1-5 在 x 轴上运动的某质点，加速度与位置的关系为 $a_x = -\omega^2 x$，其中 ω 是正的常量. 已知 $t=0$ 时，质点位于 $x_0>0$ 处，速度 $v_0 \neq 0$，试求质点位置 x 随时间 t 的变化关系.

解 由

$$-\omega^2 x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}v_x, \qquad v_x \mathrm{d}v_x = -\omega^2 x \mathrm{d}x,$$

积分

$$\int_{v_0}^{v_x} v_x \mathrm{d}v_x = -\int_{x_0}^{x} \omega^2 x \mathrm{d}x,$$

得
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x = \pm\,\omega\sqrt{\left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}\right) - x^2}.$$

……略

1-17 平面上有三个动点 A,B,C，$t=0$ 时刻三者连线构成边长为 l 的等边三角形. 取三角形中心 O 为极坐标系原点，取 $t=0$ 时刻 O 到 A 的连线为极轴，如图 1-10 所示. 若 A,B,C 均在此平面内作匀速率运动，速率同为 u，过程中 A 始终朝着 B 运动，B 始终朝着 C 运动，C 始终朝着 A 运动，试求 A 点运动轨道.

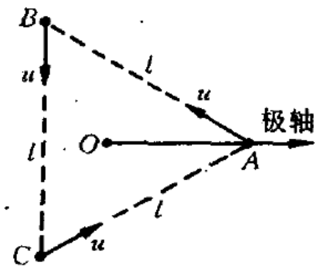


图 1-10

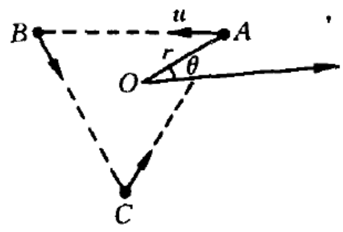


图 1-11

解 参照图 1-11，A 处于(r,θ)位置时，有

$$v_r = -u\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}u,$$

$$v_\theta = u\sin 30^\circ = \frac{1}{2}u,$$

将其代入
$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = rv_r/v_\theta,$$

可得 $$\int_{l/\sqrt{3}}^{r}\frac{\mathrm{d}r}{r}=-\sqrt{3}\int_{0}^{\theta}\mathrm{d}\theta.$$

积分后便得 A 点运动轨道方程：

$$r=\frac{l}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\sqrt{3}\theta},$$

这是一条对数螺线.

1-22 风自西向东吹，风速 u 不变，一架军用飞机相对于静止大气的飞行速率为恒定的 v_0. 设飞机在城市上空沿水平圆轨道巡航飞行，建立自西向东的 x 轴，将飞机相对于圆心的径矢与 x 轴夹角记为 ϕ，试求连续的圆轨道飞行条件及轨道速率 v 与方位角 ϕ 的关系.

解 速度矢量合成及引入的辅助角 γ，如图 1-15 所示，由

$$v_0^2=v^2+u^2-2uv\cos\gamma,$$

$$\gamma=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right),$$

可得

$$v^2+2vu\sin\phi-(v_0^2-u^2)=0.$$

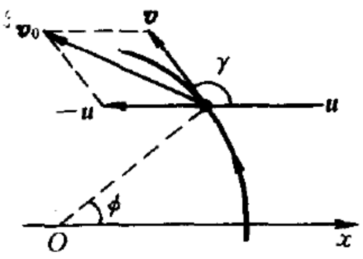


图 1-15

非负解为 $$v=\sqrt{v_0^2-u^2\cos^2\phi}-u\sin\phi,$$

且要求 $$v_0^2-u^2\cos^2\phi>u^2\sin^2\phi,$$

即得所求条件为

$$v_0>u.$$

v-ϕ 关系已在前面给出.

1-25 4 根长度同为 l 的细杆，用铰链首尾相接，组成一个菱形 $ABCD$，放在某水平面上，如图 1-18 所示. 设 A 端固定，C 端沿着 A，C 连线方向运动，当 $\angle A$ 恰为 $90°$ 时，C 端速度为 v，加速度为 a，试求此时 B 端的加速度大小 a_B.

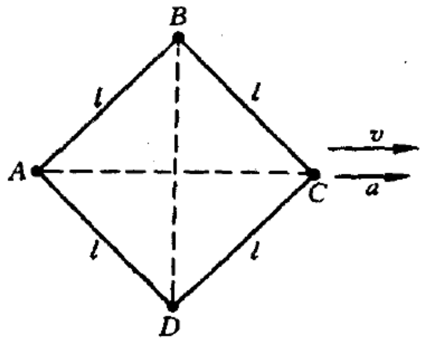


图 1-18

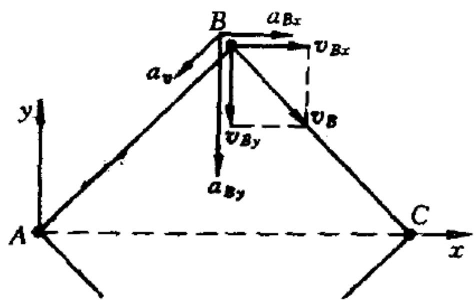


图 1-19

解 以 A 为原点；建立图 1-19 所示的 x，y 坐标，有

$$x_B = \frac{1}{2}x_C, \qquad v_{Bx} = \frac{1}{2}v, \qquad a_{Bx} = \frac{1}{2}a,$$

若求得 a_{By}，则可得 a_B.

