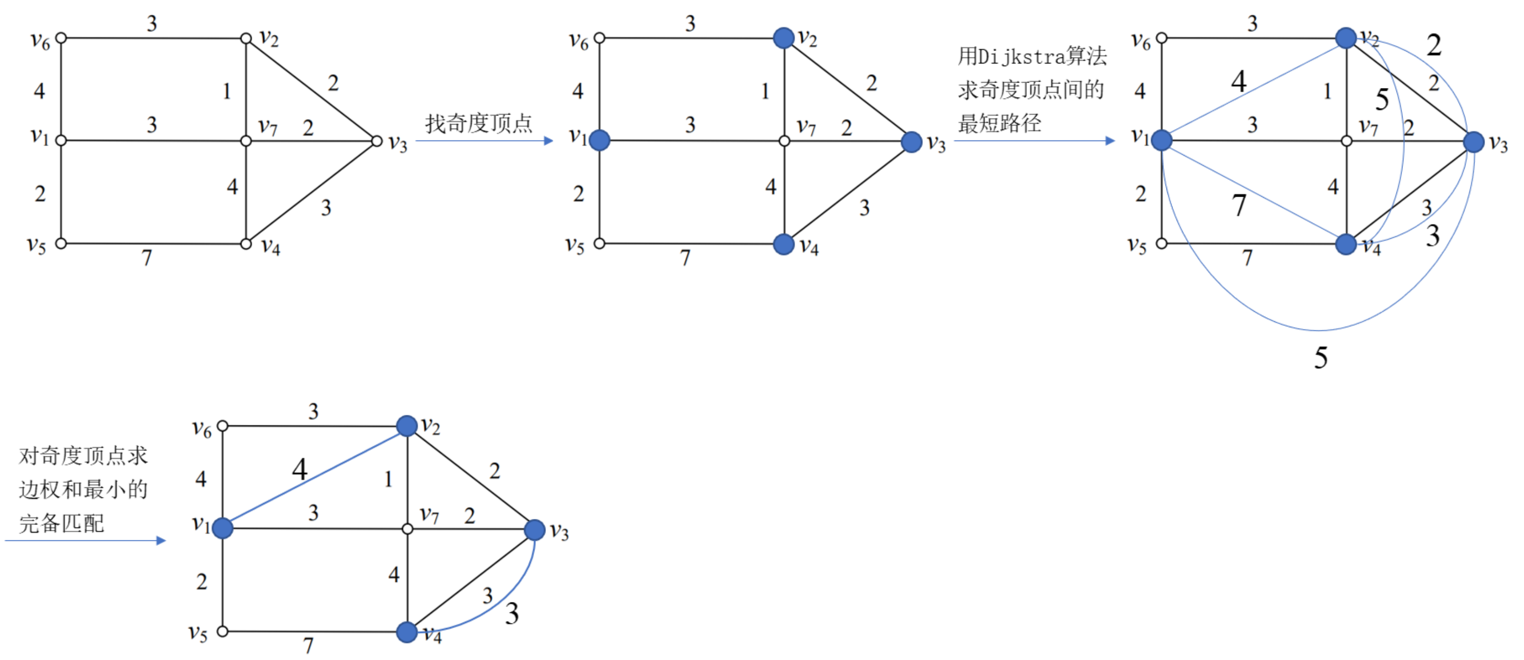
图论作业(第7周)

黄瑞轩 PB20111686

Chap 6 Prob. 8



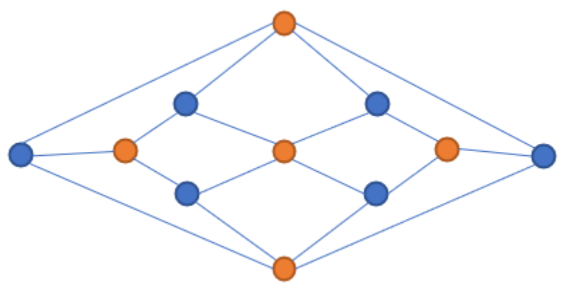
对最后的图很容易获得一条Euler回路（选取圈 $v_6v_2v_7v_1, v_1v_2v_3v_4v_5, v_7v_3v_4$ ），则所求的邮路为：

