第8章 空间解析几何

段雅丽

中国科学技术大学数学科学学院
科研管理楼1229

ylduan01@ustc.edu.cn

解析几何的基本思想

通过代数运算来解决几何问题

$$\text{几何问题} \Longrightarrow \text{代数问题}$$

解析几何的基本方法

- 坐标法
- 向量法

目录

§8.1.1 向量的相关定义

- **向量:** 既有大小(长度)又有方向的量. 记为 $\vec{a}, \vec{b}, \cdots, \overrightarrow{AB}$
- **向量的模:** 向量的大小(长度), 是一个非负实数, 记为$|\vec{a}|$
- **相等向量:** 大小相等,方向相同
- **零向量:** 大小为0的向量, 记为$\vec{0}$, 零向量没有确定的方向
- **负向量**(或**反向量:**) 大小相等,方向相反 $-\vec{a}$
- **单位向量:** 大小为1的向量 $\vec{a}=|\vec{a}|\vec{e}_a$
- **平移:** 不改变线段的长度和方向的运动, 向量与起点无关

§8.1.2 向量的线性运算

向量求和方法有平行四边形法则和三角形法则.

- 向量加法满足如下性质:

  (1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (交换律)

  (2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (结合律)

  (3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ (有零元)

  (4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ (有负元)

数与向量的乘法, 称为向量的数乘.

- 向量数乘满足如下性质:

  (1) $1\vec{a}=\vec{a}$

  (2) $(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$

  (3) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ (数关于向量的分配律)

  (4) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ (向量关于数的分配律)

这样的集合称为线性空间或向量空间.

§8.1.3 向量的共线与共面

- **共线:** 通过平移能使一组向量同处一条直线上
- **平行:** 一组向量方向相同或相反 $\vec{b}//\vec{a}$

  一组向量共线$\Longleftrightarrow$它们相互平行.
- **垂直**(或**正交:**) 方向互相垂直 $\vec{b}\perp\vec{a}$

  零向量与任何向量平行, 也与任何向量垂直
- **夹角:** $\theta=\theta(\vec{a},\vec{b})$在$0$ 与π 之间
- **共面:** 通过平移能使一组向量同处一个平面上

  共线的向量也是共面的. 任何两个向量一定是共面的

§8.1.3 向量的共线与共面

共线与共面的向量代数运算

- **定理1:** 两个向量$\vec{a},\vec{b}$共线，当且仅当存在不全为零的实数λ,μ使得
$$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0}.$$
- **定理2:** 三个向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面，当且仅当存在不全为零的实数λ,μ,ν使得
$$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}=\vec{0}.$$

问题： A, B, C三点共线；C在线段AB上；M在$\triangle ABC$内部这些几何性质如何用向量代数表达？

定理: 向量$\vec{a},\vec{b}$共线$\Longleftrightarrow$存在不全为零的实数λ,μ使得

$$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0}.$$

证明: “$\Longrightarrow$” 设$\vec{a},\vec{b}$共线, 且至少有一个不是零向量, 不妨设$\vec{a}\neq\vec{0}$. 则它们要么同向, 要么反向. 因此有

$$\vec{b}=k\vec{a},\qquad k=\pm\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}.$$

“$\Longleftarrow$” 不妨设$\mu\neq 0$, 则由等式得$\vec{b}=-\frac{\lambda}{\mu}\vec{a}$, 即它们共线.

定理: 向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面, 当且仅当存在不全为零的实数λ,μ,ν使得

$$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}=\vec{0}.$$

证明: “$\Longrightarrow$” 若有其中两个共线, 不妨设$\vec{a},\vec{b}$共线, 由定理1 知, 存在不全为零的实数λ,μ使得$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0}$, 即$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+0\vec{c}=\vec{0}$.
若任何两个都不共线(因此都是非零向量), 记$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$, 过B 作平行于$\overrightarrow{OC}$的直线交$\overrightarrow{OA}$所在直线于D, 则有$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DB}=\lambda\overrightarrow{OA}+\nu\overrightarrow{OC}$. 即$\lambda\vec{a}-\vec{b}+\nu\vec{c}=\vec{0}$.

“$\Longleftarrow$” 不妨设$\nu\neq 0$, 则由等式得$\vec{c}=-\frac{\lambda}{\nu}\vec{a}-\frac{\mu}{\nu}\vec{b}$,
即$\vec{c}$在$-\frac{\lambda}{\nu}\vec{a}$和$-\frac{\mu}{\nu}\vec{b}$为边的平行四边形的对角线上, 因此它们共面.

问题： A, B, C三点共线；C在线段AB上；M在$\triangle ABC$内部这些几何性质如何用向量代数表达？

1. A, B, C三点共线$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$ 共线$\Longleftrightarrow$存在不全为零的实数λ, μ 使得$\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ $\Longleftrightarrow$ 存在不全为零的实数λ', μ'使得$\overrightarrow{OA}=\lambda'\overrightarrow{OB}+\mu'\overrightarrow{OC}$, 且$\lambda'+\mu'=1$.
2. C在线段AB上$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$, 且$\lambda+\mu=1$, $\lambda=\dfrac{|BC|}{|AB|}, \mu=\dfrac{|AC|}{|AB|}$.
3. M在$\triangle ABC$内部$\Longrightarrow$ MA, MB, MC共面$\Longleftrightarrow$存在不全为零的实数λ, μ, ν使得$\lambda\overrightarrow{MA}+\mu\overrightarrow{MB}+\nu\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ $\Longleftrightarrow\overrightarrow{OM}=\lambda'\overrightarrow{OA}+\mu'\overrightarrow{OB}+\nu'\overrightarrow{OC}$, 且$\lambda'+\mu'+\nu'=1$, $\lambda'=\dfrac{S_{\triangle BCM}}{S_{\triangle ABC}}, \mu'=\dfrac{S_{\triangle CAM}}{S_{\triangle ABC}}$ $\nu'=\dfrac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABC}}$, 这里$(\lambda', \mu', \nu')$称为$M$关于$\triangle ABC$的面积坐标.

§8.1.3 向量的共线与共面

- **定义:** 设$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$为一组向量, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为一组实数, 称向量
$$\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n$$
为向量$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ 的**线性组合**.
- **定义:** 一组向量$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ 称为是**线性相关**的, 若存在不全为零的实数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 使得
$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}.$$
若$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ 不是线性相关的就称为是**线性无关**的.即如果上式成立, 则$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

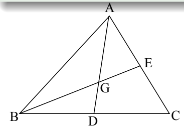
§8.1.3 向量的共线与共面

- **命题:**
  1. 两个向量共线$\Longleftrightarrow$一向量为另一向量的线性组合.
  2. 三个向量共面$\Longleftrightarrow$一个向量为另外两个向量的线性组合.
  3. 向量共线或共面$\Longleftrightarrow$它们线性相关.

利用向量代数运算可以解决许多几何问题，其思想是将几何性质转化为向量的代数运算。

Example

在$\triangle ABC$ 中，D, E 分别是边BC, AC 的中点，AD, BE 相交于点G. 证明：$AG = \frac{2}{3}AD$.



证明： 由已知$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,

$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}.$$

设$\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BG}=y\overrightarrow{BE}$. 又因为$\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}$, 所以

$$\frac{x}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-y\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AB}.$$

即, $(\frac{x}{2}+y-1)\overrightarrow{AB}=\frac{y-x}{2}\overrightarrow{AC}$. 由于$\overrightarrow{AB}$ 与$\overrightarrow{AC}$ 不共线, 因此有$\frac{x}{2}+y-1=\frac{y-x}{2}=0$, 即$x=y=\frac{2}{3}$.

