图论作业(第8周&第九周)

黄瑞轩 PB20111686

Chap 7 Prob. 7

(1.1) 首先，因为 $\chi(K_1)=1$，且 K_1 的真子图只有零图 Z， $\chi(Z)=0$，故 K_1 是 1 色临界图。若还有其他 1 色临界图，设为 G，则 $\nu(G)>1$，则 G 的一个真子图 $G'=(V(G),\varnothing)$ 也是 $\chi(G')=1$ 的，矛盾。

(1.2) 首先，因为 $\chi(K_2)=2$，且 K_2 的真子图只有 $H_1=(V(K_2),\varnothing),H_2=K_1,H_3=Z$，这里 $\chi(H_1)=\chi(H_2)=1<2,\chi(Z)=0<2$，故 K_2 是 2 色临界图。若还有其他 2 色临界图，设为 G，则 $\nu(G)>2$，因为 $\chi(G)=2$，所以 G 一定有边，所以 G 一定有 K_2 作为其真子图，矛盾。

(1.3) 首先，因为 $\chi(C_k)=3,k\equiv 1(\bmod 2),k\geq 3$，任取 C_k 的一个子图 H，若 H 是连通的，则 H 是一个轨道，$\chi(H)\leq 2$；若 H 不是连通的，则 H 是若干个轨道之并，同样有 $\chi(H)\leq 2$，故 $C_k,k\equiv 1(\bmod 2),k\geq 3$ 是 3 色临界图。若还有其他 3 色临界图，设为 G，则 G 不是二分图，则 G 含有奇圈，矛盾。

(2) 设 $n\equiv 0(\bmod 2)$，轮 W_{n-1}。

(3) 化为证明 $\delta\geq k-1$，反证，若 $\delta<k-1$，假设 $\deg(u)=\delta$，设 u 的邻顶集合为 $N(u)$，则 $\{u\}+N(u)$ 用到的色数 $\leq\delta+1<k$，则 $\chi(G-u)=\chi(G)$，与 G 是 k 色临界图矛盾。

Chap 7 Prob. 8

首先 $\nu(C)\geq 3$，则 $\nu\geq 4$。中间的顶点关联 $\nu-1$ 条边，一定需要 $\nu-1$ 种颜色。不妨将这 $\nu-1$ 条轴边颜色按顺序记为 $i_1,i_2,\ldots,i_{\nu-1}$，下面所说的加法是对模 $\nu-1$ 而言的。

因为颜色数 $\nu-1\geq 3$，给夹在 i_j,i_{j+1} 之间的圈边染色一定能再选出一种，比如拿 i_{j+2} 给 i_j,i_{j+1} 之间的圈边染色即可。所以给圈染色不需要其他另外的颜色，总共需要 $\nu-1$ 种颜色，即 $\chi'(W_\nu)=\nu-1$。

Chap 7 Prob. 9

输入： 二分图 $G=X\dot\cup Y$ （不妨设 $|X|\leq|Y|$）。

输出： G 的正常 Δ 边着色。

算法过程：

（1）备份 $G_0\leftarrow G$；若 $|X|\neq|Y|$，向 X 添加 $|Y|-|X|$ 个孤立顶点；令 $i=1$；转（2）。

（2）若 $\Delta=\delta$，转（4），否则转（3）。

（3）选择 $v\in X,\deg(v)=\delta(X)$ （X 中度数最小的顶点）， $u\in Y,\deg(u)=\delta(Y)$，令 $G\leftarrow G+uv$，转（2）。

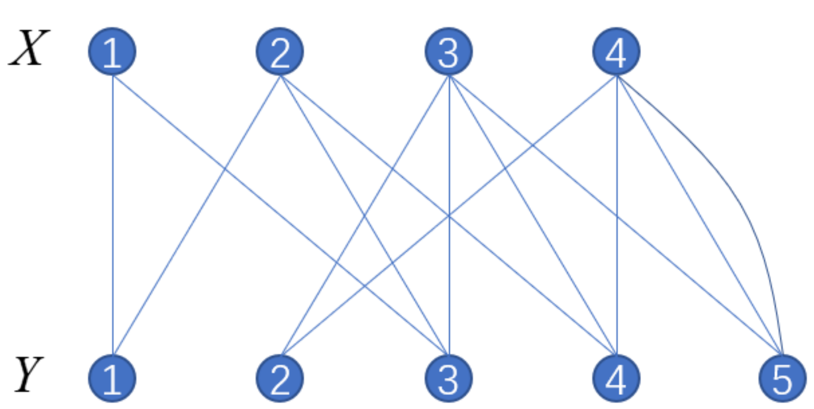
（4）用匈牙利算法对 G 做完备匹配，得 M_i。若 $G-M_i$ 无边，则计算每个 $E_j=M_j\cap G_0(1\leq j\leq i)$，输出 $\cup_{j=1}^{i}E_j$，算法停止。否则 $i\leftarrow i+1$， $G\leftarrow G-M_i$。

