图论作业(第四周)

黄瑞轩 PB20111686

Chap 3 Prob. 7

按下面方法来构造满足条件的图 G 。

（1）选取两个完全图 $K_{n+1}[1,2]$ 作为图 G 的两个部分，这保证了当前 $\delta(G)=n$ 。

（2）在 $K_{n+1}[1]$ 中选择 l_1 个点，记为 V_1 ，在 $K_{n+1}[2]$ 中选择 l_2 个点，记为 V_2 ，满足 $l_1+l_2=l$ 。

（3）对于 V_1 中每个元素，可以在 $V(K_{n+1}[2])-V_2$ 中选择一些顶点（记为 V_2' ），记这里选择的顶点总数为 m_1 ，将 V_1 中每个元素与 V_2' 中的元素之间建立一条边（ V_2' 中的元素只能用一次，这一步的正确性由 $m_1<m\leq n$ 保证）。对于 V_2 中的元素亦是如此（保证 $m_1+m_2=m$ ）。

（4）上面的操作保证了顶点的度数只会增加而不会减少，这里有 $2n+2$ 个顶点，最多只有 m 个顶点度数增加，因此 $\delta(G)=n$ 仍满足；如果不删除 V_1+V_2 中的所有顶点，比如已经删除了 $l-1$ 个顶点，还剩下 V_1 中某个顶点，按照上面的构造这个顶点一定会和 $V(K_{n+1}[2])-V_2$ 中某个顶点连通，剩下的图仍然是连通的，当删除 V_1+V_2 中所有顶点后图一定不连通，故 $\kappa(G)=l$ ；同理， $\kappa'(G)=m$ 。

Chap 3 Prob. 10

如果 G_1 与 G_2 有超过一个公共顶点，则会形成圈，使得 $G_1\cup G_2$ 是块，与 G_1,G_2 是块矛盾，块 G_1,G_2 之间最多只有一个公共顶点。

如果 G_1 与 G_2 只有一个公共顶点 u ，那么 u 一定是 $G_1\cup G_2$ 的割顶，但如果 u 不是 G 的割顶，意味着 G_1 中元素 w 到 G_2 中元素 v 在 G 中有不经过 u 的轨道 $P(w,v)=P_1(w,u)+P_2(u,v)$ ，设经过 u 的轨道为 $Q(w,v)$ 。

由于 G_1,G_2 都是块，于是任给 $w,v,x\in V(G_1)\cup V(G_2), w\in V(G_1), v\in V(G_2)$ ，不妨设 $x\in G_2$ ，可以找到这样的 $P(w,v)$ ，使得 x 不在 $P(w,v)$ 上。（因为 $x\notin G_1$ ，所以 $x\notin P_1(w,u)$ ，块 G_2 的性质保证可以选一条 $P_2(u,v)$ 使得 x 不在其上。）故 $G_1\cup G_2$ 是块，与 G_1,G_2 是块矛盾，所以 u 是 G 的割顶。

Chap 3 Prob. 13

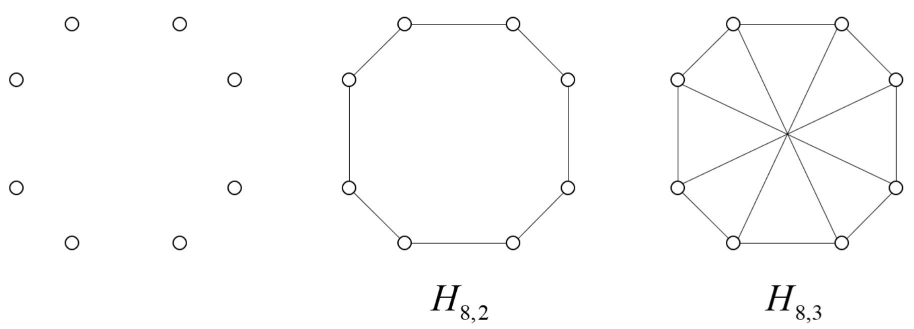
设图 G 的边图为 $L(G)$ ，现在要考虑 $uv-$ 边割集，则在 $L(G)$ 中添加顶点 u,v ，将与 u,v 直接连接的边代表的顶点各自与 u,v 相连构成新图 H 。

