我也知道了. C 的生日是

由绿色部分可知，A得知的月份i对应的日期，也都存在在其他月份里，所以A才能确认B无法确认，因此排除6月和9月

由蓝色部分可知，在B确认正确月份为7月或8月后，B确认了最终的生日。所以B所得知的日期在7月和8月对应的日期中只出现一次，只能是7月5日、7月8日或8月7日

由粉色部分可知，A在得知B的判断后，得出了结论。如果A已知7月，无法根据B的说法判断出是5日还是8日。所以A拿到的月份是8月

最终得出，C的生日是8月7日

1-2 对应于逆序数列为 $6, 6, 5, 1, 2, 1, 0, 0$, 构造 $\{1, 2, \cdots, 8\}$ 的排列, 结果为

第八个数为0，代表8左侧有0个比8大的数字，先将8加入排列，$\{8\}$
第七个数为0，代表7左侧有0个比7大的数字，所以7在8左侧，$\{7, 8\}$；
第六个数为1，代表6左侧有1个比6大的数字，只有7，8大于6，所以6在8和7中间，$\{7, 6, 8\}$；
第五个数为2，代表5左侧有2个比5大的数字，所以5在已有排列第三位，$\{7, 6, 5, 8\}$；
第四个数为1，代表4左侧有1个比4大的数字，所以4在已有排列第二位，$\{7, 4, 6, 5, 8\}$；
第三个数为5，代表3左侧有5个比3大的数字，所以3在已有排列第六位，$\{7, 4, 6, 5, 8, 3\}$；
第二个数为6，代表2左侧有6个比2大的数字，所以2在已有排列第七位，$\{7, 4, 6, 5, 8, 3, 2\}$；
第一个数为6，代表1左侧有6个比1大的数字，所以1在已有排列第七位，**$\{7, 4, 6, 5, 8, 3, 1, 2\}$**；

1-3 以字典序生成 $\{1,2,\cdots,9\}$ 的 6 组合，紧跟在组合 $\{1,2,4,5,8,9\}$ 之后的组合是

定理 4.4.1 令 $a_1a_2\cdots a_r$ 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个 r-组合。在字典排序中，第一个 r-组合是 $12\cdots r$。最后一个 r-组合是 $(n-r+1)(n-r+2)\cdots n$。设 $a_1a_2\cdots a_r \neq (n-r+1)(n-r+2)\cdots n$。令 k 是满足 $a_k<n$ 且使得 a_k+1 不同于 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 中的任一个数的最大整数。那么，在字典排序中，$a_1a_2\cdots a_r$ 的直接后继 r-组合是

$$a_1\cdots a_{k-1}(a_k+1)(a_k+2)\cdots(a_k+r-k+1)$$

根据定理，$k = 4$是满足$a_k=5<n$且使得a_k+1不同于目前组合中任意一个数的最大整数，故后继组合为$\{1, 2, 3, 4, a_k+1, a_k+2, a_k+3\}$，即$\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$

1-4 在生成组合的反射Gray码算法中，紧接在110001011之后的是

3、4、5 阶反射 Gray 码。现在我们描述一种算法，该法能够直接构建 n 阶反射 Gray 码。为此，需要一个逐次性法则，它告诉我们，在反射 Gray 码中从一个 n 元组到下一个 n 元组时哪个地方需要改变（从 0 变到 1 或从 1 变到 0）。这个逐次性法则在下述的算法中给出。

如果 $a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0$ 是 0 和 1 的 n 元组，那么

$$\sigma(a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0)=a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_0$$

是它的 1 的个数（等于它所对应的组合的大小）。

以反射 Gray 码的顺序生成 0 和 1 的 n 元组的算法

以 n 元组 $a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0=00\cdots0$ 开始。当 n 元组 $a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0\neq10\cdots0$ 时，做：

ⅰ）计算 $\sigma(a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0)=a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_0$。

