

# 实 验 报 告

评分:

2020 级 11 系 3 班 姓名 黄瑞轩 日期 2021 年 4 月 5 日 No PB20111686

实验题目: 单摆法测重力加速度

实验目的: 利用单摆法测量合肥当地重力加速度 (不确定度小于 1%)

实验原理: 在摆角很小时, 我们有近似公式  $\sin \theta \approx \theta$ , 因此真空中的单摆动力学方程

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \text{ 在摆角很小时可改写为 } \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0, \text{ 该方程的通解是}$$
$$\theta = A \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi\right) \quad (1)$$

这是简谐运动, 因此周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2)$$

上式仅对理想单摆成立, 要求  $\theta \rightarrow 0$ , 这在实际上是不存在的。实际的单摆周期公式为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left[1 + \frac{d^2}{20l^2} - \frac{m_0}{12m}\left(1 + \frac{d}{2l} + \frac{m_0}{m}\right) + \frac{\rho_0}{2\rho} + \frac{\theta^2}{16}\right]} \quad (3)$$

式中,  $T$  为单摆的周期,  $l$ 、 $m_0$  为单摆摆线长度和质量,  $d$ 、 $m$ 、 $\rho$  分别为摆球的直径、质量和密度,  $\rho_0$  为空气密度,  $\theta$  为摆角。一般情况下, 摆球几何形状、摆的质量、空气浮力、摆角 ( $\theta < 5^\circ$ ) 对  $T$  的修正都小于 1‰。若实验精度要求在 1‰以内, 则这些修正项都可以忽略不计, 仍沿用(2)式。

可以通过测量小球摆动的周期, 再通过上式来计算当地重力加速度。

由于  $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$ , 按最大不确定度公式估算, 有

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{T} \quad (4)$$

根据不确定度均分原理有  $\frac{\Delta l}{l} \leq 0.5\%$ ,  $2\frac{\Delta T}{T} \leq 0.5\%$ , 将  $l$  和  $T$  的粗测值

( $l \approx 70\text{cm}$ 、 $T \approx 1.7\text{s}$ ) 代入有  $\Delta l \leq 0.35\text{cm}$ ,  $\Delta T \leq 0.00425\text{s}$ 。

由于钢卷尺的最大允差为 0.2cm, 所以测量摆长应当使用钢卷尺; 测量周期应当使用秒表。

根据统计分析, 实验人员开启或停止秒表的反应时间为 0.1s 左右, 所以实验人员测量时间的精度近似为  $\Delta_{\lambda} \approx 0.2\text{s}$ 。

设应当累计测量  $N$  次周期,  $N$  应当满足关系式

$$\frac{\Delta_{\lambda} + \Delta_{\text{秒}}}{N} \leq \Delta T \quad (5)$$

解得  $N \geq 49.41$ , 近似取  $N = 50$ , 即要累计合并 50 个周期进行测量。

实验仪器：本实验的测量装置如下图。先测量摆线端点到小球质心的长度作为摆长。平面镜上有一细线，开始前需调整调节螺栓使得这一细线、摆线和摆线在平面镜中的像在同一平面内。轻轻拨动小球，使小球偏角小于  $5^\circ$ ，用秒表记录小球摆动  $N(N \geq 50)$  个周期所用时间。

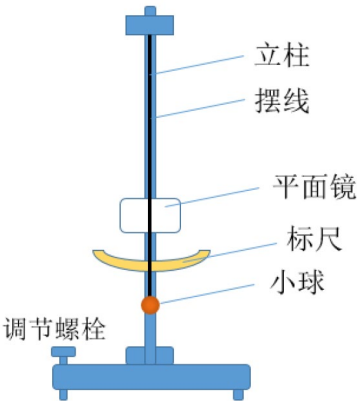


图 1 实验装置

测量记录：（原始数据附后）

$i$	1	2	3	4	5	6
$l_i/\text{cm}$	72.70	72.53	72.48	72.60	72.68	72.65
$T_i/\text{s}$	87.18	88.00	88.10	87.27	85.57	85.54
$N_i$	51	52	52	51	50	50

表 1 原始实验数据表格

分析讨论：

（1）实验数据处理

由  $t_i = \frac{T_i}{N_i}$ ，计算得

$i$	1	2	3	4	5	6
$l_i/\text{cm}$	72.70	72.53	72.48	72.60	72.68	72.65
$t_i/\text{s}$	1.709	1.692	1.694	1.711	1.711	1.710

表 2 需要使用的数据表格

计算表 2 中物理量的平均值为  $\bar{l} = 72.60\text{cm}$ 、 $\bar{t} = 1.704\text{s}$ 。代入  $g = \frac{4\pi^2 l}{t^2}$ ，得

到  $g$  的测量值  $g = 9.87\text{m/s}^2$ 。

（2）误差分析

合肥地区重力加速度公认值  $g_0 = 9.79\text{m/s}^2$ ，因此本实验的相对误差为

$$\delta = \frac{|g - g_0|}{g_0} = 0.8\% \tag{4}$$

### (3) 实验讨论

测量值存在误差，下面计算不确定度。

摆长均值  $\bar{l} = 72.60\text{cm}$ ，则 A 类不确定度  $u_A = \sqrt{\frac{\sum(l_i - \bar{l})^2}{6.5}} = 0.00035\text{cm}$ ；卷尺

最大允差  $\Delta_{\text{米尺}} = 0.2\text{cm}$ ，置信系数  $C = 3$ ，则 B 类不确定度  $u_B = \frac{\Delta_{\text{卷尺}}}{3} = 0.067\text{cm}$ ，

即摆长的标准不确定度为  $u_l = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = 0.067\text{cm}$ （主要是 B 类不确定度）。

摆动周期均值  $\bar{t} = 1.704\text{s}$ ，则 A 类不确定度  $u_A = \sqrt{\frac{\sum(t_i - \bar{t})^2}{6.5}} = 0.003\text{s}$ ；秒表的

最大允差  $\Delta_{\text{秒表}} = 0.01\text{s}$ ，置信系数  $C = 3$ ，则 B 类不确定度  $u_B = \frac{\Delta_{\text{秒表}}}{3} = 0.003\text{s}$ ，即

摆动周期的标准不确定度为  $u_t = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = 0.004\text{s}$ 。

最终测量结果的不确定度为

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln g}{\partial l} u_l\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln g}{\partial t} u_t\right)^2} = 0.48\% < 1\% \quad (5)$$

实验的不确定度满足要求，最大误差  $\Delta g = 0.48\% \times g_{\text{测}} = 0.05\text{m/s}^2$ ，因此实验测得的重力加速度  $g$  的表达式应为

$$g = (9.87 \pm 0.05)\text{m/s}^2$$

考虑到摆球几何形状、摆的质量、空气浮力、摆角等的影响，修正重力加速度应当大于本实验的测量值。

#### 思考题：

分析基本误差的来源，提出进行改进的方法。

本实验误差一是对摆长的测量，由于需要测悬挂点到小球质心的长度，因此在摆处于悬挂状态时对其摆长进行测量时米尺难免会有偏斜，可将摆取下，单独测量小球的直径和绳长，再相加作为摆长；二是对摆动周期测量会有误差，因为通过人眼观察的方式来控制秒表误差较大，所以可以尝试录制视频，通过视频编辑软件确定  $T$ 。