第九次作业反馈

> 反馈主笔：王原龙
>
> 最后修改：2021.5.24

习题参考解答与要点整理

Ch5 20

$A_4=\{e,(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$

Ch5 24

本题由于助教工作失误（~~天天赶ddl结果忘子~~），忘记跟大家更正题目，本体只要求求出S_4中所有与K_4同构的子群，而非S_n。

Ch5 26

定义映射$f:G\to G, f(x)=x'$，注意此处的逆在$*$运算意义下（当然由于左逆等于右逆，故其实也是在$\cdot$运算意义下），首先由于群逆元的存在唯一性，得知f是一个映射，另外对于$\forall a,b\in G$，若有$f(a)=f(b)\Leftrightarrow a'=b'$，则有$e=b'*a\Rightarrow b=a$，故知$f$是单射，另外对$\forall a\in G$，$f(a')=(a')'=a$，所以$f$是满射。综上$f$是双射。

进一步地，对$\forall a,b\in G$，有$f(a*b)=(a*b)'=b'*a'=a'\cdot b'=f(a)\cdot f(b)$，故$f$保持运算。

综上，**由定理5.15**，$<G,\cdot>$是群，且与$<G,*>$同构，同构映射是f。

- 不可以直接给出这样的“映射”：$f(a*b)=b\cdot a$，当试图给出一个同构（同态）映射时，首先你要证明这个“映射”是一个映射，也就是其良定性，其次，你要证明其保运算性，最终如果要同构，证明是双射。本质上这个映射是恒同映射，然而这个新乘法定义不是在恒同映射下的同构。
- 本质上这个题从更高的层面上刻画了“逆元”和“本元”的对称性。

Ch6 2

证明六个命题等价，我们只需要证明这六个命题可以通过推出关系构成一个圈即可

- $(1) \Rightarrow (2)$

  由于H是子群，所以$\forall a \in H$，$a' \in H$成立，于是对$a' * b \in H$，有 $(a' * b)' = b' * (a')' = b' * a \in H$成立。

- $(2) \Rightarrow (3)$

  $b' * a \in H \Leftrightarrow \exists h \in H, b' * a = h \Leftrightarrow \exists h \in H, a = b * h \Leftrightarrow \exists h \in H, b = a * h' \Leftrightarrow \exists h \in H, b = a * h$ 成立，而$aH = \{a * h \mid h \in H\} = \{x \mid \exists h \in H, x = a * h\}$，于是知道$b \in aH$成立。

- $(3) \Rightarrow (4)$

  $b \in aH \Leftrightarrow \exists h \in H, b = a * h \Leftrightarrow \exists h \in H, a = b * h' \Leftrightarrow \exists h \in H, a = b * h$，于是得到$a \in bH$

- $(4) \Rightarrow (5)$

  先证$aH \subseteq bH$成立。

  $\forall x \in G, x \in aH \Leftrightarrow \exists h_1 \in H, x = a * h_1$，另一方面$a \in bH \Leftrightarrow \exists h_2 \in H, a = b * h_2$，所以 $\exists h_1, h_2 \in H, x = (b * h_2) * h_1 = b * (h_2 * h_1)$，由于$H$是子群，所以 $h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 * h_2 \in H$，所以$\exists h \in H, x = b * h \Leftrightarrow x \in bH$成立，所以$aH \subseteq bH$。

  再证$bH \subseteq aH$成立。

  $\forall x \in G, x \in bH \Leftrightarrow \exists h_1 \in H, x = b * h_1$，另一方面 $a \in bH \Leftrightarrow \exists h_2 \in H, a = b * h_2 \Leftrightarrow \exists h_2 \in H, b = a * h_2' \Leftrightarrow \exists h_3 \in H, b = a * h_3$成立，所以 $\exists h_1, h_3 \in H, x = (a * h_3) * h_1 = a * (h_3 * h_1)$，与前面同理，$h_1, h_3 \in H \Rightarrow h_1 * h_3 \in H$，所以$\exists h \in H, x = a * h \Leftrightarrow x \in aH$，所以$aH \subseteq bH$成立。

  综上，$aH = bH$成立。

- $(5) \Rightarrow (6)$

  由于对任意集合A, B，有$A = B \Rightarrow A \cap B = A = B$故此命题即证$aH = bH \neq \varnothing$成立，由于 $aH = \{ah \mid h \in H\}$成立，而由于H是子群，有$\{e\} \subseteq H, e \in H$，所以$\{a\} \subseteq aH$，于是 $aH \neq \varnothing$，命题成立。

