

实 验 报 告

评分:

2020 级 11 系 3 班

姓名 黄瑞轩

日期 2021 年 6 月 6 日

No PB20111686

实验题目：磁力摆

实验目的：利用磁力摆测地磁场大小；测量磁力摆的磁矩和转动惯量；探究地磁场中耦合磁针的运动。

实验器材：磁力摆、高斯计、电源、螺母（配重）、秒表、亥姆霍兹线圈、尺子。

实验原理：

磁力摆原理：将一枚小磁针用一根细线悬挂起来，置于匀强磁场 B 中，当小磁针偏离平衡位置的角位移 θ 很小时，小磁针将在其平衡位置附近作简谐振动，构成如图 1 所示的磁力摆。当磁力摆偏离平衡位置的角位移 θ 小于 5° 时，磁力摆的运动方程为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{MB}{J}\theta \quad (1)$$

式中 m 是磁力摆的磁矩， J 是磁力摆的转动惯量。由上式可得磁力摆一级近似的振动周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{MB}} \quad (2)$$

局域地磁场和亥姆霍兹线圈磁场：地球是一个大磁体，地球本身及其周围空间存在着磁场，即地磁场。

亥姆霍兹线圈是一对彼此平行且连通的共轴圆形线圈组，每组 N 匝，两组线圈内的电流方向一致，大小均为 I ，线圈之间的距离 a 正好等于圆形线圈的平均半径 R 时，两线圈轴线中点附近近似于均匀磁场，如图 2 所示。两线圈轴线中点处的磁感应强度为

$$B = \frac{8\sqrt{5}}{25} \frac{\mu_0 I}{R} = kI \quad (3)$$

将小磁针置于局域地磁场和亥姆霍兹线圈共同磁场中，如图 3 所示，磁力摆所处位置的磁感应强度由局域磁场水平分量 B_0 和亥姆霍兹线圈磁场 B_1 叠加而成。

当亥姆霍兹线圈磁场与地磁场水平方向一致时，位于轴线上的磁场水平分量 $B=B_0+B_1$ ；当亥姆霍兹线圈磁场与地磁场水平方向相反时，位于轴线上的磁场水平分量 $B=B_0-B_1$ 。

根据磁力摆在磁场中的运动特性，可以确定局域地磁场的水平分量、小磁针磁矩及其转动惯量。

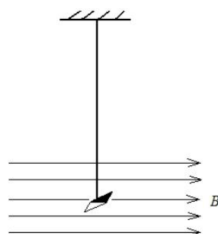


图 1 磁力摆示意图

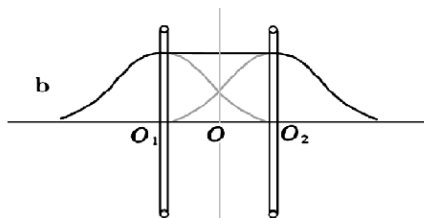


图 2 亥姆霍兹线圈示意图

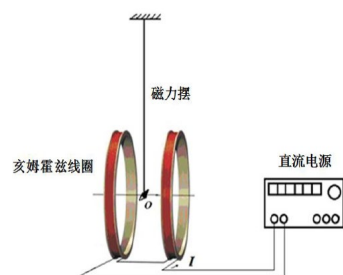


图 3 实验装置示意图

地磁场中小磁针的耦合运动原理：

在地磁场中放置两枚相同的磁针，并使它们沿着地磁场方向处于一条直线上。当相邻磁针的磁场不可忽略时，它们构成一个耦合振动系统。由于耦合的存在，磁针的运动形式更加丰富。由机械振动的知识，可以得到耦合运动的一般结论：

$$\begin{cases} \theta_1 = A^* e^{-\beta t} \cos(\omega^* t + \varphi_0^*) + A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) \\ \theta_2 = -A^* e^{-\beta t} \cos(\omega^* t + \varphi_0^*) + A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) \end{cases} \quad (4)$$

