具有有理譜密度的平穩隨機過程的外推、內插及過濾

A. M. 雅格龍 (Яглом)

原載 Труды московского математического общества **4** (1955), 333—374 頁

引　言

平穩隨機過程 $\xi(s)$ 的線性外推問題，在於從 $\xi(s)$ 在 $s \leqslant t$ 上的值(依過程的所有的過去的外推)，或從 $\xi(s)$ 在 $t-T \leqslant s \leqslant t$ 上的值(在有窮間隔上已知過程時的外推)，求得一個線性汎函 $\tilde{\xi}(t+\tau)$，以使此線性汎函是 $\xi(t+\tau)$, $\tau>0$, 的值的最佳逼近(在最小二乘方的意義下). 線性過濾問題，在於從 $\xi(s)$ 的同樣的值，求得一個汎函 $\tilde{\zeta}(t+\tau)$，以使它是 $\zeta(t+\tau)$ 的最佳逼近，此處 $\zeta(s)$ 是一個與 $\xi(s)$ 平穩相依的平穩隨機過程. 最後，線性內插問題，在於從過程 $\xi(s)$ 在兩個半線 $s \leqslant t$ 及 $s \geqslant t+T$ 上的值，求得一個線性汎函以逼近 $\xi(t+s)$, $0<s<T$.

概率論中這類問題的研究是由 A. H. 廓洛莫格若夫[1]—[3]所開端，他考慮了平穩隨機敍列(即自變數 s 只跑過整數的情形)依所有的過去的外推問題及簡單內插問題(即間隔 $0<s<T$ 只由一個點所組成的情形). 在工作 [1]—[3] 中，在敍列 $\xi(s)$ 本身上不加任何條件的情況下闡明了：這裏所尋求的汎函 $\tilde{\xi}(t+\tau)$ 的顯明公式的問題，一般說來，是沒有唯一的解的(即或是最簡單的解). 因此在所提到的工作裏，主要的注意力乃是集中於尋求最佳逼近的均方差

$$\sigma_\tau^2 = \mathbf{M}\,|\xi(t+\tau)-\tilde{\xi}(t+\tau)|^2,$$

而且能够找到這一均方差的很有意思的普遍公式. 繼 A. H. 廓洛莫格若夫而作進一步的研究的有 M. Г. 克萊因[4] (任意平穩隨機過程依所有過去的外推問題)1)、本文作者[6] (平穩隨機敍列內插的普遍問題)及卡入尼[7] (平穩過程內插的例). 在所有這些人的工作裏，與在 [1]—[3] 中一樣，沒有考慮汎函 $\tilde{\xi}(t+\tau)$ 的顯明公式，而只找到 $\sigma^2(\tau)$ 的公式及 $\sigma^2(\tau)\equiv 0$ 的條件. 與此相反，在溫納的關於在半線 $[s \leqslant t]$ 上平穩隨機

1) 除了有關概率論的文章外，克萊因還考慮了函數論的一些問題，而這些函數論的問題是與在有窮間隔上爲已知時普遍平穩隨機過程的外推及過濾問題緊密地聯系着(參看[5]及在那裏所指出來他的更早期工作).

過程為已知時的外推及過濾問題的書 [8] 中，其注意力集中於尋求汎函 $\tilde{\xi}(t+\tau)$ 及 $\tilde{\zeta}(t+\tau)$ 的顯明公式，但所考慮的過程 $\xi(s)$ 的類却受到了本質的限制（實際上只考慮了具有處處為正的有理譜密度的平穩過程）。札節及拉哥齊尼[9] 進一步發展了書[8]中的觀念，在[9]中對於具有有理譜密度[1]的平穩過程，在有窮間隔上為已知時的外推及過濾問題的情形，特別地給出來確定 $\tilde{\xi}(t+\tau)$ 及 $\tilde{\zeta}(t+\tau)$ 的公式.

在 [8] 及 [9] 中關於外推及過濾問題的說明是針對着工程界讀者的，並不要求遵守數學的嚴格性；特別在工作 [9] 中，這一點更是突出，在 [9] 中包含一些論點，其確切的數學意義是完全不清楚的. 在上述的兩種情形中，尋求 $\tilde{\xi}(t+\tau)$ 及 $\tilde{\zeta}(t+\tau)$ 時，其基本點乃是解某些特殊形狀的積分方程，而在求這些積分方程的解時，需要進行一系列相當複雜的變換. 不久以前出現了一篇文章 [11]，這篇文章是以相應的積分方程的嚴密理論為基礎，對於與 [9] 中相關聯的一些問題，作了精密的數學說明；但由於力求保持數學的嚴密性，而就使得證明更加複雜與加長，而且這一方法已顯示出來只能應用於譜密度為多項式除 1 形狀的平穩過程上(及具有同樣譜型的某些非平穩過程上).

在有窮間隔上為已知時的平穩過程的線性外推問題，與由此過程在 $t-T \leqslant s \leqslant t$ 上的觀察值求此過程的均值的最佳線性估計問題相近. 後一問題由工作 [12] 所考慮，在此工作中，對於譜密度為多項式除 1 形狀的平穩過程，得到了所提出的估計的形狀. 在工作 [12] 中實際上沒有指出解決問題的方法，而馬上就提出答案（參看後面的公式 (4.33))，然後加以覆驗. 正如從後來的一篇文章[13]中可以看出，尋求這一答案時，機智地利用了所考慮的隨機過程類的線性外推問題的解具有特別簡單的形狀這一事實. 對於平穩過程的簡單情形——即其譜密度 $f(\lambda)=B(\lambda^2+\alpha^2)^{-1}$ 的情形——工作[14]中也給出了均值估計的解，其所用方法是與 [8]，[9] 中解決相似問題的方法相近.

當這篇文章寫成之後，又出現了 M. Г. 克萊因的一篇短文 [15]，在這篇短文中指出來能够把在有窮間隔上為已知時的平穩隨機過程的外推及過濾問題，化為尋求非均勻弦的振動的微分方程及依相應譜函數而尋求其固有函數的問題. 在工作 [16]，[17] 中又宣佈了：進一步利用微分方程理論中反問題的能行解（эффективные решения）（即由其譜建立方程的問題）可以由此得到，特別是當過程 $\xi(s)$ 具有有理譜密度時，$\tilde{\xi}(t+\tau)$ 及 $\tilde{\zeta}(t+\tau)$ 的顯明公式(同樣對於很多別的更特別的情形的外推及過濾問題的解也可以求出). 利用 M. Г. 克萊因的方法來解決外推及過濾問題，在數學上是毫無疵病的，而且是很有意思的，因為這種方法建立了數學不同分支間的新的意外的聯系，但是在求解中所要用到的特殊數學工具是很複雜的，同時要求必先知道很多的準備

1) 在 B. B. 索羅得夫尼可夫的書 [10] 中用俄文詳述書 [8] 及文章 [9] 的結果.

知識，所以要想完全地敍述這樣的解法，顯然，需要很大的篇幅.

在 1952 年本文著者所發表的綜述文章 [18] 中，指出來：書 [8] 中的一切結果都可以用初等方法嚴格而完全地導出，如果一開始就把過程 $\xi(t)$ 的譜密度及在解中出現的別的同一自變數的函數看作是某些複變分析函數在實軸上所取的值，及進一步應用這樣函數的普遍性質（哥西定理所產生出的那一類性質）；在這樣的敍述裏，在理論中就不出現任何積分及微分方程[1]. 在本文裏將要說明利用 [18] 中的簡單方法可以成功地解決有關具有有理譜密度的平穩隨機過程的線性逼近理論中的一系列的問題；關於利用這一方法於某些更普遍的（非平穩）隨機過程上將要在下一篇文章中敍述（參看 [24]）. 我們所得到的下面所考慮的問題中的某些問題的解與其他著作的結果是一致的，但他們導出此結果時是利用了很複雜同時常常是不十分嚴格的推理；至於我們所得到的其他問題的解，就著者所知，是獨特的.

本文的結果曾由著作在基輔城所舉行的關於概率論及數理統計第三屆全國會議上宣讀過（參看 [20]）.

§1. 具有有理譜密度的平穩過程的線性外推

令 $\xi(s)$，$-\infty<s<\infty$ 爲一個廣義平穩（在 A. Я. 欣欽的意義下；參看[21]，[18]）複值隨機過程，其均值爲零 $\mathbf{M}\xi(s)=0$，其相關函數爲 $B_{\xi\xi}(\tau)=\mathbf{M}\xi(s+\tau)\overline{\xi(s)}$. 依照 [18]，[20]，由此過程在有窮時間間隔 $t-T\leqslant s\leqslant t$ 上之値而求此過程在過了時間 τ 時的線性外推的普遍問題是與下列問題等價的：在具有有窮離差的隨機變量的希爾伯特空間 H 中（內積 $(x, y)=\mathbf{M}x\bar{y}$），需要尋求向量 $\xi(t+\tau)$ 在子空間 $H_{\xi;t,T}$ 上的射影 $\tilde{\xi}(t+\tau)$，此處子空間 $H_{\xi;t,T}$ 由向量 $\xi(s)$，$t-T\leqslant s\leqslant t$ 所張成.

利用 A. Я. 欣欽公式[21]

$$B_{\xi\xi}(t-s)=\mathbf{M}\xi(t)\overline{\xi(s)}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(t-s)\lambda}dF(\lambda), \tag{1.1}$$

由元素 $\xi(s)$，$-\infty<s<\infty$ 的線性簇的閉包所構成的 H 中的子空間 H_ξ（顯然，在我們的問題裏完全可以只考慮這個子空間以代替整個空間 H）可以同尺地 (isometrically) 映像到依測度 $dF(\lambda)$ 爲絕對值平方可積函數 $\Phi(\lambda)$ 的希爾伯特空間 L_F 上$\left(\text{內積即通常的 } (\Phi, \Psi)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\lambda)\overline{\Psi(\lambda)}dF(\lambda)\right)$. 這時變量 $\xi(s)$ 映成函數 $e^{is\lambda}$（參看[2]，引

---

1) 就著者所知當[18]發表之後，與[18]中的相似的方法被 Л. А. 瓦音斯節因所發揮而解決關於音及電磁波折射中的很廣的問題上，這種問題顯現在數學上很接近於平穩隨機過程的外推及過濾問題. 關於這點參看小册子[19].

理 4). 令函數集合 $e^{is\lambda}$, $t-T\leqslant s\leqslant t$ 在空間 L_F 中所張成的子空間爲 $L_{F;t,T}$. 在這種情形下,問題就成爲在 $L_{F;t,T}$ 中尋求一個函數 $\Phi_{\tau;t,T}(\lambda)$,而此函數是空間 L_F 中元素 $e^{i(t+\tau)\lambda}$ 在子空間 $L_{F;t,T}$ 上的射影. 我們所感興趣的變量 $\tilde{\xi}(t+\tau)$ 乃是在從 H_ξ 到 L_F 的映像下 $\Phi_{\tau;t,T}(\lambda)$ 的像源(參看後面的公式(1.6)).

由過程 $\xi(s)$ 的平穩性立刻推出函數 $\Phi_{\tau;t,T}(\lambda)$ 可以表爲

$$\Phi_{\tau;t,T}(\lambda)=e^{it\lambda}\Phi_{\tau,T}(\lambda), \tag{1.2}$$

此處 $\Phi_{\tau,T}(\lambda)=\Phi_{\tau;o,T}(\lambda)$ 乃是函數 $e^{i\tau\lambda}$ 在子空間 $L_{F,T}=L_{F;o,T}$ 上的射影,而後一子空間是函數 $e^{-is\lambda}$, $0\leqslant s\leqslant T$ 的線性簇的閉包. 所以,可以在一開始的時候,就認爲 $t=0$, 而只限定尋求函數 $\Phi_{\tau,T}(\lambda)$, 此函數只與 τ 及 T 有關. 今後把這個函數叫作外推的譜特徵(參看 [18]).

讓我們註明:若用此隨機過程 $\xi(s)$ 的譜展式:

$$\xi(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{is\lambda}dZ(\lambda), \tag{1.3}$$

此處 $Z(\lambda)$ 是一個具有非相關增量的隨機函數,而且

$$\mathbf{M}[Z(\lambda+\Delta\lambda)-Z(\lambda)]^2=F(\lambda+\Delta\lambda)-F(\lambda) \tag{1.4}$$

(參看例如[18]); 則映像 $H_\xi\to L_F$ 可以用下列公式寫出:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\lambda)dZ(\lambda)\to\Phi(\lambda). \tag{1.5}$$

特別言之, $\tilde{\xi}(t+\tau)$, 作爲 $\Phi_{\tau;t,T}(\lambda)$ 的像源,可以以下列方式由譜特徵 $\Phi_{\tau,T}(\lambda)$ 表達之:

$$\tilde{\xi}(t+\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{\tau;t,T}(\lambda)\,dZ(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}\Phi_{\tau,T}(\lambda)\,dZ(\lambda). \tag{1.6}$$

由此得到外推的均方差 $\sigma^2_{\tau,T}$ 的公式

$$\sigma^2_{\tau,T}=\mathbf{M}|\xi(t+\tau)-\tilde{\xi}(t+\tau)|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|e^{i\tau\lambda}-\Phi_{\tau,T}(\lambda)|^2dF(\lambda), \tag{1.7}$$

由於差數 $\xi(t+\tau)-\tilde{\xi}(t+\tau)$ 與 $\tilde{\xi}(t+\tau)$ 在空間 H_ξ 中是正交的 (亦即差數 $e^{i\tau\lambda}-\Phi_{\tau,T}(\lambda)$ 與 $\Phi_{\tau,T}(\lambda)$ 在空間 L_F 中是正交的),上一公式又可表爲下列兩個形狀:

$$\sigma^2_{\tau,T}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\tau\lambda}[e^{i\tau\lambda}-\Phi_{\tau,T}(\lambda)]\,dF(\lambda)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dF(\lambda)-\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_{\lambda,T}(\lambda)|^2dF(\lambda). \tag{1.7'}$$

函數 $\Phi_{\tau,T}(\lambda)$, 顯然由下列兩個條件唯一決定(作爲 L_F 中的函數而決定,亦即,不顧及一個按照測度 $dF(\lambda)$ 而言幾乎處處等於零的項;只能在這種意義下才可以談到這個函數):

a) 差數 $e^{i\tau\lambda}-\Phi_{\tau,T}(\lambda)$ 與所有函數 $e^{-is\lambda}$, $0\leqslant s\leqslant T$ 正交（在 L_F 中），亦即

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}[e^{i\tau\lambda}-\Phi_{\tau,T}(\lambda)]\,dF(\lambda)=0, \qquad 0\leqslant s\leqslant T; \tag{1.8}$$

特別言之，若譜函數 $F(\lambda)$ 是絕對連續時

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda} f(\mu)\,d\mu \tag{1.9}$$

（而且今後只考慮這種情形），則有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}[e^{i\tau\lambda}-\Phi_{\tau,T}(\lambda)]f(\lambda)\,d\lambda=0, \qquad 0\leqslant s\leqslant T \tag{1.10}$$

及

б)
$$\Phi_{\tau,T}(\lambda)\in L_{F,T}. \tag{1.11}$$

這樣一來，如果我們能够選取一個滿足以上兩個條件的函數 $\Phi_{\tau,T}(\lambda)$，那麽過程 $\xi(s)$ 的外推問題就被解決．

讓我們指出：當我們把函數 $\Phi_{\tau,T}(\lambda)$ 看作是複值自變數 λ 的函數，同時在此函數的性質上加以某些條件時，我們可以使得條件 a) 及 б) 被滿足．首先考查最簡單的情形，即 $T=\infty$ 時的情形（依過程所有的過去的外推問題，參看[18]）．這時條件 a) 化爲下列等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}\Psi_{\tau}(\lambda)\,d\lambda=0, \qquad s\geqslant 0, \tag{1.12}$$

此處

$$\Psi_{\tau}(\lambda)=[e^{i\tau\lambda}-\Phi_{\tau}(\lambda)]f(\lambda), \qquad \Phi_{\tau}(\lambda)=\Phi_{\tau,\infty}(\lambda). \tag{1.13}$$

因爲當 $s\geqslant 0$ 時，對於上半平面上的一切 λ, $|e^{is\lambda}|\leqslant 1$，所以等式(1.12)一定能够成立，如果可以把函數 $\Psi_{\tau}(\lambda)$ 開拓到複值的 λ 域上，使得它在上半平面上是分析的（正則的），而且在此半平面上當 $|\lambda|\to\infty$ 它是減少的，且其減少速度不慢於 $|\lambda|^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$．在這種情形下按照哥西定理，有

$$\int_{C_R} e^{is\lambda}\Psi_{\tau}(\lambda)\,d\lambda=\int_{-R}^{R} e^{is\lambda}\Psi_{\tau}(\lambda)\,d\lambda+\int_{K_R} e^{is\lambda}\Psi_{\tau}(\lambda)\,d\lambda=0, \tag{1.14}$$

此處 C_R 是一個閉迴線，由實軸上線段 $(-R,R)$ 及半徑爲 R 的上半平面中的半圓 K_R 所組成．當 $s\geqslant 0$ 時，(1.14) 中的展佈於 K_R 上的積分趨於零，若 $R\to\infty$；由此推出(1.12)．至於對於條件 б)，我們說若能在 $L_{F,+\infty}=L_F^-$ 中存在一串函數 $\Phi_{\tau}^{(n)}(\lambda)$, $n=1,2,3,\cdots$，它們依 $f(\lambda)\,d\lambda$ 均方收斂到函數 $\Phi_{\tau}(\lambda)=\Phi_{\tau,\infty}(\lambda)$（亦即在 L_F 中的强性收斂），則條件 б) 一定被滿足．當然，只有當 $\Phi_{\tau}(\lambda)\in L_F$，亦即若

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_{\tau}(\lambda)|^2 f(\lambda)\,d\lambda<\infty \tag{1.15}$$

時，這樣的敍列 $\Phi_\tau^{(n)}(\lambda)$ 才可以存在．爲簡單起見，我們假設譜密度 $f(\lambda)$ 是有界的（這一限制對於我們來說並不是重要的，因爲有理的 $f(\lambda)$ 永遠適合這一條件，而且在這篇文章中我們只考慮有理的 $f(\lambda)$）．在這一假設下，一切在通常意義下（即依 $d\lambda$）爲平方可積的，同時能够展爲單邊伏氏積分形狀：

$$\varphi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-is\lambda} a(s)\, ds \tag{1.16}$$

的函數 $\varphi(\lambda)$ 都屬於 L_F^-．事實上，當 $f(\lambda)$ 爲有界時，從依 $d\lambda$ 的均方收斂性即可推出依 $f(\lambda)\, d\lambda$ 的均方收斂性；並且形如 (1.16) 的函數 $\varphi(\lambda)$，是 (1.16) 中的積分其限爲由 0 到 K 時，而且當 $K \to \infty$ 時的依 $f(\lambda)\, d\lambda$ 的均方極限；由此推出 $\varphi(\lambda) \in L_F^-$，今令 $\Phi_\tau(\lambda)$ 滿足條件 (1.15)，而且能够開拓到 λ 的複值域上，使得此函數在下半平面爲分析的，同時在此下半平面中，當 $|\lambda|^q \to \infty$ 時，它是增的但其速度不快於 $|\lambda|$ 某個方次（我們說不快於 $|\lambda|^q$）．這時，函數

$$\Phi_\tau^{(n)}(\lambda) = \frac{\Phi_\tau(\lambda)}{\left(1 + \dfrac{i\lambda}{n}\right)^r}, \qquad r \text{ 爲整數而且 } r > q + 1 \tag{1.17}$$

永是平方可積的，而且在下半平面是分析的；由此推出（與推出公式(1.12)的方法相仿）函數 $\Phi_\tau^{(n)}(\lambda)$ 的伏氏變換在負軸上爲零，所以它的伏氏展式應爲(1.16)的形狀，由此即知 $\Phi_\tau^{(n)}(\lambda) \in L_F^-$．另一方面容易知道：

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_\tau(\lambda) - \Phi_\tau^{(n)}(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda = \\
&= \int_{|\lambda| \leqslant \Lambda} |\Phi_\tau(\lambda) - \Phi_\tau^{(n)}(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda + \int_{|\lambda| > \Lambda} |\Phi_\tau(\lambda) - \Phi_\tau^{(n)}(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda \leqslant \\
&\leqslant \int_{|\lambda| \leqslant \Lambda} \left| 1 - \left(1 + \frac{i\lambda}{n}\right)^{-r} \right|^2 |\Phi_\tau(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda + \\
&\qquad + \int_{|\lambda| > \Lambda} \{|\Phi_\tau(\lambda)| + |\Phi_\tau^{(n)}(\lambda)|\}^2 f(\lambda)\, d\lambda,
\end{aligned} \tag{1.18}$$

此積分當 $n \to \infty$ 時，趨於零（(1.18) 中的右方第一項對於任意 Λ，當 $n \to \infty$ 時趨於零，因爲當 $|\lambda| \leqslant \Lambda$，而 n 足够大時，差數 $1 - \left(1 + \dfrac{i\lambda}{n}\right)^{-r}$ 的絕對值任意小；右方第二項，由 (1.15) 及 (1.17) 可知當選擇 Λ 足够大時，可以是任意小）．這樣一來，在我們所考慮的這種情形下 $\Phi_\tau(\lambda) \in L_F^-$，此即條件 б) 被滿足．