- $(6) \Rightarrow (1)$

  由$aH \cap bH \neq \varnothing$得$\exists x \in G, x \in aH, x \in bH$，即$\exists x \in G, \exists h_1, h_2 \in H, x = a * h_1 = b * h_2$，于是$h_1 * h_2' = a' * b$，由于$H$是子群$h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1, h_2' \in H \Rightarrow h_1 * h_2' \in H$成立，于是 $a' * b = h_1 * h_2' \in H$成立。

综上所述，六个命题等价

- 此题有些同学使用了模H同余的性质进行证明，这里不推荐这样做，理由是本题的目的其实是想让大家证明模H“左同余”也是一个等价关系，左陪集分解也是一个等价类划分，因为书上只给出了右陪集以及“右同余”情形的证明，所以此处应该当作不知道那些，从定义着手证明。

- ~~有些同学看了我写的解答可能会想：这么显然的结论还废话这么多助教是什么臭鱼烂虾~~，但我这样写的目的是让大家学会从定义开始一步一步写出严谨的证明，而不是在作业里使用**大量**诸如“显然”，“易得”之类的字眼来蒙混过关。比如上面的$(5) \Rightarrow (6)$部分如果让有些同学来写我估计就四个字"显然成立"。在上面的证明中我只使用了群的定义以及性质，子群的定义以及性质，左陪集的定义以及集合论的一些结论，没有使用任何课后习题中的结论，供大家参考。

  需要提醒大家的是**证明始于想当然，也止于想当然**，很多证明题的思路就来源于对定义的深刻的、直观的理解，以及一些“想当然”的直觉；但是落在纸面上的证明必须是严格的，每一步都有根据可循的，而不是你认为显然的，比如上次作业的第18题，很多同学想当然地认为循环群d阶子群**只能**由$g^{\frac{n}{d}}$来生成，并且试图证明这样的结论，结果只能是伪证。

- 这种题目证全等价的证明路径有很多，但你应该写上你正在证明的是用谁来推谁，不要让助教猜。

Ch6 4

若$a \in H$，由于H是子群，所以$a^2 = a * a \in H$，若$a \notin H$，则$a' \notin H$，否则$a = (a')' \in H$，由于H指数为2，所以a, a'属于H的同一个右陪集，也即$a \equiv a'(mod\ H)$，也即$a * (a')' = a^2 \in H$成立。

Ch6 5

考虑陪集交$Ha \cap Kb$，其中a, b任意，若它不为空，则对$\forall x \in Ha \cap Kb$有$Ha = Hx, Kb = Kx$成立（等价类性质），所以$\forall y \in Ha \cap Kb = Hx \cap Kx$，有$\exists h \in H, k \in K, y = h * x = k * x$，于是$h = k = y * x'$成立，所以$h = k \in H \cap K$成立，也即$y \in (H \cap K)x$。另一方面，对于$y \in (H \cap K)x$而言，有$z \in H \cap K, y = z * x$，于是显然$y \in Hx, y \in Kx$成立，也就是$y \in Ha, y \in Kb$，也就是$y \in Ha \cap Kb$。

所以说存在映射g对于每一个非空的陪集交$Ha \cap Kb$，一定可以映射到一个子群$H \cap K$的陪集且g是满射（参见上面证明中的“另一方面”部分），而非空的陪集交至多有mn个，所以子群$H \cap K$的陪集至多有mn个（此时$Ha \cap Kb$对任意a, b非空且映射g为单射），于是有原命题成立。

- 本题有同学使用公式$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$进行证明，这公式书上并没有，这里给出一个简单的证明（考试估计也是不能直接用的）,由**公式要求H, K都是有限阶的**，设$|H| = n, |k| = m$

  $HK = \{h * k \mid h \in H, k \in K\} = h_1K \cup h_2K \cup \cdots \cup h_nK$，也就是说$HK$是$K$的若干个陪集之交，那么现在考察$h_1K \cup h_2K \cup \cdots \cup h_nK$中哪些项是相同的？