ⅱ）如果 $\sigma(a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0)$ 是偶数，则改变 a_0（从 0 变到 1 或从 1 变到 0）。

ⅲ）否则，确定这样的 j，使得 $a_j=1$，对满足 $j>i$ 的所有的 i，$a_i=0$，然后，改变 a_{j+1}（从 0 变到 1 或从 1 变到 0）。

注意，如果在步骤ⅲ）中 $a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0\neq10\cdots0$，那么 $j\leqslant n-2$，从而 $j+1\leqslant n-1$ 并确定 a_{j+1}。还要注意，在步骤ⅲ）中可能有 $j=0$，就是说，$a_0=1$；在这种情形下不存在满足 $i<j$ 的 i，我们则按ⅲ）中所指示的来改变 a_1。

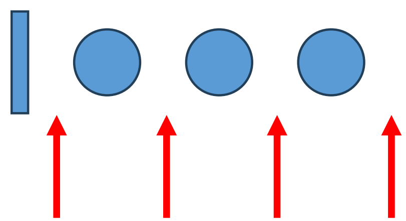
根据算法，σ(110001011)=5，为奇数，转至算法iii)，
得到j=0，改变$a_{j+1}=a_1$，故得到，
110001001

1-5 把 15 个相同的足球分给 4 个人，使得每人至少分得 3 个足球，不同分法的种数共有

每个人至少有三个足球，故可将题目转换为
把15-3*4=3个足球分给4个人，求不同分法的种数

等价于，三个相同的小球，插入三个板子，求插入的方法数

插入第一个板子：四个间隔，4
插入第二个板子：五个间隔，5
插入第三个板子：六个间隔，6
三个板子相同：A_3^3
故方法数为$4*5*6/A_3^3=20$



1-6 一个人希望访问 3 个城市，每一个城市正好访问 2 次，且从不连续访问同一城市 2 次. 实现这一方案的方法数有

设三个城市分别为a, b, c，题目可以理解为多重集{2·a, 2·b, 2·c}不能出现两个相同的元素相邻的6-组合数

由容斥原理可得

= {2·a, 2·b, 2·c}的6-组合数
- ({aa, 2·b, 2·c}的5-组合数 + {2·a, bb, 2·c}的5-组合数 + {2·a, 2·b, cc}的5-组合数)
+ ({aa, bb, 2·c}的4-组合数 + {aa, 2·b, cc}的4-组合数 + {2·a, bb, cc}的4-组合数)
- {aa, bb, cc}的3-组合数

$$= \frac{6!}{A_2^2 * A_2^2 * A_2^2} - \left(\frac{5!}{A_2^2 * A_2^2} + \frac{5!}{A_2^2 * A_2^2} + \frac{5!}{A_2^2 * A_2^2}\right) + \left(\frac{4!}{A_2^2} + \frac{4!}{A_2^2} + \frac{4!}{A_2^2}\right) - 3!$$

$$= 90 - 30*3 + 12*3 - 6$$
$$= 30$$

2 单词 PNEUMONOULTRAMICROSCOPICSILICOVOLCANOCONIOSIS (矽肺病) (可能是英语中最长的单词) 中的字母有多少个排列?

