1. 设 f 是将区间 $[a, b]$ 映入自身的连续映射。从 $[a, b]$ 内任一点 x 出发，用 $x_1 = x$， $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n \in \mathbb{N}_+)$ 生成迭代数列 $\{x_n\}$。证明：$\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$。

证明： $\Rightarrow$ 由 Cauchy 收敛准则容易得出；

$\Leftarrow$ 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f(x_n) - x_n\right] = 0$，

由于 $x_n \in [a,b]$，则 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}, k = 1,2,...,\ n_k > n$，设 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 x^*，

则 $\lim\limits_{k\to\infty}\left[f(x_{n_k}) - x_{n_k}\right] = 0$， $f(x^*) = x^*$。

2. (Toeplitz 定理)设 $n,k\in\mathbb{N}_+, t_{nk}\ge 0$，又有 $\sum_{k=1}^{n} t_{nk}=1, \lim_{n\to\infty} t_{nk}=0$。若已知 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\sum_{k=1}^{n} t_{nk}a_k = a$。

证明：由 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 可知，$\{a_n\}$ 有界，即 $\exists M>0,\forall n\in\mathbb{N}_+, |a_n|<M$，

同时，$\forall \varepsilon>0,\exists N_1\in\mathbb{N}_+, |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}(\text{when } n>N_1)$，

由 $\lim_{n\to\infty} t_{nk}=0$ 知，$\exists N_2\in\mathbb{N}_+, |t_{nk}|<\frac{\varepsilon}{2N_1M}(\text{when } n>N_2)$，

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} t_{nk}a_k - a\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} t_{nk}a_k - \sum_{k=1}^{n} t_{nk}a\right| \le \sum_{k=1}^{n} t_{nk}\left|a_k-a\right| < M(t_{n1}+t_{n2}+\ldots+t_{nN_1}) + \frac{\varepsilon}{2}(t_{n(N_1+1)}+t\ldots+t_{nn}) < \varepsilon$$

即 $\sum_{k=1}^{n} t_{nk}a_k = a$，证明完毕。

注记：（1）令 $t_{nk}=\frac{1}{n}$，可以快速推导出 Cauchy 命题；

（2）令 $t_{nk}=\frac{b_{k+1}-b_k}{b_{n+1}-b_1}$，可以快速推导出 Stolz 定理；

（3）将条件 $\sum_{k=1}^{n} t_{nk}=1$ 改为 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} t_{nk}=1$，结论仍然成立。

相关例题 1：设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，证明：$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\ldots+p_na_1}{p_1+p_2+\ldots+p_n}=a$。

其中 $p_k>0$ 而且 $\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}=0$。

证明：令 $t_{nk}=\frac{p_{n-k+1}}{p_1+p_2+\ldots+p_n}, k=1,2,\ldots,n; n=1,2,\ldots$，显然 $t_{nk}>0$, 且 $\sum_{k=1}^{n} t_{nk}=1$，

再由 $p_k>0$，$p_1+p_2+\ldots+p_n>p_1+p_2+\ldots+p_{n-k+1}$，则

$$0<t_{nk}=\frac{p_{n-k+1}}{p_1+p_2+\ldots+p_n}<\frac{p_{n-k+1}}{p_1+p_2+\ldots+p_{n-k+1}}\to 0\ (\text{when } n\to\infty)$$

由夹逼定理知 $\lim_{n\to\infty} t_{nk}=0$，于是由 Toeplitz 定理可得出结论。

相关例题 2：设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，证明：$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k a_k = a$。(提示：令 $t_{nk}=\frac{\mathrm{C}_n^k}{2^n}$.)

3. 设函数 f 在 (a, b) 内连续，且 $f(a+0), f(b-0)$ 为有限值，证明：

（1）f 在 (a, b) 内有界；

（2）若存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f(\xi) \geq \max\{f(a+0), f(b-0)\}$，则 f 在 (a, b) 内能取到最大值；

（3）f 在 (a, b) 上一致连续。

证明：（1）（证法一）

设 $f(a+0) = A, f(b-0) = B$，则对任意的 $\varepsilon < 1$，$\exists 0 < \delta < \dfrac{b-a}{2}$，使得：
当 $a < x < a+\delta$ 时，有 $A-1 < f(x) < A+1$；
当 $b-\delta < x < b$ 时，有 $B-1 < f(x) < B+1$；

由于 f 在 $[a+\delta, b-\delta]$ 上连续，则 f 在 $[a+\delta, b-\delta]$ 上有界，设界为 M_1，

取 $M = \max\{|A-1|, |A+1|, |B-1|, |B+1|, M_1\}$，

则当 $x \in (a,b)$ 时，有 $|f(x)| \leq M$。证毕。

（证法二）补充定义，令

$$F(x) = \begin{cases} f(a+0), x = a \\ f(x), a < x < b \\ f(b-0), x = b \end{cases}$$

则 F 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 F 在闭区间 $[a,b]$ 上有界，设界为 M，

则当 $x \in (a,b)$ 时，有 $|f(x)| = |F(x)| \leq M$。证毕。

（2）由（1）的证法二知，F 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $\exists \eta \in [a,b]$，使得 $F(\eta) = \max\limits_{x\in[a,b]} F(x)$。

