复变函数 B 作业 W3

习题 11

（1）设 $z = x + yi$，当 z 沿着实轴趋于正无穷时，$\lim_{x\to\infty}(x/e^x) = 0$，但当 z 沿着虚轴趋于正无穷时，$\lim_{y\to\infty} \frac{iy}{\cos y + i\sin y}$ 的极限不存在。所以原极限不存在。
（3）因为当 $z \to 1$ 时，$e^z - 1$ 和 z 都是有限的，所以只需要看 $e^{1/(z-1)}$ 在 $z = 1$ 处的极限。当 z 从实轴大于 1 的一侧趋向 1 时，极限不存在；当 z 从实轴小于 1 的一侧趋向 1 时，极限为 0。所以原极限不存在。

习题 14

（1）此函数的奇点满足 $e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = -1$，解得 $x = 0$,$y = (2k+1)\pi(k \in \mathbb{Z})$，所以函数的定义域是 $\mathbb{C} - \{i(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$，在定义域之外函数是初等函数的复合，是解析的。所以该函数的解析区域就是该函数的定义域。

$$f'(z) = -\frac{e^z}{(1+e^z)^2}$$

（3）此函数的奇点满足 $z = 1$，所以函数的定义域是 $\{z \neq 1\}$，在定义域之外函数是初等函数的复合，是解析的。所以该函数的解析区域就是该函数的定义域。

$$f'(z) = \exp\left(\frac{1}{z-1}\right)\left[1 - \frac{z}{(z-1)^2}\right]$$

习题 1

（1）设 $z = 2e^{i\theta}$，则原积分等于

$$\int_\pi^0 (4ie^{i\theta} - 3i)d\theta = 8 + 3\pi i$$

（2）设 $z = 2e^{i\theta}$，则原积分等于

$$\int_\pi^{2\pi} (4ie^{i\theta} - 3i)d\theta = 8 - 3\pi i$$

（3）设 $z = 2e^{i\theta}$，则原积分等于

$$\int_0^{2\pi} (4ie^{i\theta} - 3i)d\theta = -6\pi i$$

习题 3

（1）在 $z=-i$ 到 $z=i$ 的直线段上，有 $|f(z)|=\sqrt{x^4+y^4}\leq 1$，积分路径的长度为 2，由长大不等式知原积分 $\leq 1\times 2=2$。
（2）在 $|z|=1$ 上有 $x^2+y^2=1$，则 $\sqrt{x^4+y^4}\leq 1$，积分路径的长度为 π，由长大不等式知原积分 $\leq 1\times\pi=\pi$。

习题 5

由于 $f(z)=1/(z+2)$ 在 $|z|=1$ 内部解析，由 Cauchy 积分定理知原积分为 0.
在 $|z|=1$ 上满足 $z=e^{i\theta}$，原积分可化为

$$\int_0^{2\pi}\frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}+2}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{i(\cos\theta+i\sin\theta)(2+\cos\theta-i\sin\theta)}{(2+\cos\theta+i\sin\theta)(2+\cos\theta-i\sin\theta)}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{(1+2\cos\theta)i}{5+4\cos\theta}d\theta-\int_0^{2\pi}\frac{(2\sin\theta)}{5+4\cos\theta}d\theta=0$$

上式第二项被积函数关于 $\theta=\pi$ 奇对称，积分结果为 0。第一项被积函数关于 $\theta=\pi$ 偶对称，积分结果为

$$2i\int_0^{\pi}\frac{(1+2\cos\theta)}{5+4\cos\theta}d\theta=0$$

所以需要证明的结论成立。

习题 7

因为 $\lim\limits_{z\to\infty}zf(z)=A$，所以 $\forall\varepsilon>0,\exists M>0$，当 $|z|>M$ 时有 $|zf(z)-A|<\varepsilon$。
考虑 $\int_{C_R}\frac{A}{z}dz$，有

$$\int_{C_R}\frac{A}{z}dz=\int_0^{\alpha}\frac{A}{Re^{i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta=iA\alpha$$

则

$$\int_{C_R}\left(f(z)-\frac{A}{z}\right)dz=\int_{C_R}\frac{zf(z)-A}{z}dz\leq\max(|zf(z)-A|)\int_{C_R}\frac{1}{z}\leq\varepsilon i\alpha$$

由极限的定义，需要证明的结论成立。

习题 8

设 $P(z)$ 是 $n(n\in\mathbb{N})$ 次多项式，$Q(z)$ 是 $n+2$ 次多项式，由代数学基本定理知 P,Q 分别有 n,$n+2$ 个复根，分别设为 $z_{a_1},...,z_{a_n},z_{b_1},...,z_{b_{n+2}}$，取

$$R_0=\max\{|z_{a_1}|,...,|z_{a_n}|,|z_{b_1}|,...,|z_{b_{n+2}}|\}$$

当 $R\geq R_0$ 时，有

$$|P(z)|=|a|\prod_{i=1}^{n}|z-z_{a_i}|\leq|a|(R+R_0)^n$$

当 $R\geq 2R_0$ 时，有

$$|Q(z)|=|b|\prod_{i=1}^{n+2}|z-z_{b_i}|\geq|b|(R-R_0)^{n+2}$$

所以当 $R\geq 2R_0$ 时

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|\leq\frac{|a|(R+R_0)^n}{|b|(R-R_0)^{n+2}}$$

由长大不等式

$$\left|\int_{|z|=R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz\right|\leq\frac{|a|(R+R_0)^n}{|b|(R-R_0)^{n+2}}2\pi R\to 0(R\to\infty)$$

所以

$$\lim_{R\to\infty}\frac{P(z)}{Q(z)}dz=0$$

习题 9

因为 $f(z)=e^z$ 在复平面上解析，由柯西积分公式得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta=f(0)$$

所原积分

$$\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta=2\pi i f(0)=2\pi i$$

在 $|z|=1$ 上满足 $z=e^{i\theta}$，原积分可化为

$$\int_0^{2\pi}\frac{e^{e^{i\theta}}}{e^{i\theta}}ie^{i\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}ie^{\cos\theta+i\sin\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}ie^{\cos\theta}(\cos(\sin\theta)+i\sin(\sin\theta))d\theta$$

因为 $y = e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)$ 关于 $\theta = \pi$ 奇对称，所以上述积分第二项结果为 0，即原积分为

$$i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta$$

$$i\left(\int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}\right) e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta$$

因为上述被积函数 $y = e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)$ 关于 $\theta = \pi$ 偶对称，所以原积分

$$= 2i\int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta = 2\pi i$$

两边同除 $2i$，结论得证。