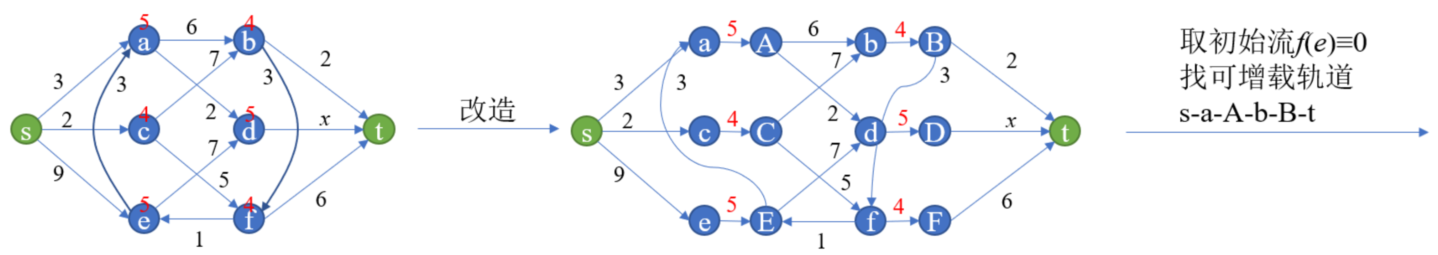
图论作业(第11周)

