

实 验 报 告

评分:

2020 级 11 系 3 班 姓名 黄瑞轩 日期 2021 年 4 月 5 日 No PB20111686

实验题目: 单摆法测重力加速度

实验目的: 利用单摆法测量合肥当地重力加速度 (不确定度小于 1%)

实验原理: 在摆角很小时, 我们有近似公式 $\sin \theta \approx \theta$, 因此真空中的单摆动力学方程

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \text{ 在摆角很小时可改写为 } \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0, \text{ 该方程的通解是}$$
$$\theta = A \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi\right) \quad (1)$$

这是简谐运动, 因此周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2)$$

上式仅对理想单摆成立, 要求 $\theta \rightarrow 0$, 这在实际上是不存在的。实际的单摆周期公式为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left[1 + \frac{d^2}{20l^2} - \frac{m_0}{12m}\left(1 + \frac{d}{2l} + \frac{m_0}{m}\right) + \frac{\rho_0}{2\rho} + \frac{\theta^2}{16}\right]} \quad (3)$$

式中, T 为单摆的周期, l 、 m_0 为单摆摆线长度和质量, d 、 m 、 ρ 分别为摆球的直径、质量和密度, ρ_0 为空气密度, θ 为摆角。一般情况下, 摆球几何形状、摆的质量、空气浮力、摆角 ($\theta < 5^\circ$) 对 T 的修正都小于 1‰。若实验精度要求在 1‰以内, 则这些修正项都可以忽略不计, 仍沿用(2)式。

可以通过测量小球摆动的周期, 再通过上式来计算当地重力加速度。

由于 $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$, 按最大不确定度公式估算, 有

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{T} \quad (4)$$

根据不确定度均分原理有 $\frac{\Delta l}{l} \leq 0.5\%$, $2\frac{\Delta T}{T} \leq 0.5\%$, 将 l 和 T 的粗测值

($l \approx 70\text{cm}$ 、 $T \approx 1.7\text{s}$) 代入有 $\Delta l \leq 0.35\text{cm}$, $\Delta T \leq 0.00425\text{s}$ 。

由于钢卷尺的最大允差为 0.2cm, 所以测量摆长应当使用钢卷尺; 测量周期应当使用秒表。

根据统计分析, 实验人员开启或停止秒表的反应时间为 0.1s 左右, 所以实验人员测量时间的精度近似为 $\Delta_{\lambda} \approx 0.2\text{s}$ 。

设应当累计测量 N 次周期, N 应当满足关系式

$$\frac{\Delta_{\lambda} + \Delta_{\text{秒}}}{N} \leq \Delta T \quad (5)$$

解得 $N \geq 49.41$, 近似取 $N = 50$, 即要累计合并 50 个周期进行测量。

实验仪器：本实验的测量装置如下图。先测量摆线端点到小球质心的长度作为摆长。平面镜上有一细线，开始前需调整调节螺栓使得这一细线、摆线和摆线在平面镜中的像在同一平面内。轻轻拨动小球，使小球偏角小于 5° ，用秒表记录小球摆动 $N(N \geq 50)$ 个周期所用时间。

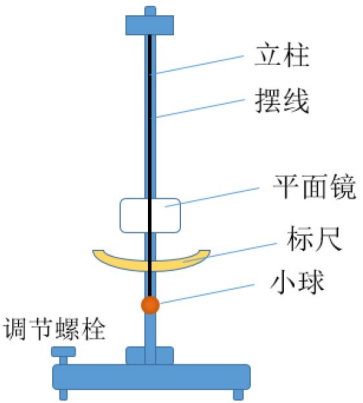


图 1 实验装置

测量记录：（原始数据附后）

i	1	2	3	4	5	6
l_i/cm	72.70	72.53	72.48	72.60	72.68	72.65
T_i/s	87.18	88.00	88.10	87.27	85.57	85.54
N_i	51	52	52	51	50	50

