简单的反三角函数常识

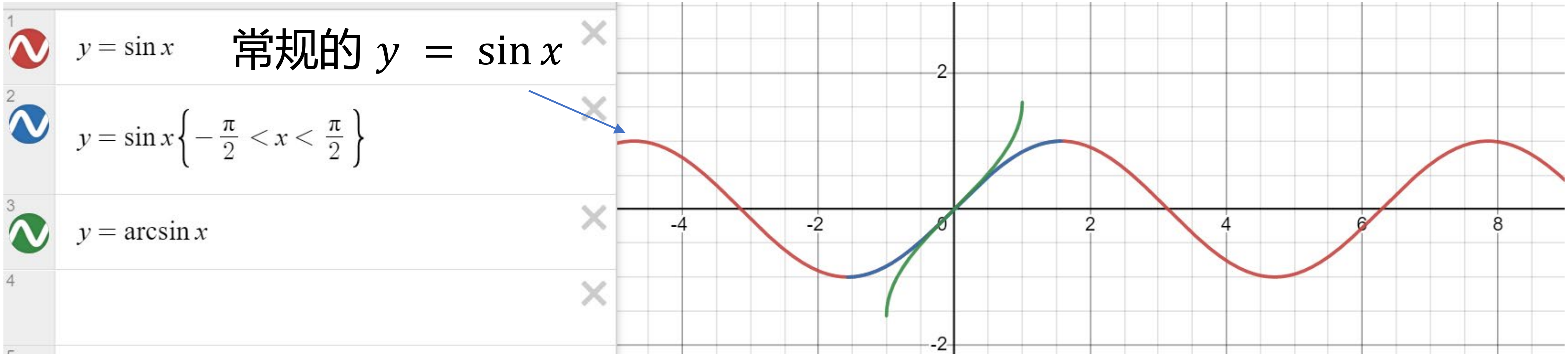
微积分I

什么是反三角函数?

- 就是三角函数的反函数
- 好比 $y = \ln x$ 是 $y = \exp(x)$ 的反函数

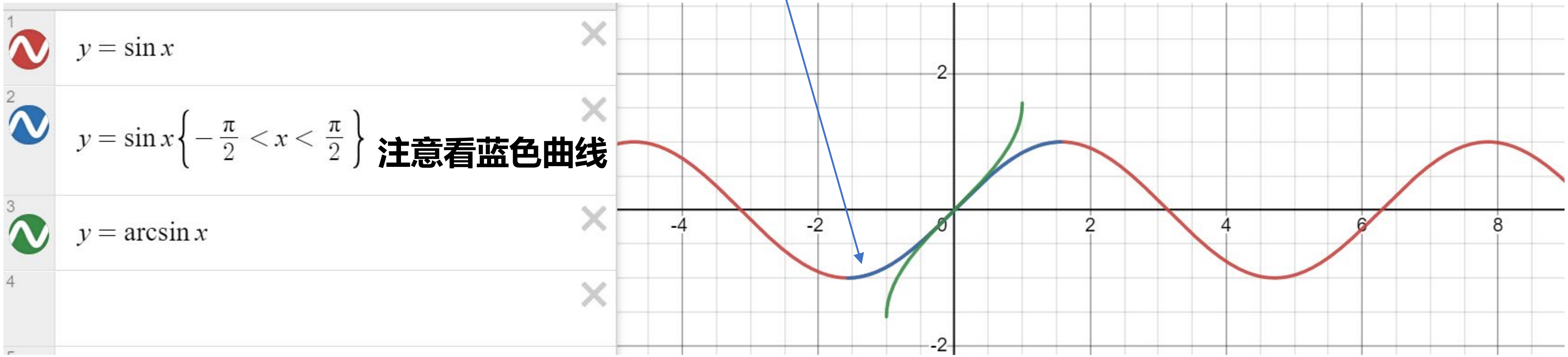
- 三角函数不是不单调吗，怎么有反函数?
- 采用限制定义域的办法，只取单调的部分。

