随机过程作业 Week7&9

黄瑞轩 PB20111686

Ch3 T20

(a)

设 X_n 为第 n 分钟红细胞数，状态空间 $S=\{0,1,\dots\}$

因为 $P(X_n|X_{n-1},X_{n-2},\dots,X_0)=P(X_n|X_{n-1})$，所以 $\{X_n\}$ 是M.C.

$n+1$ 分钟没有白细胞，说明每一代个体都新生2个红细胞，

$$P=\prod_{i=0}^{n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{2^i}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\sum_{i=0}^{n+1}2^i}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1-2^{n+1}}{1-2}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{2^{n+1}-1} \tag{1}$$

(b)

记 X_n 为第 n 代后裔的大小，$X_1=0,1,2.$

$$\phi(s)=\frac{1}{4}(s+1)^2,\pi=\inf\{s\mid\phi(s)=s\}=1 \tag{2}$$

Ch3 T21

记 X_n 为第 n 代后裔的大小，Z_i 为第 n 代第 i 个个体后代的个数。

显然 $Z_i\sim i.i.d.\{p_0=q,p_1=p\},X_{n+1}=\sum_{i=1}^{X_n}Z_i$，故

$$EX_{n+1}=EX_nEZ_i=EX_{n-1}(EZ_i)^2=\dots=EX_1(EZ_i)^n=p^{n+1} \tag{3}$$

$$\operatorname{Var}(x_{n+1})=pq\cdot p^n\frac{(1-p^{n+1})}{1-p}I(p\neq1)=p^{n+1}\left(1-p^{n+1}\right) \tag{4}$$

$$\phi(s)=q+ps,\pi=\inf\{s\mid\phi(s)=s\} \tag{5}$$

当 $p<1$ 时，$\pi=1$；当 $p=1$ 时，$\pi=0$；

> 当 $p_0=\frac{1}{4},p_1=\frac{1}{2},p_2=\frac{1}{4}$ 时, $EZ_i=1,EX_{n+1}=1$;
>
> 此时 $\mu=1,\sigma^2=E(Z_i-1)^2=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
>
> 故 $\operatorname{Var}(X_{n+1})=\frac{1}{2}(n+1),\phi(s)=\frac{1}{2}(1+s)^2$，第20题讨论了，此时 $\pi=1$。

> 当 $p_0=\frac{1}{8},p_1=\frac{1}{2},p_2=\frac{1}{4},p_3=\frac{1}{8},EZ_i=\frac{11}{8}$
>
> 此时 $\mu=\frac{11}{8},\sigma^2=E\left(z_i-\frac{11}{8}\right)^2=\frac{47}{64}$

> 故
> $EX_{n+1}=\left(\frac{11}{8}\right)^{n+1}, \quad \operatorname{Var}\left(x_{n+1}\right)=\frac{47}{64}\left(\frac{11}{8}\right)^{n} \frac{8}{3}\left[\left(\frac{11}{8}\right)^{n+1}-1\right]=\frac{47}{24}\left(\frac{11}{8}\right)^{n}\left[\left(\frac{11}{8}\right)^{n+1}-1\right]$
>
> $\phi(s)=\frac{1}{8}+\frac{1}{2} s+\frac{1}{4} s^{2}+\frac{1}{8} s^{3}, \quad \pi=\inf \{s \mid \phi(s)=s\}=\frac{\sqrt{13}-3}{2}$。

Ch3 T22

$$
\begin{aligned}
&\{X_3 \mid X_0=1\}=\{0,1\} \\
&P\left(X_3=1 \mid X_0=1\right)=P\left(X_3=1, X_2=1, X_1=1 \mid X_0=1\right)=p^3 \\
&P\left(X_3=0 \mid X_0=1\right)=1-p^3
\end{aligned}
$$

Ch4 T1

(a)

$$
\begin{aligned}
&EX(t)=\int_0^{2\pi} \sin ut \cdot \frac{1}{2\pi} du=\frac{1}{2x} \frac{1}{t}(-\cos ut)\Big|_0^{2\pi}=0 \\
&R_X(t, s)=E(X(t)-0)(X(s)-0)=EX(t)X(s)
\end{aligned}
$$

- 当 $t \neq s$

$$
\begin{aligned}
R_X(t, s) &= E \sin Ut \sin Us \\
&= \frac{1}{2} E[\cos(t-s)u-\cos(t+s)u] \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{t-s} \sin(t-s)u\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{t+s} \sin(t+s)u\Big|_0^{2\pi}\right]=0
\end{aligned}
$$

- 当 $t=s$

$$
EX^2(t)=E \sin^2 Ut=\int_0^{2\pi} \sin^2 utdu=\frac{1}{2} \tag{6}
$$

故 $R_X(t, s)=f(t-s)$，故 $X(t)$ 宽平稳。

考虑 $(X(3), X(2))$ 的分布：$P(X(3)<x_3, X(2)<x_2)=P(\sin 3U<x_3, \sin 2U<x_2)$；

再考虑 $(X(2), X(1))$ 的分布：$P(X(2)<x_2, X(1)<x_1)=P(\sin 2U<x_2, \sin U<x_1)$；

二者分布显然不相同，故 $X(t)$ 非严平稳。

(b)

