事件的概率

排列组合的几个经典公式

(1) n个相异物件取r个进行排列，有$A_n^r=n(n-1)\dots(n-r+1)$种；

(2) n个相异物件取r个进行组合，有$C_n^r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$种；

(3) n个相异物件分成k堆，各堆物件数分别为$r_1,\dots,r_k$的分法有$\frac{n!}{r_1!\dots r_k!}$种；

Tips : 考虑直线排列和圆圈排列的差异。

事件之间的包含关系

在同一试验下的两个事件 A 和 B。

(1) 如果当 A 发生时 B 必发生，则称 A 蕴含 B, 或者说 B 包含 A，记为 $A\subset B$.

(2) 若 A,B 互相蕴含，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A,B 两事件相等，记为 $A=B$.

Tips : 证明两个事件相等，一般是证明$A\subset B$ 且 $B\subset A$。

事件之间的互斥关系

(1) 若两事件 A,B 不能在同一次试验中都发生(但可以都不发生)，则称它们是互斥的.

(2) 互斥事件的一个重要情况是"对立事件"，若A 为一事件，则事件$B=\{A\text{ is not occurred.}\}$称为 A 的对立事件，记为 $\bar{A}$ (也记为 A^c).

事件的运算

(1) 【加法】设有两个事件 A,B, 定义事件 $C=\{A\text{ 发生, 或 }B\text{ 发生 }\}=\{A,B\text{ 至少发生一个 }\}$. 这样定义的事件 C 称为事件 A 与事件 B 的和, 记为$C=A+B$.（也可以用$\cup$，但是本文不用）

(2) 【乘法】设有两个事件 A,B, 定义事件 $C=\{A\text{ 发生, 且 }B\text{ 发生 }\}=\{A,B\text{ 都发生 }\}$. 这样定义的事件 C 称为事件 A 与事件 B 的积, 记为$C=AB$.（也可以用$\cap$，但是本文不用）

(3) 【减法】一般地，有$A-B=A\bar{B}$。即从A的事件结果中去掉和B重合的那些。

Tips : 减法没事不要乱用，比如有$(A-B)+B=A+B$而非A。

条件概率

设有两个事件 A,B, 而 $P(B)\neq 0$. 则"在给定 B 发生的条件下 A 的条件概率"记为 $P(A\mid B)$, 定义为 $P(A\mid B)=P(AB)/P(B)$。

Tips : 这个公式是条件概率的一般定义，但在计算条件概率时并不一定要用它。有时直接从加人条件后改变了的情况去算更为方便。

事件的独立及其刻画

(1) 若 $P(A\mid B)>P(A)$, 则 B 的发生使 A 发生的可能性增大了, 即 B 促进了 A 的发生。反之，若 $P(A)=P(A\mid B)$, 则 B 的发生与否对 A 发生的可能性毫无影响。这时在概率论上就称 A,B 两事件独立，因此$P(AB)=P(A)P(B)$，若满足这个条件，则称 A,B 独立。

(2) 独立事件的任一部分也独立。更进一步可推广为：由独立事件决定的事件也独立。举例来说，若事件 $A_1,\cdots,A_6$ 相互独立，则$B_1=A_1+A_2,\quad B_2=A_3-A_4,\quad B_3=A_5A_6$都独立，注意这里不能有重复的$A_i$在不同的$B_j$中。

(3) 若一列事件 $A_1,A_2,\cdots$ 相互独立，则将其中任一部分改为对立事件时，所得事件列仍为相互独立。例如若 A_1,A_2,A_3 相互独立，则 $\bar{A}_1,A_2,A_3$, 或 $\bar{A}_1,A_2,\bar{A}_3$, 或 $\bar{A}_1,\bar{A}_2,\bar{A}_3$ 等都是互相独立的。

(4) 相互独立必然推出两两独立，反过来不一定对。

概率的运算

(1) 【加法定理】若干个**互斥事件**之和的概率等于各事件的概率之和，即 $P\left(A_1+A_2+\cdots\right)=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+\cdots$

(2) 【乘法定理】若干个**独立事件** $A_1,\cdots,A_n$ 之积的概率等于各事件概率的乘积，即$P\left(A_1\cdots A_n\right)=P\left(A_1\right)\cdots P\left(A_n\right)$ 。

全概率公式（由因推果）

(1) 【完备事件列】事件列$A_1,A_2,\dots,A_n,\dots$，满足$A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$，且$\sum A_i=\Omega$。

(2) 假设$\{B_i\}$是完备事件列，则$P(A)=P\left(B_1\right)P\left(A\mid B_1\right)+P\left(B_2\right)P\left(A\mid B_2\right)+\cdots$。

Bayes公式（由果推因）

$$\mathrm{P}(A \mid B)=\frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \mid A)}{\mathrm{P}(B)}$$

对于$\mathrm{P}(B)$再利用全概率公式得到

$$\mathrm{P}(A \mid B)=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \mid A)}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \mid A)+\mathrm{P}(\bar{A})\mathrm{P}(B \mid \bar{A})}$$

其他课件上的知识点

(1) 【加法公式1】$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

(2) 【加法公式2】$\mathrm{P}\left(\bigcup_{j=1}^{3} A_j\right)=\sum_{j=1}^{3} \mathrm{P}\left(A_j\right)-\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant 3} \mathrm{P}\left(A_i A_j\right)+\mathrm{P}\left(\bigcap_{j=1}^{3} A_j\right)$

(3) 【乘法公式】$\mathrm{P}\left(A_1 A_2 \cdots A_n\right)=\mathrm{P}\left(A_1\right) \mathrm{P}\left(A_2 \mid A_1\right) \cdots \mathrm{P}\left(A_n \mid A_1 A_2 \cdots A_{n-1}\right)$