图论作业(第一周)

黄瑞轩 PB20111686

Prob. 1

当 G 是完全图时，$\nu(G)$ 个顶点共可以构造 $\mathrm{C}_{\nu(G)}^2$ 条边，此时有 $\varepsilon(G)=\mathrm{C}_{\nu(G)}^2$；

当 G 不是完全图时，增补缺失的边，使其成为完全图 G'，则有

$$\varepsilon(G)<\varepsilon(G')=\mathrm{C}_{\nu(G')}^2=\mathrm{C}_{\nu(G)}^2$$

综上，有

$$\varepsilon(G)\leq \mathrm{C}_{\nu(G)}^2$$

Prob. 7 (1)

对于完全二分图 $K_{m,n}$ ，设其顶点按二分图的定义可分成两个部分，分别是 M,N。由完全二分图的定义可知，M 中元素之间没有道路，N 中元素之间没有道路。

对于 M 中任意一个元素 v ，这个元素与 N 中元素均有一条道路，遍历 M，则 M 中元素与 N 中元素的道路（构成的边）数为

$$\varepsilon(K_{m,n})=mn$$

Prob. 7 (2)

设二分图 G 的顶点按二分图的定义可分成两个部分，分别是 M,N，则 $|N|=\nu(G)-|M|$，由1以及7（1）可知

$$\varepsilon(G)\leq|M||N|=|M|(\nu(G)-|M|)\leq\frac{\nu^2(G)}{4}$$

等号当且仅当 G 是完全图，且 $|M|=|N|$ 时取得。

Prob. 8

设 V'' 为 V' 中去掉所考察的 k 条边的关联后所构成的图，再设

$$V_1=\{v|v\in V'',\deg v\equiv 1(\bmod 2)\}$$
$$V_2=\{v|v\in V'',\deg v\equiv 0(\bmod 2)\}$$

现在补上刚刚所去掉的 k 条边的关联，假设有 x 条边加到了 V_1 所含顶点，则有 $k-x$ 条边加到了 V_2 所含顶点，记

$$V_1'=\{v|v\in V',\deg v\equiv 1(\bmod 2)\}$$
$$V_2'=\{v|v\in V',\deg v\equiv 0(\bmod 2)\}$$

则有

$$|V_1'|=|V_1|+k-2x$$
$$|V_2'|=|V_2|-k+2x$$

由推论1.1知，$|V_1|\equiv 1(\bmod 2)$，因此

$$|V_1'|\equiv 1+k(\bmod 2)$$

则 $|V_1'|\equiv 1(\bmod 2)\Leftrightarrow k\equiv 0(\bmod 2)$，$|V_1'|\equiv 0(\bmod 2)\Leftrightarrow k\equiv 1(\bmod 2)$。

Prob. 14 (1)

简单图无环，简单图若有 7 个顶点，则每个顶点出度至多为 6。故 $7,6,5,4,3,3,2$ 不是简单图的度数序列。

简单图无重边，简单图若有 7 个顶点，不存在两个顶点，这两个顶点的出度都为 6 ，否则这两个顶点之间一定有重边。故 $6,6,5,4,3,3,1$ 不是简单图的度数序列。

Prob. 14 (2)

$\sum d_i = 2\varepsilon$ 是偶数是显然的，下面证明后续结论。

设前 k 个点构成的 G 的子图 G'，则

$$\sum_{v_i \in V(G')} \deg v_i = 2\varepsilon(G') \leq 2\mathrm{C}_k^2 = k(k-1)$$

现在考虑后 $n-k$ 个点 $v_{k+1},\ldots,v_n$ 对前 k 个点的最大入度贡献。对于 $v_j, k+1 \leq j \leq n$，设其对前 k 个点的最大入度贡献为 s_j。若 $d_j < k$，则 $s_j = d_j$；若 $d_j \geq k$，由于没有环和重边，$s_j = k$。即 $s_j = \min\{d_j, k\}$。故

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k d_i &\leq \sum_{v_i \in V(G')} \deg v_i + \sum_{j=k+1}^n s_j \\ &= k(k-1) + \sum_{j=k+1}^n \min\{d_j, k\}\end{aligned}$$

