

算法基础 HW10

黄瑞轩 PB20111686

1

(a) 按如下步骤进行:

- 计算原网络和流的残存网络 —— $O(|E|)$
- 按给定边, 增加 1 容量 —— $O(1)$
- 使用 BFS 搜索增广路径 —— $O(|V|)$
- 如果路径存在, 则更新, 否则不变 —— $O(1)$

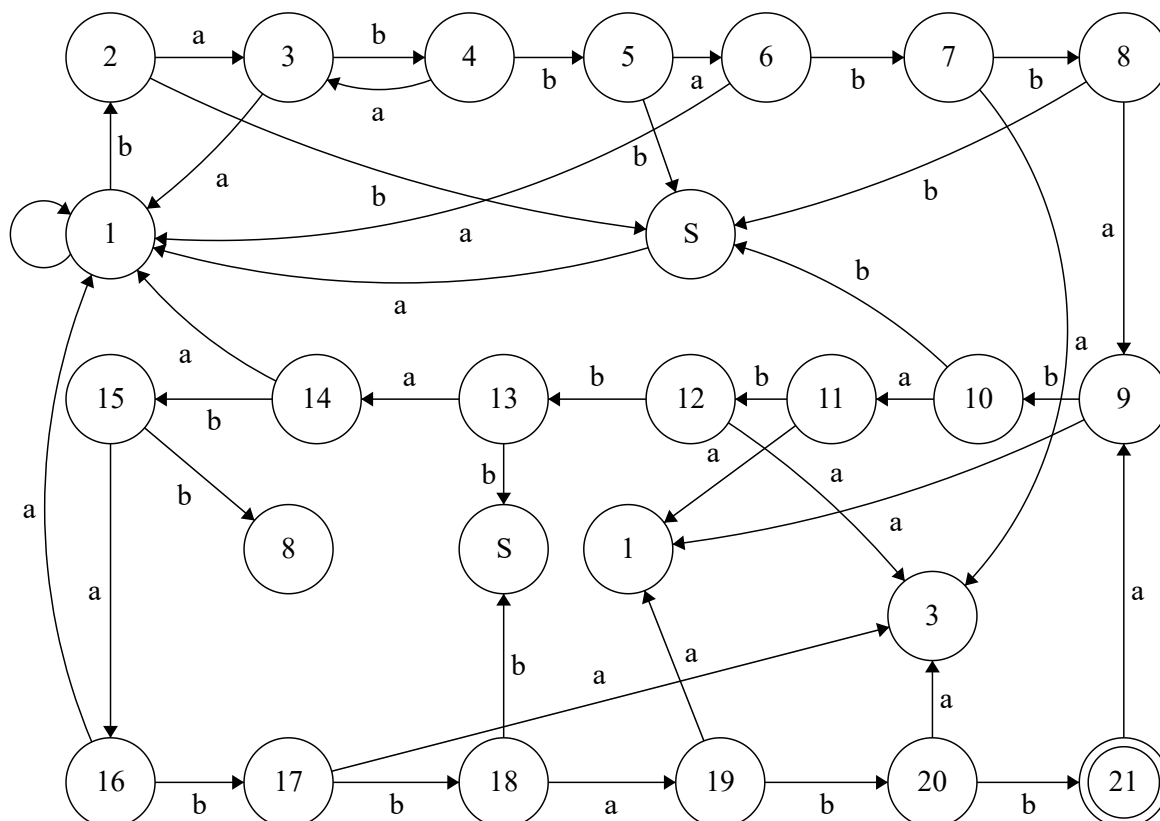
所述的增广路径如果存在, 流量最多增加 1, 之后不需要继续操作了 (上述过程最多一次)。所以这个算法的时间复杂度是 $O(|V| + |E|)$ 。

(b) 按如下步骤进行:

- 计算原网络和流的残存网络 —— $O(|E|)$
- 如果减少容量的边没有用满容量, 则减少 1 将不影响最大流 —— $O(1)$
- 如果用满了, 按给定边减少 1 容量 —— $O(1)$
 - 使用 BFS 搜索包含减少的边的增广路径 —— $O(|V|)$
 - 如果路径存在, 则更新, 否则不变 —— $O(1)$

同理, 这个算法的时间复杂度是 $O(|V| + |E|)$ 。

2



注：数字相同代表同一个状态，对于一个数字所代表的状态需要把其在上图中的所有出现的出边、入边合并。

3

(1) 让 $P[i], S[j]$ 这种表示字符的 ASCII 码，设通配符的 ASCII 码为 0，则定义匹配函数

$$M(i, j) = (P[i] - S[j])^2 P[i] S[j] \quad (1)$$

定义完全匹配函数（为 0 则表示完全匹配）

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m-1} (P[i] - S[x - m + i + 1])^2 \quad (2)$$

记 P 的逆转字符串为 R ，则

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=0}^{m-1} (R[m - i - 1] - S[x - m + i + 1])^2 \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} R^2[m - i - 1] + \sum_{i=0}^{m-1} S^2[x - m + i + 1] - 2 \sum_{i=0}^{m-1} R[m - i - 1] S[x - m + i + 1] \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} R^2[m - i - 1] + \sum_{i=0}^{m-1} S^2[x - m + i + 1] - 2 \sum_{i+j=x} R[i] S[j] \end{aligned}$$

若令 $h(x) = \sum_{i=0}^{m-1} R^2[m - i - 1]$, $f(x) = \sum_{i=0}^x S^2[i]$ ，则

$$p(x) = h(x) + f(x) - f(x - m) - 2 \sum_{i+j=x} R[i] S[j] \quad (3)$$

上面 $h(x), f(x)$ 都可以通过 $O(n)$ 的预处理完成（注意到 $m \ll n$ ），只需要计算 $\sum_{i+j=x} R[i] S[j]$ ，这个可以用 FFT 做到 $O(x \log x)$ ，计算所有 $p(x)$ 就得到了题目要求的，所以总的时间复杂度是

$$\sum_{x=0}^{n-m+1} x \log x = O(n \log n) \quad (4)$$

(2) 因为上面用 ASCII 码来表示字符了，所以 (1) 的方法可以直接应用于推广的问题。