若取 $M_0 = \inf\{M \mid |F(x)| \leq M\}$，则 $M_0 = \max\{f(a+0), f(b-0), \max\limits_{x\in[a,b]} F(x)\}$；

又存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f(\xi) \geq \max\{f(a+0), f(b-0)\}$，则：

若 $\eta = a$ 或 b，则存在 $\xi_1 \in (a,b)$ 使得 $f(\xi_1) = \max\limits_{x\in(a,b)} F(x) = \max\limits_{x\in(a,b)} f(x)$；

若 $\eta \in (a,b)$，则 $f(\eta) = F(\eta) = \max\limits_{x\in(a,b)} F(x) = \max\limits_{x\in(a,b)} f(x)$。

（3）F 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，所以 F 在闭区间 $[a,b]$ 上一致连续，则 f 在 (a,b) 上一致连续。

4. 设正数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和数列 $\{S_n\}$ 收敛，求证：数列 $\left\{\dfrac{a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n}{n}\right\}$ 收敛于 0。

(提示：$\dfrac{a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n}{n} = \dfrac{n+1}{n} S_n - \dfrac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n}$)

5. (压缩映照原理)设 f 是将区间 $[a, b]$ 映入自身的连续映射。且满足 $|f(x)-f(y)| \le q|x-y|$，其中 x,y 是 $[a, b]$ 上任意两点，$0<q<1$。证明：存在唯一的 $c\in[a,b]$ 使得 $f(c)=c$。

证明：任取 $x_0\in[a,b]$，由条件“f 是将区间 $[a, b]$ 映入自身的连续映射”知，我们可递推地定义

$$x_n = f(x_{n-1}), n=1,2,\ldots$$

由函数所满足的条件，我们有

$$|x_{n+1}-x_n| = |f(x_n)-f(x_{n-1})| \le q|x_n - x_{n-1}|, \forall n\in\mathbb{N}$$

反复应用上述不等式，可得

$$|x_{n+1}-x_n| \le q^n |x_1 - x_0|, \forall n\in\mathbb{N}$$

Accordingly, 对任意的正整数 n 和 p，有

$$|x_{n+p}-x_n| \le |x_{n+p}-x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1}-x_{n+p-2}| + \ldots |x_{n+1}-x_n| \le (q^{n+p-1}+\ldots+q^n)|x_1-x_0|$$

而

$$(q^{n+p-1}+\ldots+q^n)|x_1-x_0| = \frac{1-q^p}{1-q}q^n|x_1-x_0| < \frac{|x_1-x_0|}{1-q}q^n$$

由此可知 $\{x_n\}$ 是基本列，从而它收敛，记极限为 c。显然，$c\in[a,b]$。又由于

$$|f(x_n)-f(c)| \le q|x_n - c|$$

所以当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to c$，必有 $f(x_n)\to f(c)$。（也可用 Cauchy 判则证连续性）

在 $x_n = f(x_{n-1})$ 两边同时取极限就得到 $f(c)=c$，这样 c 的存在性得证。

若存在 $c_1\in[a,b], f(c_1)=c_1, c_1\ne c$，则

$$|c-c_1| = |f(c)-f(c_1)| \le q|c-c_1|$$

即得矛盾，从而 c 的唯一性得证。

6. 设函数f定义在$(a,+\infty)$上，f在每一个有限区间(a,b)内有界，并满足$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$。

求证：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=A$。

证明：先设$A=0$,由$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=0$,

则$\forall\varepsilon>0,\ \exists X_0,\ \forall x\ge X_0,\ \left|f(x+1)-f(x)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，

其中$x=x_0+n,\ x_0\in[X_0,X_0+1],\ n\in\mathbb{N}$，

由于f在每一个有限区间(a,b)内有界，则$f(x)$在区间$[X_0,X_0+1]$内有界，

$\exists M>0,\ \forall x_0\in[X_0,X_0+1],\ |\,f(x_0)\,|\le M$。

于是，由$\left|f(x_0+k+1)-f(x_0+k)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2},k=0,1,2,\ldots$，得到

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{x}\right|&=\left|\frac{f(x_0+n)}{x_0+n}\right|\\
&=\left|\frac{\left[f(x_0+n)-f(x_0+n-1)\right]+\left[f(x_0+n-1)-f(x_0+n-2)\right]+\ldots+\left[f(x_0+1)-f(x_0)\right]+f(x_0)}{x_0+n}\right|\\
&\le\frac{\left|f(x_0+n)-f(x_0+n-1)\right|+\left|f(x_0+n-1)-f(x_0+n-2)\right|+\ldots+\left|f(x_0+1)-f(x_0)\right|+\left|f(x_0)\right|}{x_0+n}\\
&\le\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{n}{x_0+n}+\frac{M}{x_0+n}
\end{aligned}$$

当n充分大($n>N$)时，$\dfrac{M}{x_0+n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$，于是当$x>X_0+N+1$时，$\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$。

若$A\ne0$,作辅助函数$F(x)=f(x)-Ax$，

$\lim\limits_{x\to+\infty}[F(x+1)-F(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)-A]=0$，

且$\left|F(x)\right|\le\left|f(x)\right|+\left|Ax\right|$，故$F$在每一个有限区间$(a,b)$内有界，于是由上述结论$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}=0$，

得到$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=A$。