$$v_1v_6v_2v_7v_1v_2v_3v_4v_7v_3v_4v_5v_1$$

Chap 6 Prob. 9

若 G 是二分图，且是Hamilton图，则其含有Hamilton圈，记为 $v_1v_2\dots v_k(=v_1)$ 。不妨记 $V(G)=X\dot{\cup}Y$ ，且 $v_1\in X$ ，则 $v_2\in Y$ ，则 $v_3\in X\dots$ ，最后 $v_k=v_1\in X$ ，故 $v_{k-1}\in Y$ ，说明 $k-1\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$ ，且 $V(G)=\cup_{i=1}^{k-1}\{v_i\}$ ，故 $\nu(G)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$ 。

不是。首先这是二分图，二部划分如下，其次因为此图有11个顶点，由前面所述这一定不是Hamilton图。



Chap 6 Prob. 11

是，对教材图6.15(a)而言，顶点$1\sim 5$等价，顶点$6\sim 10$等价。假若删去7号顶点，可以找到Hamilton圈 $4-9-6-1-2-3-8-10-5-4$；假若删去3号顶点，可以找到Hamilton圈$8-6-1-2-7-9-4-5-10-8$。

Chap 6 Prob. 14

因为 $k\geq 2$ ，所以 $\nu=2k-1\geq 3$ ，且 $\delta(G)=\deg(v)_{v\in V(G)}=k\geq \nu/2$ ，由Dirac定理知其为Hamilton图。

Chap 6 Prob. 16

不是。用反证法，假设 G 是非均匀二分图， H 是其一条Hamilton圈。由二分图的性质知 H 上一定是 X 中的顶点和 Y 中的顶点交替出现，所以一定有 $|\{v|v\in V(H),v\in X\}|=|\{v|v\in V(H),v\in Y\}|$ ，但是 H 是Hamilton圈， $\{v|v\in V(H)\}=X\cup Y$ ，所以 $|X|=|Y|$ ，与条件矛盾！

Chap 6 Prob. 21

首先证明满足条件的 G 是连通的。若 G 不连通，则设其连通片是 $G_1,G_2,\dots,G_n(n\geq 2)$ ，取 $m=\nu-2$ ，首先我们知道 $|V(G_i)|<\nu$ ，则 $\Delta_{G_i}\leq|V(G_i)|-1<\nu-2$ ，则所有顶点的度数都不会超过 m ，但是这样的顶点个数 $=\nu>m$ ，与条件矛盾，所以 G 是连通的。

若 $c(G)=K_\nu$ ，则 G 是Hamilton图；

若不然，记顶点 $v\in V(G)$ 在 G 中的度数为 $\deg(v)$ ，在 $c(G)$ 中的度数为 $\deg'(v)$ 。记

$$\Phi(c(G))=\{\{u,v\}|u,v\in V(c(G)),uv\notin E(c(G))\}$$

即 $c(G)$ 中不相邻的点对集合。现在对任意 $\{u,v\}\in\Phi(c(G))$ ，一定有 $\deg'(u)+\deg'(v)\le\nu-1$ ，取 u,v 是这样的度数和最大的一对顶点，不妨设 $\deg'(v)\le\deg'(u)$ 。则 $c(G)$ 中不与 v 相邻的顶点有 $\nu-1-\deg'(v)$ 个，则

