统计三大分布

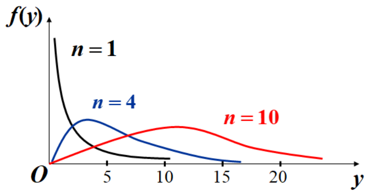
χ^2分布

定义

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自**标准正态总体** $N(0,1)$ 的一个样本，令统计量 $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$，则称 χ^2 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记为 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$。

> 这里的条件：
>
> （1）$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，且 $X_i \sim N(0,1)$；
>
> （2）如果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，且 $X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$，则 $\frac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$，此时 $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$。

卡方分布的概率密度函数仅和自由度有关，图像大致趋势如下：



主要性质

（1）可加性：如果 $X \sim \chi^2\left(n_1\right), Y \sim \chi^2\left(n_2\right)$，并且 X, Y **相互独立**，则 $X+Y \sim \chi^2\left(n_1+n_2\right)$。

（2）若 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$，则 $E\left(\chi^2\right)=n, D\left(\chi^2\right)=2n$。

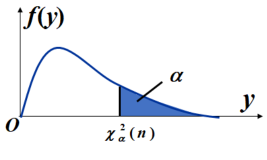
> **证明**：$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$，其中 $X_1, \ldots, X_n$ 独立，且 $X_i \sim N(0,1)$。
>
> 由 $X_i \sim N(0,1) \Rightarrow E\left(X_i\right)=0, D\left(X_i\right)=1$。
>
> $E\left(X_i^2\right)=D\left(X_i\right)+\left[E\left(X_i\right)\right]^2=1 \quad E\left(\chi^2\right)=nE\left(X_i^2\right)=n$。
>
> $E\left(X_i^4\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 3\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 3E\left(X_i^2\right)=3$。
>
> $D\left(\chi^2\right)=nD\left(X_i^2\right)=n\left\{E\left(X_i^4\right)-\left[E\left(X_i^2\right)\right]^2\right\}=2n$。

上侧分位点

设 $X \sim \chi^2(n)$，对给定的正数 $\alpha(0<\alpha<1)$，称满足条件 $P\left\{X>\chi_\alpha^2(n)\right\}=\alpha$ 的点 $\chi_\alpha^2(n)$ 为 χ^2 分布的上 α 分位点。

（1）即随机变量 X 落在点 $\chi_\alpha^2(n)$ 右侧的概率等于 α 的点.

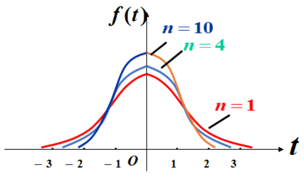
（2）上 α 分位点 $\chi_\alpha^2(n)$ 可查 $\chi^2(n)$ 分布表求得.



t分布（student分布）

定义

设随机变量 X 与 Y **相互独立**，且 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$，则称统计量 $T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布，记作 $T \sim t(n)$. n充分大时，t分布以标准正态分布为极限分布。

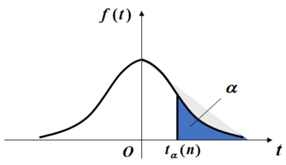


主要特征

概率密度$f(t)$是偶函数，当$n>45$时可以近似认为$t(n) \approx N(0,1)$。

数字特征：$ET=0, DT=\frac{n}{n-2}(n>2)$。

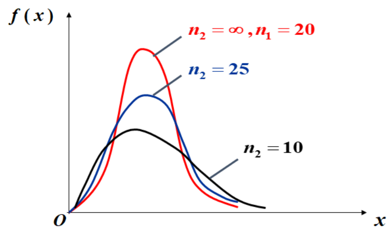
上侧分位点



F分布

定义

若 $U \sim \chi^2(n_1), V \sim \chi^2(n_2)$，且 U 与 V 相互独立，则称统计量 $F=\frac{U/n_1}{V/n_2}$ 服从自由度为 (n_1,n_2) 的 F 分布，记 $F \sim F(n_1,n_2)$。



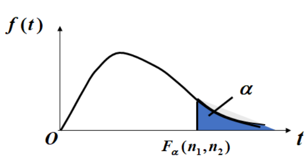
主要性质

(1) 若 $F \sim F(n_1,n_2)$，则 $\frac{1}{F} \sim F(n_2,n_1)$.（显然）

(2) 若 $t \sim t(n)$, 则 $t^2 \sim F(1,n)$.

简证: $t \sim t(n) \Rightarrow \exists X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$，使 $t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$，则$t^2=\frac{X^2}{Y/n}, X^2 \sim \chi^2(1), Y \sim \chi^2(n)$，满足$F$ 分布定义。

上侧分位点



$$F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$$

正态总体的$\bar{X}$和S^2的分布

设总体 X 分布未知，但 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2, X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，$\bar{X}, S^2$ 是样本均值和样本方差，则:

(1) $E(\bar{X})=\mu, D(\bar{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$.

(2) $E\left(S^2\right)=D(X)=\sigma^2$.

定理1

设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自正态总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的样本，则

(1) 样本均值 $\bar{X} \sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，或 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$。

(2) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

(3) $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立.

定理2

设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自正态总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的样本，则

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

证明：$\bar{X} \sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，又 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 且两者独立，由t分布定义即证。

定理3

设 $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ 是来自正态总体 $X \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$ 的样本，样本 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ 来自正态总体 $Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$，且 X 与 Y 相互独立，则：

（1）$\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F\left(n_1-1, n_2-1\right)$

（2）当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 时，$\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+n_2}} \sim t\left(n_1+n_2-2\right)$

（其中 $S_w=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$）

双侧α分位点

设 $t \sim t(n)$，对给定的正数 $\alpha(0<\alpha<1)$，由于 t 分布具有对称性，称满足$P\left(|t|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right)=\alpha$ 的点 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ 为 t 分布的双侧 α 分位数。

（1）即随机变量 $t(n)$ 落在 $\left(-t_{\frac{\alpha}{2}}(n), t_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right)$ 内的概率等于 $1-\alpha$ 的点 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n)$。

（2）双侧 α 分位点 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n)=$ 单侧上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位点 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n)$。