1、 **直角坐标系中消去方位角**：$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

2、 **自然坐标系、直角坐标系中 $x$、$s$、$v$、$a$ 相互计算公式** 自然坐标系下$\boldsymbol{v}(t)=v(t)\boldsymbol{e}_t$ 加速度$\boldsymbol{a}(t)=\frac{dv(t)}{dt}\boldsymbol{v}(t)+\frac{v^2(t)}{R(t)}\boldsymbol{n}(t)$ $\quad a_t=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}\quad a_n=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\qquad \boldsymbol{R}(t)=\frac{v^3(t)}{|a(t)\times v(t)|}$

3、 **【方法】**微分研究局部性质，再积分研究整体性质

4、 **角速度**$\omega=\frac{d\theta}{dt}$，$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\qquad \boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$

5、 **平面极坐标系** $\boldsymbol{v}(t)=\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=\dot{r}\boldsymbol{r}+r\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}\qquad \boldsymbol{a}(t)=\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{r}+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\boldsymbol{\theta}$

6、 **牛顿运动定律**$\boldsymbol{F}=\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}=m\boldsymbol{a}\quad \boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}\begin{cases}F_x=m\ddot{x}\quad F_y=m\ddot{y}\quad F_z=m\ddot{z}\\ F_t=m\frac{dv}{dt}\quad F_n=m\frac{v^2}{R}\\ F_r=m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\quad F_\theta=m(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\end{cases}$

7、 **【方法】**约束问题还要列出约束方程，如滑轮绳长不变。

8、 **【方法】**绳子有质量、有摩擦力时，绳子的拉力并不处处相等。

9、 **非惯性系** 分析非惯性系中的运动时，只要加上惯性力分析就可以了

① $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{f}_i=m\boldsymbol{a}'$($\boldsymbol{a}$是地面系下看到的加速度，$\boldsymbol{a}'$是非惯性系下看到的加速度)

② 真实力与惯性力的合力称为表现力，记为$\boldsymbol{F}_{\text{eff}}$

③ $\boldsymbol{f}_c=-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')$ 惯性离心力，指向离开转轴的方向。

④ $\boldsymbol{f}_{\text{cor}}=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'_{\text{相}}\quad \boldsymbol{a}_{\text{cor}}=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'_{\text{相}}$ 科里奥利力,相对于$K'$系做匀速运动的点。

10、 **动量守恒** $\boldsymbol{P}=\Sigma\boldsymbol{P}_i=\text{const}$ 分量式$\begin{cases}\text{if }F_x=0,\text{ then }P_x=\text{const}\\ \text{if }F_y=0,\text{ then }P_y=\text{const}\\ \text{if }F_z=0,\text{ then }P_z=\text{const}\end{cases}$

[动量定理] (微分)$\boldsymbol{F}dt=d\boldsymbol{p}$ 元冲量 $d\boldsymbol{J}=\boldsymbol{F}dt$ (积分形式) $\boldsymbol{J}=\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{F}dt=\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_0$

[质点组动量定理] (微分形式) $\boldsymbol{F}_{\text{ex}}=\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}$ (积分形式)$\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{F}_{\text{ex}}dt=\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0$ ($\boldsymbol{F}_{\text{ex}}$为体系受外力矢量和)

• 在非惯性系中用动量定理要考虑惯性力的冲量

11、 **质心运动定理**（适用范围和牛顿第二定律相同）

$\boldsymbol{F}_{\text{ex}}=m_C\boldsymbol{a}_C$ 质心$\begin{cases}m_C=\sum_i m_i\\ \boldsymbol{r}_C=\frac{\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i}\end{cases}\qquad\begin{cases}m_C=\int dm=\int\rho dV\\ \boldsymbol{r}_C=\frac{\int \boldsymbol{r}dm}{\int dm}=\frac{\int \boldsymbol{r}\rho dV}{\int\rho dV}\end{cases}$