§8.1.4 向量的数量积

- **定义:** $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**点乘**为一个实数, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$. 点积也常称为**内积**或**数量积**. $|\vec{a}|\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{e}_b$为$\vec{a}$在$\vec{b}$上的**投影**.

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Longleftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

- **几何性质:** $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}_b\cdot\vec{b}\quad(\vec{a}=\vec{a}_b+\vec{a}_h,\quad \vec{a}_b=(|\vec{a}|\cos\theta)\vec{e}_b,)$
- **运算性质:**

  (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (交换律)

  (2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ (分配律)

  (3) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$ (结合律)

  (4) $\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}\geq 0$, 等号成立当且仅当 $\vec{a}=\vec{0}$

余弦定理: $(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$

三角不等式性质:$|\vec{a}+\vec{b}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|$ 等号成立 $\Longleftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}$.

Example

已知$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, 它们的夹角$\theta=\frac{\pi}{3}$,
求$\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$与$\vec{d}=3\vec{a}-\vec{b}$ 的夹角φ.

解： $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=1,$

$$\vec{c}\cdot\vec{d}=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=6|\vec{a}|^2+7(\vec{a}\cdot\vec{b})-3|\vec{b}|^2=28,$$

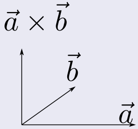
$$|\vec{c}|^2=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=4|\vec{a}|^2+12(\vec{a}\cdot\vec{b})+9|\vec{b}|^2=37,$$

$$|\vec{d}|^2=(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=9|\vec{a}|^2-6(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2=31,$$

$$\cos\varphi=\frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{c}||\vec{d}|}=\frac{28}{\sqrt{37}\sqrt{31}},\quad \varphi=\arccos\frac{28}{\sqrt{37}\sqrt{31}}.$$

§8.1.5 向量的向量积

- **定义:** $\vec{a},\vec{b}$ 的**叉乘** $\vec{a}\times\vec{b}$ 为一个向量，方向与$\vec{a},\vec{b}$ 都垂直,且使$\vec{a},\vec{b},\ \vec{a}\times\vec{b}$ 构成右手系; 模等于以$\vec{a},\vec{b}$ 为边的平行四边形的面积，即$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$.叉乘又称为**外积**或**向量积**.



$$\vec{a}//\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$$

- **几何性质:** $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}_h\times\vec{b}\quad(\ \vec{b}\perp\vec{h},\quad \vec{a}=\vec{a}_b+\vec{a}_h\ )$
- **运算性质:**
  (1) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$
  (2) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a},\qquad$ (反称性)
  (3) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}\qquad$ (分配律)

§8.1.5 向量的向量积

性质(3) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ (分配律)

证明： 对于任意向量$\vec{d}$, 有

$$
\begin{aligned}
&(\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{d}=(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{d}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{d}\\
&=\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})+\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) \ =(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})\\
&=((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c})\cdot\vec{d}
\end{aligned}
$$

由$\vec{d}$的任意性, 则有

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$

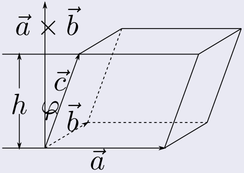
Example

(正弦定理)三角形三边长为a, b, c, 对角分别是A, B, C, 则

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}.$$

§8.1.6 向量的混合积

- **定义:** $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 为$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的**混合积**.
- **混合积的几何意义:** $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 表示的是以$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为棱的平行六面体的“有向体积”. 即: 当$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为右手系时, 就是六面体的体积; 当$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为左手系时, 它是六面体体积的相反数.



- **运算性质:** $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$

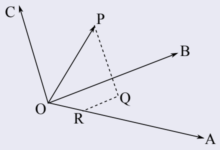
  轮换 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 的次序, 混合积的值不变.
- **命题:** $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面$\Longleftrightarrow(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$.

§8.1.7 坐标系

- **向量基本定理:** 设$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 为空间中三个不共面的向量，则对每个向量$\vec{a}$ 都存在唯一的三元有序实数组(x_1, x_2, x_3)，使得

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3.$$

称$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$为空间的一组**基**，$(x_1, x_2, x_3)$ 为向量$\vec{a}$ 在这组基下的**仿射坐标**或简称**坐标**.



向量基本定理的证明:

空间任取一点O, 作向量$\overrightarrow{OA}=\vec{e}_1,\overrightarrow{OB}=\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OC}=\vec{e}_3,\overrightarrow{OP}=\vec{a}$.

存在性: (1) 若$\vec{a}$与$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$中的两个共面, 不妨设与$\vec{e}_1,\vec{e}_2$共面, 则存在不全为零的实数$\lambda,\mu,\nu$使得 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{e}_1+\nu\vec{e}_2=\vec{0}$,因为 $\lambda\neq 0$（否则$\vec{e}_1,\vec{e}_2$共线）, 从而有

$$\vec{a}=-\frac{\mu}{\lambda}\vec{e}_1-\frac{\nu}{\lambda}\vec{e}_2+0\cdot\vec{e}_3.$$

(2) 若$\vec{a}$与$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$中任意两个都不共面. 过$P$ 点作直线OC 的平行线, 交AOB 平面于Q 点. 再过Q 点作直线OB 的平行线, 交OA 直线于R 点. 则$\vec{a}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{QP}$. 由于 $\overrightarrow{OR}//\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{RQ}//\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{QP}//\overrightarrow{OC}$, 利用共线的性质知, 存在实数$x_1,x_2,x_3$ 使得$\overrightarrow{OR}=x_1\vec{e}_1$, $\overrightarrow{RQ}=x_2\vec{e}_2$, $\overrightarrow{QP}=x_3\vec{e}_3$. 因此

$$\vec{a}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3.$$

唯一性: 设有另一组数(y_1,y_2,y_3), 使得$\vec{a}=y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+y_3\vec{e}_3$, 那么$(x_1-y_1)\vec{e}_1+(x_2-y_2)\vec{e}_2+(x_3-y_3)\vec{e}_3=\vec{0}$. 由于$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 不共面, 则$x_1=y_1,x_2=y_2,x_3=y_3$. 即坐标唯一.

§8.1.7 坐标系

- **定义:** 空间中任意一点O 和一组基$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 合在一起称为空间的一个**仿射坐标系**, 记为$[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$. 点$O$ 称为**坐标原点**, $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 称为**坐标向量**. $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 所在直线分别称为x 轴, y 轴和z 轴, 统称为**坐标轴**. 三个坐标轴的任意两个决定了一个平面, 称为**坐标面**. 三个坐标面将空间分为8个卦限.

  注意: 这里三个坐标向量不一定垂直, 也不一定都是单位向量.

$$\text{空间中的点}P \longleftrightarrow \text{向量}\overrightarrow{OP} \longleftrightarrow \text{坐标}(x_1,x_2,x_3)$$

要注意向量转化为坐标, 优点是计算方便, 但坐标的代数运算中隐含的几何性质不明显.

