2007 年 3 月 天水师范学院学报 Mar.,2007
第 27 卷 第 2 期 Journal of Tianshui Normal University Vol.27 No.2

由迭代生成数列收敛的条件

程希旺

（淮阴师范学院 数学系，江苏 淮安 223300）

摘 要：探讨了由初始值 x_1和递推公式 $x_{n+1}=f(x_n), n\in N^+$通过迭代生成的数列$\{x_n\}$的收敛性与函数 f的关系，为：若$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\xi$，则$\xi$必为函数$f$的不动点。给出了数列$\{x_n\}$收敛的若干充分条件和必要条件。

关键词：迭代；数列；收敛；条件

中图分类号：O172 **文献标识码**：A **文章编号**：1371-1351（2007）02-0018-02

所谓“由迭代生成的数列”，是指在给出数列的第一项x_1后，用递推公式$x_{n+1}=f(x_n)$，$n\in N^+$通过迭代生成的数列。这样的数列在数学和许多应用领域中经常出现，有很强的理论和实用价值。例如，大量的近似计算方法都是通过迭代方式来实现的。[1] 判定由迭代生成的数列的收敛性，除了直接利用单调有界定理和Cauchy收敛准则外，还可利用函数f自身的性质来判定，本文主要利用函数f的性质讨论由迭代生成数列收敛的条件。

1 预备知识

定义1 [2] 设f为定义在数集D上的函数，$\xi\in D$，若ξ是方程$f(x)=x$的根，则称ξ为函数f的不动点。

定义2 [3] 设f为定义在数集D上的函数，$f(D)\subset D$，若存在常数$k\in(0,1)$，使得对一切x、$y\in D$，$|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$成立，则称$f$为D上的一个压缩映射，称常数$k$为压缩常数。

2 主要结果

定理1 设数列$\{x_n\}$满足递推关系$x_{n+1}=f(x_n), n\in N^+$，其中f为连续函数。若$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\xi$，则$\xi$必为函数$f$的不动点。

证明：由条件，f在点ξ连续，即$\lim\limits_{x\to\xi}f(x)=f(\xi)$。根据Heine归结原理，$\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=f(\xi)$。在$x_{n+1}=f(x_n)$的两边取$n\to+\infty$时的极限，即得$\xi=f(\xi)$，故$\xi$为函数$f$的不动点。

注：定理1为由迭代生成数列收敛的一个必要条件。若函数f没有不动点，则数列$\{x_n\}$必定发散。

定理2 设数列$\{x_n\}$满足递推关系$x_{n+1}=f(x_n)$，$n\in N^+$，其中函数f在区间I上单调且有界，同时$\{x_n\}$的每一项都在区间I中，则(1)当f在区间I上单调增加时，$\{x_n\}$收敛；(2)当f在区间I上单调减少时，$\{x_n\}$的两个子列$\{x_{2k-1}\}$和$\{x_{2k}\}$都收敛。

证明：（1）当f在区间I上单调增加时，由条件，有$x_n\in I, n\in N^+$。如有$x_1\leqslant x_2$，用数学归纳法可以证明$\{x_n\}$单调增加。事实上，若$x_n\leqslant x_{n+1}$，则$x_{n+1}=f(x_n)\leqslant f(x_{n+1})=x_{n+2}$。又由于函数$f$在区间$I$上有界，所以数列$\{x_n\}$有界。因此，根据单调有界定理，数列$\{x_n\}$收敛。如果$x_1\geqslant x_2$，类似可以证明$\{x_n\}$单调减少且有界，从而收敛。