三角函数


1
$y = \sin x$
常规的 $y = \sin x$
2
$y = \sin x \left\{ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right\}$
3
$y = \arcsin x$
4
2
-2
-4
-2
0
2
4
6
8

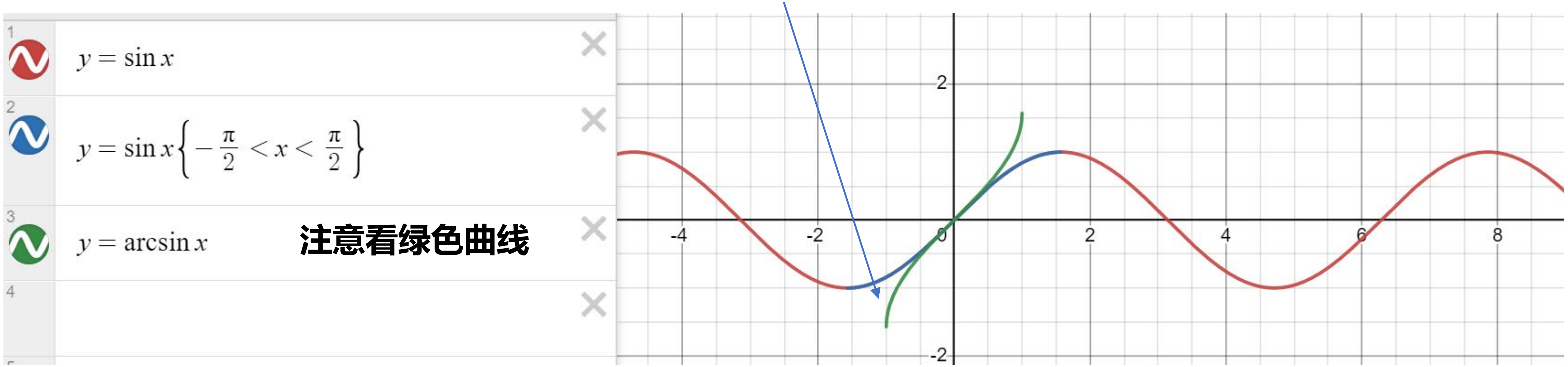
三角函数

选取一段再其上单调的定义域的 $y = \sin x$



反三角函数

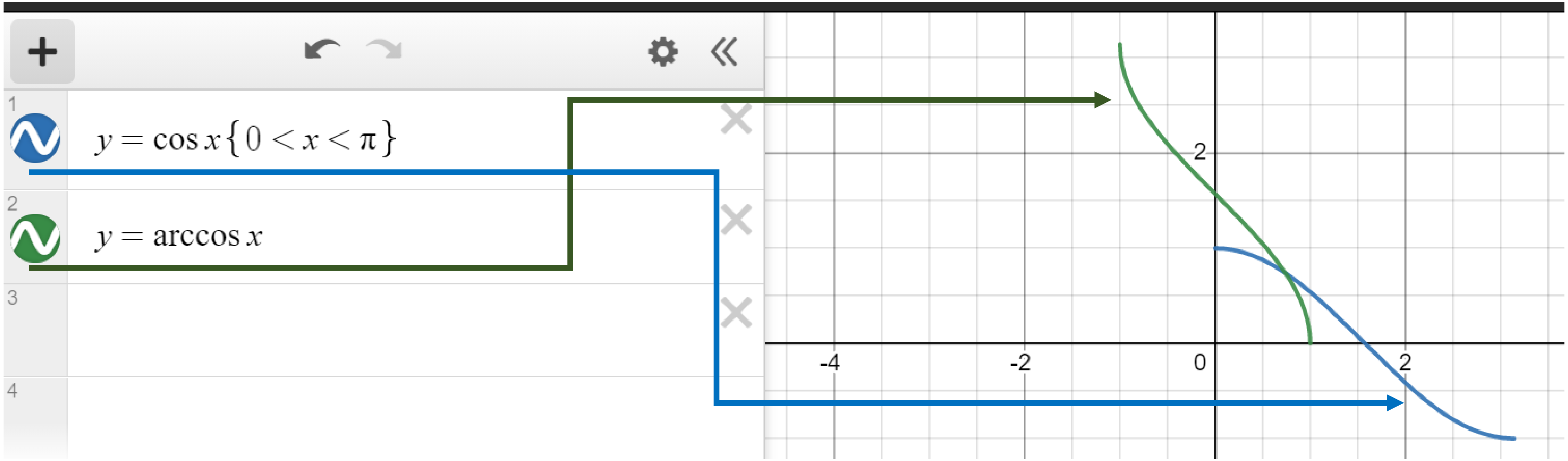
把蓝色曲线沿 $y = x$ 对称，就得到了反函数



蓝色曲线的定义域：$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，值域：$[-1,1]$