（作业题149）一共45个字母，统计其成分：75 98 22

{A:2, C:6, E:1, I:6, L:3, M:2, N:4, O:9, P:2, R:2, S:4, T:1, U:2, V:1}

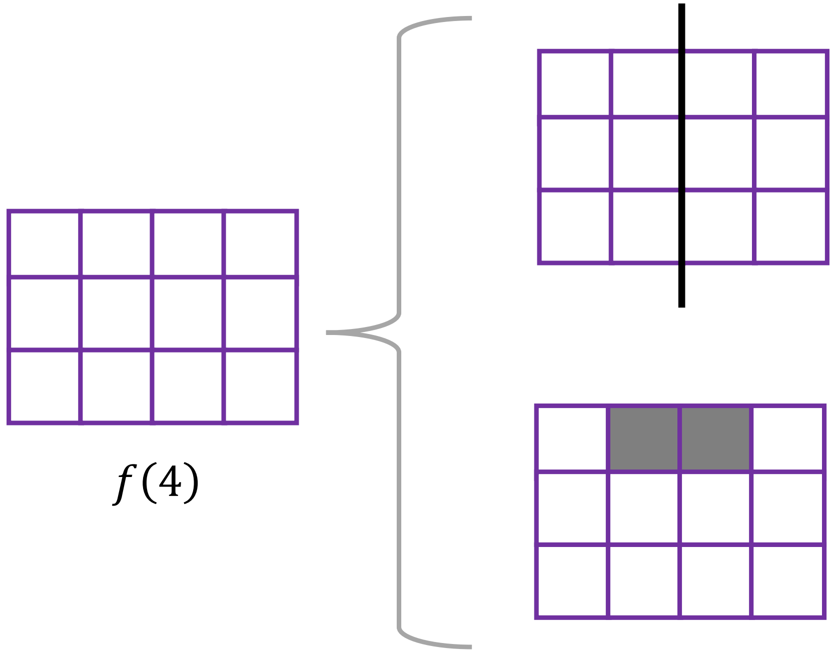
带入公式可得其排列数为：

$$\frac{45!}{2!\,6!\,1!\,6!\,3!\,2!\,4!\,9!\,2!\,2!\,4!\,1!\,2!\,1!}$$

3 求 3×4 棋盘的多米诺骨牌完美覆盖的方式数.

（作业题31）

设 $f(n)$为$3*$n的完美覆盖个数

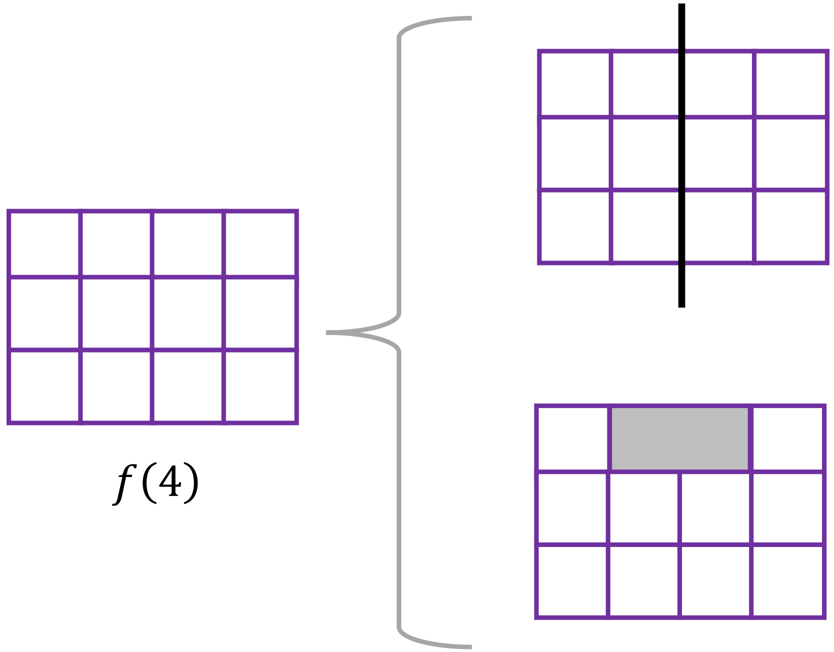


1. 可以完美切开一个3*2

2. 不可以完美切开一个3*2

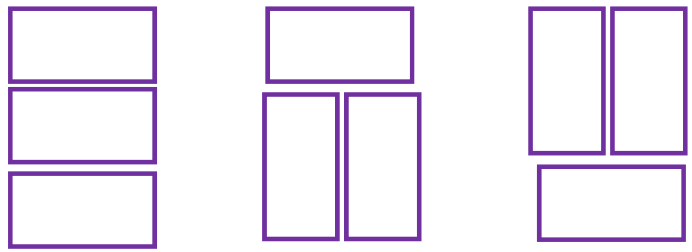
3 求 3×4 棋盘的多米诺骨牌完美覆盖的方式数.