B 绕 A 作圆弧运动、此时速度 $\boldsymbol{v}_B$ 恰沿 BC 杆方向，可得

$$v_B = \sqrt{2}\,v_{Bx} = \frac{\sqrt{2}}{2}v.$$

圆弧运动向心加速度大小为

$$a_{心} = v_B^2/l = v^2/2l,$$

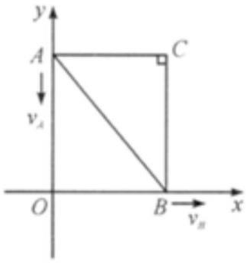
$a_{心}$ 与 a_{Bx}，a_{By}间有下述关系：

$$a_{心} = a_{By}\cos 45° - a_{Bx}\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}(a_{By} - a_{Bx}),$$

得 $$a_{By} = \sqrt{2}\,a_{心} + a_{Bx} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{v^2}{l} + \frac{1}{2}a,$$

所以 $$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{l^2a^2 + v^4 + \sqrt{2}\,lv^2a}\,/\sqrt{2}\,l.$$

直角三角板的边长 $BC=a$， $AC=b$，开始时AB边靠在y轴上，B与坐标原点O重合。今使A点单调地沿y轴负方向朝O点移动，B点沿x轴正方向移动，在如图所示的情况时，A点速度的大小为 v_A。试求此时C点的速度 v_C 和加速度 a_C。



【详解】

因板为刚体，则AC、BC间距不变，恒为一定值，所以，此时 v_C 在x轴方向的分量与 v_A 的x轴方向的分量相同，均为零。

同理，v_C 在y轴方向的分量也为零。因此，$v_C=0$。

将 a_C 分解为 a_{Cx} 和 a_{Cy}，a_{Cx} 等于C相对于A的加速度的x分量 a_{CAx} 加上A相对于Oxy平面加速度的x分量 a_{Ax}，但 $a_{Ax}=0$。

因C相对于A作半径为b的圆运动，速度大小为 v_A，

故 $a_{CAx}=a_{Cx}=-\dfrac{v_A^2}{b}$。

同理，$a_{CB_y}=a_{Cy}=-\dfrac{v_B^2}{a}$。

又根据速度关联可得 $v_B=\dfrac{a}{b}v_A$，

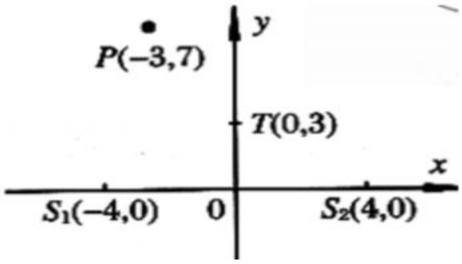
所以 $a_{Cy}=-\dfrac{a}{b^2}v_A^2$。

所以 a_C 的方向指向O点，$a_C=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}v_A^2$。

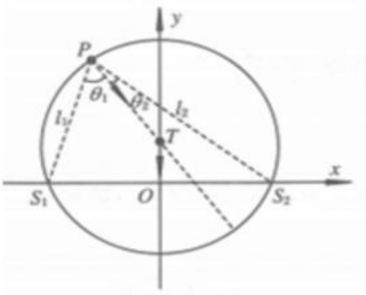
【点睛】

在加速度的关联问题中，向心加速度通常处于隐蔽状态，它常常成为解题的陷阱，应时时警惕。

如图所示，在$S_1(-4{,}0)$和$S_2(4,0)$处各有一个巡警亭，一警察在$P(-3,7)$处巡逻，警察突然发现一小偷在$T(0,3)$处行窃，便朝其追去。同时，小偷也发现了警察，拔腿就跑，由于害怕巡警亭里有警察，小偷采取了一种自认为聪明的跑法：始终保持与P、S_1、S_2距离相同，而警察始终朝着小偷跑，最后小偷在原点（0，0）处被群众抓获，试求此过程中警察的运动轨迹。



对题中信息提取我们可以得出两者的运动图像大致如右图所示：



题 85-2 图

T沿y轴运动，P朝着T运动的速度大小记为v，因此我们可得出：

$\Delta l_1 = v\cos\theta_1 \Delta t$，$\Delta l_2 = v\cos\theta_2 \Delta t$

则：

$\dfrac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \dfrac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} = \dfrac{l_1}{l_2}$（因为$P$、$S_1$、$S_2$共圆，且为$T$圆心。）

于是

$$\frac{l_1(t+\Delta t)}{l_2(t+\Delta t)} = \frac{l_1(t) - \Delta l_1(t)}{l_2(t) - \Delta l_2(t)} = \frac{l_1(t)}{l_2(t)}$$

从$t=0$开始，连续过渡，即有

$$\frac{l_1(t)}{l_2(t)} = \frac{l_1(0)}{l_2(0)}$$

而$l_1(0) = \sqrt{1^2+7^2} = \sqrt{50}$，

$l_2(0) = \sqrt{7^2+7^2} = \sqrt{98}$

因此我们将t时刻P的坐标记为 (x, y)，则有：

$l_1(x)=\sqrt{(x+4)^2+y^2}$，$l_2(x)=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$

得：

$$\frac{\sqrt{(x+4)^2+y^2}}{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{98}}$$

即：

$$\frac{(x+4)^2+y^2}{(x-4)^2+y^2}=\frac{25}{49}$$

化简得

$$\left(x+\frac{37}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{35}{3}\right)^2$$

可见，P点的轨道是圆心位于$\left(-\frac{37}{3},0\right)$，半径为$\frac{35}{3}$的一段圆弧.

而P的终点(x_e,y_e)对应小偷T的位置 $(0, 0)$，此时P与小偷T的距离为4，故有

$$\left(x_e+\frac{37}{3}\right)^2+y_e^2=\left(\frac{35}{3}\right)^2$$

$$x_e^2+y_e^2=4^2$$

可解得$x_e=-\frac{48}{37}$，$y_e=\frac{140}{37}$