根据顶点版本的Menger定理， H 的 $uv-$ 顶割集元素个数与 u,v 之间不含公共顶点的轨道数相同。 H 中两个顶点相邻表示 G 中两条道路相邻， H 中两条轨道公共的顶点表示 G 中公共的边，在 G 的视角，即 G 的 $uv-$ 边割集元素个数与 u,v 之间不含公共边的轨道数相同。

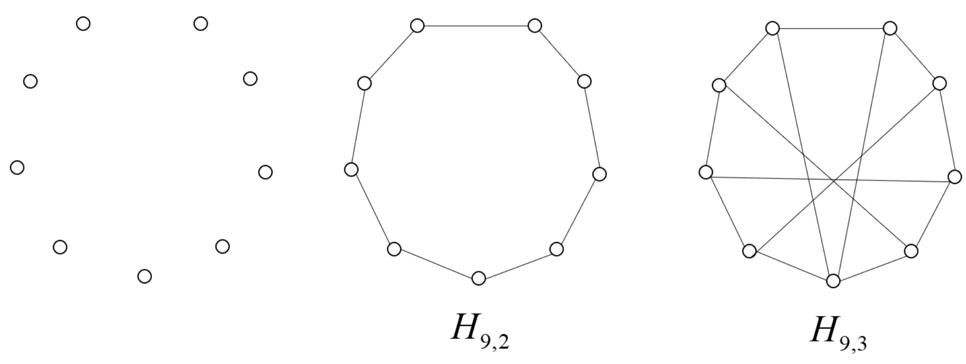
> **可能的疑问：** 照这么说，岂不是 $\kappa(G)=\kappa'(G)$ ？非也，在构造边图时， u,v 的所有直接相连的边都会成为一个独立的顶点， u,v 之间不含公共边的轨道数事实上是 u,v 相连边形成的独立顶点之间的轨道数总和，在这个意义上也即 $\kappa(G)\leq\kappa'(G)$ 。上面的解答为了方便直观理解，在 $L(G)$ 中添加顶点 u,v ，将与 u,v 直接连接的边代表的顶点各自与 u,v 相连了。