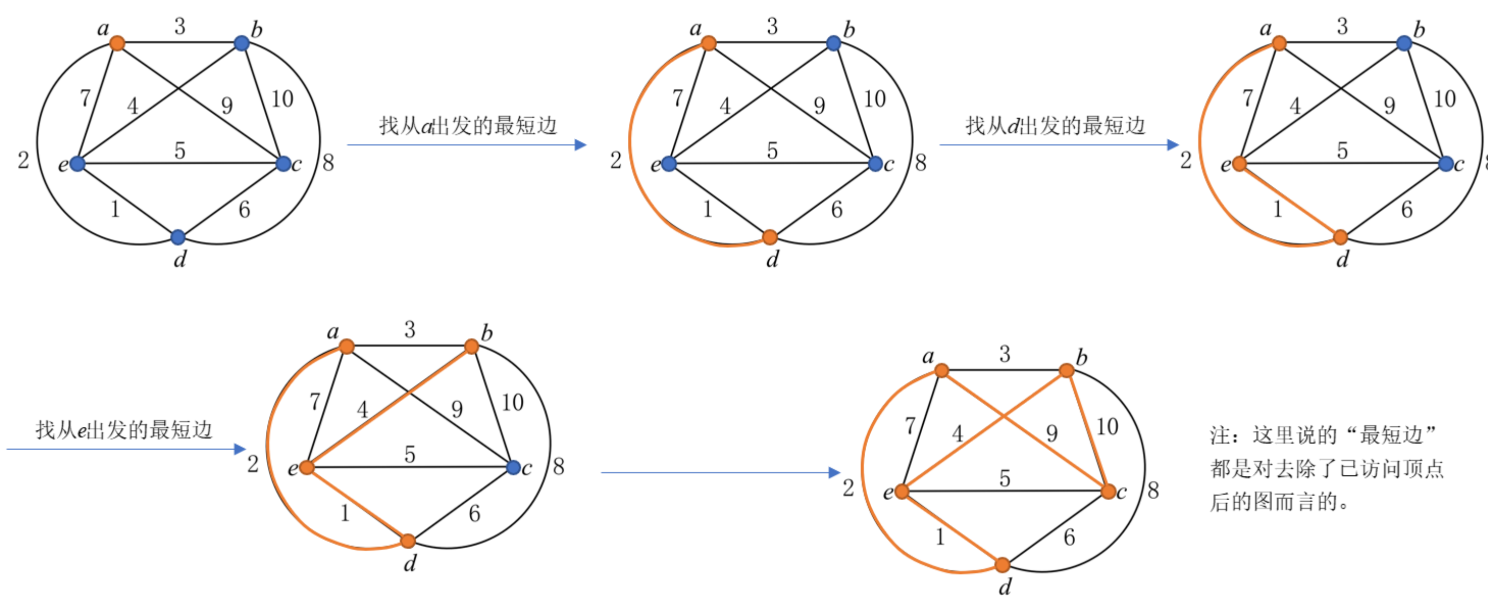
$$\nu-1-\deg'(v)\ge\nu-1-(\nu-1-\deg'(u))=\deg'(u)$$

如果取 $m=\deg'(u)\le\nu-2$ ，则 $c(G)$ 中不与 v 相邻的顶点至少有 m 个，因为这些顶点不与 v 相邻，所以这些顶点中每一个的度数和 v 的度数和都将小于 ν ，特别， u 是其中度数最大的顶点，所以所有这些顶点的度数都不会超过 m ，即至少有 m 个顶点的度数不超过 m ，又因为 $G\subset c(G)$ ，所以 G 中也至少有 m 个顶点的度数不超过 m ，与题目条件矛盾，故不可。