所以，當譜密度 $f(\lambda)$ 爲有界時，欲使函數 $\Phi_\tau(\lambda)$ 是依過程所有的過去（即 $T = \infty$）的外推的譜特徵時，下列條件被滿足就够了：

1）函數 $\Phi_\tau(\lambda)$ 在下半平面上是分析的，在下半平面上，當 $|\lambda|\to\infty$ 時，函數增加但不快於 $|\lambda|$ 的某一方次；

2）函數 $\Psi_\tau(\lambda) = [e^{i\tau\lambda}-\Phi_\tau(\lambda)]f(\lambda)$ 在上半平面上是分析的，在上半平面上，當 $|\lambda|\to\infty$ 時，它是減的但不慢於 $|\lambda|^{-1-\varepsilon}$，$\varepsilon>0$；

3）
$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_\tau(\lambda)|^2 f(\lambda)\,d\lambda<\infty.$$

現在轉向 T 爲有窮時的較難的情形．在這種情形下條件 a）是下列等式被滿足：

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{is\lambda}\Psi_{\tau,T}(\lambda)\,d\lambda=0,\qquad 0\leqslant s\leqslant T,\tag{1.19}$$

此處

$$\Psi_{\tau,T}(\lambda)=[e^{i\tau\lambda}-\Phi_{\tau,T}(\lambda)]f(\lambda).\tag{1.20}$$

這一條件比起要求對於一切 $s\geqslant0$ 的條件（1.12）是要弱一些．欲使此條件被滿足的充分條件爲：$\Psi_{\tau,T}(\lambda)$ 可以表爲下列形狀

$$\Psi_{\tau,T}(\lambda)=\Psi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)+e^{-iT\lambda}\Psi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda),\tag{1.21}$$

此處函數 $\Psi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 在上半平面是分析的，$\Psi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)$ 在下半平面是分析的，在相應的半平面中當 $|\lambda|\to\infty$ 時，這兩個函數是減的但不慢於 $|\lambda|^{-1-\varepsilon}$，$\varepsilon>0$．事實上，（1.21）右方第一項具有當 $T=\infty$ 時，函數 $\Psi_\tau(\lambda)$ 所具有的同樣性質，因此

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{is\lambda}\Psi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)\,d\lambda=0,\qquad 當\ s\geqslant0.\tag{1.22}$$

至於第二項，則顯然有

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-is\lambda}\Psi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)\,d\lambda=0,\qquad 當\ s\geqslant0,\tag{1.23}$$

此即

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(T-s)\lambda}\Psi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)\,d\lambda=0,\qquad 當\ s\leqslant T.\tag{1.23'}$$

從（1.21），（1.22）及（1.23′）即推出（1.19）．

由（1.11）式所示的條件 б）對於有窮的 T 來說反而較對於 $T=\infty$ 時要强一些．欲使此條件被滿足，我們需要設 $\Phi_{\tau,T}(\lambda)$ 可以開拓於 λ 的複值域上，使得它在整個平面上是分析的（整函數），而且表爲

$$\Phi_{\tau,T}(\lambda)=\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)+e^{-iT\lambda}\Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda),\tag{1.24}$$

此處 $\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 及 $\Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)$ 爲有理函數．這樣一來，整函數 $\Phi_{\tau,T}(\lambda)$ 在下半平面上當 $|\lambda|\to\infty$ 時，是增的但不快於 $|\lambda|$ 某一個方次，在上半平面上當 $|\lambda|\to\infty$ 時，也是增的但不快於 $|\lambda|$ 某一個方次乘以 $e^{T\cdot Im\lambda}$；這一條件自然是比加於 $T=\infty$ 時

$\Phi_\tau(\lambda)$ 上的條件 1) 要强些的．除此以外，正如 $T=\infty$ 的情形，我們還需假設

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_{\tau,T}(\lambda)|^2 f(\lambda)\,d\lambda<\infty, \tag{1.25}$$

此即 $\Phi_{\tau,T}(\lambda)\in L_F$．顯然滿足上述的一切條件的函數 $\Phi_{\tau,T}(\lambda)$ 可以表爲下列形狀：

$$\Phi_{\tau,T}(\lambda)=P^{(1)}(\lambda)+e^{-iT\lambda}P^{(2)}(\lambda)+\Phi^*_{\tau,T}(\lambda), \tag{1.26}$$

此處 $P^{(1)}(\lambda)$ 及 $P^{(2)}(\lambda)$ 是 λ 的多項式，它們的次數不超過由條件(1.25)所確定的限，而 $\Phi^*_{\tau,T}(\lambda)$ 乃是 (1.24) 右端中，從有理函數 $\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 及 $\Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)$ 中分別減去多項式 $P^{(1)}(\lambda)$ 及 $P^{(2)}(\lambda)$ 之後的所餘的那兩項之和；亦即一個函數在實軸上爲平方可積，在下半平面上，當 $|\lambda|\to\infty$ 時，它是減的但不慢於 $|\lambda|^{-1}$，在上半平面上，當 $|\lambda|\to\infty$ 時，漸近於 $|\lambda|^{-k}e^{T\cdot Im\lambda}$，$k\geqslant 1$．由此推出函數 $\Phi^*_{\tau,T}(\lambda)$ 的伏氏變換爲零，當 $s>T$ 及 $s<0$（其證明與證明 (1.12) 相似，但要引用若當引理），因之這一函數的伏氏展式爲

$$\Phi^*_{\tau,T}(\lambda)=\int_0^T e^{-is\lambda}b(s)\,ds, \tag{1.27}$$

所以 $\Phi^*_{\tau,T}(\lambda)\in L_{F,T}$．容易證明像滿足 (1.25) 那樣的函數 $P^{(1)}(\lambda)$ 及 $e^{-iT\lambda}P^{(2)}(\lambda)$ 也屬於 $L_{F,T}$——從函數 $e^{is\lambda}$ 當 $s=0$ 時的左有窮差分及當 $s=-T$ 時的右有窮差分的線性組合，經過極限手續即可得到這兩個函數．於是上面所指出來的條件確實是使函數 $\Phi_{\tau,T}(\lambda)$ 屬於子空間 $L_{F,T}$（即滿足條件 6)）的充分條件．

這樣一來我們看到，當平穩隨機過程 $\xi(s)$ 具有有界的譜密度 $f(\lambda)$ 時，使得函數 $\Phi_{\tau,T}(\lambda)$ 是在有窮間隔 $t-T\leqslant s\leqslant t$ 已知過程時的外推的譜特徵的充分條件爲：

1′) 函數 $\Phi_{\tau,T}(\lambda)$ 是 λ 的整函數，可以表爲

$$\Phi_{\tau,T}(\lambda)=\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)+e^{-iT\lambda}\Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda),$$

此處 $\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 及 $\Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)$ 是有理函數．

2′) 函數 $\Psi_{\tau,T}(\lambda)=[e^{i\tau\lambda}-\Phi_{\tau,T}(\lambda)]f(\lambda)$ 可以表爲

$$\Psi_{\tau,T}(\lambda)=\Psi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)+e^{-iT\lambda}\Psi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda),$$

此處 $\Psi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 在上半平面是分析的，$\Psi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)$ 在下半平面是分析的，而且在相應的半平面上當 $|\lambda|\to\infty$ 時，它們是減的但不慢於 $|\lambda|^{-1-\varepsilon}$，$\varepsilon>0$，

3′) $$\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_{\tau,T}(\lambda)|^2 f(\lambda)\,d\lambda<\infty.$$

當譜密度 $f(\lambda)$ 是有理函數而且是到處不爲零時，上面所得到的充分條件可供我們毫無困難地求出在這種情形下的外推譜特徵．事實上，令

$$f(\lambda)=B_0\frac{|\lambda^M+B_1\lambda^{M-1}+\cdots+B_M|^2}{|\lambda^N+A_1\lambda^{N-1}+\cdots+A_N|^2}=B_0\frac{|B(\lambda)|^2}{|A(\lambda)|^2}, \tag{1.28}$$

此處 $B_0>0$，$M<N$，

$$\left.\begin{aligned}&B(\lambda)=(\lambda-\beta_1)(\lambda-\beta_2)\cdots(\lambda-\beta_M);\ Im\beta_k>0,\ k=1,2,\cdots,M,\\&A(\lambda)=(\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)\cdots(\lambda-\alpha_N);\ Im\alpha_l>0,\ l=1,2,\cdots,N\end{aligned}\right\}\tag{1.29}$$

(這是非負有理譜密度的普遍形狀，參看 [18]，[22])．讓我們仍然從 $T=\infty$ 的情形開始；這時 $\Phi_{\tau,\infty}(\lambda)=\Phi_\tau(\lambda)$ 應該滿足第 167 頁上的條件 1)—3)．由於 $\Phi_\tau(\lambda)$ 在下半平面上不可能有奇點，而 $\Psi_\tau(\lambda)=[e^{i\tau\lambda}-\Phi_\tau(\lambda)]f(\lambda)$ 在上半平面上不可能有奇點，容易推知 $\Phi_\tau(\lambda)$ 的奇點只能是以點 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_M$ 爲極點，而且每一極點的級恰等於 $B(\lambda)$ 相應根的次數．這樣一來

$$\Phi_\tau(\lambda)=\frac{\omega_\tau(\lambda)}{(\lambda-\beta_1)(\lambda-\beta_2)\cdots(\lambda-\beta_M)},\tag{1.30}$$

此處 $\omega_\tau(\lambda)$ 是整函數．顯然，條件 3) 使我們可以選一個 $(N-1)$ 次 (但不能更高次) 的多項式來作 $\omega_\tau(\lambda)$．此外形狀如 (1.30) 的函數 $\Phi_\tau(\lambda)$ 可以滿足條件 2)，如果 $\omega_\tau(\lambda)$ 是 $(N-1)$ 次的多項式，並且使得差數

$$e^{i\tau\lambda}(\lambda-\beta_1)(\lambda-\beta_2)\cdots(\lambda-\beta_M)-\omega_\tau(\lambda)$$

在多項式 $A(\lambda)$ 爲零的一切點上具有同次的根．由此顯見，當 $A(\lambda)$ 沒有重根時，應該取 $\omega_\tau(\lambda)$ 爲

$$\omega_\tau(\lambda)=C_0\lambda^{N-1}+C_1\lambda^{N-2}+\cdots+C_{N-1},\tag{1.31}$$

而這 N 個係數從下列 N 個線性方程的方程組來決定：

$$C_0\alpha_k^{N-1}+C_1\alpha_k^{N-2}+\cdots+C_{N-1}=e^{i\tau\alpha_k}(\alpha_k-\beta_1)\cdots(\alpha_k-\beta_M),\qquad k=1,2,\cdots N.\tag{1.32}$$

因爲這一組方程的行列式 (“王得曼行列式”) 不爲零，所以係數 $C_0,C_1,\cdots,C_{N-1}$ 由 (1.32) 唯一確定．若所有的根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N$ 不是不相同的，並且根 α_1 在其中出現了 j_1 次，根 α_2 出現了 j_2 次，…，根 α_n 出現了 j_n 次，而且 $j_1+j_2+\cdots+j_n=N$，則方程組 (1.32) 應以下列 N 個方程代替之：

$$\frac{d^l}{d\lambda^l}[C_0\lambda^{N-1}+C_1\lambda^{N-2}+\cdots+C_{N-1}]_{\lambda=\alpha_k}=\frac{d^l}{d\lambda^l}[e^{i\tau\lambda}(\lambda-\beta_1)\cdots(\lambda-\beta_M)]_{\lambda=\alpha_k},\tag{1.33}$$

$$l=0,1,\cdots,j_{k-1},\quad k=1,2,\cdots n.$$

這時也很容易驗證方程組的行列式不爲零 (此行列式等於 $\prod\limits_{\substack{k,l=1\\k>l}}^{n}(\alpha_k-\alpha_l)^{j_k+j_l}$)，所以在這種情形下 $\omega_\tau(\lambda)$ (以及 $\Phi_\tau(\lambda)$) 唯一地被確定．這樣一來當 $f(\lambda)$ 爲形如 (1.28) 的樣子的時候，我們得到了一個有效的方法來作出譜特徵 $\Phi_\tau(\lambda)=\Phi_{\tau,\infty}(\lambda)$．

當 T 爲有窮時，幾乎也是一樣的簡單．首先我們假定 $\tau>0$ (在這種情形下，外推

問題只當 $\tau>0$ 及 $\tau<-T$ 時,才有意義). 第 168 頁的條件 1′) 及 2′) 指出: 應有

$$[e^{i\tau\lambda}-\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)-e^{-iT\lambda}\Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)]f(\lambda)=\Psi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)+e^{-iT\lambda}\Psi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda), \tag{1.34}$$

此處 $\Phi^{(1)}_{\tau,T}$ 及 $\Phi^{(2)}_{\tau,T}$ 是有理函數, 而 $\Psi^{(1)}_{\tau,T}$ 及 $\Psi^{(2)}_{\tau,T}$ 分别在上及下半平面上是分析函數,而且在相應的半平面上當 $|\lambda|\to\infty$ 時,它們是減的但不慢於 $|\lambda|^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$. 因爲函數 $e^{i\tau\lambda}$ 在下半平面上是指數上增的, 而在上半平面上是有界的, 所以欲使加於 $\Psi^{(1)}_{\tau,T}$, $\Psi^{(2)}_{\tau,T}$ 上的條件可以被滿足,應令

$$\left.\begin{aligned}&[e^{i\tau\lambda}-\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)]f(\lambda)=\Psi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda),\\&-\Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)f(\lambda)=\Psi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda).\end{aligned}\right\} \tag{1.35}$$

但函數(1.24)應是整函數;所以函數 $\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 及函數 $\Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)$ 的極點必須相互重合, 而且每一個極點, 當它不同時是 $f(\lambda)$ 的同次零點時, 就要是 $\Psi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 的,同時也是 $\Psi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)$ 的極點,然而這是不可能的. 故 $\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 及 $\Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)$ 應該寫成下列形狀:

$$\left.\begin{aligned}\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)&=\frac{\omega^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)}{(\lambda-\beta_1)\cdots(\lambda-\beta_M)(\lambda-\bar\beta_1)\cdots(\lambda-\bar\beta_M)},\\\Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)&=\frac{\omega^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)}{(\lambda-\beta_1)\cdots(\lambda-\beta_M)(\lambda-\bar\beta_1)\cdots(\lambda-\bar\beta_M)},\end{aligned}\right\} \tag{1.36}$$

此處 $\omega^{(1)}_{\tau,T}$ 及 $\omega^{(2)}_{\tau,T}$ 是整函數,而且和數 $\omega^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)+e^{-i\lambda T}\omega_{\tau,T}(\lambda)$ 在使 $|B(\lambda)|^2$ 等於零的一切點上,具有同次的根 (否則, $\Phi_{\tau,T}(\lambda)$ 將不是整函數). 這時條件 3′) 可供我們把 $\omega^{(1)}_{\tau,T}$ 及 $\omega^{(2)}_{\tau,T}$ 選成 $(N+M-1)$ (但不可能更高) 次的多項式;同時這樣選擇的 $\omega^{(1)}_{\tau,T}$ 及 $\omega^{(2)}_{\tau,T}$ 也保證了函數 $\Psi^{(1)}_{\tau,T}$ 及 $\Psi^{(2)}_{\tau,T}$ 漸減時的必要速度.

爲了使得也能滿足有關 $\Psi^{(1)}_{\tau,T}$ 及 $\Psi^{(2)}_{\tau,T}$ 的分析性質的那個條件,在等式(1.35)中, $f(\lambda)$ 在上半平面的極點應該與函數 $e^{i\tau\lambda}-\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 的零點相抵消,而 $f(\lambda)$ 在下半平面的極點應該與函數 $\Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)$ 的零點相抵消. 由此顯見,對於 $\Phi_{\tau,T}(\lambda)$ 的一切要求可以被滿足,如果令

$$\left.\begin{aligned}\omega^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)&=C^{(1)}_0\lambda^{N+M-1}+C^{(1)}_1\lambda^{N+M-2}+\cdots+C^{(1)}_{N+M-1},\\\omega^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)&=C^{(2)}_0\lambda^{N+M-1}+C^{(2)}_1\lambda^{N+M-2}+\cdots+C^{(2)}_{N+M-1},\end{aligned}\right\} \tag{1.37}$$

其中的 $2N+2M$ 的係數,當多項 $B(\lambda)$ 及 $A(\lambda)$ 沒有重根時,由下列 $2N+2M$ 個的線性方程的方程組所决定:

$$\left.\begin{aligned}&\omega^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)+e^{-iT\lambda}\omega^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)=0, &&\text{當 } \lambda=\beta_1,\cdots,\beta_M,\bar\beta_1,\cdots,\bar\beta_M;\\&\omega^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)=e^{i\tau\lambda}(\lambda-\beta_1)\cdots(\lambda-\beta_M)(\lambda-\bar\beta_1)\cdots(\lambda-\bar\beta_M),\\& &&\text{當 } \lambda=\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N;\\&\omega^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)=0, &&\text{當 } \lambda=\bar\alpha_1,\bar\alpha_2,\cdots,\bar\alpha_N.\end{aligned}\right\} \tag{1.38}$$

這也就是

$$\left.\begin{aligned}
&C_0^{(1)}\beta_k^{N+M-1}+C_1^{(1)}\beta_k^{N+M-2}+\cdots+C_{N+M-1}^{(1)}+\\
&\qquad+e^{-iT\beta_k}(C_0^{(2)}\beta_k^{N+M-1}+C_1^{(2)}\beta_k^{N+M-2}+\cdots+C_{N+M-1}^{(2)})=0,\\
&C_0^{(1)}\bar\beta_k^{N+M-1}+C_1^{(1)}\bar\beta_k^{N+M-2}+\cdots+C_{N+M-1}^{(1)}+\\
&\qquad+e^{-iT\bar\beta_k}(C_0^{(2)}\bar\beta_k^{N+M-1}+C_0^{(2)}\bar\beta_k^{N+M-2}+\cdots+C_{N+M-1}^{(2)})=0,\\
&C_0^{(1)}\alpha_l^{N+M-1}+C_1^{(1)}\alpha_l^{N+M-2}+\cdots+C_{N+M-1}^{(1)}=\\
&\qquad=e^{i\tau\alpha_l}(\alpha_l-\beta_1)\cdots(\alpha_l-\beta_M)(\alpha_l-\bar\beta_1)\cdots(\alpha_l-\bar\beta_M),\\
&C_0^{(2)}\bar\alpha_l^{N+M-1}+C_1^{(2)}\bar\alpha_l^{N+M-2}+\cdots+C_{N+M-1}^{(2)}=0,
\end{aligned}\right\}\quad(1.39)$$

此處 $k=1,2,\cdots,M;\ l=1,2,\cdots,N.$ 能够證明這組方程的行列式永不爲零，所以係數 $C_k^{(1)}, C_l^{(2)}$ 被唯一決定[1]. 在普遍的情形中，即當 $B(\lambda)$ 及 $A(\lambda)$ 具有重根的時候，只是用來確定係數 $C_k^{(1)}, C_l^{(2)}$ 的方程組的形狀要改變一下. 設在根 $\alpha_1,\cdots,\alpha_N,\beta_1,\cdots,\beta_M$ 中，根 α_1 重複 j_1 次，$\cdots$，根 α_n 重複 j_n 次，而且 $j_1+j_2+\cdots+j_n=N$; 根 β_1 重複 k_1 次，$\cdots$，根 β_m 重複 k_m 次，而且 $k_1+k_2+\cdots+k_m=M$. 這時方程組 (1.38) 將被下列方程組所代替:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^s}{d\lambda^s}[\omega_{\tau,T}^{(1)}(\lambda)+e^{-iT\lambda}\omega_{\tau,T}^{(2)}(\lambda)]=0,\\
&\qquad\qquad\text{當 }\lambda=\beta_i,\bar\beta_i,\quad s=0,1,\cdots,k_i-1,\quad i=1,2,\cdots,m;\\
&\frac{d^r}{d\lambda^r}\omega_{\tau,T}^{(1)}(\lambda)=\frac{d^r}{d\lambda^r}[e^{i\tau\lambda}(\lambda-\beta_1)^{k_1}\cdots(\lambda-\beta_m)^{k_m}(\lambda-\bar\beta_1)^{k_1}\cdots(\lambda-\bar\beta_m)^{k_m},\\
&\qquad\qquad\text{當 }\lambda=\alpha_l,\quad r=0,1,\cdots,j_l-1,\quad l=1,2,\cdots,n;\\
&\frac{d^r}{d\lambda^r}\omega_{\tau,T}^{(2)}(\lambda)=0,\ \text{當 }\lambda=\bar\alpha_l,\quad r=0,1,\cdots,j_l-1,\quad l=1,2,\cdots,n.
\end{aligned}\right\}\quad(1.40)$$

而且在這種情形下，方程組的解是唯一的. 公式 (1.24), (1.36), (1.37) 及 (1.38) (或 (1.40)) 完全解決了具有有理譜密度的平穩隨機過程當 T 爲有窮時的線性外推問題. 而且正如我們所意料的，當 $T\to\infty$ 時，所得到的結果就變成由公式 (1.30), (1.31) 及 (1.32) (或 (1.33)) 所獲得的 $\Phi_\tau(\lambda)$ 的表示式.