设 $f(n)$为3 * n的完美覆盖个数



$f(4)$

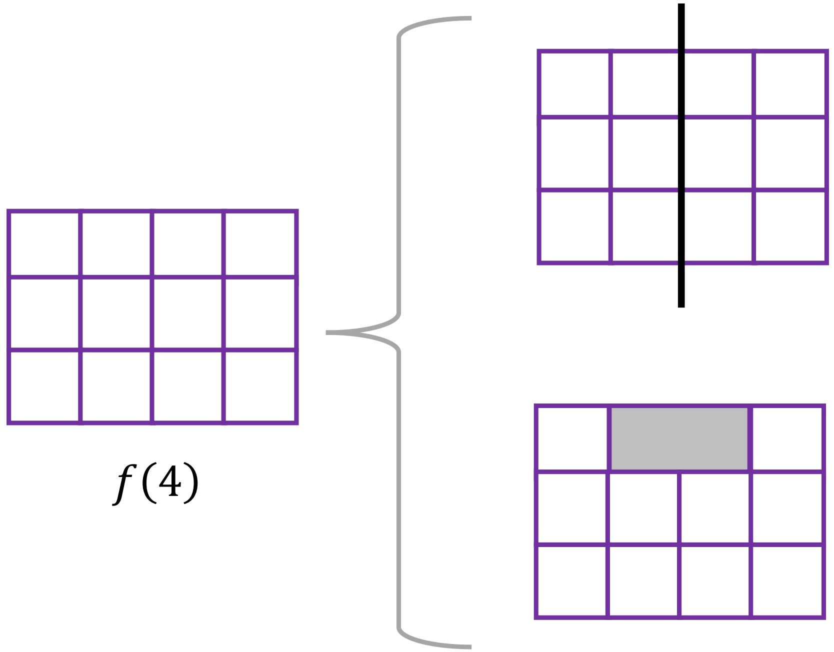
1. 可以完美切开一个3*2，数量为$f^2(2) = 9$



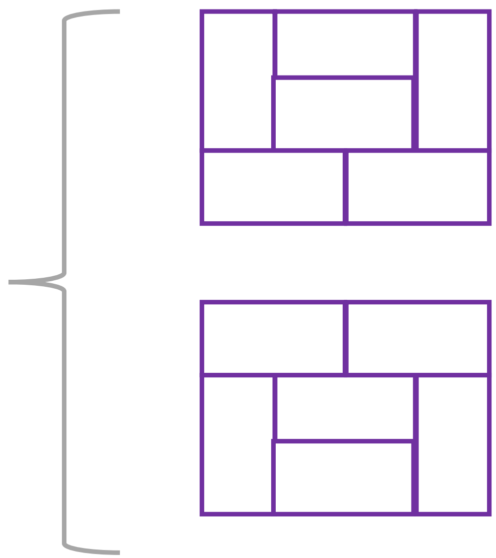
$f(2)$ **的三种**

3 求 3×4 棋盘的多米诺骨牌完美覆盖的方式数.