§8.1.8 向量的坐标运算

- **加法与数乘运算:** 取定仿射坐标系 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$

$$\vec{a}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3,\ \vec{b}=y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+y_3\vec{e}_3,$$

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3),$$

$$\lambda\vec{a}=\lambda(x_1,x_2,x_3)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)$$

§8.1.8 向量的坐标运算

- **直角坐标系下模和方向余弦:**
  空间直角坐标系$[O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}]$

  向量$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$,

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{a_1}{|\vec{a}|},\frac{a_2}{|\vec{a}|},\frac{a_3}{|\vec{a}|}\right).$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量$\vec{a}$ 的**方向余弦**.

§8.1.8 向量的坐标运算

- **直角坐标系下数量积的计算:**

$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$, 则有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

设$\vec{a}$ 与$\vec{b}$ 之间的夹角为θ, 则有

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

因为 $$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)^2\le|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2.$$

易证$Cauchy$不等式

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\le(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$

§8.1.8 向量的坐标运算

- **直角坐标系下向量积的计算:** 由向量积的定义知

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0},\quad \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0},\quad \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$$
$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}.$$

设$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$,
$\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$. 则有

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}\\ &=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

§8.1.8 向量的坐标运算

- **直角坐标系下混合积的计算:** $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$, $\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$. 则有

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3$$

$$=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

命题: 三个向量$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ **共面** $\Longleftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

Example

已知$\vec{a}=(-2,-1,2)$, $\vec{b}=(7,-4,-4)$, $|\vec{c}|=6\sqrt{6}$, 求沿$\vec{a}$ 与$\vec{b}$夹角平分线方向的向量$\vec{c}$.

解： $\vec{e}_a=(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, $\vec{e}_b=(\frac{7}{9},-\frac{4}{9},-\frac{4}{9})$,

$\vec{c}//(\vec{e}_a+\vec{e}_b)=(\frac{1}{9},-\frac{7}{9},\frac{2}{9})//(1,-7,2)$,

所以$\vec{e}_c=\pm\frac{1}{3\sqrt{6}}(1,-7,2)$, $\vec{c}=|\vec{c}|\vec{e}_c=\pm(2,-14,4)$.

Example

已知$O(0,0,0)$, $A(1,-1,2)$, $B(3,3,1)$, $C(3,1,3)$, 求$\triangle ABC$的面积和四面体$OABC$的体积.

解： $\overrightarrow{AB}=(2,4,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(2,2,1)$, $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(6,-4,-4)$,

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{17}.$$

$$V_{OABC}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1&-1&2\\3&3&1\\3&1&3\end{matrix}\right\|=\frac{1}{3}.$$

Example

设$\vec{a}=(1,-2,3)$, $\vec{b}=(2,-3,1)$, 求同时垂直于$\vec{a}$和$\vec{b}$且在向量$\vec{c}=(2,1,2)$上的投影是7的向量.

解:

$$\text{因为}\quad \vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & -3 & 1\end{vmatrix}=(7,5,1),$$

则所求向量$\vec{d}=\lambda(7,5,1)$. 因为$\vec{d}\cdot\vec{e}_c=\dfrac{\vec{d}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|}=7$, 即

$$\frac{14\lambda+5\lambda+2\lambda}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=7,$$

所以$\lambda=1$, 则所求向量$\vec{d}=(7,5,1)$.

目录

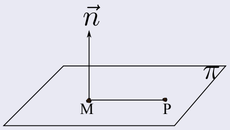
§8.2.1 平面方程

- **平面的点法式方程和一般方程:**

  过点$M(x_0,y_0,z_0)$ 且与$\vec{n}=(A,B,C)\neq\vec{0}$垂直的平面$\pi$是唯一的. $\forall\ P(x,y,z)\in\pi$, 都有$\overrightarrow{MP}\perp\vec{n}$, 即有

$$\overrightarrow{MP}\cdot\vec{n}=0.$$

上式称为平面π 的**点法式方程**. $\vec{n}$ 称为平面π 的**法向量**.



代入坐标, 可得**平面的一般方程**

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Example

求过点$M(3,2,1)$及x轴的平面方程.

解： 设过x轴的平面方程为 $By+Cz=0$, 代入点M坐标, 得$2B+C=0$, 取$B=1, C=-2$, 所以平面方程为$y-2z=0$.

§8.2.1 平面方程

- **平面的参数方程:**
  以$M(x_0,y_0,z_0)$为起点的$\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\nparallel\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ 确定平面π . 对$\forall\ P(x,y,z)\in\pi$, 都存在实数s,t 使

  得$\overrightarrow{MP}=s\vec{u}+t\vec{v}$, 即$\begin{cases}x=x_0+u_1s+v_1t\\y=y_0+u_2s+v_2t\\z=z_0+u_3s+v_3t.\end{cases}$ 称为**平面的参数方程**, s,t 为参数.

  若平面过不共线的三点$P_i(x_i,y_i,z_i)$, $i=1,2,3$,
  对$\forall\ P(x,y,z)\in\pi$,有$\overrightarrow{P_1P}\cdot(\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3})=0$. 即

$$\begin{vmatrix}x-x_1&y-y_1&z-z_1\\x_2-x_1&y_2-y_1&z_2-z_1\\x_3-x_1&y_3-y_1&z_3-z_1\end{vmatrix}=0.$$

Example

求过点$M_1(2,-1,3), M_2(3,1,2)$，且垂直于平面
$\pi: 6x-2y+3z+7=0$的平面方程.

解： 所求平面的法向垂直于$\overrightarrow{M_1M_2}=(1,2,-1)$, 及平面$\pi$的法向$\vec{n_1}=(6,-2,3)$, 所以其法向为

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{n_1}=(1,2,-1)\times(6,-2,3)=(4,-9,-14)$$

所求平面方程为 $4(x-2)-9(y+1)-14(z-3)=0$, 即 $4x-9y-14z+25=0.$

Example

求经过三点$A(1,2,3)$, $B(1,3,5)$, $C(2,4,6)$的平面π 的参数方程和点法式方程.

解： $\overrightarrow{AB}=(0,1,2)$，$\overrightarrow{AC}=(1,2,3)$，故$\pi$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2+s+2t \\ z=3+2s+3t. \end{cases}$$

此平面的法向为

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-1,2,-1),$$

因此它的点法式方程为

$$-(x-1)+2(y-2)-(z-3)=0.$$

§8.2.1 平面方程

- **两平面的位置关系:**

$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad \vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$
$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\quad \vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$
(1) 当$\vec{n}_1//\vec{n}_2$，两平面平行或重合.

$$若\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}(=\frac{D_1}{D_2}),\ 则两平面平行(重合).$$

(2) 当$\vec{n}_1\nparallel\vec{n}_2$，$\vec{n}_1$ 与$\vec{n}_2$ 的夹角ϕ, 称为π_1 和π_2相交所成的二面角, 二面角的余弦为

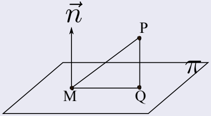
$$\cos\phi=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

特别当$\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$, 即$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$, 两平面垂直.