Chap 7 Prob. 10

设 $\mathcal{C}=\{E_1,E_2,\cdots,E_\delta\}$ 是图 G 的一个最佳 δ 边着色。反证，如果题中所述的着色不存在，则存在一个顶点 v_0 和两种颜色 i 与 j，使得 i 色不在 v_0 关联的边中出现，但 j 色在 v_0 关联的边中至少出现两次，则边导出子图 $G[E_i\cup E_j]$ 中含 v_0 的连通片是一个奇圈，这与 G 是二分图矛盾。

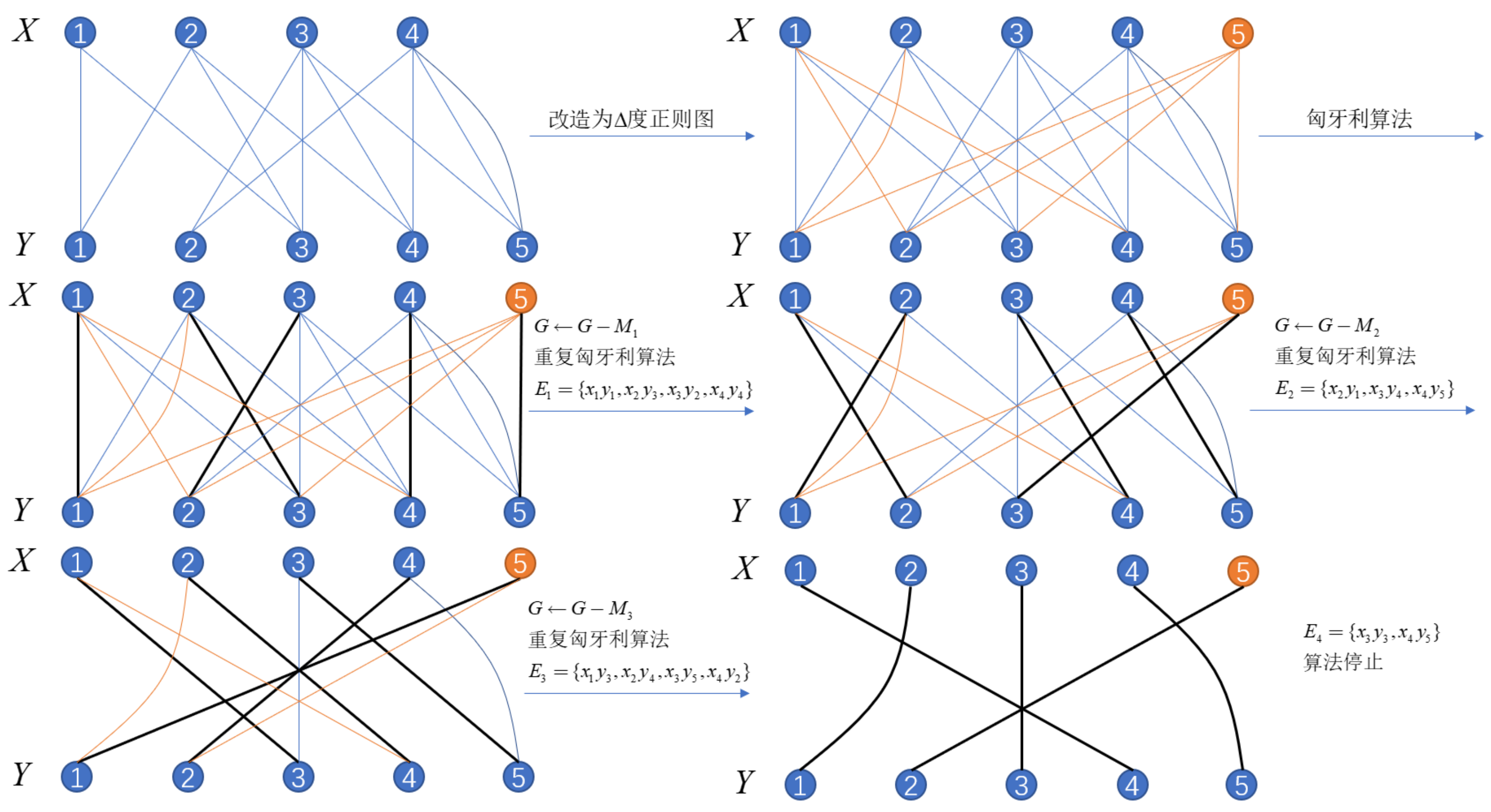
Chap 7 Prob. 14

令 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$， $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$，当且仅当 $A[x_i,y_j]=p_{ij}$ 时，在 x_i,y_j 之间连 p_{ij} 条边。构造二分图 $G=(X,E,Y)$ 如下:



（1）由于 $\Delta=4$，故需要安排 4 节课。

（2）利用习题9的算法，过程如下:



教室数为 $\max_{i=1}^{4} |E_i| = 4$。

Chap 7 Prob. 16

设此平面图的平面嵌入为 G，其对偶图为 G^*，首先证明 G 的割集必包含偶数条边。G 的顶点都有偶数条边，如果要使 G 删除一些边后变成连通片 $G_1, G_2, \ldots, G_\omega$，对 G_1 考虑，要取消 G_1 中顶点与 $G_2 \cup \ldots \cup G_\omega$ 中顶点的联系，必然要在 G_1 的顶点处在原图中删除偶数条边，对于 $G_i (1 \le i \le \omega)$ 都是这样，故 G 的割集必包含偶数条边。

再来证明 G 的割集与 G^* 的圈一一对应。设 G^* 中任取一个圈，为 C，因为 G 中的边 f 在 G^* 中一定有边 f^* 穿过它，即与之对应，则在 G 中删除在 C 中对应的边，G 将不连通，因为 G 中被 C 包围起来的顶点将没有穿过 C 的其他方式，故 G^* 的圈对应 G 的割集。

