图论作业(第10周)

黄瑞轩 PB20111686

9.1

注意到$\sum_{e\in\alpha(t)} f(e)$即$t$的总流出，$\sum_{e\in\beta(t)} f(e)$即$t$的总流入。不妨设所有非$s,t$的顶点集合为$N$，对于$N$由网络流的定义有$N$的流入$=N$的流出，设$\sum(p\to q)$表示$p$向$q$的总流入，则

$\sum_{e\in\alpha(s)} f(e)=\sum(s\to N)+\sum(s\to t)$

$\sum_{e\in\beta(s)} f(e)=\sum(N\to s)+\sum(t\to s)$

$\sum_{e\in\alpha(t)} f(e)=\sum(t\to N)+\sum(t\to s)$

$\sum_{e\in\beta(t)} f(e)=\sum(N\to t)+\sum(s\to t)$

由于N的流入$=N$的流出，即$\sum(s\to N)+\sum(t\to N)=\sum(N\to s)+\sum(N\to t)$，所以

$\left(\sum_{e\in\alpha(t)} f(e)-\sum_{e\in\beta(t)} f(e)\right)-\left(\sum_{e\in\beta(s)} f(e)-\sum_{e\in\alpha(s)} f(e)\right)=$

$\sum(t\to N)+\sum(t\to s)-\sum(N\to t)-\sum(s\to t)-\sum(N\to s)-\sum(t\to s)+\sum(s\to N)+\sum(s\to t)$

$=\sum(t\to N)-\sum(N\to t)-\sum(N\to s)+\sum(s\to N)=0$

证毕。

9.2

（1）若$u,v\in X,(u,v)\in E(D)$，则$\sum_{e\in\beta(u)} f(e)$中含有$f((u,v))$，且$\sum_{e\in\alpha(v)} f(e)$中含有$f((u,v))$，这样的边对$\sum_{v\in X}(\sum_{e\in\beta(v)} f(e)-\sum_{e\in\alpha(v)} f(e))$不产生影响，故

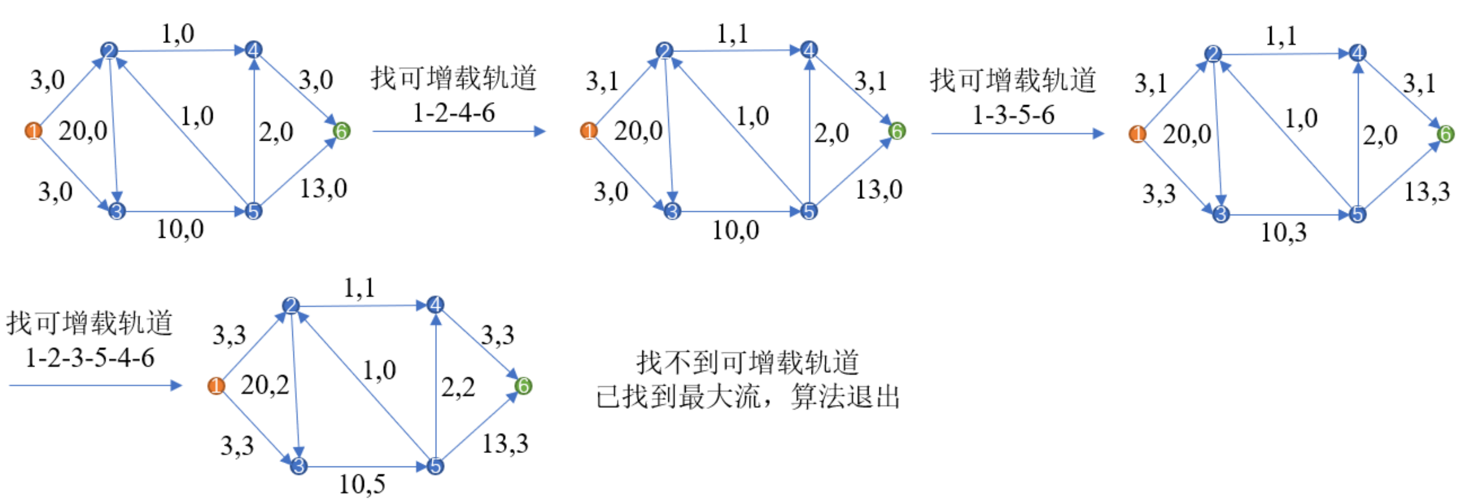
$$\sum_{v\in X}\Big(\sum_{e\in\beta(v)} f(e)-\sum_{e\in\alpha(v)} f(e)\Big)=f(X,\bar{X})-f(\bar{X},X)=f^{+}(X)-f^{-}(X)$$

（2）一般情况下就不相等，左侧还考虑了边的另一侧就在X中的情况。例如习题4图，取$X=\{u,v_1\}$，第一个不等式左侧就多了(u,v_1)的流函数。

9.3

设$S=\{v\mid s可达v\}$，首先$s\in S$，其次$t\notin S$，故$t\in\bar{S}$，故$(S,\bar{S})$是一个截。因为从边集角度考虑$(S,\bar{S})$是空集（不存在这样的有向边），所以$C(S,\bar{S})=0$，截量非负，故最小截量$=0$；任取流函数，其流量$\le$最小截量，又流量非负，故最大流量$=0=$最小截量。

9.4



9.5

在Ford-Fulkerson算法中取初始流函数为$f(e)\equiv 0$，因为找可增载轨道的$l(P)$时所涉及的只有有限次加法、减法和取最小值，这些操作对整数封闭，在对流函数进行修改迭代的时候也只有有限次加法、减法和取最小值，这些操作对整数封闭，因此最后得到的最大流一定是整数。因为最大流唯一，所以取其他初始流函数的结果最大流一定也是整数。证毕。