图论作业(第六周)

黄瑞轩 PB20111686

Chap 5 Prob. 14

当 $k=1$ 时，一定有 $\nu=2$，此时 $G=K_2$，结论显然。

当 $k=2$ 时，G 一定是一个圈，若 ν 为偶数，则结论显然。

当 $k>2$ 时，$k-1>1$，保证了 G 中没有桥，任给 $S\subseteq V(G)$，设 $G-S$ 的奇片为 $G_1,G_2,\ldots,G_n$，记 E_i 为一个端点在 S 中，另一个端点在 G_i 中的边构成的边子集，记 $m_i=|E_i|$，因为 G 是 $k-1$ 边连通的，所以 $m_i\geq k-1$。任给 $u\in V(G_i)$，记 $\deg(u)$、$\deg(u_i)$ 分别为 u 在 G 和 G_i 中的度数，因为 G 是 k 次正则图，$\deg(u)=k$，所以 $m_i=\sum_{u\in V(G_i)}\deg(u)-\sum_{u\in V(G_i)}\deg_i(u)=k\nu(G_i)-2\varepsilon(G_i)\geq k-1$。

若 k 是奇数，则 m_i 也是奇数（$\nu(G_i)$ 为奇数），所以 $m_i\geq k$，而 E_i 每一条边都有一个端点在 S 中，所以 S 中所有顶点的度数和大于等于 E_i 中边数的总和，即 $\sum_{i=1}^n m_i\leq\sum_{u\in S}\deg(u)=k|S|$，则 $o(G-S)=n\leq|S|$，由Tutte定理知，G 有完备匹配。

若 k 是偶数，则 m_i 也是偶数，但是 $k-1$ 是奇数，所以 $m_i\geq k$，情况与 k 为奇数时类似，不再赘述。

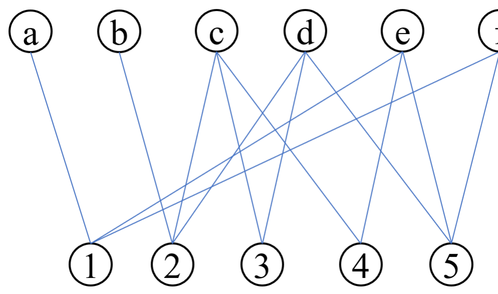
Chap 5 Prob. 15

必要性： 因为 T 有完备匹配，由Tutte定理，对 $\forall v\in V(T)$，都有 $o(T-v)\leq 1$，下面证明 $T-v$ 一定有奇片。因为 T 有完备匹配，则 $\nu(T)$ 必是偶数，则 $\nu(T-v)$ 必是奇数，若 $T-v$ 没有奇片，则 $\nu(T-v)$ 为偶数，矛盾！故上述不等号改为等号。

充分性： 若对 $\forall v\in V(T),o(T-v)=1$，取 T 的一个叶子 l，其前驱记为 $p(l)$。若 $p(l)$ 的其他孩子是子树，就递归地找，直到找到这样的情况：$p(l')$ 有一个孩子是叶子，其他孩子均是轨道，对这些轨道我们从其端点开始两个两个删除，如果轨道是偶数点则整个轨道删完，如果轨道是奇数点则轨道合并成一个叶子，处理过的新树记为 T'。现在若 $p(l')$ 有多个孩子，因为我们删除的是很多个偶片，删除这些偶片不影响 $\forall v\in V(T'),o(T'-v)=1$，若 $p(l')$ 被删除，则 $o(T'-p(l'))>1$，矛盾，所以 $p(l')$ 只有一个孩子。那就可以继续执行上面的步骤，直到 $p(l)$ 也只有一个孩子。对所有 T 的叶子，都执行上述过程，再把执行后的所有叶子及其前驱删除构成新树 T^*，若 T^* 有完备匹配，则 T 也有完备匹配，则问题转化为证明 T^* 有完备匹配。上述过程可以不断执行，树的性质保证当剩下 K_2 时上述过程终止。$K_2(=T^{*(n)})$ 有完备匹配，则 $T^{*(n-1)}$ 有完备匹配，……，则 T^* 有完备匹配，则 T 有完备匹配。