§8.2.1 平面方程

- **点到平面的距离:**

平面π： $Ax+By+Cz+D=0$，法向量$\vec{n}=(A,B,C)$，$P(x_0,y_0,z_0)\notin\pi$，$\forall M(x,y,z)\in\pi$．过点P 作平面π 的垂线，垂足为Q．点P 到平面π 的距离为



$$d=|\overrightarrow{QP}|=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{MP}|}{|\vec{n}|}=\frac{|A(x_0-x)+B(y_0-y)+C(z_0-z)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

又$Ax+By+Cz+D=0$，由此得

$$d=|\overrightarrow{QP}|=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

§8.2.2 直线方程

- **直线的参数方程和点向式方程:**
  过两点$A(x_0, y_0, z_0)$, B 作直线ℓ, 对$\forall p(x, y, z) \in \ell$, $\overrightarrow{AP} // \overrightarrow{AB}$ 平行, 故$\exists t \in \mathbf{R}$ $s.t.$ $\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB}$, 令$\overrightarrow{AB} = (u_1, u_2, u_3)$, 则有

$$\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases}$$

  称为直线的参数方程, 非零向量$\overrightarrow{AB}$ 称为直线ℓ 的方向向量.
  消去参数t, 可得直线ℓ 的点向式方程

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}.$$

注记： 直线方程的一些特殊情形

1. 若方向向量的坐标之一为零，如$u_1=0$，此时直线的方向与x轴垂直，点向式方程为

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{u_2}=\frac{z-z_0}{u_3}\Longleftrightarrow\begin{cases}x=x_0,\\ \frac{y-y_0}{u_2}=\frac{z-z_0}{u_3},\end{cases}$$

2. 若有两个为零，如$u_1=u_2=0$，那么直线与z轴平行，方程为$\begin{cases}x=x_0\\ y=y_0\end{cases}$.

§8.2.2 直线方程

- **直线的一般方程:**

$$\ell: \quad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

称为直线的一般方程.

对不全为零的任意常数λ_1, λ_2,

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

表示通过直线ℓ的所有平面, 称为平面束方程.

Example

求过点$M(1,1,1)$ 和直线$\ell: x+1=2y+3=3z-5$ 的平面π 的一般方程.

解： ℓ 经过点$A(0,-1,2)$, π 的法向量与$\overrightarrow{AM}=(1,2,-1)$ 及ℓ 的方向向量$(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3})$ 都垂直，故π 的法向量

$$\vec{n}=(1,2,-1)\times(1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3})=(\tfrac{7}{6},-\tfrac{4}{3},-\tfrac{3}{2})//(7,-8,-9).$$

从而可求得平面π 的一般方程为

$$7x-8y-9z+10=0.$$

Example

求点$A(1,2,3)$ 关于直线$\ell: x=\frac{4-y}{3}=\frac{3-z}{2}$ 的对称点A'的坐标.

解： 设点A在直线ℓ上的投影点为$B(t,4-3t,3-2t)$, 直线ℓ的方向为$\vec{u}=(1,-3,-2)$, 则

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=0\Longrightarrow(t-1,2-3t,-2t)\cdot(1,-3,-2)=0\Longrightarrow t=\frac{1}{2},$$

所以$B(\frac{1}{2},\frac{5}{2},2)$, B为A与A'的中点, 则A'的坐标为$(0,3,1)$.

Example

求通过点$A(1,1,1)$ 且和两条直线$\ell_1: x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 和$\ell_2: \frac{x-1}{2}=y+2=\frac{z-3}{4}$ 都相交的直线ℓ 的方程.

解法1: 由已知直线ℓ_1过点$O(0,0,0)$, 方向为$\vec{u}=(1,2,3)$;
直线ℓ_2 过点$M(1,-2,3)$, 方向为$\vec{v}=(2,1,4)$.
过点A 和ℓ_1 的平面π_1 的法向量
$\vec{n}_1=\overrightarrow{OA}\times\vec{u}=(1,1,1)\times(1,2,3)=(1,-2,1)$,
故平面π_1 的一般方程为$x-2y+z=0$.
过点A 和ℓ_2 的平面π_2 的法向量
$\vec{n}_2=\overrightarrow{AM}\times\vec{v}=(0,-3,2)\times(2,1,4)=(-14,4,6)//(7,-2,-3)$,
同理得平面π_2 的一般方程$7x-2y-3z-2=0$.
ℓ 为平面π_1 和π_2 的交线, 故ℓ 的一般方程为

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 7x-2y-3z-2=0 \end{cases}$$

解法2: 设所求直线ℓ的方程为$\dfrac{x-1}{a}=\dfrac{y-1}{b}=\dfrac{z-1}{c}$, 由已知直线$\ell_1$过点$O(0,0,0)$, 方向为$\vec{u}=(1,2,3)$; 直线$\ell_2$ 过点$M(1,-2,3)$, 方向为$\vec{v}=(2,1,4)$, 由

$$OA,\ell_1,\ell\quad 共面 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix}=0 \Longrightarrow a-2b+c=0,$$

$$AM,\ell_2,\ell\quad 共面 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ a & b & c \end{vmatrix}=0 \Longrightarrow 7a-2b-3c=0,$$

得$b=\frac{5}{4}a$, $c=\frac{3}{2}a$, 取$a=4$, $b=5$, $c=6$, 所以直线ℓ的方程为$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z-1}{6}$.

Example

求直线ℓ : $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0, \end{cases}$ 在平面π : $x+y+z=0$上投影直线ℓ_1 的方程.

解法1: 投影直线在平面π上, 也在过ℓ的某平面上, 设其方程为 $x+y-z-1+\lambda(x-y+z+1)=0$, 且与平面$\pi$垂直, 即有

$$(1+\lambda, 1-\lambda, \lambda-1)\cdot(1,1,1)=0 \Longrightarrow \lambda=-1,$$

则过ℓ和ℓ_1的平面为$y-z-1=0$, 从而直线ℓ_1 的方程为

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ y-z-1=0, \end{cases} \quad .$$

Example

求直线$\ell:\begin{cases}x+y-z-1=0,\\ x-y+z+1=0,\end{cases}$ 在平面$\pi:\ x+y+z=0$上投影直线ℓ_1 的方程.

解法2: 投影直线在平面π上, 也在过ℓ和ℓ_1的平面上. 直线ℓ的方向为$\vec{u}=(1,1,-1)\times(1,-1,1)=(0,-2,-2)$. 平面$\pi$的法向为$\vec{n}=(1,1,1)$, 而过$\ell$和$\ell_1$平面$\pi_1$的法向为$\vec{u}\times\vec{n}=(0,-2,2)$. 直线$\ell$与平面$\pi$的交点坐标满足$\begin{cases}x+y-z-1=0,\\ x-y+z+1=0,\\ x+y+z=0\end{cases}$ 解得$M(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$. 平面$\pi_1$方程为$-2(y-\frac{1}{2})+2(z+\frac{1}{2})=0$, 即$y-z-1=0$,从而直线$\ell_1$ 的方程为$\begin{cases}x+y+z=0,\\ y-z-1=0,\end{cases}$.

Example

求直线ℓ : $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0, \end{cases}$ 在平面Π : $x+y+z=0$上投影直线ℓ_1 的方程.