（2）当f在区间I上单调减少时，如有$x_1\leqslant x_3$，用数学归纳法可以证明$\{x_{2k-1}\}$单调增加。事实上，若$x_{2k-1}\leqslant x_{2k+1}$，则$x_{2k}=f(x_{2k-1})\geqslant f(x_{2k+1})=x_{2k+2}$，$x_{2k+1}=f(x_{2k})\leqslant f(x_{2k+2})=x_{2k+3}$。再由$x_{2k}=f(x_{2k-1})$，可知$\{x_{2k}\}$单调减少。又由于函数$f$在区间$I$上有界，所以数列$\{x_{2k-1}\}$和$\{x_{2k}\}$都有界。因此，根据单调有界定理，数列$\{x_{2k-1}\}$和$\{x_{2k}\}$都收敛。如果$x_1\geqslant x_3$，证明完全类似。

注：定理2中，当f在区间I上单调减少时，由迭代生成的数列$\{x_n\}$可能收敛，也可能发散。但$\{x_n\}$的两个子列$\{x_{2k-1}\}$和$\{x_{2k}\}$都收敛。可见，由迭代生成数列的敛散性取决于两个子列$\{x_{2k-1}\}$和$\{x_{2k}\}$的极限是否相等。若$\{x_{2k-1}\}$和$\{x_{2k}\}$的极限相等，则数列$\{x_n\}$必定收敛，否则发散。

定理3 设f是$[a,b]$上的一个压缩映射，则由任何初始值$x_1\in[a,b]$和递推公式$x_{n+1}=f(x_n)$，$n\in N^+$生成的数列$\{x_n\}$收敛。

证明：由于f是$[a,b]$上的压缩映射，故$f([a,b])\subset[a,b]$，$\{x_n\}$必在$[a,b]$中，且$\exists$常数$k\in(0,1)$，使得$\forall n\in N^+$，$\forall p\in N^+$有

$$|x_n-x_{n+p}|=|f(x_{n-1})-f(x_{n+p-1})|\leqslant k|x_{n-1}-x_{n+p-1}|$$
$$\leqslant k^2|x_{n-2}-x_{n+p-2}|\leqslant\cdots\leqslant k^n|x_0-x_p|\leqslant k^n(b-a)$$

可见，$\forall\varepsilon>0$（不妨设$\varepsilon<b-a$），只要取$N=\left[\dfrac{\ln\dfrac{\varepsilon}{b-a}}{\ln k}\right]$，$\forall n\in N$，$\forall p\in N^+$，都有$|x_n-x_{n+p}|<\varepsilon$。根据Cauchy收敛准则，$\{x_n\}$收敛。

推论 设f是定义在$[a,b]$上的可导函数，$f([a,b])\subset[a,b]$，若存在常数$k\in(0,1)$，使得对一切$x\in[a,b]$，成立不等式$|f'(x)|\leqslant k$，则由任何初始值$x_1\in[a,b]$和递推公式$x_{n+1}=f(x_n)$，$n\in N^+$生成的数列$\{x_n\}$收敛。

收稿日期：2006-12-15

作者简介：程希旺（1969-），男，江苏淮阴人，淮阴师范学院数学系讲师，硕士。

证明：由Lagrange中值定理，$\forall x$、$y\in[a,b]$，有

$$|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)|\cdot|x-y|\leqslant k|x-y|,$$

$x<\xi<y$ 或 $y<\xi<x$，于是f是$[a,b]$上的一个压缩映射。根据定理3，由任何初始值$x_1\in[a,b]$和递推公式$x_{n+1}=f(x_n)$, $n\in N^+$生成的数列$\{x_n\}$收敛。

定理3及其推论还可作如下推广：

定理4　设函数f在区间$[a, b]$上满足Lipschitz条件，即存在常数$l>0$，对一切x、$y\in[a,b]$，都有$|f(x)-f(y)|\leqslant l|x-y|$，常数$\alpha$满足：$0<\alpha<\frac{1}{l}$，$f([a,b])\subset[\frac{a}{\alpha},\frac{b}{\alpha}]$，则由任何初始值$x_1\in[a, b]$和递推公式$x_{n+1}=\alpha f(x_n)$, $n\in N^+$生成的数列$\{x_n\}$收敛。