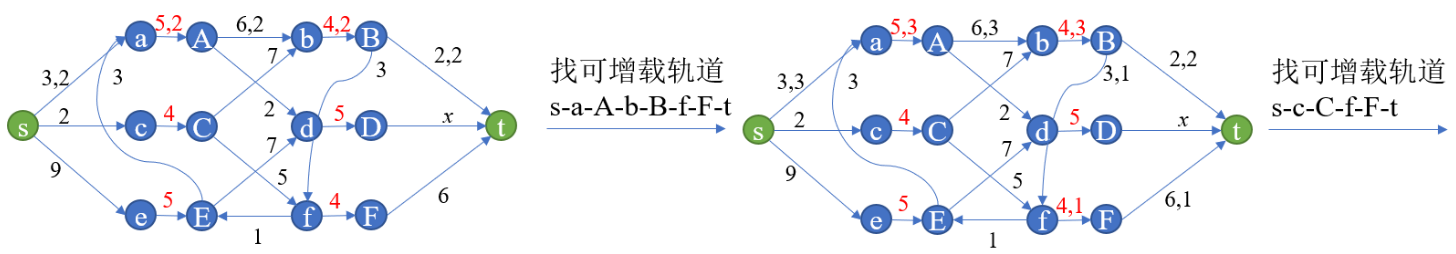
黄瑞轩 PB20111686

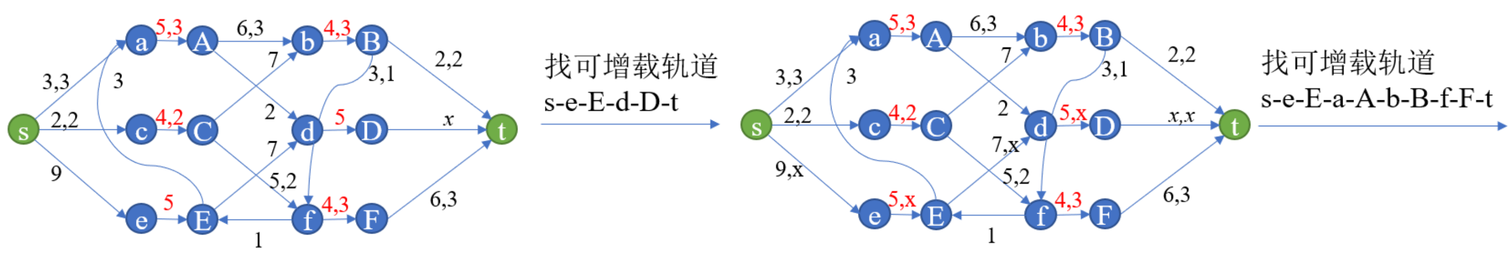
9.7

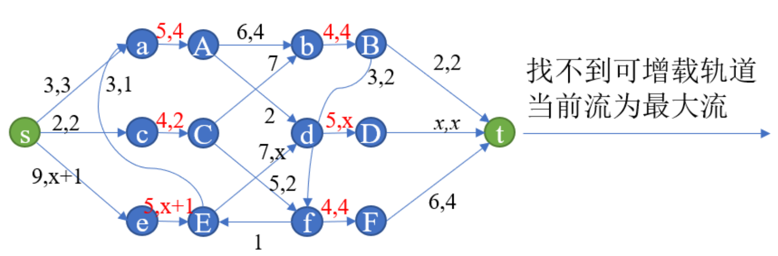
设 $d \to t$ 的容量为 x，下面需要对 x 进行分类讨论。

(1) 若 $0 \le x \le 4$。



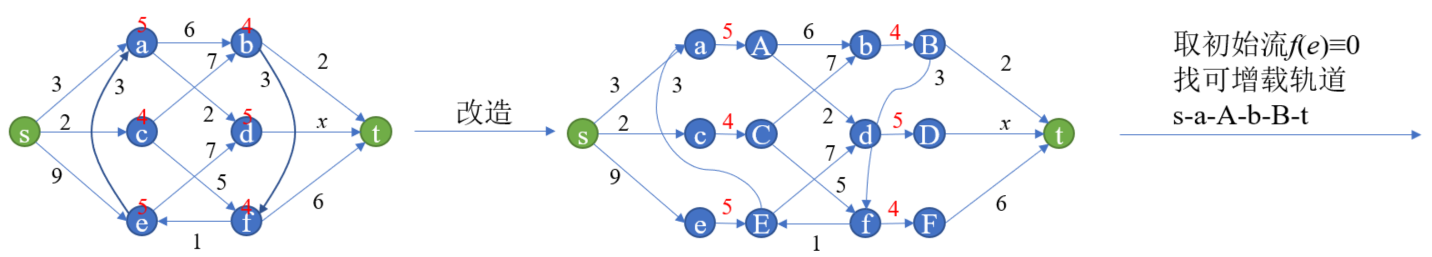


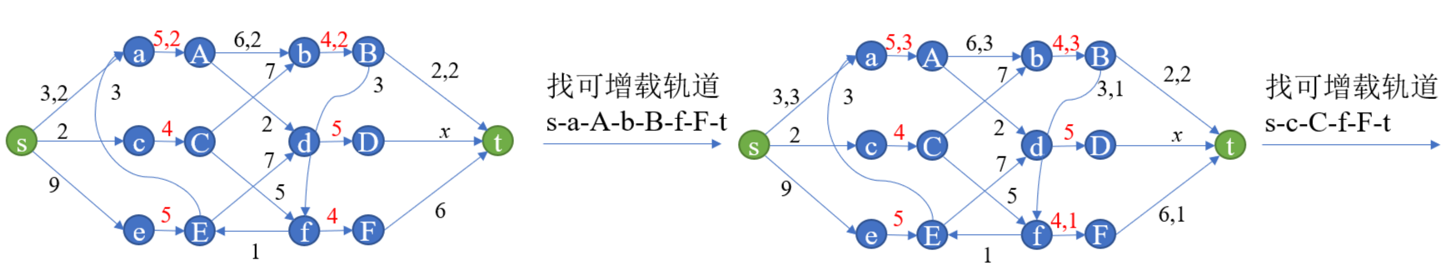


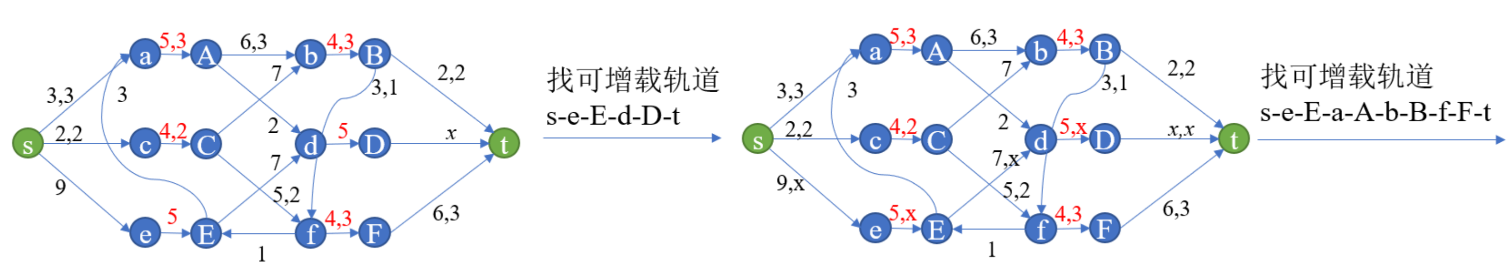


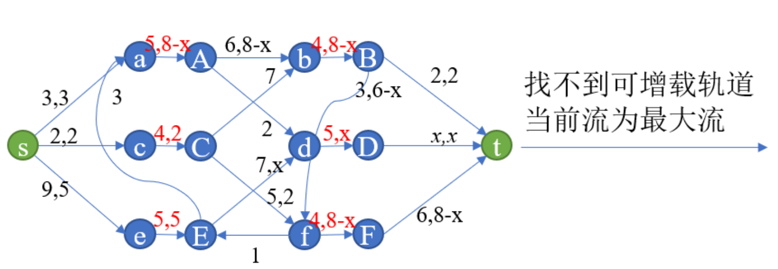
此时的最大流流量是 $6 + x$。

(2) 若 $4 < x \le 5$。



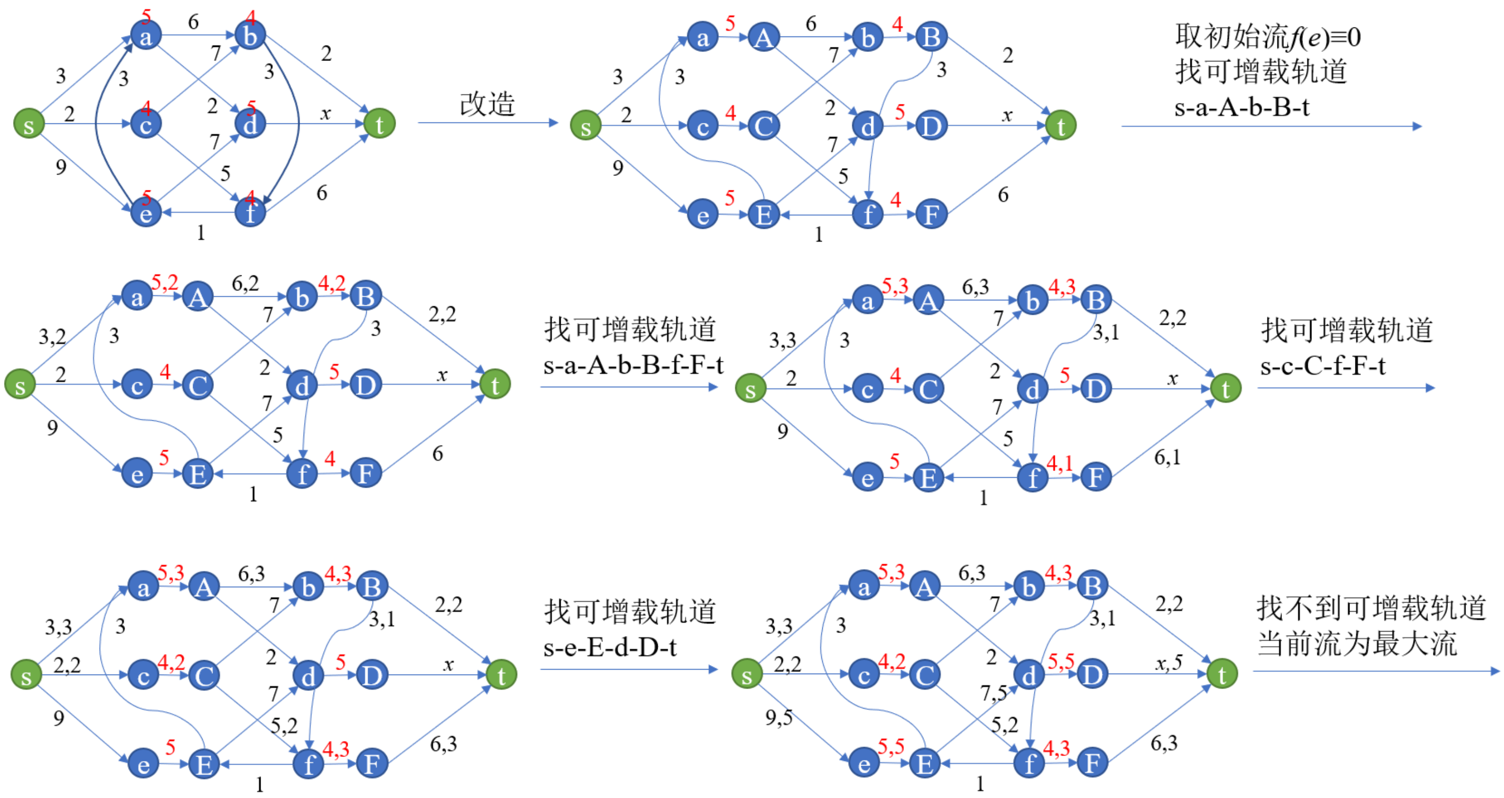