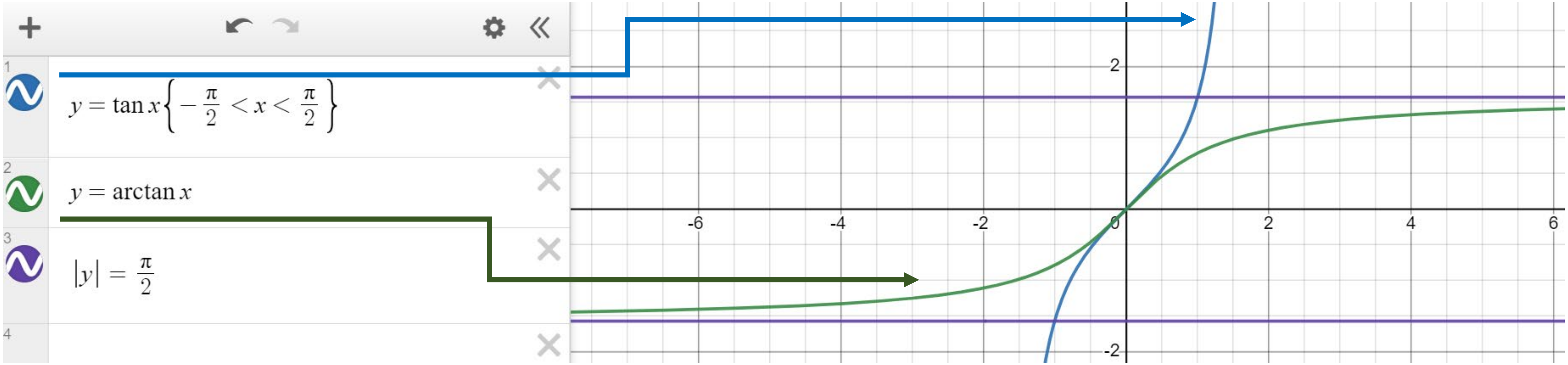
反正弦函数的定义域：$[-1,1]$，值域：$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

刚刚介绍了反正弦函数，现在是反余弦



蓝色曲线的定义域：$[0, \pi]$，值域：$[-1,1]$
反余弦函数的定义域：$[-1,1]$，值域：$[0, \pi]$

反正切函数——挺重要的



蓝色曲线的定义域：$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，值域：$\boldsymbol{R}$（正切函数取了一支）

反正弦函数的定义域：$\boldsymbol{R}$，值域：$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$（紫色直线是渐近线）