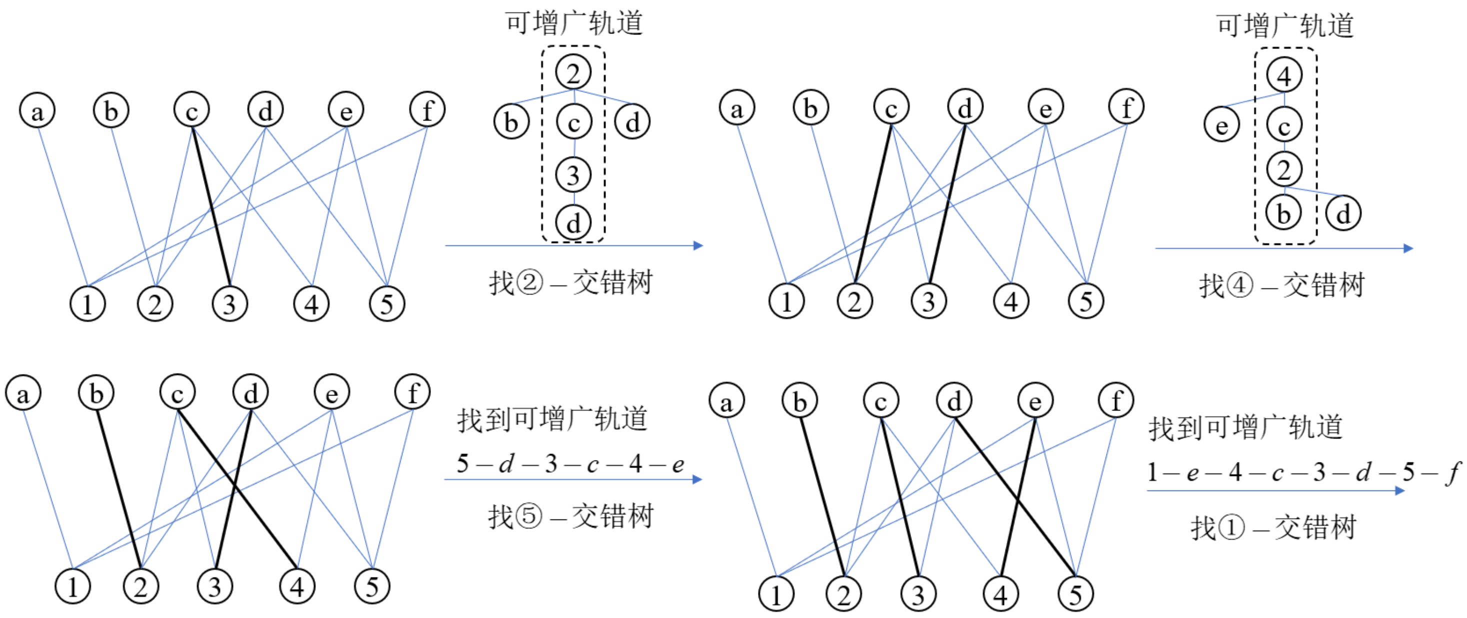
Chap 5 Prob. 16

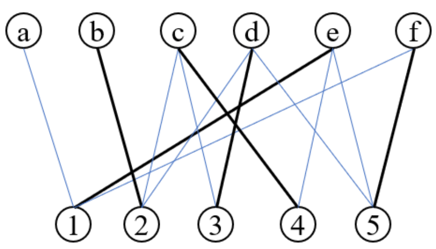
可以构造下面这个二分图，一部分是检查团成员，一部分是单位，当某个检查团成员可以检查某个单位时，在他们之间连一条边。



下面用匈牙利算法来找对于能许配 $\{1,2,3,4,5\}$ 的最大匹配（事实上是找最大匹配，再看找出来这个最大匹配能否许配 $\{1,2,3,4,5\}$）。

初始匹配：$M=\{c3\}$，粗实线表示当前 M 中的元素，下面的过程将以图呈现。





到这里虽然不满足匈牙利算法的退出条件，但是我们已经得到了想要的结果，因此让算法在这里中止。

最终检查方案为:

$$e-1, b-2, d-3, c-4, f-5$$

如果检查团每个人都需要出动，也可以同时让 $a-1$ 。

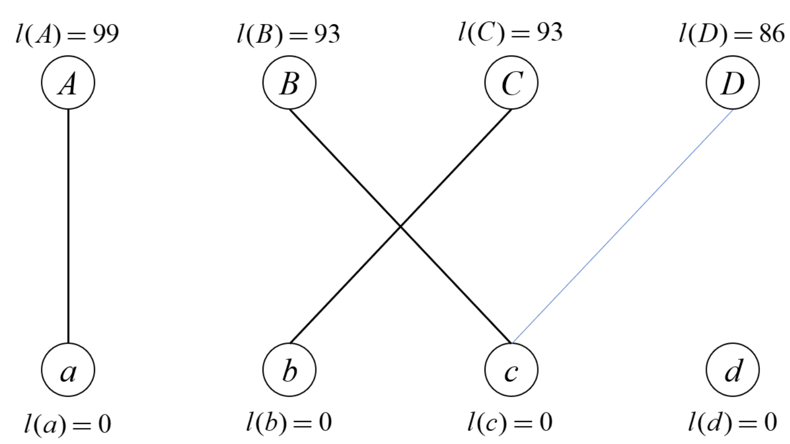
Chap 5 Prob. 17

构造二分图 $G=(X,\Delta,Y)$ ， $X=\{A,B,C,D\}, Y=\{a,b,c,d\}, \Delta(kK)=K$ 做 k 工作的效率。现在用Kuhn-Munkreas算法来求最佳匹配。