關於“以前外推”(即 $\tau<-T$ 時的情形) 的問題的解決是完全相似的; 這時顯然只需要把 (1.35) 換成下列等式，而且以這個新的等式爲出發點即可:

$$\left.\begin{aligned}
-\Phi_{\tau,T}^{(1)}(\lambda)f(\lambda)&=\Psi_{\tau,T}^{(1)}(\lambda),\\
[e^{i(\tau+T)\lambda}-\Phi_{\tau,T}^{(2)}(\lambda)]f(\lambda)&=\Psi_{\tau,T}^{(2)}(\lambda).
\end{aligned}\right\}\quad(1.35')$$

---

1) 由於線性方程組的性質只須證明對於任意一個 τ，解是唯一的就够了. 但當 $\tau=0$ 時，顯見 $\Phi_{\tau,T}(\lambda)=1$，這時只當 $\omega_{\tau,T}^{(1)}=(\lambda-\beta_1)\cdots(\lambda-\beta_M)(\lambda-\bar\beta_1)\cdots(\lambda-\bar\beta_M)$, $\omega_{\tau,T}^{(2)}=0$ 時才可能; 此即解是唯一的.

容易看出在這種情形下的譜特徵將由下列公式給出:

$$\Phi_{\tau, T}(\lambda) = e^{-iT\lambda}\overline{\Phi_{-\tau-T, T}(\lambda)} \tag{1.41}$$

(讓我們提醒: $\tau < -T$, 所以 $-\tau - T > 0$). 公式 (1.41) 表出來平穩隨機過程外推問題中的"過去"及"將來"的對稱性.

如果 $M = 0$, 亦即 $B(\lambda) = 1$ 而且譜密度等於 λ 的多項式除 1 時,那末外推(當 $T = \infty$ 時,也當 T 爲有窮時)的譜特徵將具有特別簡單的形狀. 公式 (1.30), (1.31) 及 (1.32) (或 (1.33)) 指出在這種情形下譜特徵 $\Phi_\tau(\lambda) = \Phi_{\tau,\infty}(\lambda)$ 是一個 $(N-1)$ 次的多項式 $\omega_\tau(\lambda)$, 此多項式由下述條件所决定:差數 $\omega_\tau(\lambda) - e^{i\tau\lambda}$ 在點 $\lambda = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$ 處等於零. 公式 (1.24), (1.36), (1.37) 及 (1.38) (或 (1.40))指出當 T 爲有窮時,這裏的 $\omega^{(2)}_{\tau, T} = 0$, 所以對於任意 T, $\Phi_{\tau, T}(\lambda)$ 與 $\Phi_\tau(\lambda)$ 相重合.

這一結果表明:當 $B(\lambda) = 1$ 時,"預測值" $\tilde{\xi}(t+\tau)$ 將等於過程 $\xi(s)$ 本身及其一直到 $(N-1)$ 級的導數在我們所可能達到的最末尾的時候——即在時候 t 時之值的線性組合(容易證明,一般說來再高級的導數是不存在的);當然這裏的 $\Phi_{\tau, T}(\lambda)$ 與 T 無關.

也不難推知,當 $M \neq 0$ 時,外推算子將具有什麽樣的形狀. 當 $T = \infty$ 時,譜特徵 (1.30) 可以表成下列形狀:

$$\Phi_\tau(\lambda) = P(\lambda) + \Phi^*_\tau(\lambda), \tag{1.42}$$

此處 $P(\lambda)$ 是一個次數不超於 $N - M - 1$ 的多項式,而 $\Phi^*_\tau(\lambda)$ 爲有理函數,此有理函數可以分成簡單分式. 由於

$$\frac{1}{(\lambda - \beta_k)^\nu} = \int_0^\infty \frac{i^\nu}{(\nu-1)!} s^{\nu-1} e^{-i(\lambda-\beta_k)s}\, ds \tag{1.43}$$

及公式 (1.6),每一個簡單分式對應於 $\tilde{\xi}(t+\tau)$ 的表達式中的形如下列形狀的加項

$$\frac{i^\nu}{(\nu-1)!}\int_0^\infty s^{\nu-1} e^{i\beta_k s}\xi(t-s)\, ds, \tag{1.44}$$

於是在普遍情形下,由過程的所有過去而得到的預測值 $\tilde{\xi}(t+\tau)$ 可以表爲過程 $\xi(s)$ 本身及其一直到 $(N-M-1)$ 級的導數在時候 t 時之值的線性組合(亦即一直到 $\xi(s)$ 可能微分的最高級數),再加上展佈於過程所有過去的、具有指數抵消的加權函數的某些積分的線性組合. 由公式 (1.44) 可知,加權函數遞減的速度將由譜密度分子的根 β_k 的最小虛份來决定. 當 T 爲有窮時,外推算子的形狀容易由公式(1.26)及(1.27)中得出: $\Phi_{\tau, T}(\lambda)$ 裏的加項 $P^{(1)}(\lambda)$ 及 $e^{-i\lambda T}P^{(2)}(\lambda)$, 在 $\tilde{\xi}(t+\tau)$ 的表達式裏顯然對應於過程 $\xi(s)$ 本身及其一直到 $(N-M-1)$ 級的導數在時候 t 及 $t-T$ (可能

達到的開頭及末尾的時候）時之值的線性組合，而加項 $\Phi^{*}_{\tau, T}(\lambda)$ 在 $\tilde{\xi}(t+\tau)$ 的表達式裏對應於下列形狀的積分：

$$\int_0^T b(s)\,\xi(t-s)\,ds. \tag{1.45}$$

例. 作爲上面所得到的理論的例子，讓我們考察具有下列形狀的譜密度的平穩隨機過程 $\xi(s)$ 的外推問題：

$$f(\lambda)=B\frac{\lambda^2+\alpha^2}{\lambda^4+\alpha^4}=B\frac{|\lambda-i\alpha|^2}{\left|\left(\lambda-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\alpha\right)\left(\lambda+\frac{1-i}{\sqrt{2}}\alpha\right)\right|^2}. \tag{1.46}$$

當 $T=\infty$ 時，由 (1.30)，(1.31) 及 (1.32) 可知譜特徵等於

$$\Phi_\tau(\lambda)=\frac{C_0\lambda+C_1}{\lambda-i\alpha}, \tag{1.47}$$

其中的係數 C_0 及 C_1 由下例條件所決定：

$$\Phi_\tau\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\alpha\right)=e^{-\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}(1-i)},\quad \Phi_\tau\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\alpha\right)=e^{-\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}(1+i)}. \tag{1.48}$$

經過計算便得

$$\left.\begin{aligned} C_0&=e^{-\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}}\left[\cos\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}+(\sqrt{2}-1)\sin\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}\right],\\ C_1&=-i\alpha e^{-\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}}\left[\cos\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}-(\sqrt{2}-1)\sin\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}\right]=-i\alpha C_1'.\end{aligned}\right\} \tag{1.49}$$

外推的均方差容易由公式 (1.7)（或 (1.7′)）算出. 依照公式 (1.47) 及 (1.44) 最佳逼近 $\tilde{\xi}(t+\tau)$ 的顯明表達式可以寫成下列形狀：

$$\tilde{\xi}(t+\tau)=C_0\xi(t)-\alpha(C_0-C_1')\int_0^\infty e^{-\alpha s}\xi(t-s)\,ds. \tag{1.50}$$

當 T 爲有窮時，而且 $\tau>0$，便有

$$\Phi_{\tau,T}(\lambda)=\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)+e^{-iT\lambda}\Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda),$$

此處

$$\left.\begin{aligned}\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)&=C_0+\frac{C_1}{\lambda-i\alpha}+\frac{C_2}{\lambda+i\alpha},\\ \Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)&=C_0'+\frac{C_1'}{\lambda-i\alpha}+\frac{C_2'}{\lambda+i\alpha};\end{aligned}\right\} \tag{1.51}$$

而且由方程組 (1.38) 的第一個方程，有

$$C_1'=-e^{-\alpha T}C_1,\qquad C_2'=-e^{\alpha T}C_2. \tag{1.52}$$

所剩下來的四個未定係數 C_0, C'_0, C_1 及 C_2 由下列條件定出:

$$\left.\begin{aligned}&\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)=e^{i\tau\lambda}, &&\text{當 } \lambda=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\alpha,\quad \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\alpha;\\ &\Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)=0, &&\text{當 } \lambda=\frac{1-i}{\sqrt{2}}\alpha,\quad \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{1.53}$$

經過計算便得

$$\left.\begin{aligned}C_1&=\frac{i\alpha(\sqrt{2}+1)\,e^{\alpha\left(T-\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right)}\sin\dfrac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}}{3\,\mathrm{sh}\,\alpha T+2\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,\alpha T},\\ C_2&=\frac{-i\alpha(\sqrt{2}-1)\,e^{-\alpha\left(T+\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right)}\sin\dfrac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}}{3\,\mathrm{sh}\,\alpha T+2\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,\alpha T},\\ C_0&=e^{-\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}}\cos\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}+\frac{\mathrm{sh}\,\alpha T+\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,\alpha T}{3\,\mathrm{sh}\,\alpha T+2\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,\alpha T}\,e^{-\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}}\sin\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}},\\ C'_0&=\frac{-\sqrt{2}\,e^{-\frac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}}\sin\dfrac{\alpha\tau}{\sqrt{2}}}{3\,\mathrm{sh}\,\alpha T+2\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,\alpha T}.\end{aligned}\right\} \tag{1.54}$$

預測值 $\tilde{\xi}(t+\tau)$ 由下列公式給出:

$$\tilde{\xi}(t+\tau)=C_0\xi(t)+C'_0\xi(t-T)+\int_0^T(\tilde{C}_1e^{-\alpha s}+\tilde{C}_2e^{\alpha s})\xi(t-s)\,ds, \tag{1.55}$$

$$\tilde{C}_1=iC_1,\qquad \tilde{C}_2=iC_2;$$

不難驗證當 $T\to\infty$ 時上一公式趨於(1.50). 當 $\tau_1<-T$, $-\tau_1-T=\tau>0$ 時, 依(1.41)則得完全對稱的外推公式:

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}(t+\tau_1)=C_0\xi(t-T)+C'_0\xi(t)&+\\ +\int_0^T(\tilde{C}_1e^{-\alpha s}+\tilde{C}_2e^{\alpha s})\xi(t-T+s)\,ds.&\end{aligned} \tag{1.55$'$}$$

按照公式(1.55)(或(1.55′))的外推的均方差容易由公式(1.7)或(1.7′)算出.

§2. 平穩過程的線性過濾

設 $\xi(s)$ 及 $\zeta(s)$ $(-\infty<s<\infty)$ 是兩個平穩隨機過程, 而且它們是平穩相依的, 其均值爲零: $\mathbf{M}\xi(s)=\mathbf{M}\zeta(s)=0$; 設其相關函數 $B_{\xi\xi}(\tau)=\mathbf{M}\xi(s+\tau)\overline{\xi(s)}$ 及 $B_{\zeta\xi}(\tau)=\mathbf{M}\zeta(s+\tau)\overline{\xi(s)}$ 爲已知, 並且過程 $\zeta(s)$ 的平方均值 $\mathbf{M}|\zeta(s)|^2=B_{\zeta\zeta}(0)$ 爲已知. 從過程 $\xi(s)$ 在間隔 $t-T\leqslant s\leqslant t$ (特別言之, 在半線 $s\leqslant t$) 上的已知

值，來估計過程 $\zeta(s)$ 在時候 $t+\tau$ 時之值 $\zeta(t+\tau)$ 的問題叫作過程 $\xi(s)$ 的過濾問題[1]. 若限定估計是線性地依賴於 $\xi(s)$ 的已知值時(線性過濾)，則當我們把 $\tilde{\zeta}(t+\tau)$ 取成在空間 H (參看 §1 的開頭) 中，從"點" $\zeta(t+\tau)$ 立到子空間 $H_{\xi;t,T}$ 的垂線的垂足之值時，我們就得到最佳估計(在最小二乘方的意義下). 這一節將要講尋求這一 $\tilde{\zeta}(t+\tau)$ 的問題.

我們不去立刻由 $\zeta(t+\tau)$ 作子空間 $H_{\xi;t,T}$ 的垂線，而用下述辦法來代替，先把 $\zeta(t+\tau)$ 投射到子空間 H_ξ 上，然後再把這樣所得到的"點" $\hat{\zeta}(t+\tau)$ 投射到 $H_{\xi;t,T}$ 上；這種辦法是有它的優點的，因爲當我們求得 $\hat{\zeta}(t+\tau)$ 之後，我們就可以不再跑到空間 H_ξ 的範圍之外了. 現在讓我們註明：$\hat{\zeta}(t+\tau)$ 是空間 H_ξ 中的隨機變數(例如參看 [23])，因而可以表爲

$$\hat{\zeta}(t+\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^{(\zeta)}(t+\tau,\lambda)\,dZ(\lambda), \tag{2.1}$$

此處 $Z(\lambda)$ 乃是 (1.3) 中所出現的那個隨機函數；由於 $\zeta(s)$ 是平穩的，而且與 $\xi(s)$ 平穩相依，容易推知函數 $\varphi^{(\zeta)}(t+\tau,\lambda)$ 的形狀將是 $e^{i(t+\tau)\lambda}\varphi^{(\zeta)}(\lambda)$，所以

$$\hat{\zeta}(t+\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(t+\tau)\lambda}\varphi^{(\zeta)}(\lambda)\,dZ(\lambda) \tag{2.2}$$

(參看 [2]). 但由 (2.2) 及 (1.3) 可知

$$B_{\zeta\xi}(\tau)=\mathbf{M}\zeta(s+\tau)\overline{\xi(s)}=\mathbf{M}\hat{\zeta}(s+\tau)\overline{\xi(s)}=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\tau\lambda}\varphi^{(\zeta)}(\lambda)\,dF(\lambda), \tag{2.3}$$

此處 $F(\lambda)$ 乃是 (1.1) 及 (1.4) 中所出現的那個函數. 比較 (2.3) 及交互相關函數 $B_{\zeta\xi}(\tau)$ 的譜展式：

$$B_{\zeta\xi}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\tau\lambda}dF_{\zeta\xi}(\lambda), \tag{2.4}$$

使得

$$\varphi^{(\zeta)}(\lambda)=\frac{dF_{\zeta\xi}(\lambda)}{dF(\lambda)} \tag{2.5}$$

(特別言之，我們的論證證明了交互譜函數 $F_{\zeta\xi}(\lambda)$ 對於 $F(\lambda)=F_{\xi\xi}(\lambda)$ 而言是絕對連續的). 於是，在從 H_ξ 同尺地映像到希爾伯特空間 L_F (參看 163 頁)時，變量 $\hat{\zeta}(t+\tau)$ 映成函數

$$\varphi^{(\zeta)}(t+\tau,\lambda)=e^{i(t+\tau)\lambda}\frac{dF_{\zeta\xi}(\lambda)}{dF(\lambda)}. \tag{2.6}$$

---

1) 這一名詞與下述事實相關聯：在實際應用中，$\zeta(s)$ 通常是我們所注意的"信號"，而 $\xi(s)=\zeta(s)+\eta(s)$ 是信號受到干擾("噪聲") $\eta(s)$ 之後的變形結果. 但是，在這一方案中所提出來的關於導數的逼近問題(即依 $\zeta(s)+\eta(s)$ 之值要求估計 $\zeta'(t)$) 及很多的其他問題，以實踐的觀點來看是不同於"過濾"的.

這樣一來,過程 $\xi(s)$ 的過濾問題化成了在空間 L_F 中從"點" $e^{i(t+\tau)\lambda}\dfrac{dF_{\zeta\xi}(\lambda)}{dF(\lambda)}$ 向子空間 $L_{F;t,T}$ 作垂線的問題. 仍須註明,因爲過程 $\xi(s)$ 及 $\zeta(s)$ 是平穩的,而且是彼此平穩相依的, 容易推知 $\varphi^{(\zeta)}(t+\tau,\lambda)$ 在子空間 $L_{F;t,T}$ 上的射影 $\Phi^{(\zeta)}_{\tau;t,T}(\lambda)$ 可以表爲

$$\Phi^{(\zeta)}_{\tau;t,T}(\lambda)=e^{it\lambda}\Phi^{(\zeta)}_{\tau,T}(\lambda),\tag{2.7}$$

此處 $\Phi^{(\zeta)}_{\tau,T}(\lambda)$ 乃是 $\varphi^{(\zeta)}(\tau,\lambda)$ 在子空間 $L_{F,T}$ (參看(1.2)) 上的射影. 所以並不損及問題的普遍性我們可以認爲 $t=0$ 而且限於尋求只與 τ 及 T 有關的函數 $\Phi^{(\zeta)}_{\tau,T}(\lambda)$. 今後我們把這個函數 $\Phi^{(\zeta)}_{\tau,T}(\lambda)$ 叫作過濾的譜特徵; 我們所尋求的最佳逼近 $\tilde{\zeta}(t+\tau)$ 即可由過濾的譜特徵表達出來:

$$\tilde{\zeta}(t+\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}\Phi^{(\zeta)}_{\tau,T}(\lambda)\,dZ(\lambda).\tag{2.8}$$

由 (2.8) 即可得到過濾的均方差公式

$$\begin{aligned}\sigma^2_{\tau,T}&=\mathbf{M}\,|\,\zeta(t+\tau)-\tilde{\zeta}(t+\tau)|^2=\\&=B_{\zeta\zeta}(0)-\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi^{(\zeta)}_{\tau,T}(\lambda)|^2\,dF(\lambda).\end{aligned}\tag{2.9}$$

顯見,爲了尋求這一個數值,我們必須用到 $B_{\zeta\zeta}(0)$ 之值.

函數 $\Phi^{(\zeta)}_{\tau,T}(\lambda)$ 顯然由下列兩個條件唯一決定:

a) $$\int_{-\infty}^{\infty}e^{is\lambda}\left[e^{i\tau\lambda}\frac{dF_{\zeta\xi}(\lambda)}{dF(\lambda)}-\Phi^{(\zeta)}_{\tau,T}\right]dF(\lambda)=0,\qquad 0\leqslant s\leqslant T,$$

特別言之,若 (1.9) 式成立,則交互譜函數 $F_{\zeta\xi}(\lambda)$ 也必然是絕對連續的,

$$F_{\zeta\xi}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}f_{\zeta\xi}(\mu)\,d\mu,\tag{2.10}$$

這時條件 a) 就可以寫成下列的簡單形狀:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{is\lambda}\left[e^{i\tau\lambda}f_{\zeta\xi}(\lambda)-\Phi^{(\zeta)}_{\tau,T}(\lambda)\,f(\lambda)\right]d\lambda=0,\qquad 0\leqslant s\leqslant T;\tag{2.11}$$

б) $$\Phi^{(\zeta)}_{\tau,T}(\lambda)\in L_{F,T}.\tag{2.12}$$

這樣一來,我們只需要選擇滿足這兩個條件的函數 $\Phi^{(\zeta)}_{\tau,T}(\lambda)$.