解法3: 直线ℓ的方向为$\vec{u}=(1,1,-1)\times(1,-1,1)=(0,-2,-2)$. 平面$\pi$的法向为$\vec{n}=(1,1,1)$, 则直线$\ell_1$的方向为$(\vec{u}\times\vec{n})\times\vec{n}=(-4,2,2)$. 直线$\ell$与平面$\pi$的交点坐标满足

$\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0, \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 解得$M(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, 则直线$\ell_1$的方程为

$$\frac{x}{-2}=\frac{y-\frac{1}{2}}{1}=\frac{z+\frac{1}{2}}{1}.$$

§8.2.2 直线方程

- **两直线的位置关系:**

  ℓ_1 过点$A(a_1,a_2,a_3)$, 方向向量为$\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$;
  ℓ_2 过点$B(b_1,b_2,b_3)$, 方向向量为$\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$,
  则ℓ_1 与ℓ_2 共面$\Longleftrightarrow$ $\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}$ 共面, 即

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\overrightarrow{AB}=0\Longleftrightarrow\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=0$$

共面情形:

(1) $\vec{u}\nparallel\vec{v}$, 则ℓ_1 和ℓ_2 夹角余弦为

$$\cos\phi=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{|u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$$

(2) $\vec{u}//\vec{v}$, 若B 在ℓ_1 上或A 在ℓ_2 上, 则它们重合; 否则$\ell_1//\ell_2$, 它们的距离等于点B 到ℓ_1 的距离.

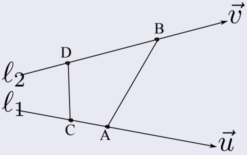
§8.2.2 直线方程

- **两直线的位置关系:**

  异面情形:

  同时与ℓ_1 和ℓ_2 垂直相交的直线CD 称为ℓ_1 和ℓ_2 的**公垂线**.

  $|CD|$ 称为直线ℓ_1 和ℓ_2 的**距离**, $|CD| = \dfrac{|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$.



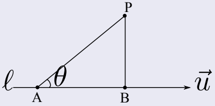
公垂线CD的方程:

$$\begin{cases} \text{平面}ACD\text{的一般方程}, & \text{法向量}(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{u}, \\ \text{平面}BCD\text{的一般方程}, & \text{法向量}(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{v}, \end{cases}$$

§8.2.2 直线方程

- **点到直线的距离:**
  直线ℓ 过点A, 方向向量为$\vec{u}$, P 为空间中任意一点. 过点P 作直线ℓ 的垂线, 垂足为B. 点P 到直线ℓ 的距离为

$$d = |\overrightarrow{BP}| = |\overrightarrow{AP}|\sin\theta = \frac{|\vec{u}\times\overrightarrow{AP}|}{|\vec{u}|}.$$



Example

求直线$\ell_1: x-1=y-2=z-3$ 和$\ell_2: x=2y=3z$ 的夹角θ、距离d 以及公垂线ℓ 的方程.

解： ℓ_1过点$A(1,2,3)$,方向为$\vec{u}=(1,1,1)$.
ℓ_2过点$O(0,0,0)$, 方向为$\vec{v}=(6,3,2)$.
则ℓ 的方向为$\vec{u}\times\vec{v}=(-1,4,-3)$, $\overrightarrow{OA}=(1,2,3)$. 故

$$\theta=\arccos\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\arccos\frac{11}{7\sqrt{3}},\quad d=\frac{|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\overrightarrow{OA}|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{2}{\sqrt{26}}.$$

$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{u}=(7,-2,-5),\ (\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{v}=(17,-16,-27),$$

故ℓ_1 和ℓ 所决定平面的方程为$7x-2y-5z+12=0$. 同理, ℓ_2 和ℓ 所决定平面方程为$17x-16y-27z=0$.于是ℓ 的一般方程为

$$\begin{cases}7x-2y-5z+12=0\\ 17x-16y-27z=0\end{cases}$$

Example

求点$M(1,2,3)$到直线$\ell:\begin{cases}x+y-z=1,\\2x+z=3,\end{cases}$ 的距离d .

解： ℓ过点$A(0,4,3)$,方向为

$$\vec{u}=(1,1,-1)\times(2,0,1)=(1,-3,-2).$$

$$\begin{aligned} d=\frac{|\vec{u}\times\overrightarrow{AM}|}{|\vec{u}|}&=\frac{|(1,-2,0)\times(1,-3,-2)|}{\sqrt{1+9+4}}\\ &=\frac{|(4,2,-1))|}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

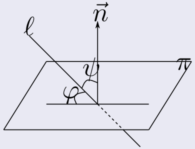
§8.2.2 直线方程

- **直线与平面的位置关系:**

$$\ell: \frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2} = \frac{z-a_3}{u_3}, \quad \text{方向向量} \vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0, \quad \text{法向量} \vec{n} = (A, B, C)$$

(1) $\vec{u}$ 和 $\vec{n}$ 不垂直时, ℓ 和 π 有唯一的交点. 直线 ℓ 和平面 π 的夹角 $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi = \arcsin\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$.



(2) $\vec{u}$ 和 $\vec{n}$ 垂直时, 若 $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D \neq 0$, 则 ℓ 和 π 平行; 若 $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D = 0$, 则 ℓ 在平面 π 上.

Example

求直线$\ell: x = 2y = 3z$ 和平面$\pi: x + 2y + 3z = 4$ 的夹角φ 和交点P.

解: $\vec{u} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, $\vec{n} = (1, 2, 3)$, 故夹角

$$\varphi = \arcsin \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|} = \arcsin \frac{18}{7\sqrt{14}}.$$

由于点P 在ℓ 上, 可设P 点坐标为$(x, \frac{x}{2}, \frac{x}{3})$. 代入平面方程, 解得$x = \frac{4}{3}$. 故$P$ 点坐标为$(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{9})$.

目录

§8.3.1 曲线与曲面的方程

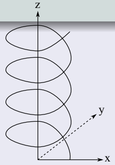
- **曲线的参数方程:**
  $x(t), y(t), z(t)$ 是区间$[\alpha, \beta]$ 上的连续函数,

$$\vec{r}(t) = \big((x(t), y(t), z(t)\big), \ t \in [\alpha, \beta]$$

表示空间中一条曲线, 称$\vec{r}(t)$ 为**曲线的参数方程**.

Example

$$\text{螺旋线:} \quad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 8\pi$$



§8.3.1 曲线与曲面的方程

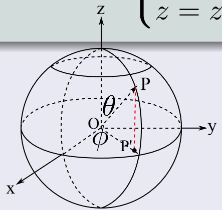
- **曲面的参数方程:** $x(s,t), y(s,t), z(s,t) \in C(D)$,

$$\vec{r}(s,t) = ((x(s,t), y(s,t), z(s,t)),\ (s,t) \in D$$

表示空间中一张曲面, 称$\vec{r}(s,t)$ 为**曲面的参数方程**.

Example

球面: $\begin{cases} x = x_0 + r\sin\theta\cos\phi \\ y = y_0 + r\sin\theta\sin\phi \\ z = z_0 + r\cos\theta \end{cases}$ $\quad \begin{array}{l} 0 \le \phi < 2\pi, \\ 0 \le \theta \le \pi. \end{array}$

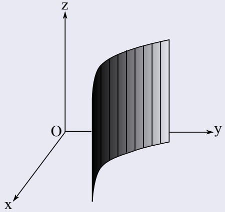


§8.3.1 曲线与曲面的方程

- **曲面的一般方程:**
  设$f(x,y,z)$ 是三元连续函数. 则满足
  $$f(x,y,z)=0$$
  的点(x,y,z) 的集合形成一个曲面, 称为**曲面的一般方程**.
- **曲线的一般方程:**
  设$f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ 都是三元连续函数. 则满足
  $$\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$$
  的点(x,y,z) 的集合是两个曲面$f(x,y,z)=0$ 和$g(x,y,z)=0$ 的交线, 称为**曲线的一般方程**.

§8.3.2 柱面

由一族平行直线形成的曲面叫**柱面**，这些直线叫做柱面的**母线**. 柱面上与每条母线都相交的一条曲线叫做柱面的一条**准线**.