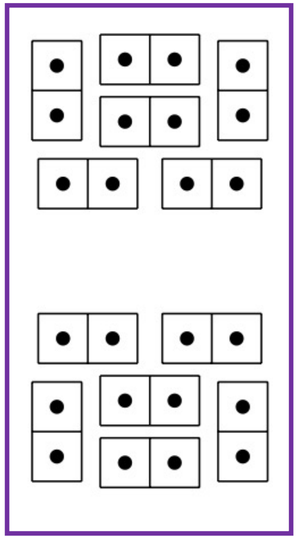
设 $f(n)$为$3 * \mathrm{n}$的完美覆盖个数, $f(4) = 3 * 3 + 2 = 11$

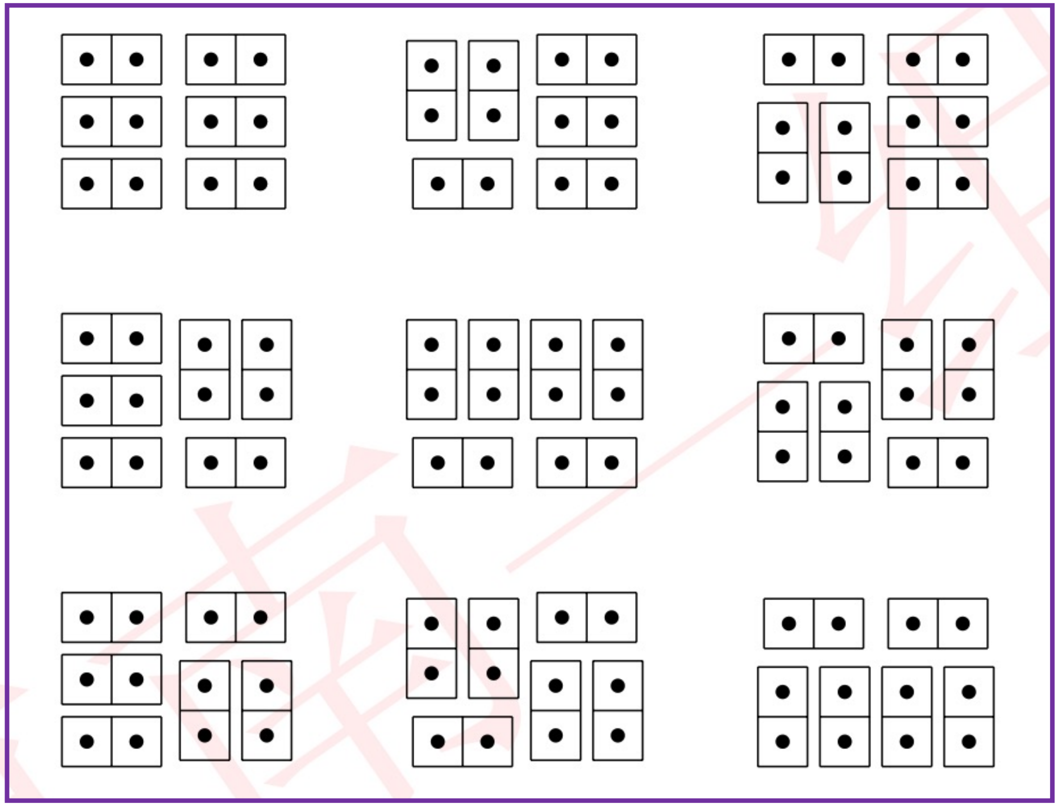


2. 不可以完美切开一个3*2, 只有两个

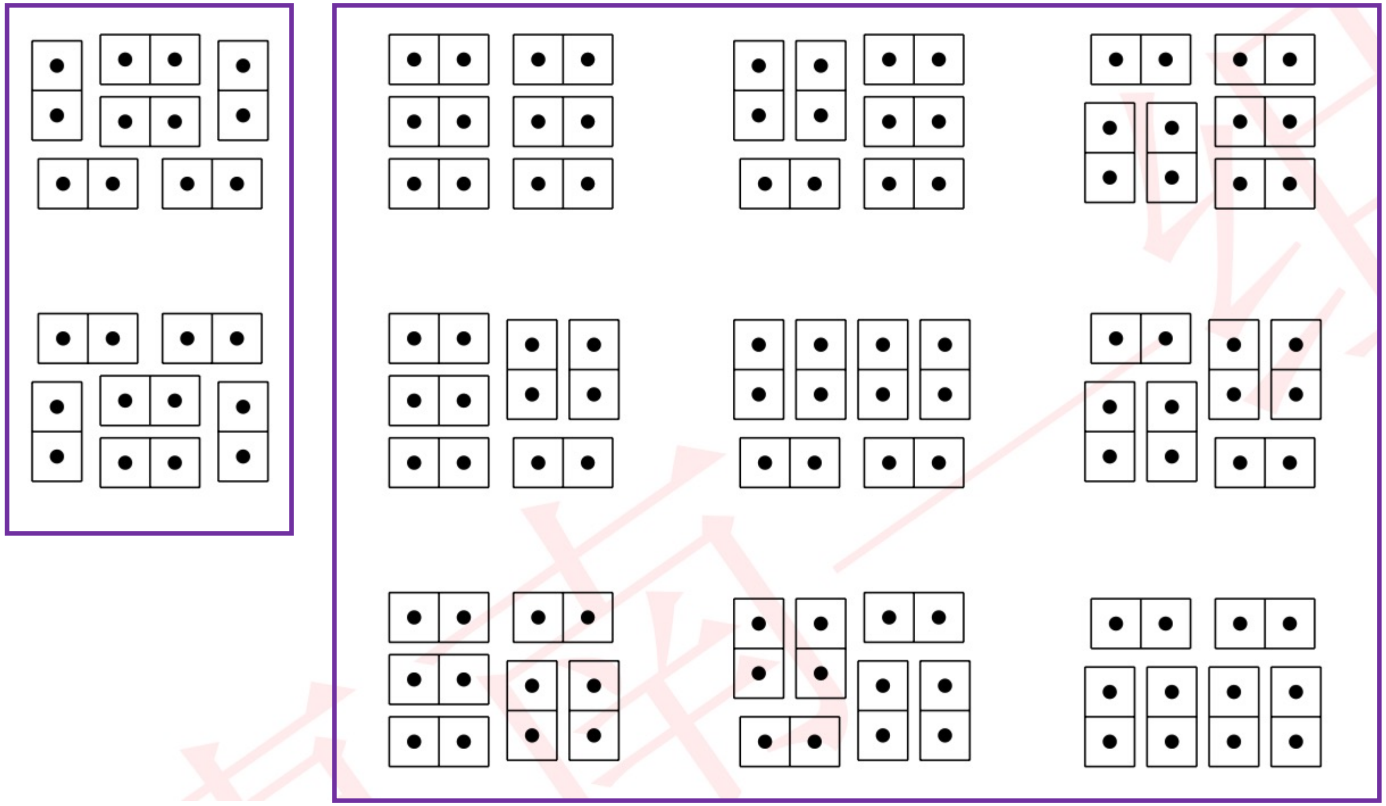


3 求 3×4 棋盘的多米诺骨牌完美覆盖的方式数.





3 求 3×4 棋盘的多米诺骨牌完美覆盖的方式数.

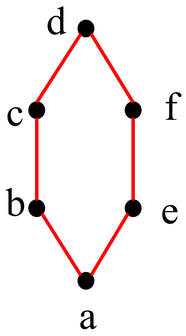


4 设 $X=\{a,b,c,d,e,f\}$, 在 X 上的偏序关系 R 定义为 aRb, bRc, cRd, aRe, eRf, fRd. 验证 R 是偏序集上的覆盖关系, 并确定这个偏序集的所有线性扩展.