條件(2.12)與線性外推問題中的有關譜特徵的條件(1.11)完全一樣;而條件 (2.11) 與條件(1.10)之間的差別只在於在那裏函數 $\Psi_{\tau,T}(\lambda)=[e^{i\tau\lambda}-\Phi_{\tau,T}(\lambda)]\,f(\lambda)$ 應被下列函數所代替

$$\Psi^{(\zeta)}_{\tau,T}(\lambda)=e^{i\tau\lambda}f_{\zeta\xi}(\lambda)-\Phi^{(\zeta)}_{\tau,T}(\lambda)\,f(\lambda).\tag{2.13}$$

利用與解決外推問題相仿的論證可以推出: 若譜密度 $f(\lambda)=f_{\xi\xi}(\lambda)$ 是有界的, 則

$\Phi_{\tau,T}^{(\zeta)}(\lambda)$ 爲過濾的譜特徵的充分條件爲：

I. 當 $T=\infty$ 時：

1) 函數 $\Phi_{\tau,\infty}^{(\zeta)}(\lambda)=\Phi_{\tau}^{(\zeta)}(\lambda)$ 在下半平面上是分析的，而且在下半平面上當 $|\lambda|\to\infty$ 時，它是增的但不快於 $|\lambda|$ 的某一方次；

2) 函數 $\Psi_{\tau}^{(\zeta)}(\lambda)=e^{i\tau\lambda}f_{\zeta\xi}(\lambda)-\Phi_{\tau}^{(\zeta)}(\lambda)f(\lambda)$ 在上半平面上是分析的，而且在上半平面上當 $|\lambda|\to\infty$ 時，它是減的但不慢於 $|\lambda|^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$；

3)
$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_{\tau}^{(\zeta)}(\lambda)|^2 f(\lambda)\,d\lambda<\infty. \tag{2.14}$$

II. 當 T 爲有窮時：

1′) 函數 $\Phi_{\tau,T}^{(\zeta)}(\lambda)$ 是 λ 的整函數，而表爲

$$\Phi_{\tau,T}^{(\zeta)}(\lambda)=\Phi_{\tau,T}^{(1)}(\lambda)+\sum_{k=1}^{n}e^{-iT_k\lambda}\Phi_{\tau,T}^{(k+1)}(\lambda), \tag{2.15}$$

此處 $0\leqslant T_k\leqslant T$, $k=1,2,\cdots,n$, 並且所有的函數 $\Phi_{\tau,T}^{(k)}(\lambda)$, $k=1,2,\cdots,n+1$ 都是有理函數；

2′) 函數 $\Psi_{\tau,T}^{(\zeta)}(\lambda)=e^{i\tau\lambda}f_{\zeta\xi}(\lambda)-\Phi_{\tau,T}^{(\zeta)}(\lambda)\,f(\lambda)$ 可以表爲下列形狀：

$$\Psi_{\tau,T}^{(\zeta)}(\lambda)=\Psi_{\tau,T}^{(1)}(\lambda)+e^{-iT\lambda}\Psi_{\tau,T}^{(2)}(\lambda), \tag{2.16}$$

此處 $\Psi_{\tau,T}^{(1)}(\lambda)$ 在上半平面是分析的，而 $\Psi_{\tau,T}^{(2)}(\lambda)$ 在下半平面是分析的，而且在相應的半平面上當 $|\lambda|\to\infty$ 時，它們是減的，但不慢於 $|\lambda|^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$；

3′)
$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_{\tau,T}^{(\zeta)}(\lambda)|^2 f(\lambda)\,d\lambda<\infty. \tag{2.17}$$

這裏所陳述的條件 1′) 比起解決外推問題裏所用的條件 1′) 要少許普遍些；但不難看到：證明這裏的普遍一點的條件的充分性時，實際上同以前是沒有什麽變動的.

現在讓我們指出：當譜密度 $f(\lambda)$ 及 $f_{\zeta\xi}(\lambda)$ 是有理函數，而且 $f(\lambda)$ 永不爲零時，上面所得到的條件使得我們很容易地求出過濾問題的解答. 實際上，令 $f(\lambda)$ 爲由公式 (1.28) 及 (1.29) 所示的形狀，而令

$$f_{\zeta\xi}(\lambda)=\frac{D(\lambda)}{C(\lambda)}=\frac{D_0\lambda^K+D_1\lambda^{K-1}+\cdots+D_K}{\lambda^L+C_1\lambda^{L-1}+\cdots+C_L}, \tag{2.18}$$

此處 $K<L-1$ (因爲 $f_{\zeta\xi}(\lambda)$ 是可積函數)，而且

$$\left.\begin{aligned} C(\lambda)=(\lambda-\gamma_1)(\lambda-\gamma_2)\cdots(\lambda-\gamma_{L_1})(\lambda-\gamma_1')(\lambda-\gamma_2')\cdots(\lambda-\gamma_{L_2}'),\\ L_1+L_2=L,\quad Im\gamma_i>0,\quad i=1,2,\cdots,L_1;\\ Im\gamma_j'<0,\quad j=1,2,\cdots,L_2. \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

仍然是先考慮 $T=\infty$ 時的情形，而且分別地考察當 $\tau\geqslant0$ 及 $\tau<0$ 時的過濾.

令 $\tau \geqslant 0$；於是 $e^{i\tau\lambda}$ 將在上半平面上是指數的抵消的，而且當我們把 $\Phi_\tau^{(\zeta)}(\lambda)$ 選成滿足條件 (2.14) 的 λ 有理函數時，可以使得當 $|\lambda|\to\infty$ 時加諸於 $\Phi_\tau^{(\zeta)}(\lambda)$ 及 $\Psi_\tau^{(\zeta)}(\lambda)$ 上的性質被滿足．但因 $\Phi_\tau^{(\zeta)}(\lambda)$ 只能在上半平面上具有奇點，而 $\Psi_\tau^{(\zeta)}(\lambda)=e^{i\tau\lambda}f_{\zeta\xi}(\lambda)-$ $-\Phi_\tau^{(\zeta)}(\lambda)f(\lambda)$ 只能在下半平面上具有奇點，所以 $\Phi_\tau^{(\zeta)}(\lambda)$ 唯一可能的奇點將是在點 $\beta_1, \cdots, \beta_M, \gamma_1, \cdots, \gamma_{L_1}$ 處的極點(每一極點的次數不超過這一敍列中相應點的重複次數)[1]．因此應令

$$\Phi_\tau^{(\zeta)}(\lambda)=\frac{\omega_\tau(\lambda)}{(\lambda-\beta_1)\cdots(\lambda-\beta_M)(\lambda-\gamma_1)\cdots(\lambda-\gamma_{L_1})}, \tag{2.20}$$

此處 $\omega_\tau(\lambda)$ 爲整函數． 這時欲使函數 $\Psi_\tau^{(\zeta)}(\lambda)$ 在上半平面上沒有奇點，需要 $\omega_\tau(\lambda)$ 在點 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$ 處等於零而且需要差數

$$e^{i\tau\lambda}D(\lambda)\overline{A(\lambda)}-\frac{B_0\omega_\tau(\lambda)\overline{B(\lambda)}\,(\lambda-\gamma_1')\cdots(\lambda-\gamma_{L_2}')}{(\lambda-\alpha_1)\cdots(\lambda-\alpha_N)}$$

在點 $\lambda=\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{L_1}$ 處等於零． 考慮到條件 (2.14) 可供我們把 $\omega_\tau(\lambda)$ 選成 $(N+L_1-1)$ 次的多項式，所以當敍列 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{L_1}$ 中沒有重根時，所求的函數 $\omega_\tau(\lambda)$ 可以由下面的關係定出：

$$\omega_\tau(\lambda)=(\lambda-\alpha_1)\cdots(\lambda-\alpha_N)\,\tilde{\omega}_\tau(\lambda), \tag{2.21}$$

此處

$$\tilde{\omega}_\tau(\lambda)=E_0\lambda^{L_1-1}+E_1\lambda^{L_1-2}+\cdots+E_{L_1-1}, \tag{2.22}$$

而且

$$\tilde{\omega}_\tau(\lambda)=e^{i\tau\lambda}\frac{D(\lambda)\overline{A(\lambda)}}{B_0\overline{B(\lambda)}(\lambda-\gamma_1')\cdots(\lambda-\gamma_{L_2})},\qquad 當\ \lambda=\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{L_1}. \tag{2.23}$$

若根 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{L_1}$ 中有重複時，令 γ_1 重複 i_1 次，γ_2 重複 i_2 次，…，γ_l 重複 i_l 次，而且 $i_1+i_2+\cdots+i_l=L_1$，這時方程 (2.23) 應換成下列方程

$$\left[\frac{d^j}{d\lambda^j}\tilde{\omega}_\tau(\lambda)\right]_{\lambda=\gamma_k}=\left[\frac{d^j}{d\lambda^j}\frac{D(\lambda)\overline{A(\lambda)}}{B_0\overline{B(\lambda)}\,(\lambda-\gamma_1')\cdots(\lambda-\gamma_{L_2}')}\right]_{\lambda=\gamma_k}, \tag{2.24}$$

$$j=0, 1, \cdots, (i_k-1);\qquad k=1, 2, \cdots, l.$$

所以無論在那種情形中，多項式 $\tilde{\omega}_\tau(\lambda)$ 由其相應的方程組唯一地確定．

現在讓我們轉向研究 $T=\infty$, $\tau<0$ 的情形．這時若把 $\Phi_\tau^{(\zeta)}(\lambda)$ 取成有理函數，則函數 $\Psi_\tau^{(\zeta)}(\lambda)$ 將在上半平面上指數增加，但這與條件 2) 矛盾． 可是在這種情形下

1) 實際上只是那種不同時是 $A(\lambda)$ 的根的 $\gamma_1, \cdots, \gamma_{L_1}$ 才可以是 $\Phi_\tau^{(\zeta)}(\lambda)$ 的極點；但是這種情況將被後面的公式（參看 (2.21)）顧及到，所以不必單獨地再考慮它．在這一節裏下面很多的論證中也可以加以與此相似的脚註．

我們能够使得所需要滿足的條件得到滿足，如果我們把 $\Phi_\tau^{(\zeta)}(\lambda)$ 取成下列形狀：

$$\Phi_\tau^{(\zeta)}(\lambda) = \Phi_\tau^{(1)}(\lambda) + e^{i\tau\lambda}\Phi_\tau^{(2)}(\lambda), \tag{2.25}$$

此處 $\Phi_\tau^{(1)}(\lambda)$ 及 $\Phi_\tau^{(2)}(\lambda)$ 是有理函數（當 $\tau<0$ 時，因子 $e^{i\tau\lambda}$ 當然不妨害 $\Phi_\tau^{(\zeta)}(\lambda)$ 在下半平面上是增加的而且不快於 $|\lambda|$ 的某一方次），(2.25)中的函數 $\Phi_\tau^{(1)}(\lambda)$ 及 $\Phi_\tau^{(2)}(\lambda)$ 應如此地選定使得它們滿足下列等式：

$$\left.\begin{aligned} f_{\zeta\xi}(\lambda) - \Phi_\tau^{(2)}(\lambda)\, f(\lambda) &= 0, \\ -\Phi_\tau^{(1)}(\lambda)\, f(\lambda) &= \Psi_\tau^{(\zeta)}(\lambda); \end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

由此就有

$$\Phi_\tau^{(2)}(\lambda) = \frac{f_{\zeta\xi}(\lambda)}{f(\lambda)} = \frac{|A(\lambda)|^2 D(\lambda)}{B_0|B(\lambda)|^2(\lambda-\gamma_1)\cdots(\lambda-\gamma_{L_1})(\lambda-\gamma_1')\cdots(\lambda-\gamma_{L_2}')} \tag{2.27}$$

及（因爲 $\Phi_\tau^{(1)}(\lambda) + e^{i\tau\lambda}\dfrac{f_{\zeta\xi}(\lambda)}{f(\lambda)}$ 應在下半平面內是分析的，而 $\Phi_\tau^{(1)}(\lambda)\, f(\lambda)$ 應在上半平面內是分析的）

$$\Phi_\tau^{(1)}(\lambda) = \frac{\omega_\tau(\lambda)}{(\lambda-\beta_1)\cdots(\lambda-\beta_M)(\lambda-\bar\beta_1)\cdots(\lambda-\bar\beta_M)(\lambda-\gamma_1')\cdots(\lambda-\gamma_{L_2}')}, \tag{2.28}$$

此處 $\omega_\tau(\lambda)$ 是整函數，在點 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$ 處爲零，而且使得和數 $\dfrac{\omega_\tau(\lambda)}{(\lambda-\alpha_1)\cdots(\lambda-\alpha_M)} +$ $+\, e^{i\tau\lambda}\dfrac{\overline{A(\lambda)}\, D(\lambda)}{B_0(\lambda-\gamma_1)\cdots(\lambda-\gamma_{L_1})}$ 在點 $\lambda = \bar\beta_1, \cdots, \bar\beta_M, \gamma_1', \cdots, \gamma_{L_2}'$ 處爲零．所以我們即可得到最終的解，如果令

$$\omega_\tau(\lambda) = (\lambda-\alpha_1)\cdots(\lambda-\alpha_N)\,\tilde\omega_\tau(\lambda), \tag{2.29}$$

$$\tilde\omega_\tau(\lambda) = E_0\lambda^{M+L_2-1} + E_1\lambda^{M+L_2-2} + \cdots + E_{M+L_2-1}, \tag{2.30}$$

此處 $M+L_2$ 個未定係數 E_k 由下列方程組唯一决定：

$$\tilde\omega_\tau(\lambda) + e^{i\tau\lambda}\frac{\overline{A(\lambda)}\, D(\lambda)}{B_0(\lambda-\gamma_1)\cdots(\lambda-\gamma_{L_1})} = 0, \qquad \text{當 } \lambda = \bar\beta_1, \cdots, \bar\beta_M, \gamma_1', \cdots, \gamma_{L_2}' \tag{2.31}$$

（我們在這裏認爲根 $\bar\beta_1, \cdots, \bar\beta_M, \gamma_1', \cdots, \gamma_{L_2}'$ 是單根，當不是單根時，上列方程組應當稍加改變，此處不擬贅述）．公式(2.25)，(2.27)，(2.28)，(2.29)，(2.30)及(2.31)完全定出當 $T=\infty$，$\tau<0$ 時的過濾譜特徵．

今令 T 爲有窮，在這種情形下，亦應分別討論 $\tau\geqslant 0$，$-T<\tau<0$ 及 $\tau\leqslant -T$ 的三種情形．若 $\tau\geqslant 0$，則過濾問題的解法完全與過程 $\xi(s)$ 的外推問題的解法相似；正如外推的解一樣，只應令

$$\Phi_{\tau,T}^{(\zeta)}(\lambda) = \Phi_{\tau,T}^{(1)}(\lambda) + e^{-iT\lambda}\Phi_{\tau,T}^{(2)}(\lambda), \tag{2.32}$$

此處 $\Phi_{\tau,T}^{(\zeta)}(\lambda)$ 是整函數，而 $\Phi_{\tau,T}^{(1)}(\lambda)$，$\Phi_{\tau,T}^{(2)}(\lambda)$ 是有理函數，並且

$$\left.\begin{aligned} e^{i\tau\lambda}f_{\zeta\xi}(\lambda)-\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)f(\lambda)&=\Psi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda),\\ -\Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)f(\lambda)&=\Psi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda).\end{aligned}\right\}\tag{2.33}$$

由此顯然可知 $\Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)$ 的任意一個極點，同時它不是 $f(\lambda)$ 的零點時，將是 $\Psi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)$ 的極點，而 $\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 的任意一個極點，同時它不是 $f(\lambda)$ 的零點也不是 $f_{\zeta\xi}(\lambda)$ 的極點時，將是 $\Psi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 的極點．因爲函數 $\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 及 $\Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)$ 的極點是相互重合的（因爲 $\Phi^{(\zeta)}_{\tau,T}(\lambda)$ 是整函數），而且 $\Psi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 只能在下半平面上有極點，$\Psi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)$ 只能在上半平面上有極點，所以由此推出 $\Phi^{(1)}_{\tau,T}$ 及 $\Phi^{(2)}_{\tau,T}$ 應寫成下列形狀：

$$\left.\begin{aligned} \Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)&=\frac{\omega^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)}{(\lambda-\beta_1)\cdots(\lambda-\beta_M)(\lambda-\bar\beta_1)\cdots(\lambda-\bar\beta_M)(\lambda-\gamma_1)\cdots(\lambda-\gamma_{L_1})},\\ \Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)&=\frac{\omega^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)}{(\lambda-\beta_1)\cdots(\lambda-\beta_M)(\lambda-\bar\beta_1)\cdots(\lambda-\bar\beta_M)(\lambda-\gamma_1)\cdots(\lambda-\gamma_{L_1})},\end{aligned}\right\}\tag{2.34}$$

此處 $\omega^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 及 $\omega^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)$ 是整函數，使得和數

$$\omega^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)+e^{-iT\lambda}\omega^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)$$

在點 $\bar\beta_1,\cdots,\bar\beta_M,\beta_1,\cdots,\beta_M,\gamma_1,\cdots,\gamma_{L_1}$ 處爲零（在這些點裏，凡是重複的點同時也必是上述和數的同樣次數的重根），而且使得差數

$$\frac{e^{i\tau\lambda}D(\lambda)}{(\lambda-\gamma'_1)\cdots(\lambda-\gamma'_{L_2})}-\frac{B_0\omega^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)}{|A(\lambda)|^2}$$

在點 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{L_1}$ 處爲零（對於重複的點也跟上述的情形一樣）．除此之外，$f(\lambda)$ 在上半平面上的極點應該在等式 (2.33) 中與函數 $\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 的零點相消，而 $f(\lambda)$ 在下半平面上的極點應該與 $\Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)$ 的零點相消，這就是說，

$$\left.\begin{aligned} \omega^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)&=(\lambda-\alpha_1)\cdots(\lambda-\alpha_N)\,\tilde\omega^{(1)}_{\tau,T}(\lambda),\\ \omega^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)&=(\lambda-\bar\alpha_1)\cdots(\lambda-\bar\alpha_N)\,\tilde\omega^{(2)}_{\tau,T}(\lambda),\end{aligned}\right\}\tag{2.35}$$

此處 $\tilde\omega^{(1)}_{\tau,T}$ 及 $\tilde\omega^{(2)}_{\tau,T}$ 仍是整函數．考慮到條件 (2.17) 及有關函數 $\Psi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 及 $\Psi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)$ 當 $|\lambda|\to\infty$ 時的消長速度的條件，欲使這些條件都被滿足，應令

$$\left.\begin{aligned} \tilde\omega^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)&=E^{(1)}_0\lambda^{M+L_1-1}+E^{(1)}_1\lambda^{M+L_1-2}+\cdots+E^{(1)}_{M+L_1-1},\\ \tilde\omega^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)&=E^{(2)}_0\lambda^{M+L_1-1}+E^{(2)}_1\lambda^{M+L_1-2}+\cdots+E^{(2)}_{M+L_1-1},\end{aligned}\right\}\tag{2.36}$$

這裏的 $2M+2L_1$ 個未知係數 $E^{(1)}_k$, $E^{(2)}_k$ 由下列條件唯一決定：

$$\left.\begin{aligned} &\tilde\omega^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)(\lambda-\alpha_1)\cdots(\lambda-\alpha_N)+e^{-iT\lambda}\tilde\omega^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)(\lambda-\bar\alpha_1)\cdots(\lambda-\bar\alpha_N)=0,\\ &\qquad\qquad\text{當}\quad \lambda=\bar\beta_1,\cdots,\bar\beta_M,\beta_1,\cdots,\beta_M,\gamma_1,\cdots,\gamma_{L_1};\\ &\tilde\omega^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)=e^{i\tau\lambda}\frac{D(\lambda)\overline{A(\lambda)}}{B_0(\lambda-\gamma'_1)\cdots(\lambda-\gamma'_{L_2})},\\ &\qquad\qquad\text{當}\quad \lambda=\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{L_1}\end{aligned}\right\}\tag{2.37}$$

(當具有重根時，這一組條件要改變一下，這與以前相似，不再贅述). 等式(2.32), (2.34), (2.35), (2.36) 及 (2.37) 給出當 T 為有窮 $\tau \geqslant 0$ 時過濾問題的最終解，當 $T \to \infty$ 這個解就趨於前面所找到的 $\Phi^{(\zeta)}_{\tau,\infty}(\lambda) = \Phi^{(\zeta)}_{\tau}(\lambda)$ 的表達式.

$\tau \leqslant -T$ 的情形不需要特別地加以考慮;這時只是需要把 (2.33) 代以

$$\left.\begin{aligned} -\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda) f(\lambda) &= \Psi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda), \\ e^{i(\tau+T)\lambda} f_{\zeta\xi}(\lambda) - \Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda) f(\lambda) &= \Psi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda), \end{aligned}\right\} \tag{2.38}$$

而且以後的論證就完全與 $\tau \geqslant 0$ 時的論證相似. 不難看出這時所得到的譜特徵與過濾譜特徵中的 τ 替以 $-\tau - T > 0$ 時之間的關係為

$$\Phi^{(\zeta)}_{\tau,T}(\lambda) = e^{-iT\lambda}\overline{\Phi_{-\tau-T,\,T}(\lambda)}, \tag{2.39}$$

這一公式表出來過濾問題中的"過去"及"將來"的對稱性(參看上面的 (1.41)).