此时的最大流流量是 10 。

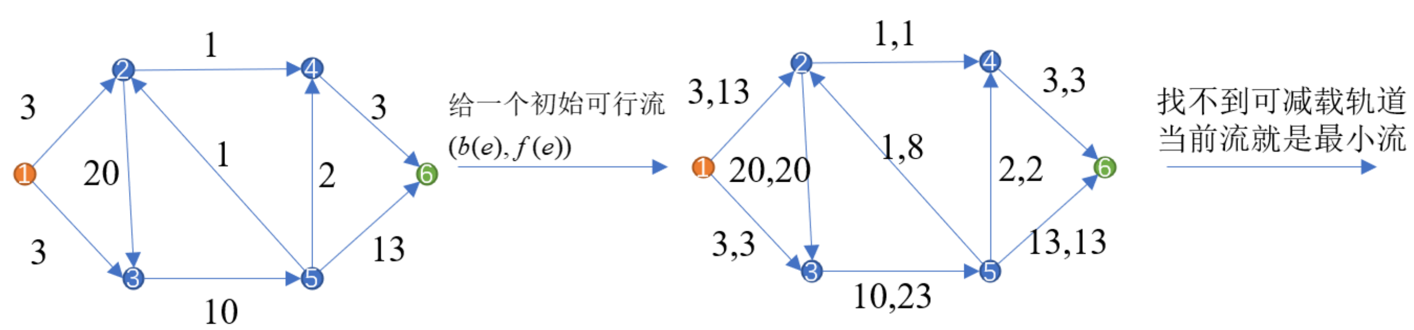
（3）若 $x > 5$ 。



此时的最大流流量是 10 。

9.11

由于各边容量上界为无穷，我们很容易可以给原网络一个初始可行流，在此基础上类比找最大流的方法，求出一个最小流。



此时的最小流流量为 16 。

9.12

充分性：如果存在一个顶点子集 $V' \subseteq V(N) - \{s,t\}$ 使得需要 V' 冒出流，则对于集合 V' 来说，$\sum_{e\in\alpha(V')} c(e) - \sum_{e\in\beta(V')} b(e) < 0$ ，假设所有流向 V' 的边都满载，即 $in(V') = \sum_{e\in\alpha(V')} c(e)$ ，由于容量有上下界，所以 V' 流出的流量至少是 $\sum_{e\in\beta(V')} b(e)$ ，所以对于 V' 来说一定不能满足流入=流出，所以原网络没有可行流；需要 V' 漏掉流的情况类似，同理可证。

必要性：由于网N没有可行流，从而N的伴随网络N'的最大流f'使得$\exists v \in V(N)$，使得$f'((s',v)) < c'((s',v))$。从s'开始找可增载的路（至少为$s'v$），并且这样的路末尾不是t'，否则与f'是最大流矛盾。假设这样的路末尾是u，下面证明$\{u\}$需要冒出流或漏掉流。

（i）找到的路最后以u为头，则在N中，$\forall e \in \alpha(u), f'(e) = 0 (e \neq us'), \forall e \in \beta(u), f'(e) = c'(e)$，否则$u$不是可增载路末尾。由$f'$的定义，由$f((s',u)) + f'(e) = \sum_{e\in\beta(u)} c'(e)$，从而在$N$中，$\sum_{e\in\alpha(u)} b(e) + f'(e) = \sum_{e\in\beta(u)} c(e)$，即