（作业题192）

偏序集可以用几何的方法表示。为了叙述几何表示方法，需要定义偏序集$(X,\leqslant)$的覆盖关系。令 a 和 b 是 X 中的元素。如果 $a<b$ 并且没有元素 c 能够夹在 a 和 b 之间，那么 a 就被 b 覆盖（也说成 b 覆盖 a），记为 $a<_c b$；就是说，不存在元素 c，使得 $a<c$ 和 $c<b$ 同时成立。如果 X 是一个有限集，则由传递性可知，偏序$\leqslant$被它的覆盖关系唯一确定。因此，覆盖关系是描述偏序的有效方法。由定理 4.5.1 可知，如果$(X,\leqslant)$是全序集，则 X 的元素可以列成 x_1，x_2，…，x_n，使得 $x_1<_c x_2<_c\cdots<_c x_n$。正是由于这种原因，全序集也叫做线性有序集。

4 设 $X=\{a,b,c,d,e,f\}$, 在 X 上的偏序关系 R 定义为 aRb, bRc, cRd, aRe, eRf, fRd. 验证 R 是偏序集上的覆盖关系, 并确定这个偏序集的所有线性扩展.



所有的线性扩展为：

a b c e f d
a b e c f d
a b e f c d
a e f b c d
a e b f c d
a e b c f d

5 来自 A, B, C 三所学校的 90 个学生参加面试, 其中来自 A, B 和 C 校的学生人数分别是 20, 30 和 40. 面试程序为一次面试一位学生, 每次从尚未面试的学生中随机抽取一位, 完毕后再抽取下一位进行. A 校学生先于其他两校学生完成面试的概率是多大?

A要先于其他两个学校完成，则意味着A不是最后一个，分两种情况：

（1）B的学生最后一个面试，概率为：$\frac{30}{20+30+40}$

这时可以不考虑B的学生，只看A和C的排序，C位于AC排序最后一个的概率是$\frac{40}{20+40}$，最后概率为$\frac{30}{20+30+40}*\frac{40}{20+40}$

（2）C的学生最后一个面试，概率为：$\frac{40}{20+30+40}$

这时可以不考虑C的学生，只看A和B的排序，B位于AB排序最后一个的概率是$\frac{30}{20+30}$，最后概率为$\frac{40}{20+30+40}*\frac{30}{20+30}$

总概率为：$\frac{30}{20+30+40}*\frac{40}{20+40}+\frac{40}{20+30+40}*\frac{30}{20+30}=\frac{22}{45}$

6 已知正整数 x_1, x_2 和 x_3 满足方程 $x_1+x_2+x_3=2023$, 且 $x_1x_2x_3$ 能被 2023 整除. 求不同解集 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 的个数.

考虑因子7：若x_1能被7整除，则$x_2 + x_3$也能被7整除。若x_2能被7整除，则x_3同样能被整除。否则 x_2和x_3 都不能被7整除，即不含有共同因子7。即对7，要么只有一个x能整除，要么7为公因子。因子17同理。

故可以将共同因子作为分类条件，用有无共同因子7或17的正整数y_1、 y_2、 y_3表示

i. 不含有共同因子

1. $7 \cdot 17^2 y_1 + y_2 + y_3 = 7 \cdot 17^2, \quad 7, 17 \nmid y_2, y_3$

2. $17^2 y_1 + 7y_2 + y_3 = 7 \cdot 17^2, \quad 17 \nmid y_2, y_3$

ii. 只含有共同因子7

$$7 \cdot (17^2 y_1 + y_2 + y_3) = 7 \cdot 17^2, \quad 17 \nmid y_2, y_3$$

iii. 只含有共同因子17

$$17 \cdot (7y_1 + y_2 + y_3) = 7 \cdot 17^2, \quad 7 \nmid y_2, y_3$$

iv. 含有共同因子7*17

$$7 \cdot 17(y_1 + y_2 + y_3) = 7 \cdot 17^2$$

6 已知正整数 x_1, x_2 和 x_3 满足方程 $x_1+x_2+x_3=2023$, 且 $x_1x_2x_3$ 能被 2023 整除. 求不同解集 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 的个数.