$-T < \tau < 0$ 時的情形是比較複雜一些. 容易瞭解若把譜特徵 $\Phi^{(\zeta)}_{\tau,T}(\lambda)$ 選成 (2.32) 的形狀,在這裏是決不能使得條件 $1')$—$3')$ 被滿足,因為這時 $\Psi^{(\zeta)}_{\tau,T}(\lambda)$ 的表達式中的加項 $e^{i\tau\lambda} f_{\zeta\xi}(\lambda)$ 既不能歸入 $\Psi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 中也不能歸入 $\Psi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)$ 中. 但是如果回憶到當 $T = \infty$, $\tau < 0$ 時的譜特徵 (2.25) 的形狀,很自然地當 $-T < \tau < 0$ 時就該把函數 $\Phi^{(\zeta)}_{\tau,T}(\lambda)$ 選成下列形狀:

$$\Phi^{(\zeta)}_{\tau,T}(\lambda) = \Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda) + e^{i\tau\lambda}\Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda) + e^{-iT\lambda}\Phi^{(3)}_{\tau,T}(\lambda), \tag{2.40}$$

此處 $\Phi^{(\zeta)}_{\tau,T}$ 為整函數,而 $\Phi^{(1)}_{\tau,T}$, $\Phi^{(2)}_{\tau,T}$, $\Phi^{(3)}_{\tau,T}$ 為有理函數(我們在這一段裏把條件 $1')$ 取成更普遍的陳述形式正是為了使此成為可能). 現在欲使條件 $2')$ 也被滿足,應令

$$\left.\begin{aligned} -\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda) f(\lambda) &= \Psi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda), \\ f_{\zeta\xi}(\lambda) - \Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda) f(\lambda) &= 0, \\ -\Phi^{(3)}_{\tau,T}(\lambda) f(\lambda) &= \Psi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda). \end{aligned}\right\} \tag{2.41}$$

由此首先就有

$$\Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda) = \frac{f_{\zeta\xi}(\lambda)}{f(\lambda)} =$$

$$= \frac{D(\lambda)(\lambda-\alpha_1)\cdots(\lambda-\alpha_N)(\lambda-\bar\alpha_1)\cdots(\lambda-\bar\alpha_N)}{B_0(\lambda-\beta_1)\cdots(\lambda-\beta_M)(\lambda-\bar\beta_1)\cdots(\lambda-\bar\beta_M)(\lambda-\gamma_1)\cdots(\lambda-\gamma_{L_1})(\lambda-\gamma'_1)\cdots(\lambda-\gamma'_{L_2})}. \tag{2.42}$$

此外,因為函數 $\Psi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 在上半平面上是分析的,而函數 $\Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)$ 在下半平面上是分析的, 所以由 (2.41) 顯然可知 $\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 在上半平面上的極點只能是在點 $\beta_1, \cdots, \beta_M$ 上,而 $\Phi^{(3)}_{\tau,T}(\lambda)$ 在下半平面上的極點只能是在點 $\bar\beta_1, \cdots, \bar\beta_M$ 上, 而且 $\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 當 $\lambda = \alpha_1, \cdots, \alpha_N$ 時為零, $\Phi^{(3)}_{\tau,T}(\lambda)$ 當 $\lambda = \bar\alpha_1, \cdots, \bar\alpha_N$ 時為零. 又考慮到和數 (2.40) 本身應該是整函數,於是得知 $\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 及 $\Phi^{(3)}_{\tau,T}(\lambda)$ 應該是下列形狀:

$$\left.\begin{aligned}\Phi^{(1)}_{\tau, T}(\lambda) &= \frac{\omega^{(1)}_{\tau, T}(\lambda)(\lambda-\alpha_1)\cdots(\lambda-\alpha_N)}{(\lambda-\beta_1)\cdots(\lambda-\beta_M)(\lambda-\bar\beta_1)\cdots(\lambda-\bar\beta_M)(\lambda-\gamma'_1)\cdots(\lambda-\gamma'_{L_2})},\\ \Phi^{(3)}_{\tau, T}(\lambda) &= \frac{\omega^{(2)}_{\tau, T}(\lambda)(\lambda-\bar\alpha_1)\cdots(\lambda-\bar\alpha_N)}{(\lambda-\bar\beta_1)\cdots(\lambda-\bar\beta_M)(\lambda-\beta_1)\cdots(\lambda-\beta_M)(\lambda-\gamma_1)\cdots(\lambda-\gamma_{L_1})},\end{aligned}\right\} \quad (2.43)$$

此處 $\omega^{(1)}_{\tau, T}(\lambda)$ 及 $\omega^{(2)}_{\tau, T}(\lambda)$ 是整函數;條件(2.17)及關於當 $|\lambda|\to\infty$ 時函數 $\Psi^{(1)}_{\tau, T}(\lambda)$ 及 $\Psi^{(2)}_{\tau, T}(\lambda)$ 的消長速度的條件可供我們把 $\omega^{(1)}_{\tau, T}(\lambda)$ 選成 $(M+L_2-1)$(但不能更高)次的多項式,把 $\omega^{(2)}_{\tau, T}(\lambda)$ 選成 $(M+L_1-1)$(但不能更高)次的多項式. 還要欲使 $\Phi^{(\zeta)}_{\tau, T}(\lambda)$ 爲整函數這一條件被滿足,只要下列條件被滿足就够了:

$$\left.\begin{aligned}&\omega^{(1)}_{\tau, T}(\lambda)A(\lambda)(\lambda-\gamma_1)\cdots(\lambda-\gamma_{L_1})+\\ &\quad+e^{-iT\lambda}\omega^{(2)}_{\tau, T}(\lambda)\overline{A(\lambda)}(\lambda-\gamma'_1)\cdots(\lambda-\gamma'_{L_2})=-\frac{e^{i\tau\lambda}}{B_0}D(\lambda)|A(\lambda)|^2,\\ &\qquad\qquad \text{當}\quad \lambda=\beta_1,\cdots,\beta_M,\bar\beta_1,\cdots,\bar\beta_M;\\ &\omega^{(1)}_{\tau, T}(\lambda)(\lambda-\gamma_1)\cdots(\lambda-\gamma_{L_1})=-\frac{e^{i\tau\lambda}}{B_0}D(\lambda)\overline{A(\lambda)},\\ &\qquad\qquad \text{當}\ \lambda=\gamma'_1,\cdots,\gamma'_{L_2};\\ &\omega^{(2)}_{\tau, T}(\lambda)(\lambda-\gamma'_1)\cdots(\lambda-\gamma'_{L_2})=-\frac{e^{i(\tau+T)\lambda}}{B_0}D(\lambda)A(\lambda),\\ &\qquad\qquad \text{當}\quad \lambda=\gamma_1,\cdots,\gamma_{L_1}.\end{aligned}\right\} \quad (2.44)$$

這一組條件唯一地決定了 $\omega^{(1)}_{\tau, T}$ 及 $\omega^{(2)}_{\tau, T}$ 的多項式的係數 $E^{(1)}_k$, $E^{(2)}_k$:

$$\left.\begin{aligned}\omega^{(1)}_{\tau, T}(\lambda)&=E^{(1)}_0\lambda^{M+L_2-1}+E^{(1)}_1\lambda^{M+L_2-2}+\cdots+E^{(1)}_{M+L_2-1},\\ \omega^{(2)}_{\tau, T}(\lambda)&=E^{(2)}_0\lambda^{M+L_2-1}+E^{(2)}_1\lambda^{M+L_2-2}+\cdots+E^{(2)}_{M+L_2-1}.\end{aligned}\right\} \quad (2.45)$$

公式(2.40),(2.42),(2.43),(2.44)及(2.45)給出當 $-T<\tau<0$ 時求過濾譜特徵的規則. 容易驗證當 $T\to\infty$ 時,這一譜特徵趨於前面得到的 $\Phi^{(\zeta)}_{\tau}(\lambda)$.

這裏所得到的關於 $T=\infty$, $\tau\geqslant 0$ 及 $\tau<0$; T 爲有窮, $\tau\geqslant 0$, $\tau\leqslant -T$ 及 $-T<\tau<0$ 諸情形的過濾譜特徵的公式可供我們在這些種情形中把過濾算子的形狀求出(即在這些種情形中通過過程 $\xi(s)$ 的已知值來表達 $\tilde\zeta(t+\tau)$). 當 $T=\infty$ 及 $\tau\geqslant 0$ 時,依照公式(2.20),量 $\tilde\zeta(t+\tau)$ 將要表爲過程 $\xi(s)$ 本身及一直到 $\xi(s)$ 所可能具有的最高級的導數在時候 t(我們所可能達到的最末尾的時候)時之值的線性組合,再加上展佈於過程的所有過去的、具有指數抵消的加權函數的某些個積分的線性組合(參看外推問題同樣的結論). 當 $T=\infty$ 及 $\tau<0$ 時,依照公式(2.25)應該在過程 $\xi(s)$ 及其導數在時候 t 時之值的線性組合上再加上過程 $\xi(s)$ 及其導數在時候 $t+\tau$(這也是可以達到的時候)時之值的線性組合;此外展佈於過程 $\xi(s)$ 所有過去的積分的加權函數,在這種情形下可以在點 $s=t+\tau$ 處發生一個間斷. 當 T 爲有窮

及 $\tau \geqslant 0$ 時，顯然由公式 (2.32) 可知量 $\tilde{\zeta}(t+\tau)$ 將表為過程 $\xi(s)$ 及其導數在時候 t 及 $t-T$ (所可能達到的開頭及末尾的時候)時之值的線性組合，再加上展佈於過程 $\xi(s)$ 的已知值的某些積分．當 $\tau \leqslant -T$ 時 $\tilde{\zeta}(t+\tau)$ 也可表為相仿的形狀(這裏和 $\tau \geqslant 0$ 時比較，間隔 $(t-T, t)$ 的端點的作用恰恰交換過來，而積分限從 $t-T$ 到 T 應換成從 T 到 $t-T$，加權函數不變)．最後當 $-T<\tau<0$ 時，由於公式 (2.40)，$\hat{\zeta}(t+\tau)$ 將表為過程 $\xi(s)$ 及其導數在時候 $t, t-T$ 及 $t+\tau$ 時之值的線性組合，再加上展佈於過程所有已知值的、且具有在點 $t+\tau$ 處發生間斷的加權函數的某些積分．

例．現在舉一個具有實際意義的例子：

$$f(\lambda)=\frac{B(\lambda^2+\beta^2)}{(\lambda^2+\alpha_1^2)(\lambda^2+\alpha_2^2)}, \qquad f_{\zeta\xi}(\lambda)=\frac{D}{\lambda^2+\alpha_1^2} \tag{2.46}$$

(參看 [18]，136 頁)．當 $T=\infty$ 及 $\tau \geqslant 0$ 時，由 (2.20)，(2.21) 及 (2.22) 譜特徵將等於

$$\Phi_\tau^{(\zeta)}(\lambda)=\frac{E_0(\lambda-i\alpha_1)(\lambda-i\alpha_2)}{(\lambda-i\beta)(\lambda-i\alpha_1)}=E_0\frac{\lambda-i\alpha_2}{\lambda-i\beta}, \tag{2.47}$$

此處常數 E_0 由條件 (2.23) 決定：

$$E_0=\frac{D}{B}e^{-\alpha_1\tau}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\beta}. \tag{2.48}$$

依公式 (2.47)，$\tilde{\zeta}(t+\tau)$ 可以表為

$$\tilde{\zeta}(t+\tau)=E_0\left[\xi(t)+(\alpha_2-\beta)\int_0^\infty e^{-\beta s}\xi(t-s)\,ds\right]. \tag{2.49}$$

當 $T=\infty$ 及 $\tau<0$ 時，應該利用公式(2.25)，(2.27)，(2.28)，(2.29) 及 (2.30)；這時

$$\Phi_\tau^{(\zeta)}(\lambda)=\frac{(E_0\lambda+E_1)(\lambda-i\alpha_1)(\lambda-i\alpha_2)}{(\lambda^2+\beta^2)(\lambda+i\alpha_1)}+\frac{D}{B}e^{i\tau\lambda}\frac{\lambda^2+\alpha_2^2}{\lambda^2+\beta^2}, \tag{2.50}$$

此處係數 E_0 及 E_1 依公式 (2.31) 來決定，即依下列方程組來決定：

$$\left.\begin{aligned} &E_0\beta+iE_1=-\frac{D}{B}e^{-\beta|\tau|}\frac{(\alpha_1-\beta)(\alpha_2-\beta)}{\alpha_1+\beta}, \\ &E_0\alpha_1+iE_1=0. \end{aligned}\right\} \tag{2.51}$$

簡單計算即得

$$\Phi_\tau^{(\zeta)}(\lambda)=\frac{D}{B}e^{-\beta|\tau|}\frac{\alpha_2-\beta}{\alpha_1+\beta}\frac{(\lambda-i\alpha_1)(\lambda-i\alpha_2)}{\lambda^2+\beta^2}+\frac{D}{B}e^{i\tau\lambda}\frac{\lambda^2+\alpha_2^2}{\lambda^2+\beta^2}, \tag{2.52}$$

容易驗證當 $\tau=0$ 時，此公式就變成公式 (2.47) 和 (2.48) 當 $\tau=0$ 時的結果，而當 $\tau\to-\infty$ 時，此公式就變成公式 (2.6) 當 $\tau\to-\infty$ 時的結果 (當 $\tau\to-\infty$ 時，量 $\tilde{\zeta}(t+\tau)$ 與量 $\zeta(t+\tau)$ 無窮盡地接近)．相應於譜特徵 (2.52) 的 $\tilde{\zeta}(t+\tau)$ 的顯明

公式爲

$$\tilde{\zeta}(t+\tau)=\frac{D}{B}\Big\{\xi(t+\tau)+\frac{\alpha_2-\beta}{\alpha_1+\beta}\Big[e^{-\beta|\tau|}\xi(t)+$$
$$+\frac{e^{-\beta|\tau|}}{2\beta}\int_0^{|\tau|}\{(\alpha_1+\beta)(\alpha_2+\beta)e^{\beta s}-(\alpha_1-\beta)(\alpha_2-\beta)e^{-\beta s}\}\xi(t-s)\,ds+$$
$$+\frac{(\alpha_1+\beta)(\alpha_2+\beta)e^{\beta|\tau|}-(\alpha_1-\beta)(\alpha_2-\beta)e^{-\beta|\tau|}}{2\beta}\int_{|\tau|}^{\infty}e^{-\beta s}\xi(t-s)\,ds\Big]\Big\};\qquad(2.53)$$

當 $\tau=0$ 時 (2.53) 變爲公式 (2.49) 當 $\tau=0$ 時的結果，而當 $\tau\to-\infty$ 時 (2.53) 變爲

$$\tilde{\zeta}(t+\tau)=\frac{D}{B}\Big\{\xi(t+\tau)+\frac{\alpha_2^2-\beta^2}{2\beta}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta|s|}\xi(t+\tau-s)\,ds\Big\}.\qquad(2.54)$$

現在令 T 爲有窮而 $\tau\geqslant 0$. 這時由 (2.32), (2.34), (2.35) 及 (2.36) 就有

$$\Phi_{\tau,T}^{(\zeta)}(\lambda)=\frac{(E_0^{(1)}\lambda+E_1^{(1)})(\lambda-i\alpha_2)}{\lambda^2+\beta^2}+e^{-iT\lambda}\frac{(E_0^{(2)}\lambda+E_1^{(2)})(\lambda+i\alpha_1)(\lambda+i\alpha_2)}{(\lambda^2+\beta^2)(\lambda-i\alpha_1)},\qquad(2.55)$$

這裏的未知係數 $E_0^{(1)}, E_1^{(1)}, E_0^{(2)}$ 及 $E_1^{(2)}$ 由條件 (2.37) 決定，這時條件 (2.37) 應爲下列形狀：

$$\left.\begin{aligned}&(iE_0^{(1)}\beta+E_1^{(1)})(\alpha_1-\beta)(\alpha_2-\beta)+(iE_0^{(2)}\beta+E_1^{(2)})e^{\beta T}(\alpha_1+\beta)(\alpha_2+\beta)=0,\\&(iE_0^{(1)}\beta-E_1^{(1)})(\alpha_1+\beta)(\alpha_2+\beta)+(iE_0^{(2)}\beta-E_1^{(2)})e^{-\beta T}(\alpha_1-\beta)(\alpha_2-\beta)=0,\\&iE_0^{(2)}\alpha_1+E_1^{(2)}=0,\\&iE_0^{(1)}\alpha_1+E_1^{(1)}=i\frac{D}{B}e^{-\alpha_1\tau}(\alpha_1+\alpha_2).\end{aligned}\right\}\qquad(2.56)$$

經過一些計算,我們得到

$$\Phi_{\tau,T}^{(\zeta)}(\lambda)=\frac{D}{B}e^{-\alpha_1\tau}(\alpha_1+\alpha_2)\Big[\frac{E^{(1)}(\lambda-i\alpha_1)(\lambda-i\alpha_2)+(\alpha_2+i\lambda)}{\lambda^2+\beta^2}+$$
$$+e^{-iT\lambda}\frac{E^{(2)}(\lambda+i\alpha_1)(\lambda+i\alpha_2)}{\lambda^2+\beta^2}\Big],\qquad(2.57)$$

此處

$$\left.\begin{aligned}E^{(1)}&=\frac{(\alpha_1+\beta)(\alpha_2+\beta)^2e^{\beta T}-(\alpha_1-\beta)(\alpha_2-\beta)^2e^{-\beta T}}{(\alpha_1+\beta)^2(\alpha_2+\beta)^2e^{\beta T}-(\alpha_1-\beta)^2(\alpha_2-\beta)^2e^{-\beta T}},\\E^{(2)}&=\frac{2(\alpha_2^2-\beta^2)\beta}{(\alpha_1+\beta)^2(\alpha_2+\beta)^2e^{\beta T}-(\alpha_1-\beta)^2(\alpha_2-\beta)^2e^{-\beta T}};\end{aligned}\right\}\qquad(2.58)$$

容易看出當 $T\to\infty$ 時,公式 (2.57) 變成 (2.47). 這裏的 $\tilde{\zeta}(t+\tau)$ 的顯明形狀應爲

$$\tilde{\zeta}(t+\tau)=\frac{D}{B}e^{-\alpha_1\tau}(\alpha_1+\alpha_2)\Big[E^{(1)}\xi(t)+E^{(2)}\xi(t-T)+$$
$$+\frac{E^{(2)}}{2\beta}\int_0^T\{(\alpha_1+\beta)(\alpha_2+\beta)e^{\beta(T-s)}-(\alpha_1-\beta)(\alpha_2-\beta)e^{-\beta(T-s)}\}\xi(t-s)ds\Big].\qquad(2.59)$$

由此立刻可以得到當 $\tau \leqslant -T$ 時的 $\tilde{\zeta}(t+\tau)$ 的表達式（參看 §1 中由 (1.55) 變到 (1.55′)）.

最後，考慮 $-T<\tau<0$ 時的情形．這時，依公式 (2.40), (2.42), (2.43) 及 (2.45) 可知過濾譜特徵等於

$$\Phi_{\tau, T}^{(\zeta)}(\lambda)=\frac{\left(E_0^{(1)} \lambda+E_1^{(1)}\right)\left(\lambda-i \alpha_1\right)\left(\lambda-i \alpha_2\right)}{\left(\lambda^2+\beta^2\right)\left(\lambda+i \alpha_1\right)}+\frac{D}{B} e^{i \tau \lambda} \frac{\lambda^2+\alpha_2^2}{\lambda^2+\beta^2}+ + e^{-i T \lambda} \frac{\left(E_0^{(2)} \lambda+E_1^{(2)}\right)\left(\lambda+i \alpha_1\right)\left(\lambda+i \alpha_2\right)}{\left(\lambda^2+\beta^2\right)\left(\lambda-i \alpha_1\right)}, \qquad (2.60)$$

由 (2.60) 可知未定係數 $E_0^{(1)}, E_1^{(1)}, E_0^{(2)}$ 及 $E_1^{(2)}$ 由下列方程組決定：

$$\left.\begin{aligned}
& i E_0^{(1)} \alpha_1-E_1^{(1)}=0, \\
& i E_0^{(2)} \alpha_1+E_1^{(2)}=0, \\
& E_0^{(1)}\left(\alpha_1+\beta\right)\left(\alpha_2+\beta\right)+E_0^{(2)} e^{-\beta T}\left(\alpha_1-\beta\right)\left(\alpha_2-\beta\right)=\frac{D}{B} e^{\beta \tau}\left(\alpha_2^2-\beta^2\right), \\
& E_0^{(1)}\left(\alpha_1-\beta\right)\left(\alpha_2-\beta\right)+E_0^{(2)} e^{\beta T}\left(\alpha_1+\beta\right)\left(\alpha_2+\beta\right)=\frac{D}{B} e^{-\beta \tau}\left(\alpha_2^2-\beta^2\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (2.61)$$

把中間的簡單計算步驟省略不寫，其最後的答案為

$$\Phi_{\tau, T}^{(\zeta)}=\frac{D}{B\left(\lambda^2+\beta^2\right)}\left\{E^{(1)}\left(\lambda-i \alpha_1\right)\left(\lambda-i \alpha_2\right)+e^{i \tau \lambda}\left(\lambda^2+\alpha_2^2\right)+ + E^{(2)} e^{-i T \lambda}\left(\lambda+i \alpha_1\right)\left(\lambda+i \alpha_2\right)\right\}, \qquad (2.62)$$

此處

$$\left.\begin{aligned}
E^{(1)} & =\frac{\left(\alpha_2^2-\beta^2\right)\left[\left(\alpha_1+\beta\right)\left(\alpha_2+\beta\right) e^{\beta(T+\tau)}-\left(\alpha_1-\beta\right)\left(\alpha_2-\beta\right) e^{-\beta(T+\tau)}\right]}{\left(\alpha_1+\beta\right)^2\left(\alpha_2+\beta\right)^2 e^{\beta T}-\left(\alpha_1-\beta\right)^2\left(\alpha_2-\beta\right)^2 e^{-\beta T}}, \\
E^{(2)} & =\frac{\left(\alpha_2^2-\beta^2\right)\left[\left(\alpha_1+\beta\right)\left(\alpha_2+\beta\right) e^{-\beta \tau}-\left(\alpha_1-\beta\right)\left(\alpha_2-\beta\right) e^{\beta \tau}\right]}{\left(\alpha_1+\beta\right)^2\left(\alpha_2+\beta\right)^2 e^{\beta T}-\left(\alpha_1-\beta\right)^2\left(\alpha_2-\beta\right)^2 e^{-\beta T}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.63)$$

當 $T \rightarrow \infty$ 時，公式 (2.62) 變為 (2.52)，而當 $\tau=0$ 時，公式 (2.62) 所給的結果與公式 (2.57) 當 $\tau=0$ 時的結果一樣．由此我們即可得到 $\tilde{\zeta}(t+\tau)$ 的表達式

$$\begin{aligned}
\tilde{\zeta}(t+\tau)= & \frac{D}{B}\left\{E^{(1)} \xi(t)+\xi(t+\tau)+E^{(2)} \xi(t-T)+\right. \\
& +\frac{E^{(1)}}{2 \beta} \int_0^{|\tau|}\left[\left(\alpha_1+\beta\right)\left(\alpha_2+\beta\right) e^{\beta s}-\left(\alpha_1-\beta\right)\left(\alpha_2-\beta\right) e^{-\beta s}\right] \xi(t-s) d s+ \\
& \left.+\frac{E^{(2)}}{2 \beta} \int_{|\tau|}^T\left[-\left(\alpha_1-\beta\right)\left(\alpha_2-\beta\right) e^{-\beta(T-s)}+\left(\alpha_1+\beta\right)\left(\alpha_2+\beta\right) e^{\beta(T-s)}\right] \xi(t-s) d s\right\}. \qquad (2.64)
\end{aligned}$$

當 $T \rightarrow \infty$ 時，公式 (2.64) 變為 (2.53).