G 的割集都有偶数条边，所以 G^* 中的圈都是偶圈，所以 G^* 是二分图。

Chap 7 Prob. 19

运用递推公式写过于繁杂，这里采用颜色多项式的意义来写。由于两个图顶点分布相同，为了叙述方便，这里将顶点从上到下，从左到右命名为 $1 \sim 6$ 号。

（1）给 2 号顶点染色有 k 种方法，则给 3 号顶点染色有 $k-1$ 种方法，当 $1, 6$ 号顶点颜色相同时，给这两个顶点染色有 $k-2$ 种方法，则给 4 号顶点染色有 $k-1$ 种方法，则给 5 号顶点染色有 $k-2$ 种方法；当 $1, 6$ 号顶点颜色不同时，给 1 号顶点染色有 $k-2$ 种方法，给 6 号顶点染色有 $k-3$ 种方法，则给 4 号顶点染色有 $k-2$ 种方法，则给 5 号顶点染色有 $k-3$ 种方法，所以颜色多项式为

$$p_k(G) = k(k-1)[(k-2)(k-1)(k-2) + (k-2)(k-3)(k-2)(k-3)] = k(k-1)(k-2)^2(k^2-5k+8)$$

（2）仿照（1），从 4 号顶点开始染色，过程不再赘述，颜色多项式为

$$p_k(H) = k(k-1)[(k-2)(k-1)(k-2) + (k-2)(k-3)(k-2)(k-3)] = k(k-1)(k-2)^2(k^2-5k+8)$$

Chap 7 Prob. 20

即求 $p_k(W_\nu)$，我们有

$$p_k(W_\nu) = kp_{k-1}(C_{\nu-1})$$

而

$$p_m(C_n) = p_m(P_n) - p_m(C_{n-1})$$

这里 $p_m(P_n)$ 是长度为 n 的轨道的颜色多项式，即

$$p_m(P_n) = m(m-1)^{n-1}$$

> 求 $p_m(C_n)$ 的通项公式。
>
> $$p_m(C_n) = p_m(P_n) - p_m(C_{n-1}) \Rightarrow \frac{p_m(C_n)}{(-1)^n} - \frac{p_m(C_{n-1})}{(-1)^{n-1}} = (-1)^n p_m(P_n)$$
>
> 对第二个等式做累加，直至为 $a_4 - a_3$ 的形式，即