表 1 原始实验数据表格

分析讨论：

（1）实验数据处理

由 $t_i = \frac{T_i}{N_i}$ ，计算得

i	1	2	3	4	5	6
l_i/cm	72.70	72.53	72.48	72.60	72.68	72.65
t_i/s	1.709	1.692	1.694	1.711	1.711	1.710

表 2 需要使用的数据表格

计算表 2 中物理量的平均值为 $\bar{l} = 72.60\text{cm}$ 、 $\bar{t} = 1.704\text{s}$ 。代入 $g = \frac{4\pi^2 l}{t^2}$ ，得

到 g 的测量值 $g = 9.87\text{m/s}^2$ 。

（2）误差分析

1° 相对误差

合肥地区重力加速度公认值 $g_0 = 9.79\text{m/s}^2$ ，因此本实验的相对误差为

$$\delta = \frac{|g - g_0|}{g_0} = 0.8\% \tag{4}$$

2° 不确定度

摆长均值 $\bar{l} = 72.60\text{cm}$ ，则 A 类不确定度 $u_A = \sqrt{\frac{\sum(l_i - \bar{l})^2}{6 \cdot 5}} = 0.00035\text{cm}$ ；卷尺

最大允差 $\Delta_{\text{米尺}} = 0.2\text{cm}$ ，置信系数 $C = 3$ ，则 B 类不确定度 $u_B = \frac{\Delta_{\text{卷尺}}}{3} = 0.067\text{cm}$ ；

测量次数 $n = 6$ ，查表可知 $t_{0.95} = 2.57$ ，则展伸不确定度为

$$U_{0.95,l} = \sqrt{(t_{0.95}u_A)^2 + u_B^2} = 0.067\text{cm} \quad (5)$$

摆动周期均值 $\bar{t} = 1.704\text{s}$ ，则 A 类不确定度 $u_A = \sqrt{\frac{\sum(t_i - \bar{t})^2}{6 \cdot 5}} = 0.003\text{s}$ ；秒表的

最大允差 $\Delta_{\text{秒表}} = 0.01\text{s}$ ，置信系数 $C = 3$ ，则 B 类不确定度 $u_B = \frac{\Delta_{\text{秒表}}}{3} = 0.003\text{s}$ ；测

量次数 $n = 6$ ，查表可知 $t_{0.95} = 2.57$ ，则展伸不确定度为

$$U_{0.95,t} = \sqrt{(t_{0.95}u_A)^2 + u_B^2} = 0.008\text{s} \quad (6)$$

最终测量结果的标准不确定度为

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln g}{\partial l} u_l\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln g}{\partial t} u_t\right)^2} = 0.48\% < 1\% \quad (7)$$

最终测量结果的展伸不确定度为

$$\frac{U_{0.95,g}}{g} = \sqrt{(U_{0.95,l})^2 + (2U_{0.95,t})^2} = 0.016 \quad (8)$$

实验的标准不确定度满足要求，可信最大误差 $U_g = 0.016 \times g_0 = 0.16\text{m/s}^2$ ，因此实验测得的重力加速度 g 的表达式应为

$$g = (9.87 \pm 0.16)\text{m/s}^2$$

(3) 实验讨论

考虑到摆球几何形状、摆的质量、空气浮力、摆角等的影响，修正重力加速度应当大于本实验的测量值。

思考题：

分析基本误差的来源，提出进行改进的方法。

本实验误差一是对摆长的测量，由于需要测悬挂点到小球质心的长度，因此在摆处于悬挂状态时对其摆长进行测量时米尺难免会有偏斜。此外，由于细线总有一定的弹性，在竖直情况下测量摆长会使摆长测量值偏大。可将摆取下，单独测量小球的直径和绳长，再相加作为摆长；二是对摆动周期测量会有误差，因为通过人眼观察的方式来控制秒表误差较大，所以可以尝试录制视频，通过视频编辑软件确定 T 。