一、功率谱密度

假如随机信号$x(t)$的自相关函数为$R_x(\tau)$，$R_x(\tau)$的傅里叶变换为

$$S_x(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

则定义$S_x(f)$为$x(t)$的自功率谱密度或称为自功率谱。因为$S_x(f)$可解释为$x(t)$的平均功率相对于频率的分布函数。自功率谱$S_x(f)$包含$R_x(\tau)$的全部信息。如果噪声信号中含有某种频率成分，可以从自功率谱中看出。

和自功率谱类似，两个随机信号$x(t)$和$y(t)$互相关的频率特性可用互功率谱密度来描述。互功率谱密度和互相关函数也是一傅里叶变换对。

$$S_{xy}(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{xy}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

对于离散随机序列 x(n)，自功率谱密度$S_x(f)$和自相关函数$R_x(m)$的关系为

$$S_x(f)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}R_x(m)e^{-j2\pi fmT_s}$$

其中，T_s为数据采样间隔。

对于离散随机序列$x(n)$和$y(n)$，互功率谱密度$S_{xy}(f)$和互相关函数$R_{xy}(m)$关系为

$$S_{xy}(f)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}R_{xy}(m)\,e^{-j2\pi fmT_s}$$

且有

$$S_{xy}(-f)=S_{yx}(f),\qquad S_x(f)S_y(f)\geq\left|S_{xy}(f)\right|^2$$

实际工程中随机序列长度均为有限长，因此利用有限长随机序列计算的自功率谱密度和互功率谱密度只是真实值的一种估计。

使用功率谱密度估计的基本方法是周期图法。周期图法是直接将信号的采样数据$x(n)$进行傅里叶变换求取功率谱密度估计的方法。假定有限长随机信号序列为$x(n)$，它的傅里叶变换和功率谱密度估计$\widehat{S_x}(f)$存在下面的关系

$$\widehat{S_x}(f)=\frac{1}{N}|x(f)|^2$$

式中，N为随机信号序列$x(n)$的长度，在离散的频率点$f=k\Delta f$，有

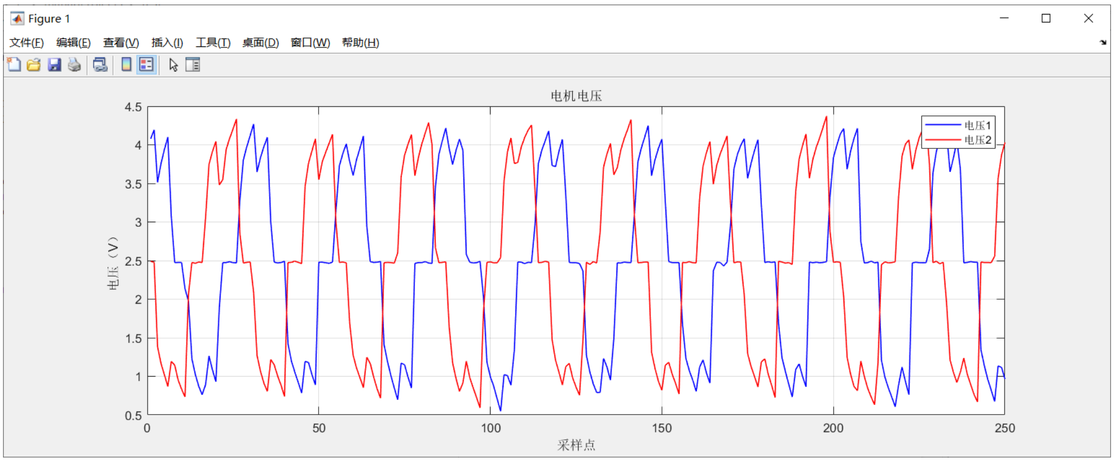
$$\widehat{S_x}(k)=\frac{1}{N}|X(k)|^2=\frac{1}{N}|FFT[x(n)]|^2,\qquad k=0,1,\ldots,N-1$$

式中，$FFT[x(n)]$为对序列$x(n)$的傅里叶变换，由于$FFT[x(n)]$的周期为N，求得的功率谱估计以N为周期。因此这种方法称为周期图法。

二、问题描述

1.数据描述

现有一组从 AUV（Autonomous Underwater Vehicle，自主式水下航行器）推进系统模型中采集的数据，模拟了桨叶受到不同程度的缠绕干扰时，以 1000Hz 采样率采集的电机电压变化情况。



图：三相电机电压中的两相

2.要求

①编写程序，绘制不同程度缠绕干扰下，电机电压的功率谱，并观察区别；

②使用不同的信号长度，绘制功率谱，并观察区别；

③向信号中添加噪声，观察功率谱的区别

3.拓展

①了解 FFT（Fast Fourier Transform，快速傅里叶变换）算法的工作原理，以及相对于离散傅里叶变换具有的计算速度优势；

②用有限长样本序列的傅里叶变换来表示随机序列的功率谱，只是一种估计或近似，不可避免存在误差。为了减少误差，使功率谱估计更加平滑，可采用分段平均周期图法（Bartlett 法）、加窗平均周期图法（Welch 法）等方法加以改进。