当产生拍现象时，初始条件为 $t=0$ ， $\theta_1=\theta$ ， $\theta_2=0$ ， $\frac{d\theta_1}{dt}=0$ ， $\frac{d\theta_2}{dt}=0$ ，此时运动方程的解为

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{\theta}{2} e^{-\beta t} \cos \omega^* t + \frac{\theta}{2} e^{-\beta t} \cos \omega t \\ \theta_2 = -\frac{\theta}{2} e^{-\beta t} \cos \omega^* t + \frac{\theta}{2} e^{-\beta t} \cos \omega t \end{cases} \quad (5)$$

两磁针的角位移图像如图 4。

当进行同相运动时，初始条件为 $t=0$ ， $\theta_1=\theta_2$ ， $\frac{d\theta_1}{dt}=0$ ， $\frac{d\theta_2}{dt}=0$ ，此时运动方程的解为

$$\begin{cases} \theta_1 = A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) \\ \theta_2 = A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) \end{cases} \quad (6)$$

两磁针的角位移图像如图 5。

当进行反相运动时，初始条件为 $t=0$ ， $\theta_1=-\theta_2$ ， $\frac{d\theta_1}{dt}=0$ ， $\frac{d\theta_2}{dt}=0$ ，此时运动方程的解为

$$\begin{cases} \theta_1 = A^* e^{-\beta t} \cos(\omega^* t + \varphi_0^*) \\ \theta_2 = -A^* e^{-\beta t} \cos(\omega^* t + \varphi_0^*) \end{cases} \quad (7)$$

两磁针的角位移图像如图 6。

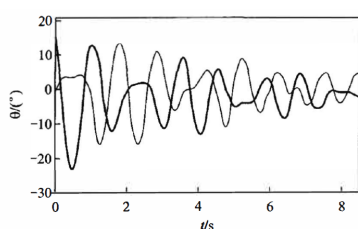


图 4 拍现象下小磁针的 θ - t 曲线

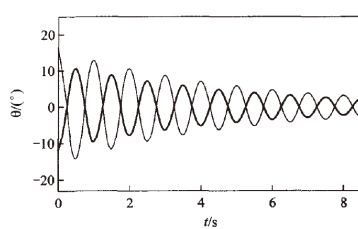


图 5 同相运动下小磁针的 θ - t 曲线

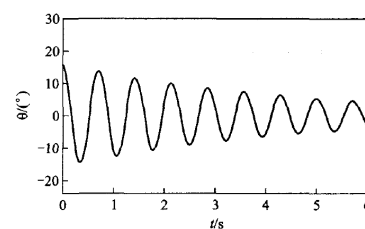


图 6 反相运动下小磁针的 θ - t 曲线

实验方案设计

一、测量磁针处局域磁场水平分量的大小

1、测量磁场大小与线圈电流的关系，得到 $B = kI$ 中的 k 值。

方案简述：使电源供应 $0.1\text{ A} \sim 0.8\text{ A}$ 的电流，步长为 0.1 A ，共 8 个数据，作图得到 k 值。

2、判断线圈附加磁场与局域磁场是反向还是同向。

方案简述：交换电源的正负极输出接口，观察高斯计测得磁场的变化。若数值变大，则原来附加磁场与局域磁场反向；若数值变小，则原来附加磁场与局域磁场同向。

3、选取适当的测量范围测量不同电流下磁针的振动周期 T ，通过作图法给出局域磁场水平分量的值。

方案简述：振动周期平方的倒数 T^2 与所在磁场磁感应强度成正比，因此可用作图法得到所加磁场与 $\frac{1}{T^2}$ 的函数关系，由截距可确定地磁场的大小。

根据不确定度要求 $\frac{\Delta T}{NT} < 0.5\%$ ，根据统计分析，实验人员开启或停止秒表的反应时间为 0.1 s 左右，所以实验人员测量时间的精度近似为 $\Delta T \approx 0.2\text{ s}$ 。则至少应满足 $NT > 40\text{ s}$ ，测量的总时间最好在 40 秒以上。