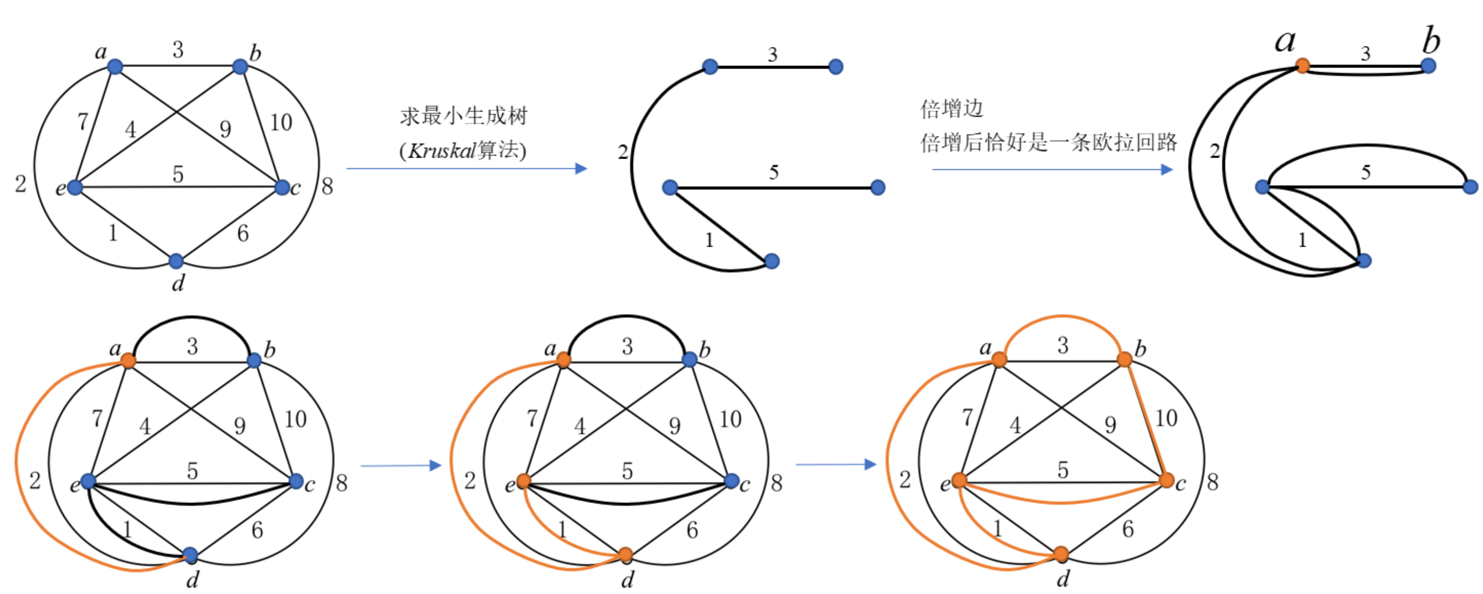
所以满足题目条件的 G 一定有 $c(G)=K_\nu$ ，从而是Hamilton图。