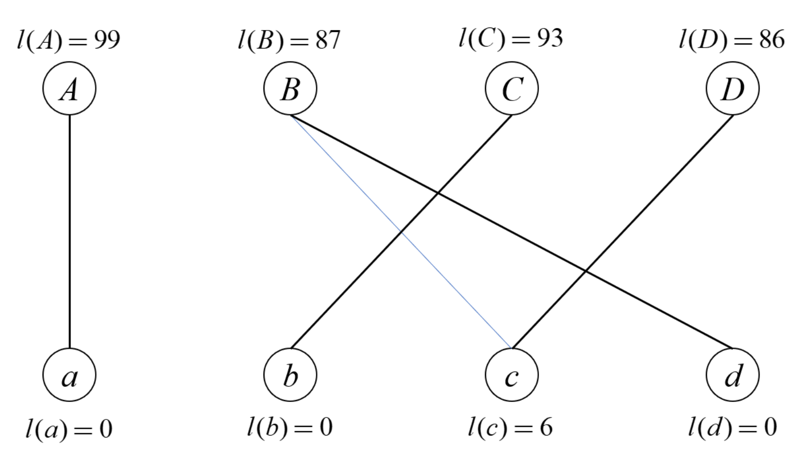
先选取这样的可行顶标:

$$\forall x\in X, l(x)=\max_{y\in Y}\Delta(xy)$$
$$\forall y\in Y, l(y)=0$$

构造相等子图如下:



对这个相等子图用匈牙利算法做最大匹配，如图中黑色实线所示，这个最大匹配不是完备匹配，取未被许配的顶点 D ，令 $Z=\{v|v\in V(G), D, v$ 之间存在交错轨道 $\}=\{B,c\}$ ， $S=X\cap Z=\{B\}$ ， $T=Y\cap Z=\{c\}$ ，计算 $\alpha_l=\min_{x_i\in S, y_i\notin T}\{l(x_i)+l(y_j)-\Delta(x_iy_j)\}=6$ ，则变更可行顶标 $l(B)=87, l(c)=6$ ，重新作相等子图如下:



对这个相等子图用匈牙利算法做最大匹配，如图中黑色实线所示，这个最大匹配是完备匹配，因而是最佳匹配。

最佳的工作匹配方案:

$$A-a, B-d, C-b, D-c$$

Chap 5 Prob. 19

因为原来的 $l(x)$ 是可行顶标，因此对于任何 $x \in X, y \in Y$ ，都有 $l(x)+l(y) \geq \omega(xy)$ 。

对新的顶标 $l'(x)$ ，如果 $x \in S, y \in T$ ，则 $l'(x)+l'(y)=l(x)+l(y) \geq \omega(xy)$ ；

如果 $x \in S, y \notin T$ ，则 $l'(x)+l'(y)=l(x)-\alpha_l+l(y)$ ，但是此时 $\alpha_l \leq l(x)+l(y)-\omega(xy)$ ，故 $l'(x)+l'(y)=l(x)-\alpha_l+l(y) \geq \omega(xy)$ ；

如果 $x \notin S, y \in T$ ，则 $l'(x)+l'(y)=l(x)+l(y)+\alpha_l \geq l(x)+l(y) \geq \omega(xy)$ ；

如果 $x \notin S, y \notin T$ ，则 $l'(x)+l'(y)=l(x)+l(y) \geq \omega(xy)$ 。

综上，对于任何 $x \in X, y \in Y$ ，都有 $l'(x)+l'(y) \geq \omega(xy)$ ，所以新的顶标仍然是可行顶标。

Chap 6 Prob. 1

不是Euler图，因为有一些顶点的度数是 3 ，不是偶数。也不能一笔画，因为度数为 3 的顶点有 8 个（说明其也没有Euler行迹）。

Chap 6 Prob. 3

记 G 的奇度顶点集合为 $V_o=\{v_1, v_2, \ldots, v_{2k}\}$ ，将 v_i 和 v_{i+1} 相连 $[i \equiv 1(\bmod 1)]$ 。现在 G 没有奇度顶点，因此 G 是Euler图，有Euler回路 P，现在删除这 k 条新连的边，则得到 k 条边不重复的行迹 $P_1, \ldots, P_k$，且 $\cup_{i=1}^k E(P_i)=E(G)$ ，证毕。