证毕。

Prob. 15

首先，G 的生成子图含有二分图是显然的，因此由 G 的二分生成子图构成的集合 $S \neq \varnothing$。

取 S 中边数最多的一个元素 H_0，这个图被划分为 X, Y，即 $V(H_0) = X \cup Y$。

假设 H_0中有一个顶点 u_0，不妨设其在 X 中，它满足 $\deg_{H_0}(u_0) < \deg_G(u_0)/2$。

因为 u_0 不再与 X 中的元素相邻，故 u_0 与 Y 中 $\deg_{H_0}(u_0)$个元素相邻，由于 $H_0 \subseteq G$，故在 G 中 u_0 仍与 Y 中那些点保持相邻，$\deg_{H_0}(u_0) < \deg_G(u_0)/2$ 表示 u_0 与 X 中 $\deg_G(u_0) - \deg_{H_0}(u_0) > \deg_{H_0}(u_0)$ 个点相邻。

再取 S 的一个元素 H_1，其可被划分为 $X - \{u_0\}, Y \cup \{u_0\}$，$u_0$ 与 $X - \{u_0\}$ 之间的边会保留，与 Y 之间的边会被删除，则

$$\varepsilon(H_1) = \varepsilon(H_0) + \deg_X(u_0) - \deg_H(x_0) > \varepsilon(H_0)$$

这与 H_0 是边数最多的二分子图矛盾，故假设不成立，故 H_0 中任意一个顶点 u，有

$$\deg_{H_0}(u) \geq \deg_G(u)/2$$

这样的 H_0 就是一个我们所要找的 H，证毕。

Prob. 16

假设 G 中最长的轨道是 $v_1 v_2 \ldots v_{l+1}$，若轨道长度 $l < k$ 则

$$\deg(v_1) \geq k > l$$

代表除了 $v_2,\ldots,v_{l+1}$这 l个点之外，v_1一定还与其他不同的点相邻，即存在一个 v_0，使得 $v_0 v_1 \ldots v_{l+1}$也是轨道，这与 $v_1 v_2 \ldots v_{l+1}$是最长轨道矛盾，故假设不成立，一定有长度为 k 的轨道。

Prob. 18

假设 G 不是连通图，有 ω 个连通片 $G_1,...,G_\omega$，记其顶点个数分别是 $\nu_1,...,\nu_\omega$，其中$\nu_i \geq 1 (1 \leq i \leq \omega)$，则其边数之和最多是

$$\begin{aligned}\varepsilon = \sum_{i=1}^{\omega} \mathrm{C}_{\nu_i}^2 &= \sum_{i=1}^{\omega} \frac{\nu_i^2 - \nu_i}{2} = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{\omega} \nu_i^2 - \nu) \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{\omega} \nu_i\right)^2 - \sum_{i \neq j} \nu_i \nu_j - \nu\right] \\ &= \frac{1}{2}(\nu^2 - \nu - \sum_{i \neq j} \nu_i \nu_j)\end{aligned}$$

要证明假设与条件矛盾，这个问题化为证明

$$2\nu \leq \sum_{i \neq j} \nu_i \nu_j + 2$$

注意到

$$\begin{aligned}2\sum_{i=1}^{n} \nu_i &\leq \sum_{i=1}^{n-1} (\nu_i \nu_{i+1} + \nu_{i+1} \nu_i) + \nu_n \nu_1 + \nu_1 \nu_n \\ &\leq \sum_{i \neq j} \nu_i \nu_j \\ &\leq \sum_{i \neq j} \nu_i \nu_j + 2\end{aligned}$$

从而假设与条件矛盾，G 是连通图。

Prob. 19 (1)

假设 G 有 ω 个连通片 $G_1,...,G_\omega$，边 e 的顶点 u,v 。

若 u,v 间除了 e 还有其他道路，则考察 G 中任意两点的连通性，仍然不变，原来通过 e 的道路可以改为通过其他道路通过。此时

$$\omega(G-e) = \omega(G)$$

若 u,v 间除了 e 没有别的道路，则考察 G 中任意两点的连通性，可以划分为以下三种：

1° 原来连通，不经过 u,v；

2° 原来连通，经过 u,v；

3° 原来就不连通。

1°，3°的连通性仍属于原来的连通片；2°会导致原来2°所属的连通片被分成两个连通片，即

$$\omega(G-e) = \omega(G) + 1$$

综上，原不等式得证。

Prob. 19 (2)

考虑一个星图 G，去掉度数最高的那个顶点，会导致连通片个数增加 $|V(G)| - 2$，不一定满足原来的公式。