Chap 6 Prob. 22

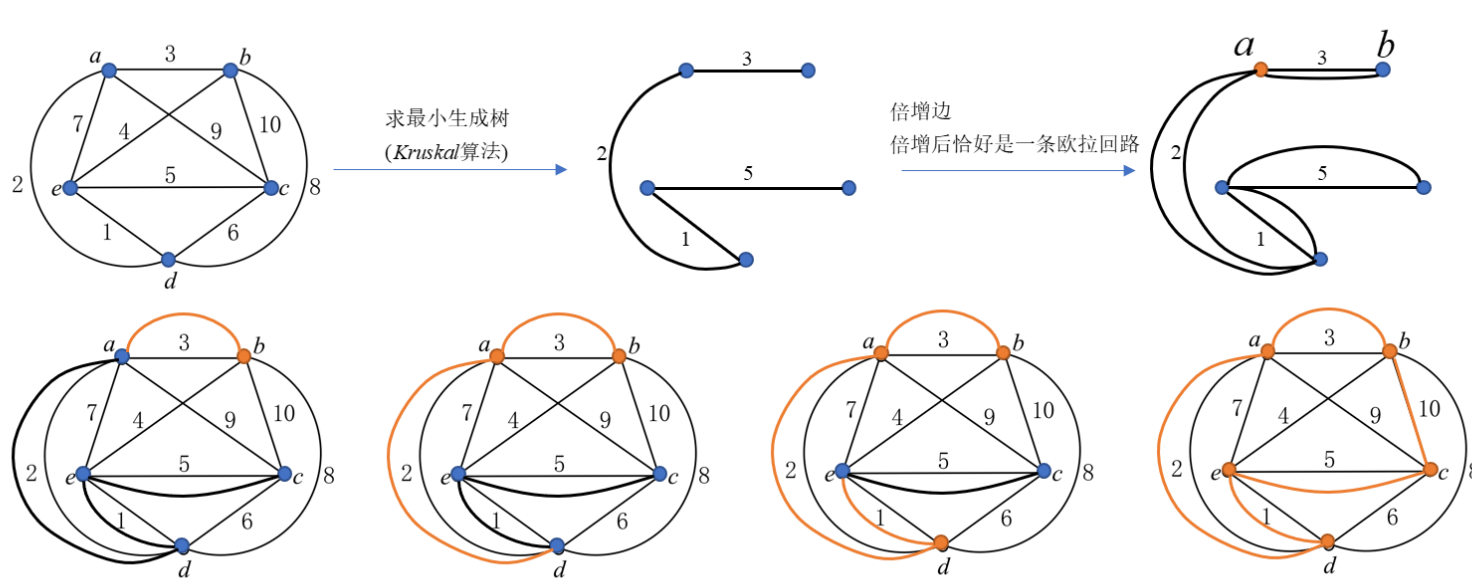
(1) 最终结果 $W=26$ 。



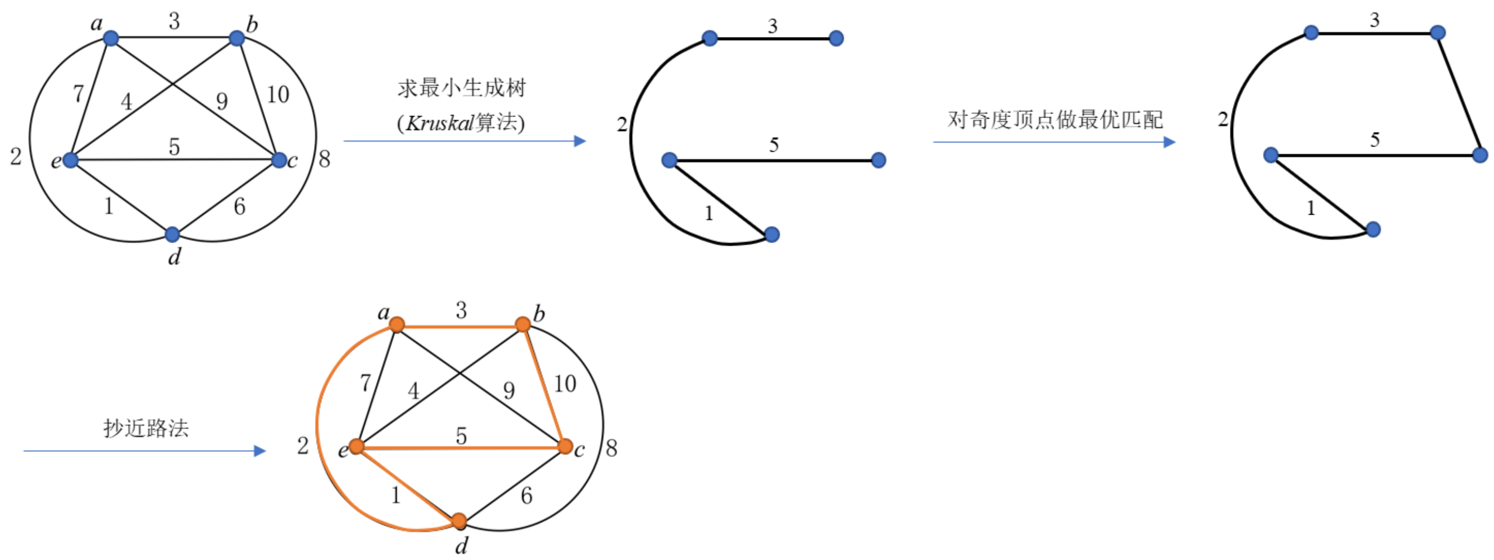
(2) 从 a 出发，最终结果 $W=21$ 。



从 b 出发，最终结果 $W=21$ 。



(3) 最终结果 $W=21$ 。



求最小生成树
(*Kruskal*算法)
对奇度顶点做最优匹配
抄近路法
a
b
c
d
e
3
7
4
9
10
2
5
8
1
6