一般地，设母线的方向$\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$，准线的参数方程为$\vec{q}(t)=(q_1(t),q_2(t),q_3(t))$，则柱面具有参数方程

$$\vec{r}(s,t)=s\vec{u}+\vec{q}(t) \Longleftrightarrow \begin{cases} x=su_1+q_1(t) \\ y=su_2+q_2(t) \\ z=su_3+q_3(t) \end{cases}$$

当准线为一个圆，且母线方向与圆所在平面垂直时，为**圆柱面**.

Example

求准线$\begin{cases} y^2+z^2=1 \\ x=1 \end{cases}$,母线方向为$\vec{v}=(2,1,1)$柱面的一般方程.

解法1: 设柱面上的动点$M(x,y,z)$对应在准线上的点为$N(x_0,y_0,z_0)$, 则$\overrightarrow{MN}//\vec{v}$, 即有

$$\overrightarrow{MN}=s\vec{v}\Longrightarrow\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM}+s\vec{v}=(x+2s,y+s,z+s),$$

N在准线上, 所以有$\begin{cases}(y+s)^2+(z+s)^2=1,\\x+2s=1,\end{cases}$, 消去参数$s$, 得

$$\left(y+\frac{1-x}{2}\right)^2+\left(z+\frac{1-x}{2}\right)^2=1,$$

整理得, $x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2x+2y+2z-2=0.$

Example

求准线$\begin{cases} y^2+z^2=1 \\ x=1 \end{cases}$,母线方向为$\vec{v}=(2,1,1)$柱面的一般方程.

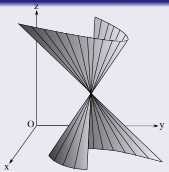
解法2: 点$M(x,y,z)$对应在准线上的点$N(1,\cos\theta,\sin\theta)$,
则$\overrightarrow{MN}//\vec{v}$, 即有

$$\frac{1-x}{2}=\frac{\cos\theta-y}{1}=\frac{\sin\theta-z}{1},$$

由$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$, 消去参数$\theta$, 得方程
$x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2x+2y+2z-2=0.$

§8.3.3 锥面

由一族经过定点的直线形成的曲面叫**锥面**, 这些直线叫做锥面的 **母线**, 定点叫做锥面的**顶点**. 锥面上与每条母线都相交但不经过顶点的一条曲线叫做锥面的一条**准线**.



一般地, 设顶点$A(a_1, a_2, a_3)$, 准线的参数方程 $\vec{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t))$, 则锥面具有参数方程

$$\vec{r}(s,t) = (1-s)A + s\vec{q}(t) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = (1-s)a_1 + sq_1(t) \\ y = (1-s)a_2 + sq_2(t) \\ z = (1-s)a_3 + sq_3(t) \end{cases}$$

当准线为圆, 且顶点与圆心连线与圆所在平面垂直时, 为**圆锥面**.

Example

求准线为$\begin{cases} y^2+z^2=1 \\ x=1 \end{cases}$，顶点坐标为$A(2,1,1)$ 的锥面方程.

解法1: 设锥面上的动点$M(x,y,z)$对应在准线上的点为$N(x_0,y_0,z_0)$, 由于M,N,A三点共线, 则有

$$\overrightarrow{MN}=s\overrightarrow{AN}\Longrightarrow\overrightarrow{ON}=\frac{1}{1-s}(\overrightarrow{OM}-s\overrightarrow{OA})=\frac{1}{1-s}(x-2s,y-s,z-s),$$

N在准线上, 所以满足准线方程, 即有$\begin{cases}(\frac{y-s}{1-s})^2+(\frac{y-s}{1-s})^2=1,\\ \frac{x-2s}{1-s}=1,\end{cases}$

消去参数s, 得$\left(\frac{y-(x-1)}{2-x}\right)^2+\left(\frac{z-(x-1)}{2-x}\right)^2=1$,整理得
$x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2x+2y+2z-2=0.$

Example

求准线为$\begin{cases} y^2+z^2=1 \\ x=1 \end{cases}$，顶点坐标为$A=(2,1,1)$ 的锥面方程.

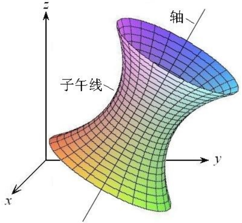
解法2: 设锥面上的动点$M(x,y,z)$对应在准线上的点$N(1,\cos\theta,\sin\theta)$，由于$M,N,A$三点共线，则$\overrightarrow{AM}//\overrightarrow{AN}$，即有

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{\cos\theta-1}=\frac{z-1}{\sin\theta-1},$$

由$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，消去参数$\theta$，得方程$x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2x+2y+2z-2=0.$

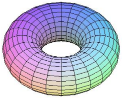
§8.3.4 旋转面

由空间中的一条曲线γ 绕着一条直线ℓ 旋转而产生的曲面叫**旋转面**, γ 叫做旋转面的**子午线**, ℓ 叫做旋转面的**旋转轴**.
旋转面的参数方程和一般方程的形式通常都比较复杂. 然而, 对于以坐标轴为转轴的旋转面, 我们可以相对容易地写出它的参数方程或一般方程.



Example

求圆$L:\begin{cases}(y-R)^2+z^2=r^2,\\ x=0,\end{cases}\quad (0<r<R)$ 绕z 轴旋转所产生的环面的方程.



解： 环面上的点$P=(x,y,z)$ 可由圆L 上的点$(0,\sqrt{x^2+y^2},z)$ 旋转得到, 因此环面具有一般方程

$$(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2+z^2=r^2.$$

由圆的参数方程$y=R+r\cos\theta,\ z=r\sin\theta$ 可得环面的参数方程

$$\begin{cases} x=(R+r\cos\theta)\cos\phi \\ y=(R+r\cos\theta)\sin\phi \\ z=r\sin\theta \end{cases} \qquad 0\le\phi<2\pi,\ 0\le\theta<2\pi.$$

Example

求直线$\ell: x-1=y=z$绕直线ℓ_0： $x=y=1$旋转所得旋转面的参数方程和一般方程.

解： 设旋转面上任意一点$P(x,y,z)$对应子午线ℓ上点$Q(t+1,t,t)$，取转轴ℓ_0上一点$M(1,1,0)$，则

$$\begin{cases} |\overrightarrow{MP}| = |\overrightarrow{MQ}| \\ \overrightarrow{PQ} \perp \ell_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2+z^2 = t^2+(t-1)^2+t^2 \\ (x-t-1, y-t, z-t)\cdot(0,0,1) = 0 \end{cases}$$

可得$(x-1)^2+(y-1)^2 = z^2+(z-1)^2$，旋转面的一般方程为

$$x^2+y^2-2z^2-2x-2y+2z+1=0.$$

即 $2(x-1)^2+2(y-1)^2-4(z-\frac{1}{2})^2=1$，可以得到参数方程

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\sec\phi+1 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\sec\phi+1 \\ z = \frac{1}{2}\tan\phi+\frac{1}{2} \end{cases} \qquad -\frac{\pi}{2}<\phi<\frac{\pi}{2},\ 0\le\theta<2\pi.$$

Example

求直线$\ell: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{1-z}{1}$在平面$\Pi$: $x-y+2z-1=0$上的投影直线ℓ_0的方程, 并求ℓ_0 绕Oy 轴旋转一周所成的曲面方程.