考虑分类i　不含有共同因子

1. $7\cdot 17^2 y_1 + y_2 + y_3 = 7\cdot 17^2, \quad 7, 17 \nmid y_2, y_3$

2. $17^2 y_1 + 7y_2 + y_3 = 7\cdot 17^2, \quad 17 \nmid y_2, y_3$

情况1，无解

情况2，此时有17*17* y_1+ 7* y_2+ y_3=7*17*17，

首先可以确定y_1的取值，只能取1~6

确定y_1后，y_2取值范围为1~$\left\lfloor\frac{7*17*17-y_1*17*17}{7}\right\rfloor$，去除其中能被17整除的个数$\left\lfloor\frac{7*17*17-y_1*17*17}{7*17}\right\rfloor$

故解集数目为

$$|A_1| = \sum_{n=1}^{7-1}\left\{\left\lfloor\frac{17^2 n}{7}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{17^2 n}{7\cdot 17}\right\rfloor\right\} = \sum_{n=1}^{6}\left\{39n + \left\lfloor\frac{2n}{7}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{3n}{7}\right\rfloor\right\}$$
$$= \frac{39\cdot 7\cdot 6}{2} + (0+0+0+1+1+1) - (0+0+1+1+2+2) = 816$$

6 已知正整数 x_1, x_2 和 x_3 满足方程 $x_1+x_2+x_3=2023$, 且 $x_1x_2x_3$ 能被 2023 整除. 求不同解集 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 的个数.

考虑分类2　只含有共同因子7

$$7\cdot(17^2y_1+y_2+y_3)=7\cdot 17^2,\quad 17\nmid y_2, y_3$$

无解

考虑分类3　只含有共同因子17

$$17\cdot(7y_1+y_2+y_3)=7\cdot 17^2,\quad 7\nmid y_2, y_3$$

有$(7*y_1+y_2+y_3)=7*17$

首先可以确定y_1的取值范围，只能取1-16

即$y_2+y_3=7*(17-y_1)$

y_2和y_3对称，共有$\left\lceil\frac{7*(17-y_1)-1}{2}\right\rceil=\left\lfloor\frac{7*(17-y_1)}{2}\right\rfloor$，

同时减去y_2和y_3含因子7的情况，即$\left\lceil\frac{7*(17-y_1)-1}{2*7}\right\rceil=\left\lfloor\frac{7*(17-y_1)}{2*7}\right\rfloor$，

故解集数目为

$$|A_2|=\sum_{n=1}^{17-1}\left\{\left\lfloor\frac{7n}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{7n}{2\cdot 7}\right\rfloor\right\}=\sum_{n=0}^{16}\left(3n+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)=3\sum_{k=0}^{16}n$$
$$=\frac{3\cdot 17\cdot 16}{2}=408.$$

6 已知正整数 x_1, x_2 和 x_3 满足方程 $x_1+x_2+x_3=2023$, 且 $x_1x_2x_3$ 能被 2023 整除. 求不同解集 $\{x_1,x_2,x_3\}$ 的个数.

考虑分类4　含有共同因子7*17

$$7\cdot 17(y_1+y_2+y_3)=7\cdot 17^2$$

有$y_1+y_2+y_3=17$

不妨设$y_1\le y_2\le y_3$

则y_1取值范围为1~$\left\lfloor\frac{17}{3}\right\rfloor$，

确定y_1后，y_2取值范围为y_1~$\left\lfloor\frac{17-y_1}{2}\right\rfloor$，

确定y_1, y_2后，y_3取值范围为y_2~（17- y_1- y_2 ）

故解集数为

$$|A_3|=\sum_{n=1}^{\left\lfloor\frac{17}{3}\right\rfloor}\sum_{k=n}^{\left\lfloor\frac{17-n}{2}\right\rfloor}1=\sum_{n=1}^{5}\left(\left\lfloor\frac{17-n}{2}\right\rfloor-n+1\right)=\sum_{k=0}^{4}\left(2+k+\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor\right)$$
$$=2+3+5+6+8=24$$

故最终结果为 $|A|=|A_1|+|A_2|+|A_3|=816+408+24=1248.$