§ 3. 平穩過程的線性內插

對於具有均值爲零的及有理譜密度的平穩隨機過程的外推及過濾問題的上述求解方法，也可以用來解決過程 $\xi(s)$ 的線性內插問題，即由此過程在半線 $s \leqslant t$ 及 $s \geqslant t+T$ 上的已知值，求此過程在時候 $t+\tau$ 時之值 $\xi(t+\tau)$ 的最佳線性逼近 $\tilde{\xi}(t+\tau)$ 問題．正如在本文中所有的各處一樣，所謂“最佳”者乃是在最小二乘方的意義下的最佳，所以問題就變爲在空間 H_ξ 中從“點” $\xi(t+\tau)$ 向子空間 $H^*_{\xi;t,T}$ 作垂線的問題，此處子空間 $H^*_{\xi;t,T}$ 乃是由 $\xi(s)$ 在 $s \leqslant t$ 或 $s \geqslant t+T$ 時的諸向量集合所張成的子空間；這一垂線的垂足 $\tilde{\xi}(t+\tau)$ 就是我們所要尋求的逼近．顯然 $\tilde{\xi}(t+\tau)$ 可以表爲下列形狀

$$\tilde{\xi}(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \Phi^*_{\tau,T}(\lambda)\, dZ(\lambda), \tag{3.1}$$

此處函數 $\Phi^*_{\tau,T}(\lambda)$ 乃是在空間 L_F 中從點 $e^{i\tau\lambda}$ 作到子空間 $L^*_{F,T}$ 的垂線的垂足，而子空間 $L^*_{F,T}$ 是函數 $e^{is\lambda}$ 當 $s \leqslant 0$ 或 $s \geqslant T$ 時的線性簇的閉包．顯見，內插的均方差 $\sigma^2_{\tau,T}$ 可以用 $\Phi^*_{\tau,T}(\lambda)$ 表達出來，其公式爲

$$\begin{aligned}\sigma^2_{\tau,T} &= \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\tau\lambda} - \Phi^*_{\tau,T}(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau\lambda}[e^{i\tau\lambda} - \Phi^*_{\tau,T}(\lambda)]\, f(\lambda)\, d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi^*_{\tau,T}(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda,\end{aligned} \tag{3.2}$$

這一公式與外推問題中所用到的公式 (1.7) 及 (1.7′) 是沒有不同的地方．當然，函數 $\Phi^*_{\tau,T}(\lambda)$ 稱爲**內插的譜特徵**，而內插問題就變爲尋求這一函數的問題．

顯見，函數 $\Phi^*_{\tau,T}(\lambda)$ 由下列兩個條件唯一地決定：

a) $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}[e^{i\tau\lambda} - \Phi^*_{\tau,T}(\lambda)]\, f(\lambda)\, d\lambda = 0, \qquad \text{當 } s \geqslant 0 \text{ 或 } s \leqslant -T \tag{3.3}$$

(這裏在一開頭就假設了過程 $\xi(s)$ 具有譜密度，亦即 (1.9) 能成立) 及

б) $$\Phi^*_{\tau,T}(\lambda) \in L^*_{F,T}. \tag{3.4}$$

現在我們說明，當我們把函數 $\Phi^*_{\tau,T}(\lambda)$ 看作是複變數 λ 的函數時，而在此函數的性質上加上某些限制之後，就能使得上述兩個條件被滿足．

首先註明：條件 (3.3) 一定能够被滿足，如果函數

$$\Psi^*_{\tau,T}(\lambda) = [e^{i\tau\lambda} - \Phi^*_{\tau,T}(\lambda)]\, f(\lambda) \tag{3.5}$$

可以開拓到 λ 的複數域上，使得它在整個平面上是分析的(整函數)，而且在上半平面上

是減的但不慢於 $|\lambda|^{-1-\varepsilon}$，$\varepsilon>0$，同時函數 $e^{-iT\lambda}\Psi_{\tau,T}^{*}(\lambda)$ 在下半平面上是減的而且不慢於 $|\lambda|^{-1-\varepsilon}$，$\varepsilon>0$. 事實上，在這些限制之下，把哥西定理應用於函數 $e^{is\lambda}\Psi_{\tau,T}^{*}(\lambda)$ 上，積分的迴線包括實軸線段 $(-R, R)$ 及上半平面上的以 R 爲半徑的半圓周，這時我們就可證明當 $s\geqslant 0$ 時，等式(3.3)成立；同樣應用哥西定理於函數 $e^{is\lambda}\Psi_{\tau,T}^{*}(\lambda)$ 上，但積分迴線包括實軸線段 $(-R, R)$ 及下半平面上的以 R 爲半徑的半圓周，我們就可證明當 $s\leqslant -T$ 時，等式(3.3)成立. 欲使條件(3.4)也被滿足，我們需要有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_{\tau,T}^{*}(\lambda)|^2 f(\lambda)\,d\lambda<\infty \tag{3.6}$$

(亦即需要函數 $\Phi_{\tau,T}^{*}(\lambda)$ 屬於 L_F) 及需要這一函數可以表爲下列形狀：

$$\Phi_{\tau,T}^{*}(\lambda)=\Phi_{\tau,T}^{(1)}(\lambda)+e^{iT\lambda}\Phi_{\tau,T}^{(2)}(\lambda), \tag{3.7}$$

此處函數 $\Phi_{\tau,T}^{(1)}(\lambda)$ 在下半平面是分析的，而函數 $\Phi_{\tau,T}^{(2)}(\lambda)$ 在上半平面是分析的，都屬於 L_F，並且在相應的半平面上當 $|\lambda|\to\infty$ 時，它們是增的但不快於 $|\lambda|$ 的某一方次. 事實上，加諸於 $\Phi_{\tau,T}^{(1)}(\lambda)$ 上的條件顯然與 §1 中加諸於函數 $\Phi_\tau(\lambda)=\Phi_{\tau,\infty}(\lambda)$ 上的條件(參看 166 頁)是一樣的，由此顯然得知 $\Phi_{\tau,T}^{(1)}(\lambda)$ 屬於子空間 L_F^-，而 L_F^- 是由 L_F 中函數 $e^{is\lambda}$ 當 $s\leqslant 0$ 時的一切線性簇閉包；可以用完全相似的方法證明 $\Phi_{\tau,T}^{(2)}(\lambda)$ 屬於子空間 L_F^+，而 L_F^+ 是由函數 $e^{is\lambda}$ 當 $s\geqslant 0$ 時的一切線性簇的閉包. 於是 $e^{iT\lambda}\Phi_{\tau,T}^{(2)}(\lambda)$ 將屬於由函數族 $e^{is\lambda}$，$s\geqslant T$ 所張成的子空間，所以函數 $\Phi_{\tau,T}^{(1)}(\lambda)$ 及 $e^{iT\lambda}\Phi_{\tau,T}^{(2)}(\lambda)$ 屬於 $L_{F,T}^{*}$；由此顯然知道在這些條件之下，(3.4)被滿足.

由上討論可知：使函數 $\Phi_{\tau,T}^{*}(\lambda)$ 是過程 $\xi(s)$ 的內插譜特徵的充分條件爲：

1) 函數 $\Phi_{\tau,T}^{*}(\lambda)$ 寫爲下列形狀：

$$\Phi_{\tau,T}^{*}(\lambda)=\Phi_{\tau,T}^{(1)}(\lambda)+e^{iT\lambda}\Phi_{\tau,T}^{(2)}(\lambda),$$

此處 $\Phi_{\tau,T}^{(1)}(\lambda)$ 及 $\Phi_{\tau,T}^{(2)}(\lambda)$ 是有理函數，而 $\Phi_{\tau,T}^{(1)}(\lambda)$ 在下半平面內沒有奇點，$\Phi_{\tau,T}^{(2)}(\lambda)$ 在上半平面內沒有奇點；

2) 函數 $\Psi_{\tau,T}^{*}(\lambda)=[e^{i\tau\lambda}-\Phi_{\tau,T}^{*}(\lambda)]f(\lambda)$ 是 λ 的整函數，在上半平面上當 $|\lambda|\to\infty$ 時，它是減的但不慢於 $|\lambda|^{-1-\varepsilon}$，$\varepsilon>0$，而在下半平面上當 $|\lambda|\to\infty$ 時，函數 $e^{-iT\lambda}\Psi_{\tau,T}^{*}(\lambda)$ 是減的但不慢於 $|\lambda|^{-1-\varepsilon}$，$\varepsilon>0$；

3) $$\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_{\tau,T}^{(1)}(\lambda)|^2 f(\lambda)\,d\lambda<\infty,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_{\tau,T}^{(2)}(\lambda)|^2 f(\lambda)\,d\lambda<\infty. \tag{3.8}$$

現在讓我們證明，當 $f(\lambda)$ 是由公式(1.28)及(1.29)給出時，上列各條件皆被滿足.

事實上，在這種情形下

$$\Psi_{\tau,T}^{*}(\lambda)=[e^{i\tau\lambda}-\Phi_{\tau,T}^{(1)}(\lambda)-e^{iT\lambda}\Phi_{\tau,T}^{(2)}(\lambda)]\frac{B_0(\lambda-\beta_1)\cdots(\lambda-\beta_M)(\lambda-\bar\beta_1)\cdots(\lambda-\bar\beta_M)}{(\lambda-\alpha_1)\cdots(\lambda-\alpha_N)(\lambda-\bar\alpha_1)\cdots(\lambda-\bar\alpha_N)}.$$

因爲 $\Psi_{\tau,T}^{*}(\lambda)$ 應該是整函數,而 $\Phi_{\tau,T}^{(1)}(\lambda)$ 及 $\Phi_{\tau,T}^{(2)}(\lambda)$ 是有理函數,並且分別在下半平面及上半平面內沒有奇點,所以顯然應有

$$\Phi_{\tau,T}^{(1)}(\lambda)=\frac{\omega_{\tau,T}^{(1)}(\lambda)}{(\lambda-\beta_1)\cdots(\lambda-\beta_M)},\qquad \Phi_{\tau,T}^{(2)}(\lambda)=\frac{\omega_{\tau,T}^{(2)}(\lambda)}{(\lambda-\bar\beta_1)\cdots(\lambda-\bar\beta_M)},\tag{3.9}$$

此處 $\omega_{\tau,T}^{(1)}(\lambda)$, $\omega_{\tau,T}^{(2)}(\lambda)$ 是整函數. 現在十分容易看出欲使條件 1)—3) 皆被滿足,只應該把 $\omega_{\tau,T}^{(1)}(\lambda)$ 及 $\omega_{\tau,T}^{(2)}(\lambda)$ 選成是 λ 的 $(N-1)$ 次多項式即可:

$$\left.\begin{aligned}\omega_{\tau,T}^{(1)}(\lambda)&=C_0^{(1)}\lambda^{N-1}+C_1^{(1)}\lambda^{N-2}+\cdots+C_{N-1}^{(1)},\\ \omega_{\tau,T}^{(2)}(\lambda)&=C_0^{(2)}\lambda^{N-1}+C_1^{(2)}\lambda^{N-2}+\cdots+C_{N-1}^{(2)},\end{aligned}\right\}\tag{3.10}$$

其中的 $2N$ 個未知係數由下列 $2N$ 個線性方程來决定:

$$\omega_{\tau,T}^{(1)}(\lambda)\,\overline{B(\lambda)}+\omega_{\tau,T}^{(2)}(\lambda)\,e^{iT\lambda}B(\lambda)=e^{i\tau\lambda}\,|B(\lambda)|^2,\tag{3.11}$$

$$\text{當}\quad \lambda=\alpha_1,\cdots,\alpha_N,\bar\alpha_1,\cdots,\bar\alpha_N$$

(當 $A(\lambda)$ 具有重根時,上列方程組變成像方程組 (1.33) 的樣子). 公式 (3.7), (3.9), (3.10) 及 (3.11) 唯一地定出來具有有理譜密度的過程的內插譜特徵,所以內插問題得到完滿的答案. 當 $T\to\infty$ 時,顯然函數 $\Phi_{\tau,T}^{*}(\lambda)$ 就變成外推譜特徵 $\Phi_{\tau,\infty}(\lambda)=\Phi_\tau(\lambda)$ (參看 §1).

特別言之,當 $B(\lambda)\equiv 1$ 時,容易由 (3.9)及(3.10) 看出函數 $\Phi_{\tau,T}^{(1)}(\lambda)$ 及 $\Phi_{\tau,T}^{(2)}(\lambda)$ 是多項式;由此推知當 $B(\lambda)\equiv 1$ 時,逼近值 $\tilde\xi(t+\tau)$ 將要表爲過程 $\xi(s)$ 及其所有的導數在點 $s=t$ 及 $s=t-T$ (過程 $\xi(s)$ 的未知值間隔的兩端)處之值的線性組合. 在普遍情形中,公式(3.9)及(3.10)告訴我們 $\tilde\xi(t+\tau)$ 的表達式中除了包括上述的線性組合之外,還包括兩個積分項,這兩個積分分別地展佈於半線 $s\leqslant t$ 及 $s\geqslant t+T$ 上;這兩個積分中的加權函數是由 $B(\lambda)$ 的離實軸最近的根的虛份來規定其速度的指數抵消函數.

當然上面所述的關於內插問題的解法不難推廣於:不是估計過程 $\xi(s)$ 在點 $t+\tau$ 之值,而是估計任何一個與過程 $\xi(s)$ 平穩相依的過程 $\zeta(s)$ (參看 §2) 在 $t+\tau$ 之值;或者所要估計的 $\xi(s)$ 的未知值不是在一個間隔中,而是在幾個不相聯的間隔中;這裏不擬詳述這些推廣.

例.

1) 若 $f(\lambda)=\dfrac{B}{\lambda^2+\alpha^2}$ (“馬爾可夫型的過程”,參看 [18]),則立刻有:

$$\Phi_{\tau,T}^{*}(\lambda)=\frac{\operatorname{sh}\alpha(T-\tau)}{\operatorname{sh}\alpha T}+\frac{\operatorname{sh}\alpha\tau}{\operatorname{sh}\alpha T}\,e^{iT\lambda}.\tag{3.12}$$

由此得到 $\xi(t+\tau)$ 最佳線性逼近的簡單公式

$$\tilde{\xi}(t+\tau)=\frac{\operatorname{sh}\alpha(T-\tau)}{\operatorname{sh}\alpha T}\xi(t)+\frac{\operatorname{sh}\alpha\tau}{\operatorname{sh}\alpha T}\xi(t+T). \tag{3.13}$$

2）若 $f(\lambda)=\dfrac{B(\lambda^2+\alpha^2)}{\lambda^4+\alpha^4}$，則依公式 (3.7), (3.9) 及 (3.10)

$$\Phi_{\tau,T}^{*}(\lambda)=\frac{C_0^{(1)}\lambda+C_1^{(1)}}{\lambda-i\alpha}+e^{iT\lambda}\frac{C_0^{(2)}\lambda+C_1^{(2)}}{\lambda+i\alpha}=$$

$$=C_0^{(1)}+e^{iT\lambda}C_0^{(2)}+\frac{iC^{(1)}}{\lambda-i\alpha}+e^{iT\lambda}\frac{iC^{(2)}}{\lambda+i\alpha}. \tag{3.14}$$

條件(3.11)給我們求定未知係數 $C_0^{(1)}, C_0^{(2)}, C_1^{(1)}$ 及 $C_1^{(2)}$（或 $C_0^{(1)}, C_0^{(2)}, C^{(1)}$ 及 $C^{(2)}$）的一組包含四個線性方程的方程組．由此不難求出這些係數的表達式，但是其計算是相當煩重的，此處不擬給出．由公式(3.14)就可以找到 $\xi(t+\tau)$ 的最佳逼近值 $\tilde{\xi}(t+\tau)$，其形狀為

$$\tilde{\xi}(t+\tau)=C_0^{(1)}\xi(t)+C_0^{(2)}\xi(t+T)+C^{(1)}\int_0^\infty e^{-\alpha s}\xi(t-s)\,ds+$$

$$+C^{(2)}\int_0^\infty e^{-\alpha s}\xi(t+T+s)\,ds. \tag{3.15}$$

§4. 依平穩過程在有窮的時間間隔上的值來估計此過程的均值

令 $\xi_1(s)=\xi(s)+m$，此處 $\xi(s)$ 是一個平穩隨機過程，它的均值等於零，它的相關函數 $B(\tau)$ 所對應的譜密度為(1.28)，而 m 是一個未知常數，它是平穩過程 $\xi_1(s)$ 的均值．讓我們研究尋求一個線性依賴於過程 $\xi_1(s)$ 在有窮間隔 $t-T\leqslant s\leqslant t$ 上的值的 m 值的最佳（在最小二乘方的意義下的）無偏估計問題．下面將要說明可以藉助本文前幾節中所採用推理的類似推理，求得這一問題的解．

由 (1.3) 可知過程 $\xi_1(s)$ 容許有一個譜展式，其形狀為

$$\xi_1(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{is\lambda}\,dZ_1(\lambda),\qquad Z_1(\lambda)=Z(\lambda)+m\varepsilon(\lambda), \tag{4.1}$$

此處 $Z(\lambda)$ 就是 (1.3) 中所出現的隨機函數，其均值為零，而且具有非相關的增量，而 $\varepsilon(\lambda)$ 是簡單“跳躍函數”（функция скачка）：

$$\varepsilon(\lambda)=\begin{cases}0, & \text{當}\ \lambda\leqslant 0;\\ 1, & \text{當}\ \lambda>0.\end{cases} \tag{4.2}$$

以有窮個變量 $\xi_1(s_k)$ 所組成的線性組合的敍列，其均方收斂的極限是 $\xi_1(s)$，$-\infty<s<\infty$ 的線性泛函；所有這樣的一切可能的線性泛函組成了具有有窮離差隨機變量

的希爾伯特空間 H 中的一個子空間 H_{ξ_1}；所有這些汎函統統由下列公式表出：

$$\tilde{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda)\, dZ_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda)\, dZ(\lambda) + m\Phi(0), \tag{4.3}$$

此處函數 $\Phi(\lambda)$ 乃是依測度 $dF_1(\lambda) = f(\lambda)d\lambda + |m|^2 d\varepsilon(\lambda)$ 爲平方可積的函數(參看前面的公式(1.5))．我們需要從這些汎函中尋求滿足下列條件的那一個汎函：

1）不依賴於過程 $\xi_1(s)$ 在間隔 $t-T \leqslant s \leqslant t$ 外的值；

2）其均值等於 m；

3）滿足條件 1）及 2）而且其離差爲最小者．

這一最優（оптимальный）(以值 m 的估計的觀點來看)汎函記以 $\tilde{m}_T$．

因爲過程 $\xi_1(s)$ 是平穩的，容易推知

$$\tilde{m}_T = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \Phi_T(\lambda) dZ_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \Phi_T(\lambda)\, dZ(\lambda) + m\Phi_T(0), \tag{4.4}$$

此處 $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_T(\lambda)\, dZ_1(\lambda)$ 乃是線性依賴於過程 $\xi_1(s)$ 在間隔 $-T \leqslant s \leqslant 0$ 中的值的值 m 的最佳線性估計．所以問題只在於如何確定函數 $\Phi_T(\lambda)$．顯見加諸於 $\tilde{m}_T$ 上的條件 2）(無偏估計條件）可以化爲條件

$$\Phi_T(0) = 1. \tag{4.5}$$

如果函數 $\Phi_T(\lambda)$ 是變數 λ 的整函數，而且可以表爲

$$\Phi_T(\lambda) = \Phi_T^{(1)}(\lambda) + e^{-iT\lambda}\Phi_T^{(2)}(\lambda), \tag{4.6}$$

此處 $\Phi_T^{(1)}(\lambda)$ 及 $\Phi_T^{(2)}(\lambda)$ 是有理函數，同時又有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_T(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda < \infty, \tag{4.7}$$

那末由本文 §1 的推理可知條件 1）必被滿足(參看 167—168 頁)．爲了闡明條件 3）對於函數 $\Phi_T(\lambda)$ 加了什麼限制，讓我們作如下的討論．首先令

$$\tilde{m}_n = \sum_{k=1}^{n} C_k \xi_1(s_k), \qquad \sum_{k=1}^{n} C_k = 1, \tag{4.8}$$

這就是說，$\tilde{m}_n$ 是值 m 的無偏估計，表爲值 $\xi_1(s_k)$，$k = 1, 2, \cdots, n$ 的線性組合的形狀；所有這樣的估計形成了空間 H_{ξ_1} 中由向量 $\xi_1(s_1), \cdots, \xi_1(s_n)$[1] 所張成的 n 維子空間裏的 $(n-1)$ 維的超越平面．估值 $\tilde{m}_n$ 的離差顯然等於 $\mathbf{M}|\tilde{m}_n|^2 - |m|^2$，這就是說，離差與向量 $\tilde{m}_n$ 的範數只相差一個常數．所有 $\tilde{m}_n$ 這些向量當中的與坐標原點最近的那一個向量，亦即由原點向 $(n-1)$ 維超越平面 (4.8) 所作垂線的垂足，使離差

1）若這些向量是線性相依的，則所考慮的子空間及超越平面的維數當然將要減低；在今後的討論中並不假定這種情况，所以可以不予以注意．

爲最小．由此推出使得形如 (4.8) 的值 m 的估計滿足離差爲最小的條件等價於下列一組等式

$$(\widetilde{m}_n, \xi_1(s_k) - \widetilde{m}_n) \equiv \mathbf{M}\widetilde{m}_n \overline{[\xi_1(s_k) - \widetilde{m}_n]} = 0, \qquad k = 1, 2, \cdots, n, \tag{4.9}$$

這一組等式唯一地決定 (4.8) 中的係數 $C_1, C_2, \cdots, C_n$.