二、测量磁针的磁矩以及转动惯量

由上面的测量，我们可以计算出 J/M 的值，因此只要再计算出 J 或 M ，就可求得另一个。

方案简述：将小磁针放在地磁场中，测量周期 T ；再在小磁针两端各安放一个质量 $m = 0.62\text{ g}$ 的无磁性螺母，此时可以计算出 $\frac{J + \Delta J}{M}$ 的值，其中 $\Delta J = 2mr^2$ ，因此可解 J 与 M 。

三、地磁场中耦合磁针运动的观察

将两个磁针沿着局域磁场的方向共线放置，使它们同相位运动，则磁针共同运动的圆频率为 ω 。将两个磁针沿着局部地磁场的方向共线放置，使它们反相位运动，则磁针共同运动的圆频率为 ω^* 。这两个频率都与单独一个磁针的圆频率 ω_0 不同。

1、比较 ω 、 ω^* 、 ω_0 三者的大小。

2、改变两个磁针之间的距离 L ，观察拍频随 L 的增加如何变化。

四、地磁场中耦合磁针运动的测量

已知两个磁针之间的耦合系数 $k' = \alpha \frac{M^2}{L^\beta} = \frac{1}{2} |\omega^2 - \omega^{*2}|$ ，其中 α 和 β 是常数， M 是磁矩。

1、改变两个磁针之间的距离 L ，测量 ω 、 ω^* 随 L 的变化情况。

2、确定系数 α 和 β 的值。

方案简述：用对数坐标，在 SI 下采用作图法得到各待求参数。

实验数据与分析

一、测量磁针处局域磁场水平分量的大小

为得到 $B=kI$ 中的 k 值，实验数据如表 1 所示。

电流 I/A	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
磁感应强度 B/mT	0.4871	0.9672	1.4524	1.9375	2.4237	2.9095	3.3979	3.8844

表 1

用 Origin 作图如图 7 所示。

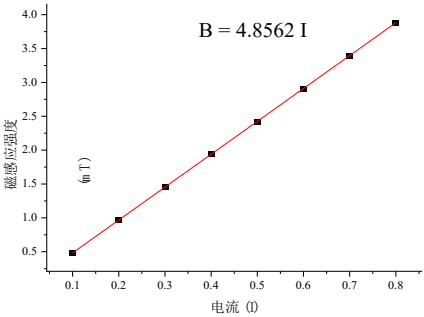


图 7

于是得到

$$k = 4.8562 \times 10^{-3} \text{ T} \cdot \text{A}^{-1} \tag{8}$$

选取适当的测量范围测量不同电流下磁针的振动周期 T ，数据如表 2 所示。根据 $T = \frac{t}{N}$ 可计算出一次振幅周期，列在表 2 中；根据 $B = kI$ 可计算出每个电流对应的磁感应强度值，也列在表 2 中。

电流 I/A	0.010	0.015	0.020	0.025	0.030	0.035	0.040	0.045
磁感应强度 B/mT	0.048562	0.072843	0.097124	0.121405	0.145686	0.169967	0.194248	0.218529
振动总时间 t/s	55"88	48"64	54"19	54"60	50"55	47"61	53"24	50"52
振动总次数 N	80	81	100	110	110	110	130	130
振动周期 T/s	0.6985	0.6005	0.5419	0.4964	0.4595	0.4328	0.4095	0.3886
T^2 的倒数/ s^{-2}	2.0496	2.7732	3.4053	4.0588	4.7353	5.3381	5.9623	6.6216