反三角函数的导函数

- 暂时不用记，以后会教怎么推出来的
- 教了怎么推出来的再记（doge

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad |x| < 1$$

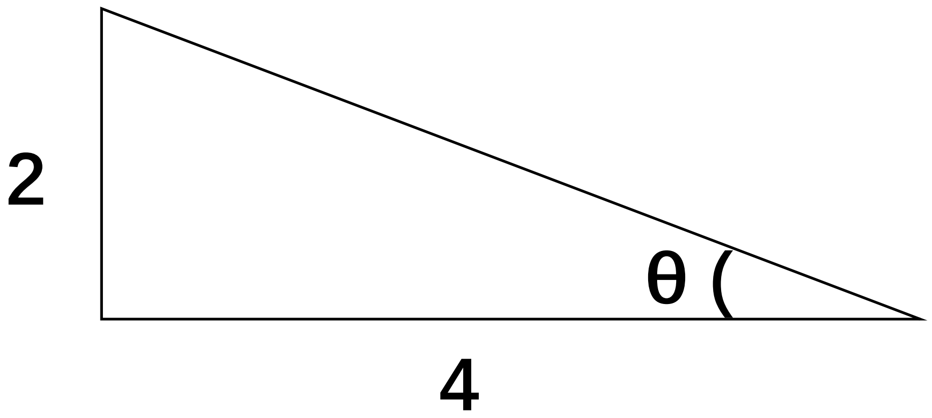
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad |x| < 1$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

非常美丽

直观理解反三角函数

- 反三角函数的自变量是三角函数值，因变量是对应的角度（弧度）

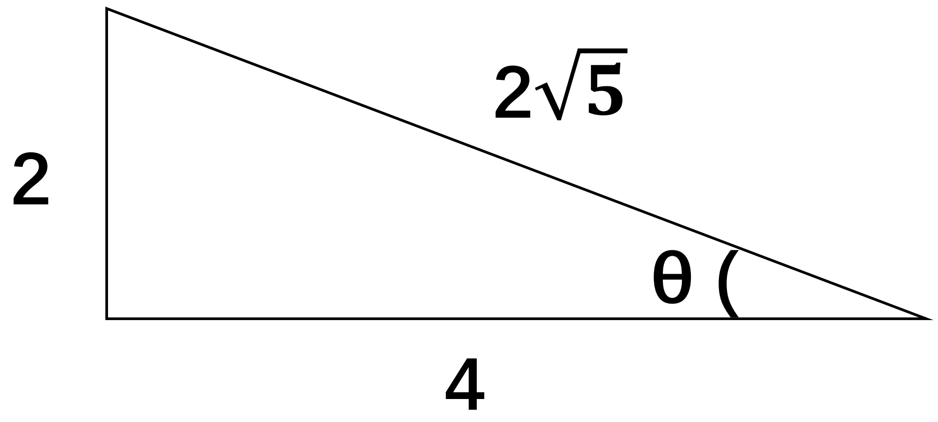


$$\tan\theta = \frac{1}{2}$$

$$\arctan\frac{1}{2} = \theta$$

直观理解反三角函数

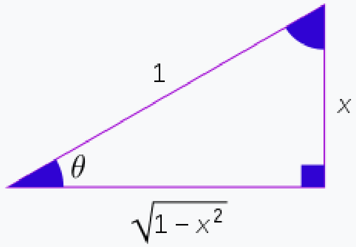
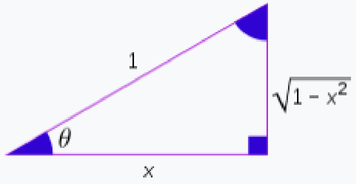
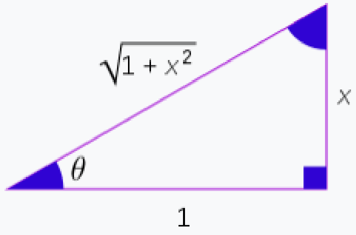
- 反三角函数的自变量是三角函数值，因变量是对应的角度（弧度）



那么$\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}}=?$

直观理解反三角函数

- 前面的例子告诉我们，类似 $f(g(\theta))$，其中 f 和 g 分别是 三角函数/反三角函数 或者 反三角函数/三角函数 的式子可以化简。

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	图示
$\arcsin x$	$\sin(\arcsin x) = x$	$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$	$\tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$	$\cos(\arccos x) = x$	$\tan(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	
$\arctan x$	$\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\tan(\arctan x) = x$	

直观理解反三角函数

- 前面的例子告诉我们，类似 $f(g(\theta))$，其中 f 和 g 分别是 三角函数/反三角函数 或者 反三角函数/三角函数 的式子可以化简。
- 所以作业中最好也化简
- 不要出现类似 $\arcsin\tan f(x)$ 这种式子哈~