現在考慮一可數無窮的而在間隔 $t-T \leqslant s \leqslant t$ 中處處稠密的點集：$s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$．當過程 $\xi_1(s)$ 對於 s 爲連續時（均方意義的），不難看出形如(4.8)的、m 的具有最小離差的無偏估計敍列(即當 $n \to \infty$ 時，滿足條件 (4.9) 的估計量 (4.8)) 將要均方收斂於線性依賴於 $\xi_1(s)$ 在間隔 $t-T \leqslant s \leqslant t$ 中的值的、具有最小離差的無偏估計，亦即均方收斂於我們所欲尋求的估計量 $\widetilde{m}_T$，這一估計量在我們所考慮的情形下是永遠存在的(參看 [12])．因此，估計量 $\widetilde{m}_T$ 具有下述的性質：對於間隔 $t-T \leqslant s \leqslant t$ 中處處稠密點集，它滿足等式 (4.9)，亦即

$$\mathbf{M}\widetilde{m}_T \overline{[\xi_1(s) - \widetilde{m}_T]} = 0, \qquad t-T \leqslant s \leqslant t, \tag{4.10}$$

而且這一條件可以從線性依賴於 $\xi_1(s)$ 在間隔 $t-T \leqslant s \leqslant t$ 中的值的、m 的所有的無偏估計當中唯一地挑選出 $\widetilde{m}_T$ 來(這一事實的另一證明可以參看 [12])． 把等式 (4.4) 及 (1.3) 代入 (4.10)中，而且聯系到 (1.4) 及 (1.9)，我們可以推斷：條件 3) 與下列條件是等價的：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}\Phi_T(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda = k, \qquad 0 \leqslant s \leqslant T, \tag{4.11}$$

此處

$$k = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_T(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda = \sigma^2_{\widetilde{m}_T} \tag{4.12}$$

是一個常數等於估計量 $\widetilde{m}_T$ 的離差．

現在讓我們證明等式 (4.11) 可以寫成與 (1.19) 相似的形狀．爲此目的，首先註明由於過程 $\xi_1(s)$ 是連續的，在等式 (4.10) 中的條件 $t-T \leqslant s \leqslant t$ 可以換成較弱的條件 $t-T < s < t$：即若 (4.10) 對於滿足 $t-T < s < t$ 的一切 s 都能成立，則由連續性可知 (4.10) 對於 $s=t$ 及 $s=t-T$ 時也能成立． 因此，在 (4.11) 中，$0 \leqslant s \leqslant T$ 可以換爲 $0 < s < T$[1)]．但因顯然有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda} \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^T e^{-i\nu\lambda}\, d\nu\right\} d\lambda \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}\, \frac{1-e^{-iT\lambda}}{2\pi i\lambda}\, d\lambda = 1, \tag{4.13}$$

$$\text{當 } 0 < s < T,$$

1) 當然，也可以在以前的某些條件 (例如在 (1.19)) 中引用與這兒相似的對於間隔的推論．但是在這以前並無這種必要，所以在前面並沒有提起這一問題．

所以當 $0<s<T$ 時,條件 (4.11) 可以寫爲下列形狀:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}\Psi_T(\lambda)\,d\lambda=0, \qquad 0<s<T, \tag{4.14}$$

此處

$$\Psi_T(\lambda)=\Phi_T(\lambda)\,f(\lambda)-k\frac{1-e^{-iT\lambda}}{2\pi i\lambda}; \tag{4.15}$$

等式 (4.14) 是與 (1.19) 相似的. 此外,引用以前處理 (1.19) 時所用到的推理,我們推出:條件 (4.14) 必被滿足,如果函數 $\Psi_T(\lambda)$ 可以表爲下列形狀:

$$\Psi_T(\lambda)=\Psi_T^{(1)}(\lambda)+e^{-iT\lambda}\Psi_T^{(2)}(\lambda), \tag{4.16}$$

此處 $\Psi_T^{(1)}(\lambda)$ 是上半平面上的分析函數, $\Psi_T^{(2)}(\lambda)$ 是下半平面上的分析函數,而且在相應的半平面上當 $|\lambda|\to\infty$ 時,這兩個函數均勻地趨於零(在這裏放鬆了如在 167 頁中所列的有關函數 $\Psi^{(1)}$ 及 $\Psi^{(2)}$ 減少的速度的條件,因爲當我們把間隔 $0\leqslant s\leqslant T$ 的端點去掉之後,我們就能够引用若當引理了). 所以,尋求估計量 $\widetilde{m}_T$ (亦即函數 $\Phi_T(\lambda)$) 的問題已經化爲了一個新的問題,這一新問題與本文的前面的問題很接近,而且容有相似的解答.

把 (4.15) 及 (4.6) 代入 (4.16) 之後,當然要使

$$\Phi_T^{(1)}(\lambda)\,f(\lambda)-\frac{k}{2\pi i\lambda}=\Psi_T^{(1)}(\lambda), \tag{4.17}$$

$$\Phi_T^{(2)}(\lambda)\,f(\lambda)+\frac{k}{2\pi i\lambda}=\Psi_T^{(2)}(\lambda) \tag{4.17$'$}$$

(參看 (1.35)), 我們假定 $f(\lambda)$ 由公式 (1.28) 及 (1.29) 給出,而且不要忘記函數 (4.6) 應爲整函數,函數 (4.17) 是上半平面上的分析函數,而函數 (4.17′) 是下半平面上的分析函數,我們立刻得到

$$\left.\begin{aligned}\Phi_T^{(1)}(\lambda)&=\frac{\omega_T^{(1)}(\lambda)(\lambda-\alpha_1)\cdots(\lambda-\alpha_N)}{\lambda(\lambda-\beta_1)\cdots(\lambda-\beta_M)(\lambda-\bar\beta_1)\cdots(\lambda-\bar\beta_M)},\\ \Phi_T^{(2)}(\lambda)&=\frac{\omega_T^{(2)}(\lambda)(\lambda-\bar\alpha_1)\cdots(\lambda-\bar\alpha_N)}{\lambda(\lambda-\beta_1)\cdots(\lambda-\beta_M)(\lambda-\bar\beta_1)\cdots(\lambda-\bar\beta_M)},\end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

此處 $\omega_T^{(1)}(\lambda)$ 及 $\omega_T^{(2)}(\lambda)$ 是整函數,由 (4.7) 可知,這兩個函數可以是 M 次 (不能再高次)的多項式. 這時聯想到 (4.6),(4.17),(4.17′)及(4.5),以及加諸於 $\Phi_T(\lambda)$, $\Psi_T^{(1)}(\lambda)$, $\Psi_T^{(2)}(\lambda)$ 上有關分析性的條件,我們即知 $\omega_T^{(1)}(\lambda)$ 及 $\omega_T^{(2)}(\lambda)$ 應當滿足下列條件:

$$\omega_T^{(1)}(\lambda)\,A(\lambda)+e^{-iT\lambda}\omega_T^{(2)}(\lambda)\,\overline{A(\lambda)}=0, \tag{4.19}$$

$$\text{當}\quad \lambda=0,\ \beta_1,\ \cdots,\ \beta_M,\ \bar\beta_1,\ \cdots,\ \bar\beta_M$$

(爲簡單起見我們認爲 $B(\lambda)$ 的根是不相同的;否則這個條件要改寫爲與(1.33)相似的

形狀)，

$$2\pi i \frac{B_0}{\overline{A}_N} \omega_T^{(1)}(0) = k, \qquad 2\pi i \frac{B_0}{A_N} \omega_T^{(2)}(0) = -k, \tag{4.20}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\omega_T^{(1)}(\lambda)\, A(\lambda) + e^{-iT\lambda} \omega_T^{(2)}(\lambda)\, \overline{A(\lambda)}}{\lambda\, |B(\lambda)|^2} = 1. \tag{4.21}$$

我們註明這些條件不是彼此獨立的，由等式 (4.19) 中的第一個 (即當 $\lambda = 0$ 時) 可知 (4.20) 中的兩個條件是等價的，所以其中的一個可以去掉． 於是總共剩下了 $2M+3$ 個條件；而這些條件可以被滿足，若令

$$\left.\begin{aligned} \omega_T^{(1)}(\lambda) &= C_0^{(1)}\lambda^M + C_1^{(1)}\lambda^{M-1} + \cdots + C_M^{(1)}, \\ \omega_T^{(2)}(\lambda) &= C_0^{(2)}\lambda^M + C_1^{(2)}\lambda^{M-1} + \cdots + C_M^{(2)}; \end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

於是這 $2M+3$ 個未知常數 $C_i^{(1)}, C_i^{(2)}$ 及 k 由方程組 (4.19), (4.20) 及 (4.21) 唯一決定． 公式 (4.6), (4.18), (4.22), (4.19) 及 (4.21) 完全解決了依平穩隨機過程 $\xi_1(s)$ 在間隔 $t-T \leqslant s \leqslant t$ 中的值，而尋求此過程均值 m 的最佳無偏線性估計量 $\widetilde{m}_T$ 的問題；不難驗證這之後由公式 (4.20) 所定義的常數 k 事實上即等於積分 (4.12) 之值，這也正是應該如此的． 用這種方法所得到的量 $\widetilde{m}_T$ 顯然要表爲過程 $\xi_1(s)$ 及其所有的導數在端點 $s=t$ 及 $s=t-T$ 時的值的線性組合，再加上具有分析加權函數的 $\xi_1(s)$ 於全間隔 $t-T \leqslant s \leqslant t$ 上的某些積分 (參看本文前幾節的相似結論及下面的例)．

仍須註明，由等式 (4.21) 及 (4.20) 可以推出下列的極限關係：

$$\lim_{T\to\infty} [kT] = 2\pi f(0), \qquad \sigma^2_{\widetilde{m}_T} = k \sim \frac{2\pi}{T} f(0), \qquad 當\ T \to \infty. \tag{4.23}$$

但容易驗證對於均值的簡單估計量亦即算術平均

$$\mu_T = \frac{1}{T} \int_0^T \xi_1(t-s)\, ds \tag{4.24}$$

的離差也滿足上述極限關係．這樣一來

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\sigma^2_{\widetilde{m}_T}}{\sigma^2_{\mu_T}} = 1, \tag{4.25}$$

但是對於任意的有窮的 T，當然 $\sigma^2_{\mu_T} > \sigma^2_{\widetilde{m}_T}$． 等式 (4.25) 表明在線性無偏估計類中估計量 μ_T 是漸近有效的；它還說明對於具有 (1.28) 形狀的譜密度的過程，當 T 很大時，最佳估計量 $\widetilde{m}_T$ 比起用算術平均 μ_T 而求得的均值 m 的簡單估計量來並無本質上的優越性 (還可參看 [12]，在那裏只對於較狹一類的平穩過程，證明了估計量 μ_T 的漸近有效性)．

例.

1) 令 $f(\lambda)=\frac{B}{\lambda^2+\alpha^2}$; 於是立刻得到

$$\Phi_T(\lambda)=\frac{C_1(\lambda-i\alpha)}{\lambda}+\frac{C_2e^{-iT\lambda}(\lambda+i\alpha)}{\lambda}=$$

$$=C_1+C_2e^{-iT\lambda}-\frac{i\alpha(C_1-C_2e^{-iT\lambda})}{\lambda}, \tag{4.26}$$

此處 $C_1=C_2=\frac{\alpha k}{2\pi B}$, $C_1+C_2+\alpha TC_2=1$. 總之

$$\Phi_T(\lambda)=\frac{1+e^{-iT\lambda}}{2+\alpha T}+\frac{\alpha}{2+\alpha T}\,\frac{1-e^{-iT\lambda}}{i\lambda}=$$

$$=\frac{1}{2+\alpha T}\left\{1+e^{-iT\lambda}+\alpha\int_{-T}^{0}e^{is\lambda}\,ds\right\}, \tag{4.27}$$

由此可以看出,在這種情形下均值 m 的最佳線性估計量具有下列形狀:

$$\widetilde{m}_T=\frac{\xi_1(t)+\xi_1(t-T)+\alpha\int_0^T\xi_1(t-s)\,ds}{2+\alpha T}. \tag{4.28}$$

這個估計量的離差等於

$$\sigma^2_{\widetilde{m}_T}=k=\frac{2\pi BC_1}{\alpha}=\frac{2\pi B}{\alpha(2+\alpha T)};$$

對於任意 T, 此離差小於算術平均的離差

$$\sigma^2_{\mu_T}=\frac{2\pi B}{\alpha}\cdot\frac{e^{-\alpha T}-1+\alpha T}{\alpha^2T^2},$$

但當 T 很大時 (與 $\frac{1}{\alpha}$ 比較), 這兩個離差都漸近於 $\frac{2\pi B}{\alpha^2 T}$.

2) 讓我們考察一個更普遍的情形,即其譜密度為下式的情形:

$$f(\lambda)=\frac{1}{|A_0(i\lambda)^N+\cdots+A_{N-1}(i\lambda)+A_N|^2}. \tag{4.29}$$

我們設想過程 $\xi_1(s)$ 是實值的;於是係數 $A_0,\cdots,A_{N-1},A_N$ 也是實數 (正因為如此, 把 (4.29) 中的分母寫為 $i\lambda$ 的多項式, 而不寫為 λ 的多項式是便利的). 依 (4.6), (4.18), (4.22), (4.19) 及 (4.21) 就有

$$\Phi_T(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\{C_1[A_0(i\lambda)^N+\cdots+A_{N-1}(i\lambda)+A_N]+$$

$$+e^{-iT\lambda}C_2[A_0(-i\lambda)^N+\cdots+A_{N-1}(-i\lambda)+A_N]\}, \tag{4.30}$$

此處

$$C_1 + C_2 = 0, \qquad (C_1 - C_2)\, iA_{N-1} - iTC_2A_N = 1. \tag{4.31}$$

因此

$$C_1 = -C_2 = \frac{1}{i(2A_{N-1} + A_NT)}, \tag{4.32}$$

而 m 的最佳估計量爲下列形狀：

$$\widetilde{m}_T = \frac{\sum_{l=1}^{N} A_{N-l}\,[\xi_1^{(l-1)}(t) + (-1)^{l-1}\xi_1^{(l-1)}(t-T)] + A_N\int_0^T \xi_1(t-s)\,ds}{2A_{N-1} + A_NT}. \tag{4.33}$$

這一最佳估計量的離差由公式 (4.20) 確定，它等於

$$\sigma^2_{\widetilde{m}_T} = k = \frac{2\pi i C_1}{A_N} = \frac{2\pi}{A_N(2A_{N-1} + A_NT)}. \tag{4.34}$$

我們看到當譜密度 (1.28) 中 $B(\lambda) = 1$ 時，均值的最佳線性估計量只依賴於過程 $\xi_1(s)$ 及其導數在觀察間隔端點處之值及觀察值的算術平均 μ_T.

3) 最後一個例子. 設過程的譜密度爲 $f(\lambda) = B\dfrac{\lambda^2 + \alpha^2}{\lambda^4 + \alpha^4}$. 這時

$$\Phi_T(\lambda) = \frac{(C_0^{(1)}\lambda + C_1^{(1)})(\lambda^2 - i\sqrt{2}\alpha\lambda - \alpha^2) + e^{-iT\lambda}(C_0^{(2)}\lambda + C_1^{(2)})(\lambda^2 + i\sqrt{2}\alpha\lambda - \alpha^2)}{\lambda(\lambda^2 + \alpha^2)};$$

因爲如果把這個函數展成部分分式，那末對於今後是很便利的，所以我們在一開頭時最好把它表爲下列形狀：

$$\Phi_T(\lambda) = C_0 + \frac{C_1}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda - i\alpha} + \frac{C_3}{\lambda + i\alpha} + {} + e^{-iT\lambda}\left(C'_0 + \frac{C'_1}{\lambda} + \frac{C'_2}{\lambda - i\alpha} + \frac{C'_3}{\lambda + i\alpha}\right), \tag{4.35}$$

其中的係數 C_k, C'_k ($k = 0, 1, 2, 3$) 是待定的. 因爲 $\Phi_T(\lambda)$ 是整函數，所以顯然要有

$$C_1 + C'_1 = 0, \qquad C_2 + C'_2e^{\alpha T} = 0, \qquad C_3 + C'_3e^{-\alpha T} = 0, \tag{4.36}$$

這些等式與條件 (4.19) 是等價的. 此外，因爲函數 $\Phi_T^{(1)}(\lambda)$ 應該在密度函數 $f(\lambda)$ 的上半平面上的極點處變爲零，而函數 $\Phi_T^{(2)}(\lambda)$ 應該在密度函數 $f(\lambda)$ 的下半平面上的極點處變爲零，於是應有

$$\left.\begin{aligned} \Phi_T^{(1)}(\lambda) &= C_0 + \frac{C_1}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda - i\alpha} + \frac{C_3}{\lambda + i\alpha} = 0, \quad 當\ \lambda = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\alpha,\ \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\alpha, \\ \Phi_T^{(2)}(\lambda) &= C'_0 + \frac{C'_1}{\lambda} + \frac{C'_2}{\lambda - i\alpha} + \frac{C'_3}{\lambda + i\alpha} = 0, \quad 當\ \lambda = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\alpha,\ \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{4.37}$$

通過這些方程及 (4.36)，可以使我們很容易地以 C_1 表達 $C_0, C_2, C_3, C_0', C_1', C_2', C_3'$. 於是，只剩下了由正則化條件 (4.21) (或 (4.5)) 來確定 C_1，這一條件現在可以寫爲下列形狀：

$$C_0+C_0'+iTC_1+\frac{iC_2(1-e^{-\alpha T})}{\alpha}+\frac{iC_3(e^{\alpha T}-1)}{\alpha}=1. \tag{4.38}$$

最後得到

$$\left.\begin{aligned}
C_0&=C_0'=\left[\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\frac{\alpha T}{2}+\mathrm{ch}\frac{\alpha T}{2}\right]\cdot d,\\
C_1&=-C_1'=-i\alpha\left[\mathrm{sh}\frac{\alpha T}{2}+\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\frac{\alpha T}{2}\right]\cdot d,\\
C_2&=-C_2'e^{\alpha T}=\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}e^{\frac{\alpha T}{2}}\cdot d,\\
C_3&=-C_3'e^{-\alpha T}=\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\alpha T}{2}}\cdot d,
\end{aligned}\right\} \tag{4.39}$$

此處常數 d 等於

$$d=\left[(2+\alpha T\sqrt{2})\,\mathrm{ch}\frac{\alpha T}{2}+\alpha T\,\mathrm{sh}\frac{\alpha T}{2}\right]^{-1}. \tag{4.40}$$

由此可以得到過程均值的最佳估計量 $\widetilde{m}_T$ 可以寫爲

$$\begin{aligned}
\widetilde{m}_T=d\Big\{&\left(\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\frac{\alpha T}{2}+\mathrm{ch}\frac{\alpha T}{2}\right)[\xi_1(t)+\xi_1(t-T)]+\\
&+\alpha\left(\mathrm{sh}\frac{\alpha T}{2}+\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\frac{\alpha T}{2}\right)\int_0^T\xi_1(t-s)\,ds-\\
&-\sqrt{2}\,\alpha\int_0^T\mathrm{ch}\left(s-\frac{T}{2}\right)\xi_1(t-s)\,ds\Big\}.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