解： ℓ上的点$(t+1, t, 1-t)$与平面Π的交点为$t=1$时$M(2,1,0)$. ℓ的方向为$\vec{u}=(1,1,-1)$, 平面Π的法向为$\vec{n}=(1,-1,2)$, 直线ℓ_0的方向为$(\vec{u}\times\vec{n})\times\vec{n}=(4,2,-1)$, 所以$\ell_0$的方程为

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=-z.$$

曲面上任意点$P(x,y,z)$, 对应直线ℓ_0的点$Q(2y, y, \frac{1-y}{2})$, 使得它们到y轴距离相等, 则

$$x^2+z^2=(2y)^2+(\frac{y-1}{2})^2 \Longrightarrow 4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0.$$

§8.3.5 二次曲面简介

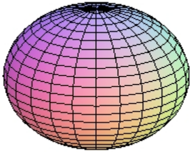
二次曲面是应用广泛的一类曲面, 椭球面、圆柱面、圆锥面等都是二次曲面. 二次曲面的一般方程具有二次多项式形式

$$a_1x^2+a_2xy+a_3xz+a_4y^2+a_5yz+a_6z^2+a_7x+a_8y+a_9z+a_{10}=0.$$

常见的二次曲面有九种,标准形式如下.

(1) **椭球面**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ (a>0,b>0,c>0)$$

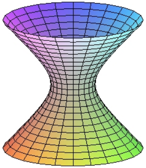


§8.3.5 二次曲面简介

(2) 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ (a>0,b>0,c>0)$$

单叶双曲面关于原点、坐标轴与坐标平面都是对称的. 单叶双曲面有一**渐近锥面** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, 它们在无穷远处任意接近. 单叶双曲面与一个平面的交线可能是一个椭圆、双曲线、抛物线或者一对相交直线等.

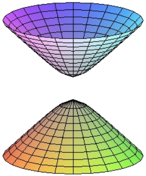


§8.3.5 二次曲面简介

(3) 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,\ (a>0,b>0,c>0)$$

双叶双曲面位于$|z|\leq c$ 之外，且关于原点、坐标轴与坐标平面都是对称的. 锥面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 是它的**渐近锥面**. 双叶双曲面与平面的交线可能是椭圆、双曲线、抛物线等.

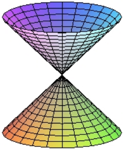


§8.3.5 二次曲面简介

(4) 二次锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,\ (a>0,b>0,c>0)$$

二次锥面是一般锥面的特殊情形，其准线可取为椭圆，且轴线与椭圆所在平面垂直. 顶点在原点，母线是通过原点的直线. 二次锥面关于原点、坐标轴与坐标平面都是对称的，它与平面的交线可能是一个椭圆、双曲线、抛物线或者是一对相交直线等.

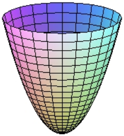


§8.3.5 二次曲面简介

(5) 椭圆抛物面

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \ (a > 0, b > 0)$$

椭圆抛物面在平面$z = 0$ 之上, Ozx 面与Oyz 面是它的对称面, z 轴是它的对称轴. 椭圆抛物面与一个平面的交线可能是一个椭圆或者是一条抛物线等.

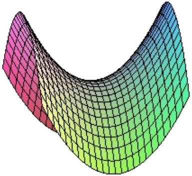


§8.3.5 二次曲面简介

(6) 双曲抛物面(俗称马鞍面)

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad (a > 0, b > 0)$$

双曲抛物面具有对称面Ozx 面与Oyz 面，及对称轴z 轴. 它与平面的交线可能为双曲线、抛物线、一对相交直线等.

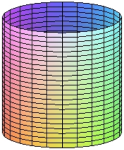


§8.3.5 二次曲面简介

(7) 椭圆柱面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ (a>0,b>0)$$

椭圆柱面是准线为椭圆, 且母线方向与椭圆所在平面垂直的柱面.

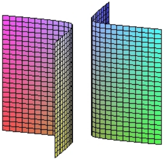


§8.3.5 二次曲面简介

(8) **双曲柱面**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \ (a > 0, b > 0)$$

双曲柱面是准线为双曲线，且母线方向与双曲线所在平面垂直的柱面.

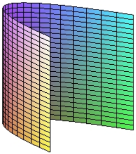


§8.3.5 二次曲面简介

(9) 抛物柱面

$$y^2 = 2px, \quad (p > 0)$$

抛物柱面是准线为抛物线，且母线方向与抛物线所在平面垂直的柱面.



目录

对于一般形式的三元二次方程

$$a_1x^2+a_2xy+a_3xz+a_4y^2+a_5yz+a_6z^2+a_7x+a_8y+a_9z+a_{10}=0,$$

问题:

是否是上述给出的各种曲面中的一种呢?

如果是, 我们如何才能知道它对应的是哪种二次曲面呢?

坐标变换

§8.4.1 平移坐标变换

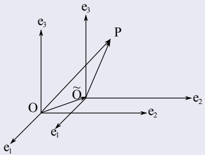
设坐标系$\mathbb{F}=[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$，点$\tilde{O}(x_0,y_0,z_0)$. 以$\tilde{O}$ 为原点，保持坐标轴的方向和长度单位不变，建立新的坐标系$\mathbb{F}'=[\tilde{O};\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$，这称为坐标系的**平移**.

设空间在$\mathbb{F}$中的点$P(x,y,z)$，在$\mathbb{F}'$ 中的坐标为$(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$，则由

$$x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{O\tilde{O}}+\overrightarrow{\tilde{O}P}=\overrightarrow{O\tilde{O}}+\tilde{x}\vec{e}_1+\tilde{y}\vec{e}_2+\tilde{z}\vec{e}_3$$

可得**平移坐标变换公式**

$$\tilde{x}=x-x_0,\ \tilde{y}=y-y_0,\ \tilde{z}=z-z_0$$



Example

判断二次曲面$x^2 - y^2 - z^2 + 2x + 2y - 2z = 0$ 的类型和位置.

解： 曲面方程可配方为

$$(y-1)^2 + (z+1)^2 - (x+1)^2 = 1.$$

将坐标系原点平移到$(-1, 1, -1)$. 则新坐标与原坐标系关系为

$$\tilde{x} = x + 1, \quad \tilde{y} = y - 1, \quad \tilde{z} = z + 1.$$

曲面在新坐标系中的方程为

$$\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 - \tilde{x}^2 = 1.$$

这表示一个旋转单叶双曲面. 由坐标变换公式知, 曲面以$(-1, 1, -1)$ 为中心, 以直线$y - 1 = z + 1 = 0$ 为对称轴.

