图论作业(第8周)

黄瑞轩 PB20111686

Chap 7 Prob. 7

(1.1) 首先，因为 $\chi(K_1)=1$，且 K_1 的真子图只有零图 Z， $\chi(Z)=0$，故 K_1 是 1 色临界图。若还有其他 1 色临界图，设为 G，则 $\nu(G)>1$，则 G 的一个真子图 $G'=(V(G),\varnothing)$ 也是 $\chi(G')=1$ 的，矛盾。

(1.2) 首先，因为 $\chi(K_2)=2$，且 K_2 的真子图只有 $H_1=(V(K_2),\varnothing), H_2=K_1, H_3=Z$，这里 $\chi(H_1)=\chi(H_2)=1<2, \chi(Z)=0<2$，故 K_2 是 2 色临界图。若还有其他 2 色临界图，设为 G，则 $\nu(G)>2$，因为 $\chi(G)=2$，所以 G 一定有边，所以 G 一定有 K_2 作为其真子图，矛盾。

(1.3) 首先，因为 $\chi(C_k)=3, k\equiv 1(\bmod 2), k\ge 3$，任取 C_k 的一个子图 H，若 H 是连通的，则 H 是一个轨道，$\chi(H)\le 2$；若 H 不是连通的，则 H 是若干个轨道之并，同样有 $\chi(H)\le 2$，故 $C_k, k\equiv 1(\bmod 2), k\ge 3$ 是 3 色临界图。若还有其他 3 色临界图，设为 G，则 G 不是二分图，则 G 含有奇圈，矛盾。

(2) 设 $n\equiv 0(\bmod 2)$，轮 W_{n-1}。

(3) 化为证明 $\delta\ge k-1$，反证，若 $\delta<k-1$，假设 $\deg(u)=\delta$，设 u 的邻顶集合为 $N(u)$，则 $\{u\}+N(u)$ 用到的色数 $\le\delta+1<k$，则 $\chi(G-u)=\chi(G)$，与 G 是 k 色临界图矛盾。

Chap 7 Prob. 8

首先 $\nu(C)\ge 3$，则 $\nu\ge 4$。中间的顶点关联 $\nu-1$ 条边，一定需要 $\nu-1$ 种颜色。不妨将这 $\nu-1$ 条轴边颜色按顺序记为 $i_1,i_2,\ldots,i_{\nu-1}$，下面所说的加法是对模 $\nu-1$ 而言的。

因为颜色数 $\nu-1\ge 3$，给夹在 i_j,i_{j+1} 之间的圈边染色一定能再选出一种，比如拿 i_{j+2} 给 i_j,i_{j+1} 之间的圈边染色即可。所以给圈染色不需要其他另外的颜色，总共需要 $\nu-1$ 种颜色，即 $\chi'(W_\nu)=\nu-1$。

Chap 7 Prob. 9

输入： 二分图 $G=X\dot\cup Y$ （不妨设 $|X|\le|Y|$）。

输出： G 的正常 Δ 边着色。

算法过程：

（1）备份 $G_0\leftarrow G$；若 $|X|\ne|Y|$，向 X 添加 $|Y|-|X|$ 个孤立顶点；令 $i=1$；转（2）。

（2）若 $\Delta=\delta$，转（4），否则转（3）。

（3）选择 $v\in X, \deg(v)=\delta(X)$ （X 中度数最小的顶点）， $u\in Y, \deg(u)=\delta(Y)$，令 $G\leftarrow G+uv$，转（2）。

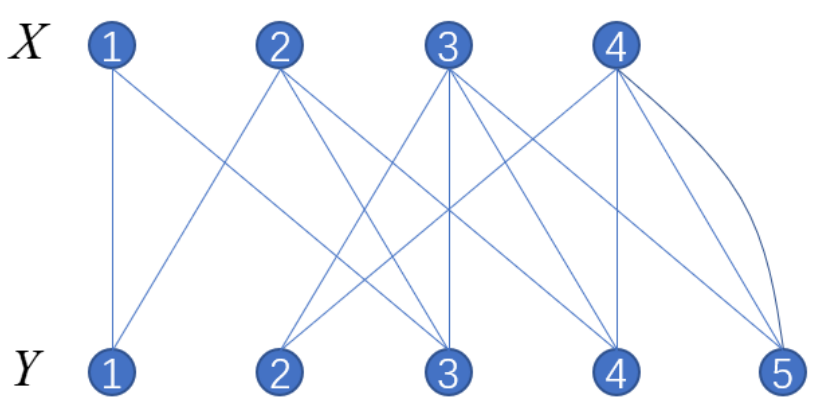
（4）用匈牙利算法对 G 做完备匹配，得 M_i。若 $G-M_i$ 无边，则计算每个 $E_j=M_j\cap G_0(1\le j\le i)$，输出 $\cup_{j=1}^{i}E_j$，算法停止。否则 $i\leftarrow i+1$， $G\leftarrow G-M_i$。