表 2

用 Origin 作 $\frac{1}{T^2} - B$ 图像如图 8 所示。

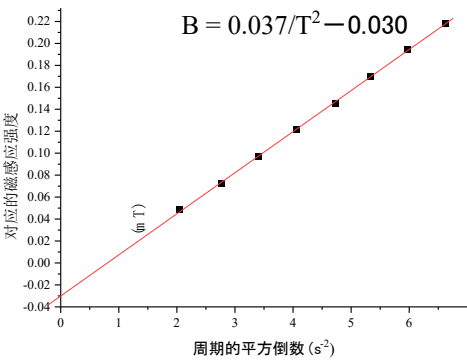


图 8

由于实验前在地磁场中对高斯计做了调零处理，因此截距为负，测得地磁场为

$$B = 3 \times 10^{-5} \text{ T} \tag{9}$$

二、测量磁针的磁矩以及转动惯量

无配重时（情形 1）与有配重时（情形 2）的振动数据如表 3 所示。根据 $T = \frac{t}{N}$ 可计算出一次振幅周期，列在表 3 中。

	情形 1	情形 2
振动总时间 t/s	55"21	52"24
振动总次数 N	45	33
振动周期 T/s	1.2269	1.5830

表 3

我们已求得 $B = 3 \times 10^{-5} \text{T}$ ，并测量得到 $L = 2r = 5.42 \text{cm}$ 。

在情形 1 中，有

$$\frac{J}{M} = B \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \quad (10)$$

在情形 2 中，有

$$\frac{J + 2mr^2}{M} = B \left(\frac{T'}{2\pi} \right)^2 \quad (11)$$

联立上述两式求得

$$M = 1.198 \text{A} \cdot \text{s}^2 \quad (12)$$

$$J = 1.370 \times 10^{-6} \text{kg} \cdot \text{m}^2 \quad (13)$$

三、地磁场中耦合磁针运动的观察

实验记录数据如表 4 所示。根据 $T = \frac{t}{N}$ 可计算出一次振幅周期，列在表 4 中；利用 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 可计算角频率，也列在表 4 中。

	拍	拍	同相运动	反相运动
距离 L/cm	21.51	16.81	16.81	16.81
摆动总时间 t/s	44"14	46"94	50"11	56"53
摆动次数 N	11	22	80	66
摆动周期 T/s	4.013	2.134	0.626	0.857
角频率 ω/s^{-1}	1.566	2.944	10.04	7.332

表 4

记同相运动时磁针共同运动的圆频率为 ω ；反相运动时磁针共同运动的圆频率为 ω^* ；单独一个磁针的圆频率为 ω_0 。由表 3 情形 1 可计算出

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 5.121 \text{s}^{-1} \quad (14)$$

于是 ω 、 ω^* 、 ω_0 三者的大小关系为

$$\omega_0 < \omega^* < \omega \quad (15)$$

由表 4 第 1、2 组数据可看出，当 L 减小时，拍频增大。

四、地磁场中耦合磁针运动的测量

记录数据如表 5 所示。

间距 L/cm	23.52	29.02	19.03	27.53	32.04	20.05
正相运动总时间 t_1/s	41"31	41"57	42"58	42"94	52"39	44"68
正相运动总次数 N_1	47	43	60	44	52	60
反相运动总时间 t_2/s	44"01	41"60	41"17	42"85	46"46	44"87
反相运动总次数 N_2	43	37	44	37	40	46

表 5

根据 $T = \frac{t}{N}$ 可计算出一次振幅周期，利用 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 可计算角频率，利用 $k' = \frac{1}{2}|\omega^2 - \omega^{*2}|$ 可计算耦合系数，均列在表 6 中；此外，用于计算的对数值均已先转化为国际单位。

间距 L/cm	23.52	29.02	19.03	27.53	32.04	20.05
正相运动周期 T_1/s	0.8789	0.9667	0.7097	0.9759	1.008	0.7447
正相运动角频率 ω/s^{-1}	7.149	6.499	8.854	6.438	6.236	8.438
反相运动周期 T_2/s	1.023	1.124	0.9357	1.158	1.162	0.9754
反相运动角频率 ω^*/s^{-1}	6.139	5.588	6.715	5.425	5.410	6.441
耦合系数 k'/s^{-2}	6.708	5.505	16.65	6.008	4.815	14.85
耦合系数的对数 $\ln k'$	1.903	1.706	2.812	1.793	1.572	2.698
间距的对数 $\ln L$	-1.447	-1.237	-1.659	-1.290	-1.138	-1.607

