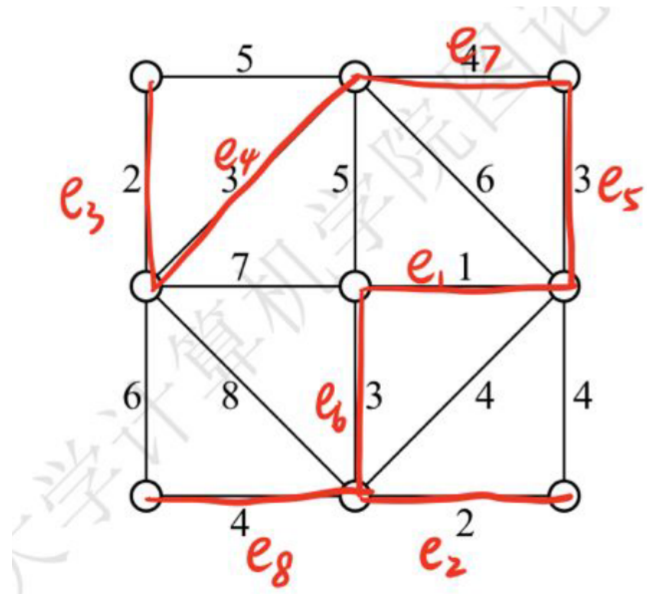
图论作业(第三周)

黄瑞轩 PB20111686

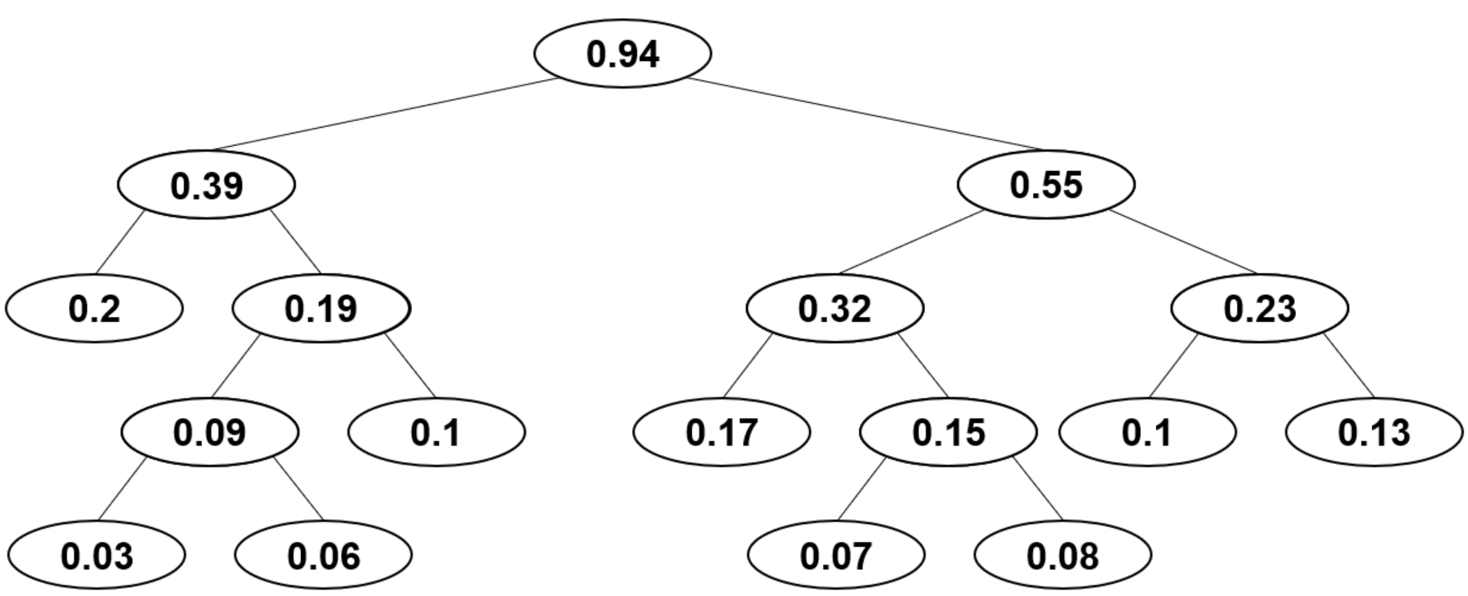
Chap 2 Prob. 14

从上到下，从左到右编号为 $v_1, \ldots, v_9$ ，下面是用Kruskal算法得出的最小生成树。

$$(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}, \{v_5v_6, v_8v_9, v_1v_4, v_4v_2, v_3v_6, v_5v_8, v_2v_3, v_7v_8\})$$



Chap 2 Prob. 20



Chap 2 Prob. 23

> **引理1：** 给定 $w_1 \le w_2 \le \ldots \le w_t$ ，则存在一棵Huffman树，使得 w_1, w_2 对应的顶点是兄弟，且这两个顶点在二叉树中的深度都等于树高。
>
> **证明：** Huffman算法保证当 $w_1 \le w_2 \le \ldots \le w_t$ 时存在这样一棵Huffman树，使得 w_1, w_2 对应的顶点是兄弟，下面只需证明深度相等。设 $w_{1,2}$ 的前驱是 $p(w_{1,2})$ ，由于 w_1 和 w_2 是兄弟，则 $p(w_1) = p(w_2)$ ，不妨记为 u ，树的性质保证轨道 $P(\mathrm{root}, u)$ 具有唯一性，因此 w_1, w_2 具有相同的深度 $L(P(\mathrm{root}, u))$ 。