Chap 7 Prob. 10

设 $\mathcal{C}=\{E_1,E_2,\cdots,E_\delta\}$ 是图 G 的一个最佳 δ 边着色。反证，如果题中所述的着色不存在，则存在一个顶点 v_0 和两种颜色 i 与 j，使得 i 色不在 v_0 关联的边中出现，但 j 色在 v_0 关联的边中至少出现两次，则边导出子图 $G[E_i\cup E_j]$ 中含 v_0 的连通片是一个奇圈，这与 G 是二分图矛盾。

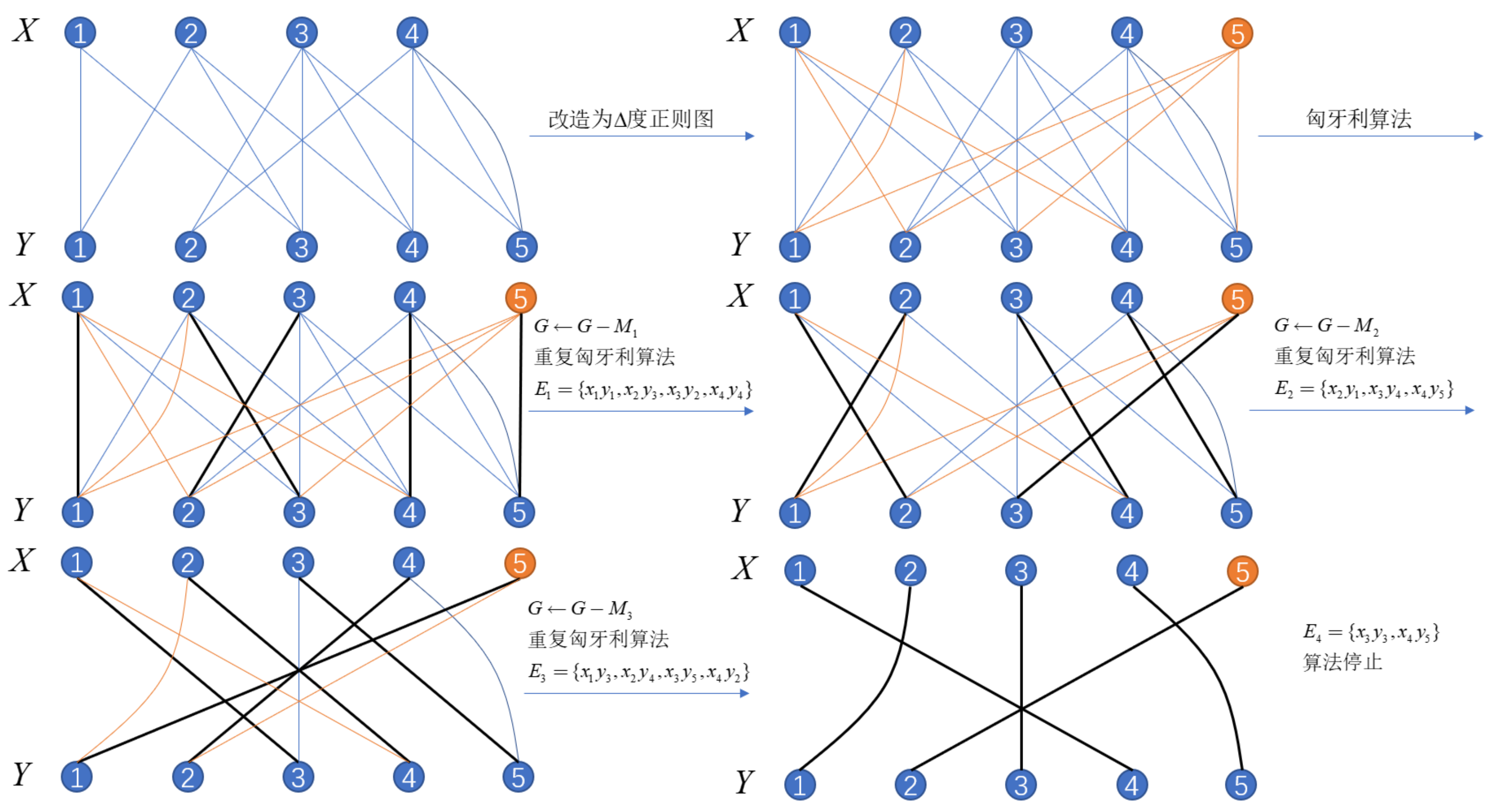
Chap 7 Prob. 14

令 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$， $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$，当且仅当 $A[x_i,y_j]=p_{ij}$ 时，在 x_i,y_j 之间连 p_{ij} 条边。构造二分图 $G=(X,E,Y)$ 如下:



（1）由于 $\Delta=4$，故需要安排 4 节课。

（2）利用习题9的算法，过程如下:



教室数为 $\max_{i=1}^4 |E_i| = 4$ 。

Chap 7 Prob. 16

设此平面图的平面嵌入为 G ，其对偶图为 G^* ，首先证明 G 的割集必包含偶数条边。 G 的顶点都有偶数条边，如果要使 G 删除一些边后变成连通片 $G_1, G_2, \ldots, G_\omega$ ，对 G_1 考虑，要取消 G_1 中顶点与 $G_2 \cup \ldots \cup G_\omega$ 中顶点的联系，必然要在 G_1 的顶点处在原图中删除偶数条边，对于 $G_i(1 \le i \le \omega)$ 都是这样，故 G 的割集必包含偶数条边。

再来证明 G 的割集与 G^* 的圈一一对应。设 G^* 中任取一个圈，为 C ，因为 G 中的边 f 在 G^* 中一定有边 f^* 穿过它，即与之对应，则在 G 中删除在 C 中对应的边， G 将不连通，因为 G 中被 C 包围起来的顶点将没有穿过 C 的其他方式，故 G^* 的圈对应 G 的割集。

G 的割集都有偶数条边，所以 G^* 中的圈都是偶圈，所以 G^* 是二分图。

Chap 7 Prob. 19

运用递推公式写过于繁杂，这里采用颜色多项式的意义来写。由于两个图顶点分布相同，为了叙述方便，这里将顶点从上到下，从左到右命名为 $1 \sim 6$ 号。

（1） 给 2 号顶点染色有 k 种方法，则给 3 号顶点染色有 $k-1$ 种方法，当 $1, 6$ 号顶点颜色相同时，给这两个顶点染色有 $k-2$ 种方法，则给 4 号顶点染色有 $k-1$ 种方法，则给 5 号顶点染色有 $k-2$ 种方法；当 $1, 6$ 号顶点颜色不同时，给 1 号顶点染色有 $k-2$ 种方法，给 6 号顶点染色有 $k-3$ 种方法，则给 4 号顶点染色有 $k-2$ 种方法，则给 5 号顶点染色有 $k-3$ 种方法，所以颜色多项式为

$$p_k(G) = k(k-1)[(k-2)(k-1)(k-2) + (k-2)(k-3)(k-2)(k-3)] = k(k-1)(k-2)^2(k^2-5k+8)$$

（2） 仿照（1），从 4 号顶点开始染色，过程不再赘述，颜色多项式为

$$p_k(H) = k(k-1)[(k-2)(k-1)(k-2) + (k-2)(k-3)(k-2)(k-3)] = k(k-1)(k-2)^2(k^2-5k+8)$$

Chap 7 Prob. 20

即求 $p_k(W_\nu)$ ，我们有

$$p_k(W_\nu) = kp_{k-1}(C_{\nu-1})$$

而

$$p_m(C_n) = p_m(P_n) - p_m(C_{n-1})$$

这里 $p_m(P_n)$ 是长度为 n 的轨道的颜色多项式，即

$$p_m(P_n) = m(m-1)^{n-1}$$

> 求 $p_m(C_n)$ 的通项公式。
>
> $$p_m(C_n) = p_m(P_n) - p_m(C_{n-1}) \Rightarrow \frac{p_m(C_n)}{(-1)^n} - \frac{p_m(C_{n-1})}{(-1)^{n-1}} = (-1)^n p_m(P_n)$$
>
> 对第二个等式做累加，直至为 $a_4 - a_3$ 的形式，即

> $$
> \begin{aligned}
> \frac{p_m(C_n)}{(-1)^n} - \frac{p_m(C_3)}{(-1)^3} &= \sum_{i=4}^{n}(-1)^i p_m(P_i) \\
> &= \frac{m}{m-1}\sum_{i=4}^{n}(1-m)^i \\
> &= \frac{m}{m-1}\left(\sum_{i=1}^{n} - \sum_{i=1}^{3}\right)(1-m)^i \\
> &= \frac{m}{m-1}\left[\frac{(1-m)[1-(1-m)^n]}{m} - (1-m) - (1-m)^2 - (1-m)^3\right] \\
> &= (1-m)^n + (m-1)^3
> \end{aligned}
> $$
>
> 而 $p_m(C_3) = m(m-1)(m-2)$，故
>
> $$p_m(C_n) = (-1)^n[(1-m)^n + (m-1)^3 - m(m-1)(m-2)] = (-1)^n[(1-m)^n + (m-1)]$$

根据 $p_m(C_n)$ 的定义，得

$$p_k(W_\nu) = kp_{k-1}(C_{\nu-1}) = (-1)^{\nu-1}k[(2-k)^{\nu-1} + k - 2]$$