§8.4.2 旋转坐标变换

两个（右手）坐标系$\mathbb{F} = [O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}]$ 和$\mathbb{F}' = [O; \boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}']$ 原点相同，但坐标轴方向不同. 坐标系$\mathbb{F}'$由$\mathbb{F}$旋转得到. 设两个坐标系的基向量之间的夹角由下表给出：

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}'$	α_1	β_1	γ_1
$\boldsymbol{j}'$	α_2	β_2	γ_2
$\boldsymbol{k}'$	α_3	β_3	γ_3

向量$\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ 可以由它们在$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 中的方向余弦来表示,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{i}' &= \cos\alpha_1 \boldsymbol{i} + \cos\beta_1 \boldsymbol{j} + \cos\gamma_1 \boldsymbol{k}, \\
\boldsymbol{j}' &= \cos\alpha_2 \boldsymbol{i} + \cos\beta_2 \boldsymbol{j} + \cos\gamma_2 \boldsymbol{k}, \\
\boldsymbol{k}' &= \cos\alpha_3 \boldsymbol{i} + \cos\beta_3 \boldsymbol{j} + \cos\gamma_3 \boldsymbol{k}.
\end{aligned}$$

$$\cos\alpha_i \cos\alpha_j + \cos\beta_i \cos\beta_j + \cos\gamma_i \cos\gamma_j = \delta_{ij}$$

§8.4.2 旋转坐标变换

点P 在坐标系$\mathbb{F}$ 和$\mathbb{F}'$ 中的坐标分别为(x, y, z), (x', y', z'),

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}' \\
&= x'(\cos\alpha_1\boldsymbol{i} + \cos\beta_1\boldsymbol{j} + \cos\gamma_1\boldsymbol{k}) \\
&\quad + y'(\cos\alpha_2\boldsymbol{i} + \cos\beta_2\boldsymbol{j} + \cos\gamma_2\boldsymbol{k}) \\
&\qquad + z'(\cos\alpha_3\boldsymbol{i} + \cos\beta_3\boldsymbol{j} + \cos\gamma_3\boldsymbol{k}) \\
&= (x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3)\boldsymbol{i} \\
&\quad + (x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3)\boldsymbol{j} \\
&\qquad + (x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3)\boldsymbol{k},
\end{aligned}$$

§8.4.2 旋转坐标变换

于是得到用坐标(x',y',z') 表达坐标(x,y,z) 的公式

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3, \\ y &= x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3, \\ z &= x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3. \end{aligned}$$

同样也可以导出用坐标(x,y,z) 表达坐标(x',y',z') 的公式

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1, \\ y' &= x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2, \\ z' &= x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3. \end{aligned}$$

它们都是空间直角坐标系旋转坐标变换公式.

§8.4.2 旋转坐标变换

将上面的公式写为矩阵形式更方便：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{即} \quad X = TX'$$

那么有

$$X' = T^T X, \quad T^T \text{表示} T \text{的转置矩阵}$$

矩阵T为基$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$到基$(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}')$的过渡矩阵，是可逆矩阵.

Example

将直角坐标系Oxy 绕z 轴沿反时针方向旋转$\dfrac{\pi}{4}$, 得新坐标系$Ox'y'z'$, 试表示新旧坐标间的变换关系, 并将方程$xy = z$ 变换为新坐标系下的方程.

解: 新旧坐标系坐标轴之间的夹角如下表所示:

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}'$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\boldsymbol{j}'$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\boldsymbol{k}'$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}'$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\boldsymbol{j}'$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\boldsymbol{k}'$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0

于是得旧坐标与新坐标的变换关系为

$$x = x'\cos\frac{\pi}{4} + y'\cos\frac{3\pi}{4} + z'\cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'),$$

$$y = x'\cos\frac{\pi}{4} + y'\cos\frac{\pi}{4} + z'\cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'),$$

$$z = x'\cos\frac{\pi}{2} + y'\cos\frac{\pi}{2} + z'\cos 0 = z'.$$

将这变换式代入到方程$xy = z$ 得

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = z'.$$

这个新方程所表示的几何图形是一个马鞍面.

Example

利用坐标变换化简方程

$$45x^2+45y^2-8z^2-54xy+36\sqrt{2}x-108\sqrt{2}y+32z+184=0,$$

并指出它是什么曲面.

解: 先利用坐标系的旋转, 消去方程中的xy 项. 由于x^2 与y^2 的系数相等, 可将坐标系$Oxyz$ 绕z 轴沿反时针方向旋转$\dfrac{\pi}{4}$ 得到新坐标系$Ox'y'z'$, 于是有坐标变换

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}},\quad z=z'.$$

将变换式代入到原方程并整理得

$$9x'^2+36y'^2-4z'^2-36x'-72y'+16z'+92=0,$$

$$9(x'-2)^2+36(y'-1)^2-4(z'-2)^2+36=0.$$

若将原点再平移至(2,1,2) 得新坐标系$O''x''y''z''$, 于是有

$$x''=x'-2,\quad y''=y'-1,\quad z''=z'-2.$$

从而所给方程可化简成

$$9x''^2+36y''^2-4z''^2=-36,$$

或写成

$$\frac{z''^2}{9}-\frac{x''^2}{4}-\frac{y''^2}{1}=1$$

它表示一个双叶双曲面.

§8.4.3 其它常用坐标系

- **平面极坐标系**

极坐标变换:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \text{或者} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x} \end{cases}.$$

在极坐标系下位置向量可以表示为

$$\mathbf{r} = r\cos\theta\mathbf{i} + r\sin\theta\mathbf{j}.$$

坐标线: $(r = r_0)$ 平面上以原点为圆心的同心圆;
$(\theta = \theta_0)$ 从原点出发的射线.

§8.4.3 其它常用坐标系

- **柱坐标系**

柱坐标变换:

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\ \theta=\arctan\frac{y}{x},\ \ z=z.$$

$$\text{或者}\qquad x=r\cos\theta,\ \ y=r\sin\theta,\ \ z=z,$$

其中$0\le r<+\infty,\ 0\le\theta<2\pi,\ -\infty<z<+\infty.$

柱坐标系下的位置向量可以表示为

$$\mathbf{r}=r\cos\theta\mathbf{i}+r\sin\theta\mathbf{j}+z\mathbf{k}.$$

§8.4.3 其它常用坐标系

- **柱坐标系**

坐标面： 三个坐标面两两相互正交

$(r = r_0)$ 以z轴为轴的圆柱面S_1;
$(\theta = \theta_0)$ 以z 轴为边的半平面S_2;
$(z = z_0)$ 与z轴垂直的平面S_3.

坐标线： 三条坐标线两两相互正交

$\Gamma_1 : S_1 \cap S_2$ 平行于z轴的直线;
$\Gamma_2 : S_1 \cap S_3$ 圆心在z轴且与z轴垂直的圆周;
$\Gamma_3 : S_2 \cap S_3$ 垂直于z轴的射线.

以x轴和y轴为中心轴的柱坐标变换分别为：

$$x = x, \quad y = r\cos\theta, \quad z = r\sin\theta.$$

$$x = r\sin\theta, \quad y = y, \quad z = r\cos\theta.$$

§8.4.3 其它常用坐标系

- **球坐标系**

  球坐标变换:

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta.$$

其中$0 \le r < +\infty$, $0 \le \theta < \pi$, $0 \le \phi < 2\pi$.

球坐标系下的位置向量可以表示为

$$\mathbf{r} = r\sin\theta\cos\phi\mathbf{i} + r\sin\theta\sin\phi\mathbf{j} + r\cos\theta\mathbf{k}.$$

§8.4.3 其它常用坐标系

- **球坐标系**

坐标面： 三个坐标面两两相互正交

$(r=r_0)$ 以原点为中心的球面S_1;

$(\theta=\theta_0)$ 以原点为顶点z轴为轴的圆锥面S_2;

$(z=z_0)$ 过z轴的半平面S_3.

坐标线： 三条坐标线两两相互正交

$\Gamma_1: S_1\cap S_2$ 纬线;

$\Gamma_2: S_1\cap S_3$ 经线;

$\Gamma_3: S_2\cap S_3$ 从原点出发的射线.