> **引理2：** 构造出的某棵Huffman树中， w_1, w_2 具有最大深度。
>
> **证明：** 引理1保证存在这样的Huffman树，假设我们构造出一个Huffman树，其具有最大深度的叶前驱的两个孩子为 $w_i, w_j (w_1 < w_i, w_j)$ ，设此时
>
> $$WPL(T) = w_iL_m + w_1L_1 + WPL_{\text{others}}$$
>
> 现在将 w_1 与 w_i 互换，得
>
> $$WPL(T') = w_1L_m + w_iL_1 + WPL_{\text{others}}$$
>
> 则
>
> $$WPL(T) - WPL(T') = (w_i - w_1)(L_m - L_1)$$
>
> 由假设知道 $L_m - L_1 > 0, w_i - w_1 > 0$ ，则
>
> $$WPL(T) > WPL(T')$$

> 这与构造的是Huffman树矛盾，因此 w_1 一定是具有最大深度的叶前驱的孩子，同理， w_2 是具有最大深度的叶前驱的孩子。证毕。

> **引理3：** 收缩是指将某个叶前驱的两个孩子收缩至这个叶前驱，叶前驱成为新的叶子，权重为孩子权重之和；展开是指收缩的逆。最优树的收缩与展开形成的树仍为最优树。
>
> **证明：** 将树 T_n 中 w_1, w_2 两个叶子节点收缩得到新树 $T_{n-1}^* \left(w_{L_{max}} = w_1 + w_2\right)$ ，令带权为 $\{w_3, w_4 \ldots. w_n, w_1 + w_2\}$ 的最优树为 T_{n-1} ，反向展开得到的树为 T_n^* 。则有：
>
> $$\begin{aligned} WPL\left(T_n\right) = WPL\left(T_{n-1}^*\right) + \left(w_1 + w_2\right) \\ WPL\left(T_{n-1}\right) = WPL\left(T_n^*\right) - \left(w_1 + w_2\right) \end{aligned}$$
>
> 整理得：
>
> $$WPL\left(T_n\right) - WPL\left(T_n^*\right) + WPL\left(T_{n-1}\right) - WPL\left(T_{n-1}^*\right) = 0$$
>
> 因为 T_n, T_{n-1} 是最优树， 当且仅当 $WPL\left(T_n\right) = WPL\left(T_{n-1}^*\right)$ 且 $WPL\left(T_{n-1}\right) = WPL\left(T_{n-1}^*\right)$ 时等式成立。即 T_n^*、T_{n-1}^* 也是最优树。

> **引理4：** 两个最优树根节点合并产生新的根，产生的新树还是最优树。
>
> **证明：** 可以将一棵最优树最大深度处进行收缩，不断收缩下去，引理1，2保证每一次收缩都能进行，引理3保证每一次收缩后仍是最优树。直到只有1个节点。
>
> 两棵树都进行这样的操作，两个节点只有一种构造树的方式，且这种方式一定是最优树，再将新构造的树展开，引理3保证还是最优树。

Huffman树的创建过程也即最优树的合并过程，引理4保证这样创建的Huffman树是最优树。

Chap 3 Prob. 2

可以这样构造：

（1）构造一个 k 阶完全图 K_k ，则 $V' = V(K_k)$ ；

（2）构造三个 $k+1$ 阶完全图 $K_{k+1}[1 \sim 3]$ ，分别从这三个 $k+1$ 阶完全图中选 k 个顶点与 K_k 中不同的顶点直接相连，这一步相连的边集合记为 E 。

（3） $G = \left(V' \cup \bigcup_{i=1}^{3} V(K_{k+1})[i], E \cup E(K_k) \cup \bigcup_{i=1}^{3} E(K_{k+1})[i]\right)$ 。

Chap 3 Prob. 4

考虑图 $G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_3v_4, v_3v_5, v_4v_5\})$ ，容易验证 $\delta(G) = 2, \nu(G) = 5, \kappa(G) = 1$ ，满足题目要求。

Chap 3 Prob. 6

首先假定 $1 \le k \le \nu - 2$ ，这是因为首先 $k \le \nu - 1$ ，其次当 $k = \nu - 1$ 时条件变为 $\delta \ge \nu - 1.5$ ，换而言之 δ 可能的最小值是 $\nu - 1 = k$ ，因此最少删掉 k 个点才能使这个图不连通，此时 G 是 $k-$ 连通图是显然的。

删除 G 中 $k-1$ 个点得到 G' ，只要证明此时 G' 连通。由题

$$\begin{aligned} \delta(G') \ge \frac{1}{2}[\nu(G) + k - 2] - (k-1) &= \frac{1}{2}[\nu(G) - k] \\ &= \frac{1}{2}[\nu(G) - (k-1) - 1] \\ &= \frac{1}{2}[\nu(G') - 1] \end{aligned}$$

则

$$\delta(G') \ge \frac{1}{2}\nu(G')$$

如果 G' 不连通，假设由两个连通片 G_1, G_2 组成，不妨假设 $\nu(G_1) \le \nu(G_2)$ ，则考察 G_1 中某个点 u ，由于是简单图，则一定有

$$\deg(u) \le \nu(G_1) - 1 \le \frac{1}{2}\nu(G') - 1$$

这与前述 $\delta(G') \ge \frac{1}{2}\nu(G')$ 矛盾，故不可，因此 G' 一定连通，因此 G 一定 $k-$ 连通。