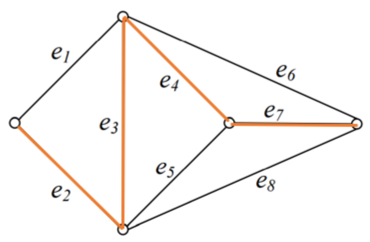
$$\sum_{e\in\alpha(u)} b(e) - \sum_{e\in\beta(u)} c(e) < 0$$

因此需要$\{u\}$漏掉流。

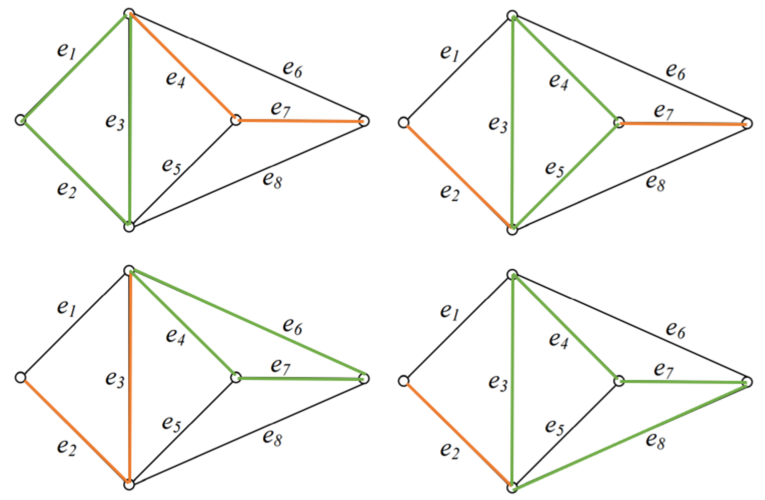
（ii）找到的路最后以u为尾，与上类似可证需要$\{u\}$冒出流。

即证。

10.1



生成树



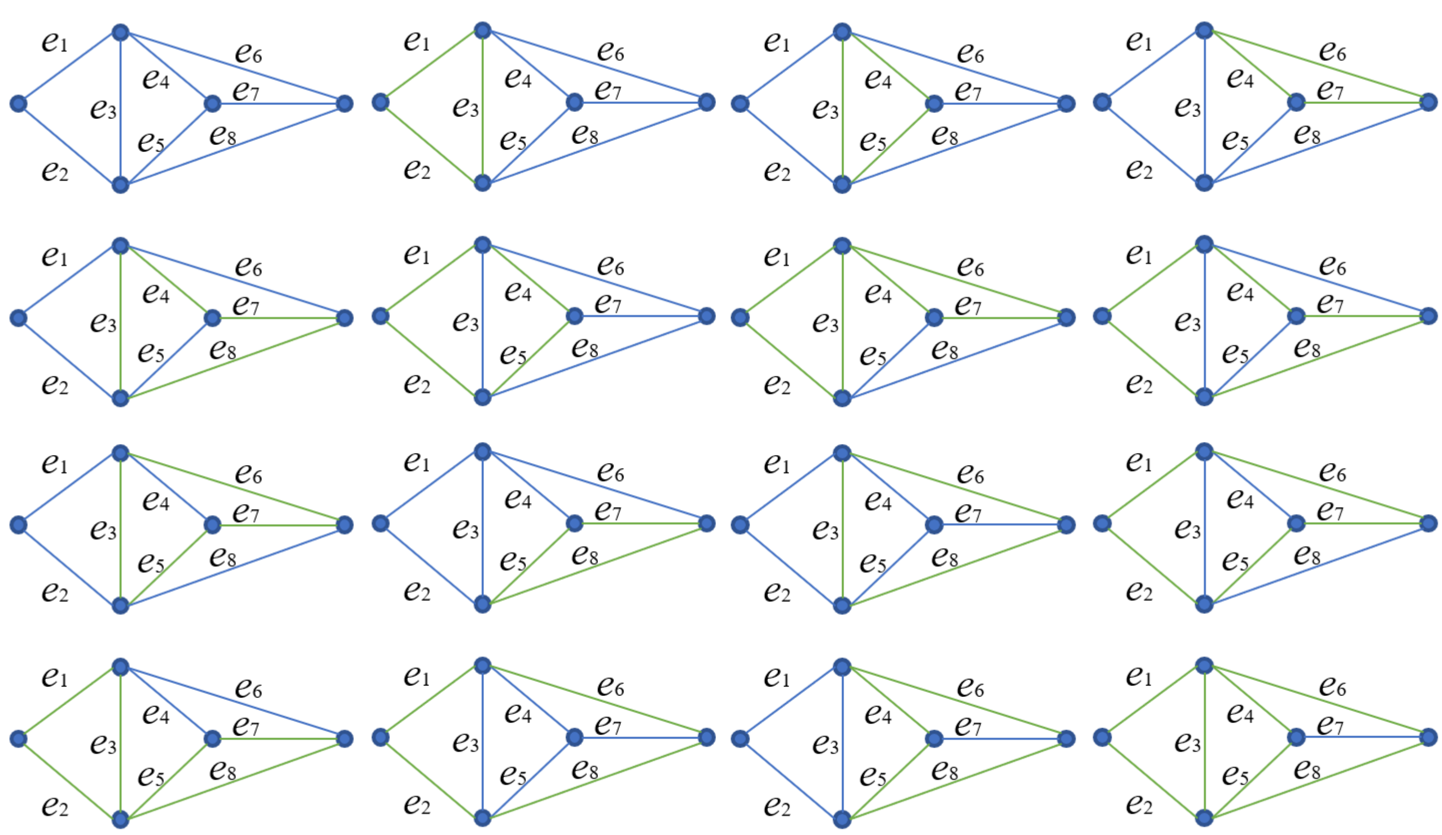
基本圈组

零向量：$(0,0,0,0,0,0,0,0)$，

基本圈组：$\begin{array}{l}(1,1,1,0,0,0,0,0),\\(0,0,1,1,1,0,0,0),\\(0,0,0,1,0,1,1,0),\\(0,0,1,1,0,0,1,1).\end{array}$

用基本圈组生成的向量（不同的基本圈组合而成）：$\begin{array}{l}(1,1,0,1,1,0,0,0),\\(1,1,1,1,0,1,1,0),\\(1,1,0,1,0,0,1,1),\\(0,0,1,0,1,1,1,0),\\(0,0,0,0,1,0,1,1),\\(0,0,1,0,0,1,0,1),\\(1,1,0,0,1,1,1,0),\\(1,1,1,0,1,0,1,1),\\(1,1,0,0,0,1,0,1),\\(0,0,0,1,1,1,0,1),\\(1,1,1,1,1,1,0,1).\end{array}$

