

实 验 报 告

评分:

11 系 2020 级 姓名 黄瑞轩 日期 2021 年 4 月 2 日 No

实验题目: 测量当地重力加速度

实验目的: 利用单摆法测量当地重力加速度 (不确定度小于 1%)

实验原理:

在摆角很小时, 我们有近似公式 $\sin \theta \approx \theta$, 因此真空中的单摆动力学方程

$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$ 在摆角很小时可改写为 $\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0$, 该方程的通解是

$$\theta = A \cos(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \varphi)$$

这是简谐运动, 因此周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

上式仅对理想单摆成立, 要求 $\theta \rightarrow 0$, 这在实际上是不存在的。在实际的单摆实验中, 悬线也有质量, 因此其转动惯量不为 0; 摆球是有质量有体积的刚性小球, 摆角也不可能为零, 摆球的运动还受到空气的影响。实际的单摆周期公式为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left[1 + \frac{d^2}{20l^2} - \frac{m_0}{12m} \left(1 + \frac{d}{2l} + \frac{m_0}{m} \right) + \frac{\rho_0}{2\rho} + \frac{\theta^2}{16} \right]}$$

式中, T 为单摆的周期, l 、 m_0 为单摆摆线长度和质量, d 、 m 、 ρ 分别为摆球的直径、质量和密度, ρ_0 为空气密度, θ 为摆角。

一般情况下, 摆球几何形状、摆的质量、空气浮力、摆角 ($\theta < 5^\circ$) 对 T 的修正都小于 1%。若实验精度要求在 1% 以内, 则这些修正项都可以忽略不计, 此时的周期公式为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

可以通过测量小球摆动的周期, 再通过上式来计算当地重力加速度。

[不确定度原理分析]

本实验需要事先测量的量有: 单摆摆长 l 、单摆的周期 T 、摆球的直径 d 。

其中单摆的周期可用秒表以累积法测出。由于

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

其中修正摆长 $L = l + \frac{1}{2}d$, 按最大不确定度公式估算, 有

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta T}{T}$$

根据不确定度均分原理有 $\frac{\Delta L}{L} \leq 0.5\%$, $2\frac{\Delta T}{T} \leq 0.5\%$, 将 L 和 T 的粗测值 ($l \approx 70\text{cm}$ 、 $d \approx 2.0\text{cm}$ 、 $T \approx 1.7\text{s}$) 代入有:

$$\Delta L \leq 0.35\text{cm}, \quad \Delta T \leq 0.00425\text{s}$$

由于钢卷尺的最大允差为 0.2cm , 所以测量摆长应当使用钢卷尺、测量小球直径应当使用游标卡尺; 测量周期应当使用秒表。

注意, 应当满足 $l \gg d$, 至少要使 $l = 20d = 40\text{cm}$, 上面粗测值选取了 $l \approx 70\text{cm}$; 由于 $\Delta L \leq 0.5\%L$, 在实验室允许的范围内增长摆长不会提高精度。

根据统计分析, 实验人员开启或停止秒表的反应时间为 0.1s 左右, 所以实验人员测量时间的精度近似为 $\Delta_{\lambda} \approx 0.2\text{s}$ 。

设应当累计测量 N 次周期, N 应当满足关系式

$$\frac{\Delta_{\lambda} + \Delta_{\text{秒}}}{N} \leq \Delta T$$

解得 $N \geq 49.41$, 近似取 $N = 50$, 即要累计合并 50 个周期进行测量。

[思考题]

1. 在实际工作中, 为什么利用 $h = \frac{1}{2}gt^2$ 很难精确测量重力加速度 g ?

首先, 从起点开始下落距离不易测准, 因为小球下落的起始和终止位置不明确; 其次, 从起点开始下落时间不易测准, 这是由于电磁铁有剩磁。

2. 为了提高测量精度, 光电门 1 和光电门 2 的位置应如何选取?

光电门 1 应当固定在离起点稍远的地方, 最大可能减少剩磁影响, 并且使得 v_0 固定。光电门 2 应当多选取几个位置, 获得足够多的数据, 而且离光电门 1 的距离应适当远。

3. 利用本实验的装置, 如何测量小球下落到某个位置的瞬时速度?

调节光电门为测量遮光时间模式, 测出小球遮光时间 Δt , 再利用游标卡尺测出小球直径 d , 则瞬时速度可用平均速度代替, 为 $\bar{v} = \frac{d}{\Delta t}$ 。

4. 利用本实验装置, 你还能提出其他测量重力加速度 g 的实验方案吗?

利用 3 的结论, 测量两个位置的瞬时速度 $v_{1,2}$ 和相对位置 h , 利用公式

$$v_2^2 - v_1^2 = 2gh \text{ 计算重力加速度 } g。$$

5. 分析基本误差的来源, 提出进行改进的方法。

测量会有误差; 并且人眼观察来控制秒表也会有较大误差, 所以可以尝试录制视频, 通过视频编辑软件确定 T 。