



中国科学技术大学

University of Science and Technology of China

地址: 中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编: 230026

电话: 0551-63602184 传真: 0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

SA 24225465

赵升浩

1/3

74. 用鸽巢原理证明, 有理数 m/n 展开的十进制小数最终是要循环的.

证: 考虑长除法算式的运算方法. (设 $m < n$, 若 $m > n$, 则约掉若干个 n 后, 仍化为 $m < n$ 的情况)

第一步除法 ($n \neq 0$) 先将 m 乘上 10, 然后约掉 k 倍的 n , 得到余数 x .

设后面的若干步都不能整除掉 n , 每步都约掉了若干倍的 n , 并得到一个余数 x .

(每一步得到的余数 x 不一定相同).

由于始终不能整除掉 n , 且每一步的 x 都是除上 n 的余数, 可知:

$$0 < x < n$$

由此可推断: 在 n 步除法中, 必定有两次得到相同的余数 (因为 x 有 $n-1$ 个取值范围, 又由鸽巢原理可得此推论), 余数相同则展开式开始循环.

另: 若除尽, 则末尾的 0 也是一种循环, 如: $1/5 = 0.20$ 得证.

83. 有一个 100 人的聚会, 每个人都有偶数个熟人. 证明: 在此次聚会上存在 3 个人有相同个数的熟人.

证: 共有 100 人, 每个人有偶数个熟人, 则可能的熟人个数为: 0, 2, 4, ..., 98. 共 50 种.

则唯一的可能性就是每个取值各对应两人. 即两个的熟人数为 98, 两人为 96 ...

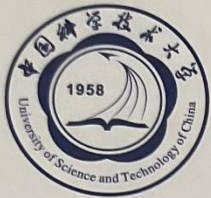
人为 0.

而这种可能性显然是不成立的. 若有人有 98 个熟人, 则表示在场的 100 人中, 除去他自己,

只有 1 人与他不是熟人, 而又有 2 人的熟人数为 0, 显然矛盾. 此种可能性不成立.

而其他的任何一种可能性中, 都存在 3 个人有相同个数的熟人.

得证.



中国科学技术大学

University of Science and Technology of China

地址: 中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编: 230026

电话: 0551-63602184 传真: 0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

SA24225465

赵乐君

2/3

86. 证明 $r(3, 3, 3) \leq 17$

证: 考虑有 17 个点的情况:

每一条边 - 一个点连接着 $17-1=16$ 条边. 16 条边被 3 种颜色着色. 至少有 1 种颜色有 $\lceil \frac{16}{3} \rceil = 6$ 条边. 这 6 条边连接着 6 个其他顶点. 设该点为 v_0 , 其余 6 点, 为 $v_1 \sim v_6$. v_0 与这 6 点之间的连线颜色为 A .

为了不形成一个颜色为 A 的环, $v_1 \sim v_6$ 点之间的所有边不得用颜色 A 连线.

那么 $v_1 \sim v_6$ 间的连线都要用 B, C 两种颜色连线.

已知 $r(3, 3) = 6$, 用两种颜色涂 6 个顶点, 连成 15 条边, 必定出现一个单色三角形. 若用 3 种颜色涂, 则又必定出现颜色 A 的单色三角形.

因此, $r(3, 3, 3) = 17$ 成立, 也即 $r(3, 3, 3) \leq 17$ 成立.

101. 1) 求 full house 的数目: $C(13, 1) \cdot C(4, 3) \cdot C(12, 1) \cdot C(4, 2)$
 $= \cancel{13 \times 4} \times 13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 6$
 $= 3744$

2) 顺子: 从 $(A-2-3-4-5)$ 到 $(10-J-Q-K-A)$ 共有 $P(10, 1) = 10$ 种.
花色共有 $4^5 = 1024$ 种可能.

排除同花顺: $10 \times (1024 - 4) = 10200$ 种.

3) 同花: 选出一种花色: $C(4, 1) = 4$
选出任意 5 张牌: $C(13, 5) = 1287$
减去 10 种顺子: $1287 - 10 = 1277$
共 $4 \times 1277 = 5148$ 种.

4) 同花顺: 选出一种花色: $C(4, 1) = 4$
顺子: $C(10, 1) = 10$
共 $4 \times 10 = 40$ 种.



中国科学技术大学

University of Science and Technology of China

地址: 中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编: 230026
电话: 0551-63602184 传真: 0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

赵乐君

SA 24225465

3/3

101. 5) 两对:

选择两个点数: $C(13, 2) = 78$

选择自对花色: $C(4, 2) = 6$

剩下的两张牌: $C(11, 1) \cdot C(4, 1) = 44$

共有 $78 \cdot 6 \cdot 44 = 123552$ 种.

6) 一对:

选择一个点数: $C(13, 1) = 13$

选择花色: $C(4, 2) = 6$

选择剩余3张牌: $P(11, 3) = 11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ $P(12, 3) = 220$

选择花色: $C(4, 1) = 4$

共 $13 \cdot 6 \cdot 220 \cdot 4 = 1098240$ 种.

122.

1) $C(17, 8) = 24310$ 种, 即在17步中选择8步向北, 剩余皆为向东.

2) 先计算经过 (4, 3) 这个街区的路径.

共有 $C(7, 3) \cdot C(10, 5) = 35 \cdot 252 = 8820$

然后, 由于这些路径经过水T, 将这些减去.

共有 $24310 - 8820 = 15490$ 种