圈空间 $\mathcal{C}(G)$ 的所有向量如上，图示如下，绿色线条表示圈向量中为1的边，按上面的顺序对应。



10.4

充分性：若任给 $S \in \mathcal{S}(G), S$ 中非零分量有偶数个。则任取 $v \in V(G), (\{v\}, V-\{v\})$ 是一个断集，其在 $\mathcal{E}(G)$ 中对应的向量就是 v 的关联边，由假设知道边数为偶数，即 $\deg(v) \equiv 0(\bmod 2)$ 。则对 G 所有顶点都是这样，所以 G 是Euler图。

必要性：若 G 是Euler图，则其所有顶点都是偶度的。任取其顶点子集 $V' \subseteq V$ ，则原来 G 中的边分为三种。

1. 两个端点均在 V' 中的，设这种边有 n_1 条；
2. 两个端点均在 $V-V'$ 中的，设这种边有 n_2 条；
3. 一个端点在 V' 中，另一个端点在 $V-V'$ 中的，设这种边有 n_3 条。

如果 n_3 是奇数，则 n_1 和 n_2 中有一个是奇数，有一个是偶数，不妨设 n_2 是偶数。因为这是Euler图，所以 $V-V'$ 中的每个顶点都是偶数度的顶点，现在我们的工作相当于给 $V-V'$ 这个顶点集合添加边。先把 n_2 条边加入其中，现在要把 n_3 条边的一端加入其中，因为 n_3 是奇数，所以添加完之后

$$\sum_{v\in V-V'}\deg(v)=2n_2+n_3\not\equiv 0\pmod 2$$

这与 G 是Euler图矛盾，故 n_3 是偶数，所以任给 $S\in\mathcal{S}(G), S$ 中非零分量有偶数个。