图论作业(第五周)

黄瑞轩 PB20111686

Chap 4 Prob. 20

以 S 为我们所关心的图顶点集合 $V(G)$，对于 G 中任意两个顶点 u,v， $uv\in E(G)\Leftrightarrow \mathrm{dist}(u,v)=1$，下面证明图 $G=(V(G),E(G))$ 是可平面的。

假设 G 中存在两条不同的边 v_1v_2,v_3v_4 相交于平面上一个虚拟的点 O，点 O 一定将 v_1v_2 和 v_3v_4 分割成了一长一短的两部分，并且两个短的部分一定都以 O 为一端，不妨将另外两个端点记为 p,q，则对于 $\triangle pOq$，我们有

$$\mathrm{dist}(p,O)\le\frac{1}{2}$$
$$\mathrm{dist}(q,O)\le\frac{1}{2}$$

由于三角形两边之和大于第三边，则

$$\mathrm{dist}(p,q)<\mathrm{dist}(p,O)+\mathrm{dist}(q,O)\le 1$$

由题设可知， v_1,v_2,v_3,v_4 之间两两距离大于 1，我们在这里假设 v_1v_2,v_3v_4 是两条不同的边，保证上面讨论的三角形存在。而上式导致矛盾，只能是假设不真，故 G 中没有任何两条边相交，是一个平面图。

对于 $\nu\ge 3$ 的平面图，自然有

$$\varepsilon\le 3\nu-6$$

Chap 5 Prob. 1

记 $\beta(G)$ 为 G 中完备匹配的个数。

对于 K_{2n}，给定其中一个顶点 v_k，选择顶点 v_{k+1} 删除并删除其关联边得到新图，重复这个过程，完全图的性质保证这个过程能够进行到最后剩下空集，这个过程的做法种数也即 $\beta(K_{2n})$。

$$\beta(K_{2n})=(2n-1)(2n-3)\cdots 1=(2n-1)!!$$

对于 $K_{n,n}$，假设其两个部分分别是 X,Y，每次给定 X 中一个顶点 x，从 Y 中选一个顶点 y，删除 x,y 并删除其关联边得到新图，重复这个过程，完全二分图的性质保证这个过程能够进行到最后剩下空集，这个过程的做法种数也即 $\beta(K_{n,n})$。

$$\beta(K_{n,n})=n\cdot(n-1)\cdots 1=n!$$

Chap 5 Prob. 2

若树 T 没有完备匹配，结论显然成立。

现在使 T 有一个完备匹配 M，若 T 还有另一个完备匹配 $M'\ne M$，首先所有的叶子节点都没有兄弟节点，因为 M 一定许配叶子节点及其父亲，若其父亲还有其他儿子，则这个儿子一定不能被许配，与 M 是完备匹配矛盾，对于 M'，情况也相同。

现在删掉所有叶子节点及其父亲，记叶子节点与其父亲的顶集为 V_1，叶子与其父亲构成的边的集合为 E_1，知 $E_1\subseteq M,E_1\subseteq M'$。由树的性质，我们知道删除后的图仍然是树，并且我们删除的所有相邻点对构成的边都是完备匹配 M,M' 中的元素，所以 $M-E_1,M'-E_1$ 是 $V(T)-V_1$ 的两个完备匹配。这个过程递归地进行下去，存在完备匹配这一性质保证上述过程跳出时的边界条件是顶点恰好被删完。设最后一次删除的叶子与其父亲构成的边的集合为 $E_j(j\ge 1)$，则

$$M=\bigcup_{i=0}^{j}E_i=M'$$

与 $M\ne M'$ 矛盾，故若 T 有完备匹配，则其完备匹配是唯一的。综上，树至多有一个完备匹配。

Chap 5 Prob. 7

充分性： 设 $V(G)=X\dot\cup Y$，对 $\forall S\subseteq V(G),|N(S)|\ge|S|$，取 $S=X,Y$ 再用Hall定理，得出 G 中存在将 X,Y 中所有顶点都许配的匹配，不妨设 $|X|\le|Y|$，因此 $\nu=|X|+|Y|\le 2|X|,|X|+|Y|\le 2|Y|$，因此 $|X|=|Y|$，故 G 的上述匹配是完备匹配。

必要性： 因为二分图 G 有完备匹配 M，所以 $V(G)=X\dot\cup Y,|X|=|Y|$。若 $S\subseteq X$ 或 Y，由Hall定理知结论显然成立，下面证明 $S-X\ne\varnothing$ 的情形。设 $S=S_X\dot\cup S_Y$，其中 $S_X\subseteq X,S_Y\subseteq Y$，由Hall定理知有 $|N(S_X)|\ge|S_X|,|N(S_Y)|\ge|S_Y|$，则 $|N(S)|=|N(S_X)|+|N(S_Y)|\ge|S_X|+|S_Y|=|S|$。

对于一般图不一定成立，考虑三个顶点的轨道 $P(x-y-z)$。

Chap 5 Prob. 9

设矩阵是 $m \times n$ 阶的，构造二分图 G ，一个顶点集 M 表示行， $|M| = m$ ，另一个 N 表示列， $|N| = n$ ，当 a_{ij} 是 1 时，表示第 i 行的顶点和表示第 j 列的顶点间连一条边。

对 G 作覆盖 C ，若表示第 k 行(列)的顶点 $c_k \in C, \deg(c_k) \geq 1$ ，则表示选取了第 k 行(列)上所有的 1 ，因此 C 一定能包含矩阵中所有的 1 ，因此这样的 C 存在，所以 G 存在最小覆盖 C^* 。

没有两个 1 在同一条线上的 1 ，所代表的行列顶点彼此之间不相邻，选取所有代表这样的 1 的边构成 $M^* \subseteq G$ ，显然这样的 M^* 是一个最大匹配。

由könig定理，二分图 G 中 $|C^*| = |M^*|$ ，得证。