12、 **质心坐标系**（原点取在质心上，没有转动的平动坐标系）

变质量问题：$(m+\Delta m)(\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v})-(m\boldsymbol{v}+\Delta m\boldsymbol{u})=\boldsymbol{F}\Delta t$，$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\frac{dm}{dt}+\boldsymbol{F}$

13、 **动能定理**（惯性系下，非惯性系考虑惯性力）

质点系动能定理 $E_k(t)-E_k(t_0)=A_{\text{外}}+A_{\text{内}}$ 内力总动量为 0，但总功一般不为零

14、 **势能** 保守力：$\begin{cases}\textbf{1 一维运动，位置}x\textbf{的单值函数}f(x)=-k(x-x_0)\\ \textbf{2 大小和方向都与位置无关的力，如重力；3 有心力}\end{cases}$

保守力场定义标量函数 $V(\boldsymbol{r})$，称为势能（位能），使得从 $\boldsymbol{r}_A\to\boldsymbol{r}_B$ 保守力做功为 $A(\boldsymbol{r}_A\to\boldsymbol{r}_B)=V(\boldsymbol{r}_A)-V(\boldsymbol{r}_B)$。保守力做功使其势能减少。$\boldsymbol{F}=-\nabla V(\boldsymbol{r})$

15、 **机械能守恒定律** 在非惯性系用动能原理要引入惯性力.

$E(t)-E(t_0)=A_{ex}+A_{nbin}$ 外力的功和非保守内力的功之和等于 $\Delta E$

16、 **质心系**（质点系的动量等于质心的动量，但质点系的动能一般不等于质心的动能）

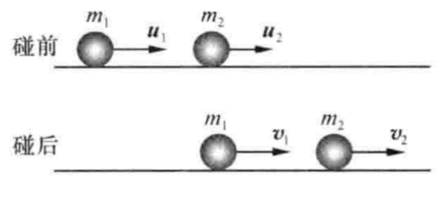
① 总动能等于内外动能之和 $E_k=\frac{1}{2}m_Cv_C^2+E_{kC}$

② 只要我们选择质心系，即使它不是惯性系，也不需要考虑惯性力所做的功。

③ **两体问题**$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$约化质量，$u=v_1-v_2$相对速度，在两体问题中我们只要利用约化质量，就可以把参考系取在任一物体上，无需引入惯性力，像是惯性系一样考虑问题。质心系中的机械能 $E_C=\frac{1}{2}\mu u^2+V(r)$（系统势能）

17、 **碰撞**

① 正碰$\begin{cases}v_1=\frac{m_1-em_2}{m_1+m_2}u_1+\frac{(1+e)m_2}{m_1+m_2}u_2\\ v_2=\frac{(1+e)m_1}{m_1+m_2}u_1+\frac{m_2-em_1}{m_1+m_2}u_2\end{cases}$




碰撞过程中动量守恒，质心动能不变，只需计算在质心系中动能的改变

$E_{kC}=\frac{1}{2}\mu u^2\qquad E'_{kC}=\frac{1}{2}\mu e^2u^2\qquad \Delta E_k=E'_{kC}-E_{kC}=\frac{1}{2}\mu(e^2-1)u^2$

② 斜碰【正交分解】 • $b$ 称为碰撞参量，碰撞结果与它有关；

③ 质心系中的碰撞 1）正碰 $v_{C1}=-eu_{C1}\quad v_{C2}=-eu_{C2}\quad v_C=\frac{m_1u_1+m_2u_2}{m_1+m_2}=const$

2）在质心系中两球完全弹性碰撞后速度都只改变方向，不变大小。

18、 **角动量守恒** 掠面速度$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}/2$ 角动量$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}\quad \boldsymbol{L}=\Sigma_i\boldsymbol{l}$

① 力 $\boldsymbol{F}$ 对原点的力矩$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$，则$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt}=\boldsymbol{M}$，积分$\int_0^t\boldsymbol{M}dt=\boldsymbol{l}-\boldsymbol{l}_0$（冲量矩）