表 6

对 $k' = \alpha \frac{M^2}{L^\beta}$ 取对数可得

$$\ln k' = 2 \ln M + \ln \alpha - \beta \ln L \tag{16}$$

利用 Origin 作 $\ln k' - \ln L$ 图像，如图 9 所示。

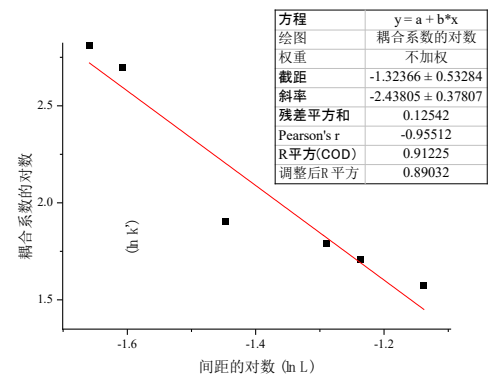


图 9

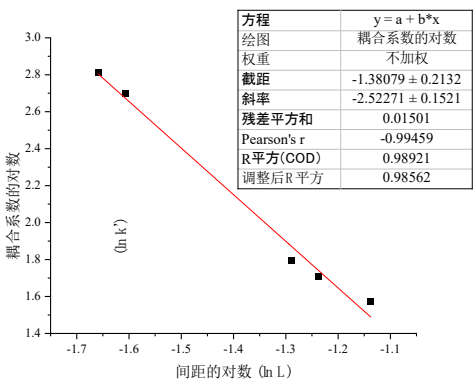


图 10

图 9 得到的拟合方程为

$$\ln k' = -2.438 \ln L - 1.324, R^2 = 0.8903 \tag{17}$$

而显然从左到右第 3 个数据点偏差过大，舍去后得到图 10，其拟合方程为

$$\ln k' = -2.523 \ln L - 1.381, R^2 = 0.9856 \tag{18}$$

已知 $M = 1.198 \text{ A} \cdot \text{s}^2$ ，故 $2 \ln M = 0.3613$ 。对比原方程有 $2 \ln M + \ln \alpha = -1.381$ 、 $-\beta = -2.523$ ，解得

$$\alpha = 0.1751 \quad \beta = 2.523 \tag{19}$$

思考题

一、如何利用作图法或最小二乘法求得局域地磁场的水平分量？

我们已知磁力摆的周期公式 $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{MB}}$ ，因此可以得到 $B = \frac{4\pi^2 J}{MT^2}$ ，因此 B 和 $\frac{1}{T^2}$ 成线性关系。由于在实验前对高斯计进行了调零，所以此方程应当变形为 $B = \frac{4\pi^2 J}{MT^2} - B_0$ 。

通过实验可以得到一系列 $(B, \frac{1}{T^2})$ 数据点，因此可以通过最小二乘法来获得拟合直线，最小二乘法的计算公式如下：

拟合直线公式设为 $y = a + bx$ ， x 的平均值设为 \bar{x} ， y 的平均值设为 \bar{y} ，则

$$\begin{cases} b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\ a = \bar{y} - b\bar{x} \end{cases}$$

由此公式即可求出拟合直线。事实上，利用 Origin 等软件，可以方便地自动生成最小二乘拟合直线。

二、说明两小磁针耦合运动“拍频”与哪些物理量有关？

拍频的定义为 $f = \frac{\omega - \omega^*}{2\pi}$ ，因此应与 ω, ω^* 有关。由电磁学的知识可以推知简正频率

$$\omega = \sqrt{\frac{m}{J} B_0 - \frac{3\mu_0 m^2}{4\pi l^3 J} - \beta^2}$$

$$\omega^* = \sqrt{\frac{m}{J} B_0 + \frac{\mu_0 m^2}{4\pi l^3 J} - \beta^2}$$

其中 m 为小磁针质量、 J 为小磁针转动惯量、 B_0 为所处磁场（地磁场）磁感应强度、 l 为两小磁针之间的距离、 $\beta = \frac{\gamma}{2J}$ 是描述小磁针阻尼性质的辅助物理量。拍频就与上述物理量有关。