概率论与数理统计（第四周）

PB20111686 黄瑞轩

Class Test

$X=\{0,1,2,3,4\}$，$P(X=i)=(\frac{1}{2})^i(1-\frac{1}{2}),0\le i\le 3$，$P(X=4)=(\frac{1}{2})^4$。

故 X 的分布律为

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 2 & 3 & 4\\
\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16}
\end{pmatrix}
$$

Chap 2 Prob. 7

$X=\{-60,50,80,100\}$.

$P(X=-60)=0.1$；$P(X=50)=0.1$；$P(X=80)=0.2$；$P(X=100)=0.6$；

故 X 的分布律为

$$
\begin{pmatrix}
-60 & 50 & 80 & 100\\
\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5}
\end{pmatrix}
$$

Chap 2 Prob. 25

以 X 表这种昆虫单只每次产卵的数量，则 $X\sim P(\lambda)$，即

$$
P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}
$$

以 Y 表一只昆虫一次产卵后幼虫的数量，则

$$
\begin{aligned}
P(Y=m)&=\sum_{i=m}^{\infty}[C_i^m p^m(1-p)^{i-m}P(X=i)]\\
&=\sum_{i=m}^{\infty}\left[\frac{i!}{m!(i-m)!}\cdot p^m(1-p)^{i-m}\cdot\frac{\lambda^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right]\\
&=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^m p^m}{m!}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^t}{t!}\\
&=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^m p^m}{m!}\mathrm{e}^{\lambda(1-p)}\\
&=\frac{(\lambda p)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda p}
\end{aligned}
$$

这表示 $Y\sim P(\lambda p)$，则 $Z\sim P[\lambda(1-p)]$，即二者都服从泊松分布。

如果二者独立，应该有

$$
P(Y=y_0,Z=z_0)=P(Y=y_0)P(Z=z_0)
$$

而

$$
\begin{aligned}
P(Y=y_0,Z=z_0)&=P(X=y_0+z_0)P(Y=y_0,Z=z_0|X=y_0+z_0)\\
&=\frac{\lambda^{y_0+z_0}}{(y_0+z_0)!}\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{C}_{y_0+z_0}^{y_0}p^{y_0}(1-p)^{z_0}\\
&=\frac{\lambda^{y_0+z_0}p^{y_0}(1-p)^{z_0}}{y_0!z_0!}\mathrm{e}^{-\lambda}\\
P(Y=y_0)P(Z=z_0)&=\frac{(\lambda p)^{y_0}}{y_0!}\mathrm{e}^{-\lambda p}\cdot\frac{[\lambda(1-p)]^{z_0}}{z_0!}\mathrm{e}^{-\lambda(1-p)}\\
&=\frac{\lambda^{y_0+z_0}p^{y_0}(1-p)^{z_0}}{y_0!z_0!}\mathrm{e}^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

两边相等，故是独立的。

Chap 2 Prob. 26

以 X 表系统在一个月内出故障的零件个数，由于 $n=1000,p=0.001$，可以认为 $X\sim P(\lambda)$，其中 $\lambda=np=1$。所求概率为

$$
P(X=0)=\frac{1^0}{0!}\mathrm{e}^{-1}=0.3679
$$