② 当外力对给定点的**总外力矩**之和为 **0** 时，体系的角动量守恒。

③ 质心系下角动量定理 $\boldsymbol{M}_C=\frac{d\boldsymbol{L}_C}{dt}$ $\quad L_C$是质心系中体系对质心的角动量。无论质心系是惯性系还是非惯性系，都适用。体系在质心系中相对质心的角动量与体系在惯性系中相对原点的角动量并不相同。有 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_C+\boldsymbol{L}_{CM}$，即惯性系中体系相对于原点的角动量等于质心的角动量与体系相对于质心的角动量之和。

19、 **万有引力** 开普勒三定律：轨道定律，面积定律，周期定律。

① 一个密度均匀的球壳对球壳外一质点的引力等效于它的所有质量都集中于它的中心时的引力。一个密度均匀的球壳对球壳内任意质点的引力为 0.

② 质点在有心力场($\boldsymbol{F}=f(r)\boldsymbol{r}$)中的运动

（1）基本方程：$m\ddot{\boldsymbol{r}}=f(r)\boldsymbol{r}$（2）角动量：$\boldsymbol{l}=mr^2\dot{\theta}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\theta})$（3）势能 $\int_{r_0}^{r}f(r)dr=-[U(r)-U(r_0)]$（4）机械能 $E$：$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2+U(r)$（$\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$是等效的斥力势能）（5）有效势能 $U_{\text{eff}}(r)=\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2+U(r)$，$\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}\frac{mh^2}{r^2}$，$h$ 是掠面速度两倍。（6）求拱点处的 $r$ 值：$\dot{r}=0$，于是有$r^2+G\frac{Mm}{E}r-\frac{mh^2}{2E}=0$.（7）求轨道：$\frac{mh^2}{2r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{mh^2}{2r^2}+U(r)=E$得$\frac{hdr}{r^2\sqrt{\frac{2[E-U(r)]}{m}-\frac{h^2}{r^2}}}=d\theta$（8）轨道的微分公式：$\frac{h^2}{r^2}\left(\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}+\frac{1}{r}\right)=-\frac{f}{m}$。知 $f(r)$求轨道。（9）万有引力轨道公式：$r=\frac{r_0}{1+\varepsilon\cos\theta}$，$r_0$是初条件确定的曲率半径。

20、 **刚体力学** **运动方程：平动$\boldsymbol{F}_{\text{ex}}=m\boldsymbol{a}_C$ 定轴转动$\boldsymbol{M}_{\text{ex},C}=\boldsymbol{J}_C\boldsymbol{\beta}_C$**

① 角动量$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}=m\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ 转动定律 $\boldsymbol{M}=J\boldsymbol{\beta}$

| 匀质厚圆筒<br>转轴沿几何轴 | 匀质细直棒<br>转轴通过端点与棒垂直 | 匀质矩形薄板<br>转轴通过中心垂直板面 | 匀质薄球壳<br>转轴通过球心 | 匀质实心球<br>转轴通过球心 |
|---|---|---|---|---|
| $J=\frac{1}{2}m(R_1^2+R_2^2)$ | $J=\frac{1}{3}mL^2$ | $J=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$ | $J=\frac{2}{3}mR^2$ | $J=\frac{2}{5}mr^2$ |

② $J=J_C+md^2$。 $x,y$ 轴在平面内，$z$ 轴与平面垂直，则有 $J_z=J_x+J_y$。

③ 刚体平衡条件：$\sum_i\boldsymbol{F}_i=0$，$\sum_i\boldsymbol{M}_i=0$。

④ 纯滚动判据：$v_C=R\omega$，$a_C=R\beta$。$a_C$应理解为切向加速度。

⑤ 瞬心 $O'$在与 $v_C$垂直的方向上距离 $C$ 点$\frac{v_C}{\omega}$处。

⑥ $E_k=\frac{1}{2}m_Cv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2\quad E_k(t)-E_k(t_0)=A_{ex}=\int_{r_0}^{r}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}+\int_{\varphi_0}^{\varphi}M_Cd\varphi$（质心!）