> $$
> \begin{aligned}
> \frac{p_m(C_n)}{(-1)^n} - \frac{p_m(C_3)}{(-1)^3} &= \sum_{i=4}^{n}(-1)^i p_m(P_i) \\
> &= \frac{m}{m-1}\sum_{i=4}^{n}(1-m)^i \\
> &= \frac{m}{m-1}\left(\sum_{i=1}^{n} - \sum_{i=1}^{3}\right)(1-m)^i \\
> &= \frac{m}{m-1}\left[\frac{(1-m)[1-(1-m)^n]}{m} - (1-m) - (1-m)^2 - (1-m)^3\right] \\
> &= (1-m)^n + (m-1)^3
> \end{aligned}
> $$
>
> 而 $p_m(C_3) = m(m-1)(m-2)$ ，故
>
> $$p_m(C_n) = (-1)^n[(1-m)^n + (m-1)^3 - m(m-1)(m-2)] = (-1)^n[(1-m)^n + (m-1)]$$

根据 $p_m(C_n)$ 的定义，得

$$p_k(W_\nu) = kp_{k-1}(C_{\nu-1}) = (-1)^{\nu-1}k[(2-k)^{\nu-1} + k - 2]$$

Chap 8 Prob. 2

（1）若 $\delta^- > 0$ ，则 D 的每个顶点都有入度，取 D 中最长的一条的单向轨道 P ，这条轨道的起点 u 还有入度，由于 P 是 D 中最长的单向轨道，因此 u 的外邻顶点一定是 P 上某个顶点，这会导致有向圈的形成，故不可。

（2）由（1）知， $\exists v_1 \in D, \deg^-(v_1) = 0$ ，考虑 $D - v_1$ ，仍然满足是无有向圈的有向图， $\exists v_2 \in D, \deg^-(v_2) = 0$ ，……，重复这个过程，直到选出所有顶点，得到一个排序 $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ 。对于任意的 v_i ，由于上述构造过程，若其在 D 中是某条有向边的终点，那么这条有向边的起始顶点一定来自 $v_1, \ldots, v_{i-1}$ 中。

Chap 8 Prob. 3

易见 G 有偶数个奇度顶点，将这些顶点配对连边，构成Euler图 G' ， G' 有Euler回路，取某个顶点作为起点，沿着Euler回路的行进方向给每个边定向得到 D' ，此时 D' 中的顶点满足

$$\deg^+(v) = \deg^-(v), v \in V(D')$$

将 $G \to G'$ 添加的边去掉，每个顶点最多损失一度，故此时 D 中的顶点 v 满足

$$|\deg^+(v) - \deg^-(v)| \le 1$$

Chap 8 Prob. 4

（a） a 不可达 b ，故此图不强连通；此图中有包含所有顶点的有向生成路径 $c > d > b > e > a$ ，故此图单向连通；并且显然此图是弱连通的。

（b）此图有包含所有顶点的有向生成回路 $a > b > c > d > e > f > a$ ，故是强连通的；并且显然是单向连通、弱连通的。

（c）此图显然是不强连通、不单向连通、不弱连通的，因为其子图 G 就是不连通的，此图中一定不可能有包含所有顶点的有向生成回路或者有向生成路径。

Chap 8 Prob. 6

假设在同一个连通片中的这两个顶点记为 $u, v \in V(D_i)$ ，不妨记 u 为起点，这条路径记为 $P(u, v)$ ，任取 $w \in V(P), w \ne u, w \ne v$ ，若 $w \notin V(D_i)$ ，因为 $w \in V(P)$ ，故 u 可达 w ， w 可达 v ，因此对于强连通片 D_i 中任意一个顶点，都可以取道 u 到达 w ， w 也可以通过 v 到达这个强连通片的任何一个顶点，即对于 $\forall x, y \in V(D_i) \cup \{w\}$ ， x 可达 y 且 y 可达 x ，这与 D_i 的定义矛盾，所以 $w \in V(D_i)$ 。