  显然$h_iK = h_jK \Leftrightarrow h_i' * h_j \in K$（第2题结论）另一方面$h_i' * h_j \in H$成立，所以$h_i' * h_j \in H \cap K$，也就是说$h_i(H \cap K) = h_j(H \cap K)$上面推导中每一步都是等价推导，所以即$h_iK = h_jK \Leftrightarrow h_i(H \cap K) = h_j(H \cap K)$，而模$H \cap K$左不同余的元素在$H$中有$[H : H \cap K] = \frac{|H|}{|H \cap K|}$个，所以$h_1K \cup h_2K \cup \cdots \cup h_nK$中不同的陪集有$\frac{|H|}{|H \cap K|}$个，所以$|HK| = |h_1K \cup h_2K \cup \cdots \cup h_nK| = \frac{|H|}{|H \cap K|} \cdot |K|$，原命题成立。

  从这里也能看出使用这个结论进行证明的缺陷：要求H, K是有限的，但是题目并没有给出这样的条件！（但是作业里这么写的并且**证明了**的我都放过你们了）

Ch6 6

若G有两个不同的q阶子群H, K，由于q是素数，它们一定是循环群（P98推论6.2），这两个群中元素除单位元外均可以作为群的生成元，所以这两个群交集一定为$\{e\}$，否则它们可以由相同元素生成，就是相同的群。于是考虑$HK \subseteq G$，若$h_1k_1 = h_2k_2$则有$h_2'h_1 = k_2k_1' = e \Leftrightarrow h_1 = h_2, k_1 = k_2$，所以$|HK| = |H||K| = q^2 > pq = |G|$，引起矛盾。

所以G有唯一的q阶子群。

Ch6 9

对于任意$g \in G$考虑集合$g'Hg$，首先由封闭性，$g'Hg \subseteq G$成立，另外对任意$g'hg \in H$，有$g'h'g \in H$且$g'h'g * g'hg = g'hg * g'h'g = e$成立，所以$g'Hg$是子群，另外对于$h_1, h_2 \in H$，有$g'h_1g = g'h_2g \Rightarrow h_1 = h_2$，所以定义$f : H \to g'Hg$满足$f(h) = g'hg$，则$f$是双射（满射性显然），所以$|H| = |g'Hg|$，即$g'Hg$与$H$同阶，由于$H$唯一，得到$H = g'Hg$，于是对任意$g \in G, h \in H$有$g'hg \in g'Hg = H$，所以$H$是正规子群。

Ch6 12

思路：$h * k = k * h$即$h' * k' * h * k = e$即$h' * k' * h * k \in H \cap K$（注意到这里其实是20题的换位元嗷）

证明：对于$h \in H, k \in K$，考虑元素$h' * k' * h * k$，由于H, K都是正规的，所以$h' * k' * h \in K, k' * h * k \in H$成立，所以$h' * k' * h * k = (h' * k' * h) * k \in K, h' * k' * h * k = h' * (k' * h * k) \in H$，所以$h' * k' * h * k \in K \cap H = \{e\}$，所以$h' * k' * h * k = e$，即$h * k = k * h$

知识点整理

- 群的定义以及性质，子群
    - 注意：证明子群只需要证明封闭以及逆元存在，**不需要证单位元和结合律！** 因为它们可以由逆元和子集性质导出。那么为什么群的定义要求单位元呢？因为逆元要靠单位元定义。证子群还可以用$a * b' \in H$来证明
- 模子群左同余，右同余的概念及性质（是等价关系），引出陪集分解
- Lagrange定理
- 正规子群的定义，商群的定义

其它问题整理

- 求求同学们以后通过除了自己想出来之外的各种途径得到答案的时候不要忘记思考一下答案的合理性，本次作业很多同学使用了小猿搜题上面的答案，里面又有书上没有的公式，又不加证明，你这样的证明方式相当于把题目的难度全都吸收到你直接引用的公式里了，那你这题做得还有什么必要呢？到头来用了一个不理解的公式，题做出来了你还是没学会。

  而另一方面，助教们也不是知道世界上所有的定理，你不加证明地放一个结论在这里，助教还要费尽心机证明或证伪这些定理，~~我真想下次直接当错的处理~~，我们不兴“我已经想到一个绝妙的证明，可惜地方太小写不下”那一套嗷。
- 求求同学们写完作业通读一下自己的证明，很多同学写的证明前后句都没有因果关系的，句中也没有什么连词，助教也不知道你在干嘛。还有的同学前面定义的符号后面根本没用到，后面用的符号前面根本没定义，助教只能以最大的善意替你进行脑补，当作你明白了这个问题……