21、 **振动与波** **受力 $\boldsymbol{F}=-k(x-x_0)$| 势能 $V(x)=\frac{1}{2}kx^2$| 运动范围** $\left(-\sqrt{\frac{2E}{k}},\sqrt{\frac{2E}{k}}\right)$

① 简谐振动 方程$m\ddot{x}=-kx$，解为$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$ $\quad A$ 振幅，$A^2\propto E$；固有频率$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$；频率$\nu=\frac{1}{T}$；相位$\varphi=\omega t+\varphi_0$。能量：$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$ $\quad v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$，$E_k=\frac{1}{2}mv^2$，$V=\frac{1}{2}kx^2$，$E=E_k+V=\frac{1}{2}kA^2$

② 方向相同频率不同振动的合成

$\begin{cases}x_1=A_1\cos(\omega_1t+\varphi_1)\\ x_2=A_2\cos(\omega_2t+\varphi_2)\end{cases}\Rightarrow x=2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\right)$

③ 阻尼振动（粘滞阻力$\boldsymbol{f}=-h\boldsymbol{v}$） 受迫振动令$x=X+\frac{F_0}{k}$

1）方程$m\ddot{x}=-kx-h\dot{x}$，令$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$，$2\beta=\frac{h}{m}$，则$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=0$。

2）欠阻尼$x=A_0e^{-\beta t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t+\varphi_0\right)$，对应$\beta<\omega_0$。品质因数$Q\approx\frac{\omega_0}{2\beta}$。

3）临界阻尼与过阻尼，通解变为$x=(A_1+A_2t)e^{-\beta t}$，没有振动。

④ 波方程 $y=A\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi_0)$，波长 $\lambda=vT$，$v$ 为波速，$\frac{2\pi}{\lambda}$ 为波数。这是右行波；左行波 $y=A\cos(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi_0)$；动力学方程 $\frac{\partial^2y}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2y}{\partial x^2}$.

⑤ 驻波： $\xi_1=A\cos(\omega t-kx+\varphi_1),\xi_2=A\cos(\omega t+kx+\varphi_2)$ 合成后 $\xi=\xi_1+\xi_2=2A\cos(kx+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2})\cos(\omega t+\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2})$，$x=\frac{n\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2\pi}\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}$为波腹，振幅最大； $x=\frac{(2n+1)\lambda}{4}-\frac{\lambda}{2\pi}\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}$为波节，振幅为 0.

⑥ 多普勒效应$\frac{v'}{v}=\frac{V+v_D}{V-v_S}$，$v'$观察者接收到频率，$v$ 波源频率，$V$ 是真空波速，$v_D$ 观者速度（垂直球面波，>0 近波源），$v_S$ 波源速度（>0 表示近观者）。

⑦ 马赫锥，$\sin\alpha=\frac{V}{v_S}$，$\alpha$ 是半顶角，$V$ 是波速，$v_S$ 是波源移动速度。

22、 **相对论** **洛伦兹变换**$\begin{cases}x'=\gamma(x-vt)\\ y'=y,z'=z\\ t'=\gamma(t-\frac{v}{c^2}x)\end{cases}$，(设$t=t'=0$时 $\boldsymbol{O}$ **和** $\boldsymbol{O}'$**重合，事件** $\boldsymbol{P}$ **在** $\boldsymbol{S}$ **系下的坐标是**$(x,y,z,t)$，**在** $\boldsymbol{S}'$**系下的坐标是**$(x',y',z',t')$，**其中**$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

① 只有在 $S'$系同时同地发生的两件事，在 $S$ 系下观察才是同时的。

② 长度收缩：$l=l_0\sqrt{1-\beta^2}$，$\beta=\frac{v}{c}$.

③ 时间变慢：$\Delta t=\frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$.（运动的钟走得慢）