由 (4.20) 可以定出這一估計量的離差：

$$\sigma^2_{\widetilde{m}_T}=k=\frac{2\pi iBC_1}{\alpha^2}=\frac{2\pi B\left(\mathrm{sh}\frac{\alpha T}{2}+\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\frac{\alpha T}{2}\right)}{\alpha(2+\alpha T\sqrt{2})\,\mathrm{ch}\frac{\alpha T}{2}+\alpha^2T\,\mathrm{sh}\frac{\alpha T}{2}}; \tag{4.42}$$

當 $T\gg\frac{1}{\alpha}$ 時，顯見 $\sigma^2\sim\frac{2\pi B}{\alpha^2 T}$，這恰是應該如此的。

§ 5. 具有未知均值的平穩過程的外推及過濾

現在讓我們考察平穩隨機過程 $\xi_1(s)=\xi(s)+m$ 在有窮間隔 $t-T\leqslant s\leqslant t$ 上

為已知時，此過程的線性外推問題．我們假設相關函數

$$B(\tau) = \mathbf{M}[\xi_1(s+\tau) - m]\overline{[\xi_1(s) - m]} = \mathbf{M}\xi(s+\tau)\overline{\xi(s)}$$

為已知，而且由公式 (1.1) 確定之，其中的 $F(\lambda)$ 的形狀由公式 (1.9) 給出，而那裏的 $f(\lambda)$ 等於公式 (1.28) 中的函數．這時我們將需要變量 $\xi_1(t+\tau)$ 的預測值 $\tilde{\xi}_1(t+\tau)$ 的均值與這一變量的眞正均值 m 相等，這就是說，我們只考慮無偏線性外推；如果我們對於值 m 毫無所知時，這種看法是完全自然的．過程 $\xi_1(t)$ 的最佳線性無偏外推問題在於：從所有的線性依賴於 $\xi_1(s)$ 在間隔 $t-T \leqslant s \leqslant t$ 上的值的、變量 $\xi_1(t+\tau)$ 的無偏估計量中，尋求那一個，使得外推的均方差

$$\sigma_\tau^2 = \mathbf{M}|\xi_1(t+\tau) - \tilde{\xi}_1(t+\tau)|^2 \tag{5.1}$$

為最小；這裏我們將要研究這一問題，正如均值估計問題中一樣，我們可以把所尋求的估計量表為下列形狀：

$$\tilde{\xi}_1(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\tilde{\Phi}_{\tau,T}(\lambda)\,dZ_1(\lambda) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\tilde{\Phi}_{\tau,T}(\lambda)\,dZ(\lambda) + m\tilde{\Phi}_{\tau,T}(0), \tag{5.2}$$

而找出函數 $\tilde{\Phi}_{\tau,T}(\lambda)$．這時，估計的無偏性這一條件變為下列條件：

$$\tilde{\Phi}_{\tau,T}(0) = 1. \tag{5.3}$$

如果 $\tilde{\Phi}_{\tau,T}(\lambda)$ 是 λ 的整函數，並且

$$\tilde{\Phi}_{\tau,T}(\lambda) = \Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda) + e^{-iT\lambda}\Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda), \tag{5.4}$$

此處 $\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 及 $\Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)$ 是有理函數，同時使得

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\Phi}_{\tau,T}(\lambda)|^2 f(\lambda)\,d\lambda < \infty \tag{5.5}$$

時，那末 $\tilde{\xi}_1(t+\tau)$ 與過程 $\xi_1(s)$ 在間隔 $t-T \leqslant s \leqslant t$ 之外的值必定無關．所剩下的只是要闡明：使式子(5.1)為最小這一條件把什麼條件加到函數 $\tilde{\Phi}_{\tau,T}(\lambda)$ 上．正如導出等式 (4.10) 時一樣，我們得到這一條件等價於下列的要求：

$$\mathbf{M}[\tilde{\xi}_1(t+\tau) - \xi_1(t+\tau)]\overline{[\xi_1(s) - \tilde{\xi}_1(t+\tau)]} = 0, \qquad t-T < s < t \tag{5.6}$$

(間隔 $[t-T, t]$ 的端點，在一開始時我們就排除於考察之外，參看 191 頁)．把(5.2)及 (1.3) 代入上式，便得：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}[\tilde{\Phi}_{\tau,T}(\lambda) - e^{i\tau\lambda}] f(\lambda)\,d\lambda = k_\tau, \qquad 0 < s < T, \tag{5.7}$$

此處常數 k_τ 等於

$$k_\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\Phi}_{\tau,T}(\lambda)|^2 f(\lambda)\,d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda}\tilde{\Phi}_{\tau,T}(\lambda)\,d\lambda. \tag{5.8}$$

顯見,等式 (5.7) 可以表爲與 (4.14) 相似的形狀:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}\widetilde{\Psi}_{\tau,T}(\lambda)\,d\lambda = 0, \qquad 0 < s < T, \tag{5.9}$$

此處

$$\widetilde{\Psi}_{\tau,T}(\lambda) = [\tilde{\Phi}_{\tau,T}(\lambda) - e^{i\tau\lambda}]\,f(\lambda) - k_\tau \frac{1 - e^{-iT\lambda}}{2\pi i\lambda}; \tag{5.10}$$

這一條件必被滿足,如果 $\widetilde{\Psi}_{\tau,T}(\lambda)$ 可以表爲下列形狀:

$$\widetilde{\Psi}_{\tau,T}(\lambda) = \Psi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda) + e^{-iT\lambda}\Psi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda), \tag{5.11}$$

此處 $\Psi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 及 $\Psi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)$ 分别是上及下半平面內的分析函數,而且在相應的半平面上,當 $|\lambda| \to \infty$,它們一致地趨於零. 下面的推理步驟完全和上一節的推理步驟相似;所以當 $\tau > 0$ 時,確定函數 $\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 及 $\Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)$ 的公式應爲下列形狀:

$$\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda) = \frac{\omega^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)}{\lambda|B(\lambda)|^2}, \qquad \Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda) = \frac{\omega^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)}{\lambda|B(\lambda)|^2}; \tag{5.12}$$

$$\omega^{(1)}_{\tau,T}(\lambda) = \sum_{k=0}^{M+N} C^{(1)}_k \lambda^k, \qquad \omega^{(2)}_{\tau,T}(\lambda) = \sum_{k=0}^{M+N} C^{(2)}_k \lambda^k; \tag{5.13}$$

$$\left.\begin{aligned} &\omega^{(1)}_{\tau,T}(\lambda) = e^{i\tau\lambda}\lambda|B(\lambda)|^2, && \text{當 } \lambda = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N;\\ &\omega^{(2)}_{\tau,T}(\lambda) = 0, && \text{當 } \lambda = \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \cdots, \bar{\alpha}_N; \end{aligned}\right\} \tag{5.14}$$

$$\omega^{(1)}_{\tau,T}(\lambda) + e^{-iT\lambda}\omega^{(2)}_{\tau,T}(\lambda) = 0, \quad \text{當 } \lambda = 0, \beta_1, \cdots, \beta_M, \bar{\beta}_1, \cdots, \bar{\beta}_M; \tag{5.15}$$

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\omega^{(1)}_{\tau,T}(\lambda) + e^{-iT\lambda}\omega^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)}{\lambda|B(\lambda)|^2} = 1; \tag{5.16}$$

$$2\pi i \frac{B_0}{|A_N|^2}\,\omega^{(1)}_{\tau,T}(0) = 2\pi i \frac{B_0}{|A_N|^2}\,\omega^{(2)}_{\tau,T}(0) = k_\tau. \tag{5.17}$$

等式 (5.14), (5.15) 及 (5.16) 是包含 $2N + 2M + 2$ 個方程的方程組,它决定 $2N + + 2M + 2$ 個未知係數 $C^{(1)}_k$, $C^{(2)}_k$; 關係式 (5.17) 决定 (5.8) 中所說的那個常數 k_τ. 仍需註明: 如果對於相應的譜密度我們已經知道當均值爲零時的外推的譜特徵 $\Phi_{\tau,T}(\lambda)$ 及過程 $\xi_1(s)$ 的均值的最佳無偏線性估計公式 (4.4) 中所指出的函數 $\Phi_T(\lambda)$ 時,那末我們可以立刻得到上面所求的函數 $\tilde{\Phi}_{\tau,T}(\lambda)$. 事實上,令

$$\tilde{\Phi}_{\tau,T}(\lambda) = \Phi_{\tau,T}(\lambda) - [\Phi_{\tau,T}(0) - 1]\,\Phi_T(\lambda); \tag{5.18}$$

於是由 (1.24), (1.36), (4.6) 及 (4.18) 可知函數 $\tilde{\Phi}_{\tau,T}(\lambda)$ 是 λ 的整函數,可以表爲 (5.4),而且 $\Phi^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 及 $\Phi^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)$ 是 (5.12) 的形狀,其中的 $\omega^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 及 $\omega^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)$ 是次數不高於 $M + N$ 的多項式,並且由(1.38), (4.18), (4.19) 及 (4.21)可知 $\omega^{(1)}_{\tau,T}(\lambda)$ 及 $\omega^{(2)}_{\tau,T}(\lambda)$ 滿足條件 (5.14), (5.15) 及 (5.16). 這樣一來,函數 (5.18) 就是等式(5.2)中

所出現的那個函數．公式 (5.18) 具有很簡明的意義：它指出來

$$\tilde{\xi}_1(t+\tau) = \tilde{\xi}_{t+\tau}\{\xi_1(s) - \tilde{m}_T\} + \tilde{m}_T, \tag{5.19}$$

此處 $\tilde{\xi}_{t+\tau}\{\xi_1(s) - \tilde{m}_T\}$ 是把過程 $\xi(s)$，當 $\mathbf{M}\xi(s) = 0$ 時的最佳外推公式（亦即本文 §1 中的外推公式）裏的過程 $\xi(s)$ 代以過程 $\xi_1(s) - \tilde{m}_T$ 後而得來的[1)]．這樣一來，已知過程 $\xi_1(s)$ 在有窮間隔上的值，而求此過程的最佳線性無偏外推時，只需要先依過程的已知值，求過程均值的最佳無偏估計量 $\tilde{m}_T$，然後再求差數 $\xi_1(s) - \tilde{m}_T$ 的外推，而此時須把 $\xi_1(s) - \tilde{m}_T$ 看作是一個仍以函數 $B(\tau)$ 爲其相關函數但同時其均值爲零的平穩隨機過程．

例．令 $f(\lambda) = \dfrac{B}{\lambda^2 + \alpha^2}$．若以此爲譜密度的過程的均值等於零，則已知過程 $\xi(s)$ 在間隔 $t - T \leqslant s \leqslant t$ 上的值時，$\xi(t+\tau)$，$\tau > 0$ 的最佳線性逼近爲大家所知道的，它等於 $\tilde{\xi}(t+\tau) = e^{-\alpha\tau}\xi(t)$（尚可參看(1.38)）．若這個過程的均值不爲零(等於 m)，則值 m 的最佳無偏估計量由公式 (4.28) 所給出．因此這裏的最佳線性無偏外推公式應爲下列形狀：

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_1(t+\tau) &= e^{-\alpha\tau}\left[\xi_1(t) - \frac{\xi_1(t) + \xi_1(t-T) + \alpha\int_0^T \xi_1(t-s)\,ds}{2+\alpha T}\right] + \\ &\quad + \frac{\xi_1(t) + \xi_1(t-T) + \alpha\int_0^T \xi_1(t-s)\,ds}{2+\alpha T} = \\ &= \frac{1}{2+\alpha T}\Big\{[(1+\alpha T)e^{-\alpha T} + 1]\,\xi_1(t) + (1-e^{-\alpha\tau})\xi_1(t-T) + \\ &\quad + \alpha(1-e^{-\alpha\tau})\int_0^T \xi_1(t-s)\,ds\Big\}.\end{aligned} \tag{5.20}$$

如果直接解相應的方程組 (5.14)—(5.16)，我們也能够得到上列公式．

設平穩隨機過程 $\xi_1(s) = \xi(s) + m$ 在間隔 $t - T \leqslant s \leqslant t$ 上的值爲已知，現在我們再提一提此過程最佳無偏過濾問題．這一問題乃是：依照在上述間隔中 $\xi_1(s)$ 的值，尋求過程 $\zeta_1(s) = \zeta(s) + m_1$ 在時候 $t+\tau$ 時之值的最佳無偏線性估計量的問題，過程 $\zeta_1(s)$ 的均值 $m_1 = L_0 m$，此處 L_0 爲已知數[2)]，而且交互相關函數 $B_{\zeta\xi}(\tau) = \mathbf{M}\,[\zeta_1(s-\tau) - m_1]\,[\overline{\xi_1(s) - m}]$ 爲已知，其交互譜密度由公式 (2.18) 給出．解

1) 這是由下述推理而得來，當我們把外推公式裏的 $\xi(s)$ 代替等於常數的過程 ξ 時（特別言之常數等於 $\tilde{m}_T$ 時），我們應該令公式 (1.6) 中的 $Z(\lambda) = \xi \cdot \varepsilon(\lambda)$，而 $\varepsilon(\lambda)$ 就是函數 (4.2)；這時顯見 $\tilde{\xi}(t+\tau) = \xi \cdot \Phi_{\tau,T}(0)$．

2) 在過濾理論的具體應用中，通常 $\xi_1(s) = \zeta^{(1)}(s) + \eta(s)$，此處 $\mathbf{M}\eta(s) = 0$，$\mathbf{M}\zeta^{(1)}(s) = m$（$\eta(s)$ 是"信號" $\zeta^{(1)}(s)$ 所遭受的"噪聲"）而 $\zeta(s) = L\{\zeta^{(1)}(s)\}$，此處 L 是一個線性運算子；這時 $L_0 m = L\{m\}$．

决這一問題可以引用完全類似於解决無偏外推問題的方法．若令

$$\tilde{\zeta}_1(t+\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}\tilde{\Phi}_{\tau,T}^{(\zeta)}(\lambda)\,dZ_1(\lambda), \tag{5.21}$$

則應取下列條件以代替條件 (5.3)：

$$\tilde{\Phi}_{\tau,T}^{(\zeta)}(0)=L_0, \tag{5.22}$$

而以下列條件代替 (5.6)：

$$\mathbf{M}[\tilde{\zeta}_1(t+\tau)-\zeta_1(t+\tau)]\,[\overline{\xi_1(s)-\tilde{\zeta}_1(t+\tau)}]=0, \qquad t-T<s<t, \tag{5.23}$$

由此就有

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{is\lambda}[\tilde{\Phi}_{\tau,T}^{(\zeta)}(\lambda)\,f(\lambda)-e^{i\tau\lambda}f_{\zeta\xi}(\lambda)]\,d\lambda=k_{\tau}^{(\zeta)}, \qquad 0<s<T, \tag{5.24}$$

此處 $k_{\tau}^{(\zeta)}$ 與 s 無關．由 (5.24) 得到基本關係式

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{is\lambda}\tilde{\Psi}_{\tau,T}^{(\zeta)}(\lambda)\,d\lambda=0, \qquad 0<s<T, \tag{5.25}$$

此處

$$\tilde{\Psi}_{\tau,T}^{(\zeta)}(\lambda)=\tilde{\Phi}_{\tau,T}^{(\zeta)}(\lambda)\,f(\lambda)-e^{i\tau\lambda}f_{\zeta\xi}(\lambda)-k_{\tau}^{(\zeta)}\frac{1-e^{iT\lambda}}{2\pi i\lambda}. \tag{5.26}$$

下面所要推演出來的公式隨着 $\tau\geqslant 0$，$0>\tau>-T$ 或 $\tau\leqslant -T$ 而有所不同；它們導來的方法完全可以重複 §2 中所用的推理步驟及導來等式 (5.12)—(5.17) 所用的推理步驟，所以這裏不再贅述了．現在只需註明：這樣所導來的函數 $\tilde{\Phi}_{\tau,T}^{(\zeta)}(\lambda)$，容易驗證它與 §2 及 §4 中所找到的函數 $\Phi_{\tau,T}^{(\zeta)}(\lambda)$ 及 $\Phi_T(\lambda)$ 有下列關係公式：

$$\tilde{\Phi}_{\tau,T}^{(\zeta)}(\lambda)=\Phi_{\tau,T}^{(\zeta)}(\lambda)-[\Phi_{\tau,T}^{(\zeta)}(0)-L_0]\,\Phi_T(\lambda), \tag{5.27}$$

這一公式可以使我們簡便地找到 $\xi_1(s)$ 的最佳無偏過濾，只要對於相應的譜密度我們能够找到具有均值為零的過程的過濾，並且知道過程均值的最佳無偏估計量 $\tilde{m}_T$．公式 (5.27) 具有與公式 (5.18) 同樣的意義：它指出

$$\tilde{\zeta}_1(t+\tau)=\tilde{\zeta}_{t+\tau}\{\xi_1(s)-\tilde{m}_T\}+L_0\tilde{m}_T, \tag{5.28}$$

此處 $\tilde{\zeta}_{t+\tau}\{\xi_1(s)-\tilde{m}_T\}$ 是把過程 $\xi(s)$，當 $\mathbf{M}\xi(s)=0$ 時的最佳過濾公式裏的過程 $\xi(s)$ 換成過程 $\xi_1(s)-\tilde{m}_T$ 後而得到的．

參 考 文 獻

[1] Колмогоров А. Н., Sur l'interpolation et extrapolation des suites stationnaires, Compt. Rend. Acad. Sc., Paris, **208**, No. 26 (1939), 2043—2045.

[2] Колмогоров А. Н., Стационарные последовательности в гильберговом пространстве, Бюлл. МГУ, **2**, No. 6 (1941), 1—40.

[3] Колмогоров А. Н., Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей, Изв. АН, сер. матем., **5**, No. 1 (1941), 3—14.

[4] Крейн М. Г., Об одной экстраполяционпой проблеме А. Н. Колмогорова, ДАН, **46**, No. 8

(1945), 339—342.

[5] Крейн М. Г., О проблеме продолжения винтовых дуг в гильбертовом пространстве, ДАН **45**, No. 4 (1944), 147—150.

[6] Яглом А. М., К вопросу о линейном интеролировании стационарных случайных последовательностей и процессов, Успехи матем. наук, **IV**, вып. 4 (32) (1949), 171—178.

[7] Karhunen K., Zur Interpolation von stationären zufälligen Funktionen, Ann. Acad. Sci. Feunicae. A., I, No. 142 (1952), 3—8.

[8] Wiener N., Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, New York, 1949.

[9] Zadeh L. A., Ragazzini R., Extension of Wiener's theory of prediction, J. Appl. Phys., **21**, No. 7 (1950), 645—655.

[10] Солодовников В. В., Введение в статистическую динамику систем автоматического управления, М.—Л., Гостехиздат, 1952.

[11] Dolph C. L., Woodbury M. A., On the relation between Green's functions and covariances of certain stochastic processes and its application to unbiased linear prediction, Trans. Amer. Math. Soc., **72**, No. 3 (1952), 519—550.

[12] Grenander U., Stochastic processes and statistical inference, Ark. f. Mat., **1**, No. 3 (1950), 195—277.

[13] Grenander U., On emperical spectral analysis of stochastic processes, Ark. f. Mat., **1**, No. 6 (1952), 503—531.

[14] Davenport W. B., Johnson R. A., Middleton D., Statistical errors in measurment on random time functions, J. Appl. Phys., **23**, No. 4 (1952), 377—388.

[15] Крейн М. Г., Об основной аппроксимационной задаче теории экстраполяции и фильтрации стационарных случайных процессов, ДАН, **94**, No. 1 (1954), 13—16.

[16] Крейн М. Г., О некоторых случаях эффективного определения плотности неоднородной струны по ее спектральной функции, ДАН, **93**, No. 4 (1953), 617—620.

[17] Крейн М. Г., Об одном метод эффективного решения обратной краевой задачи, ДАН, **94**, No. 6 (1954), 987—990.

[18] Яглом А. М., Введение в теорию стационарных случайных функций, Успехи матем. наук, **III**, вып. 5 (51) (1952), 3—168 (數學進展,二卷一期,梁之舜譯).

[19] Вайнштейн Л. А., Диффакция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода, М., Изд-во «Советское радио», 1953.

[20] Яглом А. М., Теория экстраполирования и фильтрации случайных процессов, Укр. матем. журнал, **6**, No. 1 (1954), 43—57.

[21] Хинчин А. Я., Теория корреляции стационарных стохастических процессов, Успехи матем. наук, вып. 5 (1938), 42—51.

[22] Doob J. L., Stochastic processes, New York, 1953.

[23] Karhunen K., Über lineare Methoden in der Wahrschlichkeitserechnung, Ann. Acad. Sci. Feunicae, A., I, No. 37 (1947), 3—79.

[24] Яглом А. М., Эффективные решения линейных аппроксимационных задач для процессов со случайными стационарными приращениями, ДАН, **98**, No. 2 (1954), 189—192.

[王壽仁譯]