$EX(t)=\frac{1}{2\pi t}(1-\cos 2\pi t)$，不是常数，故非宽平稳。

$X(t+\frac{\pi}{2})$ 的分布：$P(X(t+\frac{\pi}{2})<x)=P(\sin(ut+\frac{\pi}{2}u)<x)$

$X(t)$ 的分布：$P(X(t)<x)=P(\sin ut<x)$

二者分布不相同，故 $X(t)$ 非严平稳。

Ch4 T3

$$
\begin{aligned}
EX_n &= \sum_{k=1}^{N} \sigma_k \sqrt{2} E\cos(a_k n - U_k) = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \cos(a_k n - u_k) du_k \\
&= \sum_{k=1}^{N} \sigma_k \sqrt{2} \left[-\sin(a_k n - u_k)\right]\Big|_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}
$$

$R_X(n,m) = EX_nX_m = 2E(\sum_{k=1}^{N} \sigma_k \cos(a_k n - U_k))(\sum_{l=1}^{N} \sigma_l \cos(a_l m - U_l))$

对 $k \neq l$，

$\cos(a_k n - U_k)\cos(a_l m - U_l) = \frac{1}{2}[\cos(a_k n + a_l m - U_k - U_l) + \cos(a_k n - a_l m - U_k + U_l)]$

$$
\begin{aligned}
&E\cos(a_k n - U_k)\cos(a_l m - U_l) = \\
&\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[\cos(a_k n + a_l m - u_k - u_l) + \cos(a_k n - a_l m - u_k + u_l)]du_k du_l = 0
\end{aligned} \tag{7}
$$

故

$E\left(\sum_{k=1}^{N} \sigma_k \cos(a_k n - U_k)\right)\left(\sum_{l=1}^{N} \sigma_l \cos(a_l m - U_l)\right) = E\sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2 \cos(a_k n - U_k)\cos(a_k m - U_k)$

则 $E\sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2 \cos(a_k n - U_k)\cos(a_k m - U_k) = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2 E_2 \cos(a_k n - U_k)\cos(a_k m - U_k)$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2 \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\cos(a_k(n+m) - 2u_k) + \cos(a_k(n-m))\right) du_k. \\
&= \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2 \cos(a_k(n-m)) = f(n-m)
\end{aligned}
$$

所以 $R_X(n,m) = 2f(n-m)$，故是宽平稳的。

Ch4 T4

$EZ(t) = \sum_{k=1}^{n} EA_k \cdot e^{j\omega_k t} =$ 常数

因为 ω_j 是给定数，不能指派，所以只能所有 $EA_k = 0$，此时 $EZ(t) = 0$

$R_Z(t,s) = EZ(t)Z^*(s) = E\left(\sum_{k=1}^{n} A_k e^{j\omega_k t}\right)\left(\sum_{l=1}^{n} A_l e^{-j\omega_l s}\right)$
$= E\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} A_k A_l e^{j\omega_k t - j\omega_l s} = f(t-s)$

因为 ω_j 是给定数，不能指派，所以只能所有 $EA_kA_l = 0$，此时 $R_Z(t,s) = 0$

Ch4 T5

$$EX_n = p + p - 1 = 2p - 1 \quad EX_n^2 = 1$$
$$ES_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n(2p-1) = \sqrt{n}(2p-1).$$
$$R_s(n,m) = E\left(S_n - \sqrt{n}(2p-1)\right)\left(S_m - \sqrt{m}(2p-1)\right) = ES_nS_m - \sqrt{mn}(2p-1)^2$$
$$ES_nS_m = \frac{1}{\sqrt{mn}} E\left(\sum_{k=1}^{m} X_k\right)\left(\sum_{l=1}^{n} X_l\right)$$
不妨设$m \leq n$, 则 $\left(\sum_{k=1}^{m} X_k\right)\left(\sum_{l=1}^{n} X_l\right) = \sum_{k=1}^{m} X_k^2 + \left[\left(\sum_{k=1}^{m} X_k\right)\left(\sum_{l=1}^{n} X_l\right) - \sum_{k=1}^{m} X_k^2\right]$
$$ES_nS_m = E\left\{\sum_{k=1}^{m} X_k^2 + \left[\left(\sum_{k=1}^{m} X_k\right)\left(\sum_{l=1}^{n} X_l\right) - \sum_{k=1}^{m} X_k^2\right]\right\}\frac{1}{\sqrt{mn}} = \left(m + (mn-m)(2p-1)^2\right)\frac{1}{\sqrt{mn}}$$
故 $R_s(n,m) = \sqrt{\frac{m}{n}} - \sqrt{\frac{m}{n}}(2p-1)^2$
$$r_s(n,m) = ES_nS_m = \sqrt{\frac{m}{n}} + \left(\sqrt{mn} - \sqrt{\frac{m}{n}}\right)(2p-1)^2$$

若平稳，则 $ES_n = \sqrt{n}(2p-1)$ 为常数，则 $p = 1/2$；

此时 $R_S(n,m) = \sqrt{\frac{m}{n}} \neq f(m-n)$，所以 S_n 不可能平稳。