数理逻辑作业 Week9

PB20111686 黄瑞轩

P84 T2

对项 t 在项集 T 中层次 n 做归纳。

（1）当 $n=0$ 时，$t \in X \cup C$，故 $\varphi(x)=\psi(x) \Rightarrow \varphi(t)=\psi(t)$；

（2）设当 $n<k$ 时命题成立；

（3）当 $n=k$ 时，设 $t=f_i^k\left(t_1, \ldots, t_k\right)$，这里 $t \in T_k, t_1, \ldots, t_k \in \bigcup_{i=0}^{k-1} T_i$，故

$$\varphi(t)=\varphi\left(f_i^k\left(t_1, \ldots, t_k\right)\right)=\overline{f_i^n}\left(\varphi\left(t_1\right), \ldots, \varphi\left(t_k\right)\right)=\overline{f_i^n}\left(\psi\left(t_1\right), \ldots, \psi\left(t_k\right)\right)=\psi(t) \tag{1}$$

故结论成立。

P84 T3

用归纳法。

（1）对 $\forall \tau(x) \in T_0$，若 $\tau(x)=x$，则 $\varphi'(\tau(x))=\varphi'(x)=\varphi(t)=\varphi(\tau(t))$；若 $\tau(x) \neq x$，则 $\tau(x)=\tau(t), \varphi'(\tau(x))=\varphi(\tau(x))=\varphi(\tau(t))$。

（2）假定对 $\forall \tau(x) \in T_n(n<k)$，结论都成立。

（3）对 $\tau(x) \in T_k$，设 $\tau(x)=f_i^n\left(\tau_1(x), \cdots, \tau_n(x)\right)$，这里 $\tau_m(x) \in \bigcup_{j=0}^k T_j, 1 \leq m \leq n$，且 $\tau(t)=f_i^n(\tau_1(t), \ldots, \tau_n(t))$，则

$$\begin{aligned}
\varphi'(\tau(x)) & =\overline{f_i^n}\left(\varphi'\left(\tau_1(x)\right), \cdots, \varphi'\left(\tau_n(x)\right)\right)=\overline{f_i^n}\left(\varphi\left(\tau_1(t)\right), \cdots, \varphi\left(\tau_n(t)\right)\right) \\
& =\varphi\left(f_i^n\left(\tau_1(t), \cdots, \tau_n(t)\right)\right)=\varphi(\tau(t))
\end{aligned}$$

取 $\tau(x)=u(x)$，原命题即得证。

P87 T1

3° $\neg R_1^2\left(f_2^2\left(x_1, x_2\right), f_2^2\left(x_2, x_3\right)\right)$

令 $q=R_1^2\left(f_2^2\left(x_1, x_2\right), f_2^2\left(x_2, x_3\right)\right)$，$q$ 的语义解释为 $x_1 \times x_2=x_2 \times x_3$，要找 $|p|(\varphi)=1,|p|(\psi)=0$ 只需找 $|q|(\varphi)=0,|q|(\psi)=1$，因此可取

$$\begin{aligned}
& \varphi: \varphi\left(x_1\right)=1, \varphi\left(x_2\right)=2, \varphi\left(x_3\right)=3 \\
& \psi: \psi\left(x_1\right)=1, \psi\left(x_2\right)=1, \psi\left(x_3\right)=1
\end{aligned}$$

4° $\forall x_1 R_1^2\left(f_2^2\left(x_1, x_2\right), x_3\right)$

令 $q=R_1^2\left(f_2^2\left(x_1, x_2\right), x_3\right)$，$q$ 的语义解释为 $x_1 \times x_2=x_3$，若要对 φ 任意的 x 变通都有 $|q|(\varphi')=1$，可以取

$$\varphi: \varphi\left(x_2\right)=\varphi\left(x_3\right)=0 \tag{2}$$

反之，可以取

$$\psi: \psi\left(x_2\right)=1, \psi\left(x_3\right)=4 \tag{3}$$

涉及 x_1 的指派是无关紧要的。

5° $\forall x_1 R_1^2\left(f_2^2\left(x_1, c_1\right), x_1\right) \rightarrow R_1^2\left(x_1, x_2\right)$

令 $q=\forall x_1 R_1^2\left(f_2^2\left(x_1, c_1\right), x_1\right), q_0=R_1^2\left(f_2^2\left(x_1, c_1\right), x_1\right), r=R_1^2(x_1, x_2)$，欲使 $|p|(\varphi)=1$ 只需 $|q|(\varphi) \rightarrow |r|(\varphi)=1$。

q_0 的语义解释为 $0=x_1$，显然不能对任何的 φ 的 x_1 变通都有 $|q_0|(\varphi')=1$ 成立，所以对于任何 φ，$|q|(\varphi)=0$，因此可以取

$$\varphi: \varphi(x_2)=1 \tag{4}$$

涉及 x_1 的指派是无关紧要的，并且没有符合条件的 ψ。

P87 T2

3°

设原公式为 $p=\neg q$，则 q 的语义解释为 $x_1<(x_1-(x_1-x_2)) \equiv x_1<x_2$，要找 $|p|(\varphi)=1, |p|(\psi)=0$ 只需找 $|q|(\varphi)=0, |q|(\psi)=1$，因此可取

$$\begin{gathered}
\varphi: \varphi\left(x_1\right)=2, \varphi\left(x_2\right)=1 \\
\psi: \psi\left(x_1\right)=1, \psi\left(x_2\right)=2
\end{gathered}$$

4°

设原公式为 $p=\forall x_1 q$，则 q 的语义解释为 $x_1-x_2<x_3$，显然不能对任何的 φ 的 x_1 变通都有 $|q|(\varphi')=1$ 成立，所以对于任何 φ，$|p|(\varphi)=0$，因此可以取

$$\psi: \psi(x_2)=1, \psi(x_3)=2 \tag{5}$$

涉及 x_1 的指派是无关紧要的，并且没有符合条件的 φ。

5°

设原公式为 $p = q \to r = \forall x_1 q_0 \to r$，欲使 $|p|(\varphi) = 1$ 只需 $|q|(\varphi) \to |r|(\varphi) = 1$。

q_0 的语义解释为 $x_1 < x_1$，显然不能对任何的 φ 的 x_1 变通都有 $|q_0|(\varphi') = 1$ 成立，所以对于任何 φ，$|q|(\varphi) = 0$，因此可以取

$$\varphi : \varphi(x_2) = 1 \tag{6}$$

涉及 x_1 的指派是无关紧要的，并且没有符合条件的 ψ。

P91 T2

3°

设原公式为 $p = \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 q$，$q$ 的语义解释为 $(x_1 < x_2) \to (x_1 - x_3 < x_2 - x_3)$。

对于任意的 ϕ 的 x_3 变通，都有 $|q|(\phi) = 1$，令 $r = \forall x_3 q$；

对于任意的 ϕ 的 x_2 变通，都有 $|r|(\phi) = 1$，令 $s = \forall x_2 r$；

对于任意的 ϕ 的 x_1 变通，都有 $|s|(\phi) = 1$，所以 $|p|_{\mathbb{Z}} = 1$。

4°

设原公式为 $p = \forall x_1 \exists x_2 q$，$q$ 的语义解释为 $0 < 2x_2$。

存在 ϕ 的 x_3 变通 ϕ'，使得 $|q|(\phi') = 1$，令 $r = \exists x_2 q$，则 $|r|(\phi) = 1$；

对于任意的 ϕ 的 x_1 变通，都有 $|r|(\phi) = 1$，所以 $|p|_{\mathbb{Z}} = 1$。