Chap 3 Prob. 26

$H_{8,3}$ 的绘画过程：



$H_{9,3}$ 的绘画过程：



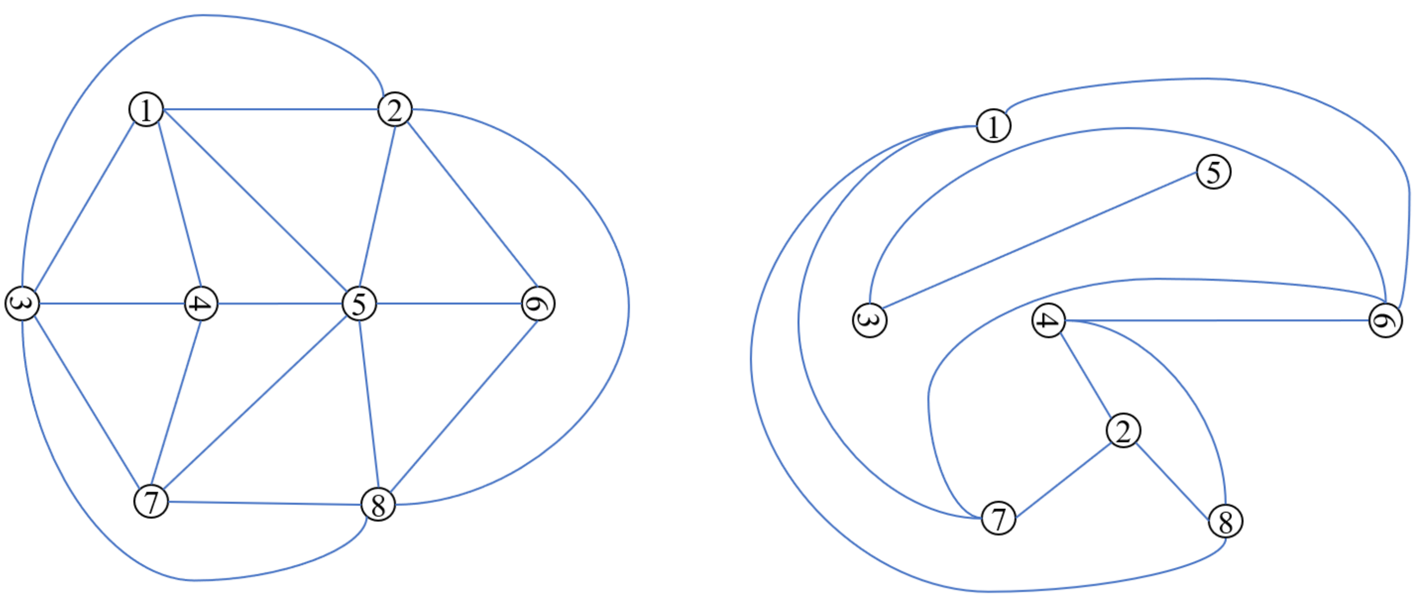
Chap 4 Prob. 2

首先 $\nu \geq 3$ 是显然的，则 $\varepsilon \leq 3\nu - 6$ ，又 $\nu - \varepsilon + \phi = 2$ ，五面体 $\phi = 5$ ，结合已有式子得到 $\nu \geq 4.5$ ，即 $\nu \geq 5$ 。 $\nu = 5$ 的时候存在这样的五面体（四棱锥），根据欧拉公式其 $\varepsilon = 8$ ； $\nu = 6$ 的时候存在这样的五面体（三棱台），根据欧拉公式其 $\varepsilon = 9$ 。当 $\varepsilon \geq 10$ 时， $\sum_{v \in G} \deg(v) = 2\varepsilon \geq 20 \geq \delta\nu$ ，而 $\nu - \varepsilon + 5 = 2$ ，得到 $7\delta \leq 20$ ，即 $\delta < 3$ ，对于五面体来说这是不可能的，故没有其他边数更多的五面体类型了。

Chap 4 Prob. 3

（1）由于 $\nu > 11$ ，则 $\varepsilon \leq 3\nu - 6$ ， $\varepsilon(G^c) = \varepsilon(K_\nu) - \varepsilon(G) \geq \dfrac{\nu(\nu-1)}{2} - 3\nu + 6$ ，当 $\nu > 11$ 时显然有 $\dfrac{\nu(\nu-1)}{2} - 3\nu + 6 > 3\nu - 6$ ，所以 G^c 不是平面图。

（2）由（1）计算可知，当 $10 \leq \varepsilon(G_{\nu=8}) \leq 18$ 时，可以保证 G, G^c 均是平面图，下面是一个例子。



Chap 4 Prob. 6

（1）假设 $\forall f \in F(G), \deg(f) \geq 5$ ，则 $\sum_{f \in F(G)} \deg(f) = 2\varepsilon \geq 5\phi$ ，又 $2\varepsilon \geq \delta\nu = 3\nu$ ，结合欧拉公式 $\nu - \varepsilon + \phi = 2$ ，得 $\phi \geq 12$ ，与题设矛盾。故 $\exists f_0 \in F(G), \deg(f_0) \leq 4$ 。

（2）正十二面体是由 12 个正五边形所组成的正多面体，它共有 20 个顶点、 30 条棱，每个顶点的度数都是 3 ，但是每个面的度数都是 5 。