证明：令$F(x)=\alpha f(x)$，$x\in[a, b]$，容易验证$F([a, b])\subset[a, b]$，对一切x，$y\in[a, b]$，有

$$|F(x)-F(y)|=\alpha|f(x)-f(y)|\leqslant\alpha l|x-y|=k|x-y|$$

其中$0<k=\alpha l<1$，所以F是一个压缩映射，根据定理3，即得所要证明的结论。

定理5　设f是定义在$[a, b]$上的可导函数，若存在常数$M>0$，使得对一切$x\in[a, b]$，成立不等式$|f'(x)|\leqslant M$，常数α满足：$0<\alpha<\frac{1}{M}$，$f([a,b])\subset[\frac{a}{\alpha},\frac{b}{\alpha}]$，则由任何初始值$x_1\in[a,b]$和递推公式$x_{n+1}=\alpha f(x_n)$,$n\in N^+$生成的数列$\{x_n\}$收敛。

证明：容易验证$(\alpha f)([a,b])\subset[a,b]$，$|\alpha f'(x)|\leqslant\alpha M<1$，$x\in[a,b]$。于是，函数$\alpha f$满足定理3推论的条件，定理5得证。

定理6　设函数f在区间$[a,b]$上满足Lipschitz条件，即存在常数$l>0$，对一切x，$y\in[a,b]$，都有$|f(x)-f(y)|\leqslant l|x-y|$，常数$\alpha$满足：$0<\alpha<\frac{1}{l}$，$f([a,b])\subset[\frac{1-\alpha l}{\alpha}a,\frac{1-\alpha l}{\alpha}b]$，则由任何初始值$x_1\in[a\ b]$和递推公式$x_{n+1}=\alpha[lx_n+f(x_n)]$，$n\in N^+$生成的数列$\{x_n\}$收敛。

证明：令$F(x)=\alpha[lx+f(x)]$，$x\in[a,b]$，容易验证$F([a, b])\subset[a, b]$，对一切x，$y\in[a,b]$，有

$$|F(x)-F(y)|=\alpha|[lx+f(x)]-[ly+f(y)]|$$

$$\leqslant\alpha[l|x-y|+|f(x)-f(y)|]\leqslant2\alpha l|x-y|=k|x-y|$$

其中$k=2\alpha l$。当$0<\alpha<\frac{1}{2l}$时，$0<k<1$，F是一个压缩映射。根据定理3，即得所要证明的结论。当$\frac{1}{2l}\leqslant\alpha<\frac{1}{l}$时，$1\leqslant k<2$，$F$不是压缩映射。但由$F([a,b])\subset[a,b]$及$x_1\in[a,b]$知，对一切$n\in N^+$，$x_n\in[a,b]$，于是$\{x_n\}$为一有界数列。下面只要证明$\{x_n\}$单调，根据单调有界定理便可得到，$\{x_n\}$收敛。事实上，若$f(x_1)\geqslant\frac{1-\alpha l}{\alpha}x_1$，则$x_2=\alpha[l x_1+f(x_1)]\geqslant\alpha[l x_1+\frac{1-\alpha l}{\alpha}x_1]=x_1$，而对$n>1$，若$x_{n-1}\leqslant x_n$，便有

$$f(x_{n-1})-f(x_n)\leqslant|f(x_{n-1})-f(x_n)|\leqslant l|x_{n-1}-x_n|=l(x_n-x_{n-1})$$

将带负号的项移到不等式的另一端，然后两边同乘以α，即得

$$x_n=\alpha[l x_{n-1}+f(x_{n-1})]\leqslant\alpha[l x_n+f(x_n)]=x_{n+1}$$

故$\{x_n\}$单调递增。同理若$f(x_1)\leqslant\frac{1-\alpha l}{\alpha}x_1$，可证$\{x_n\}$单调递减。

文 [4] 中的定理为本定理$l=1$，$\alpha=\frac{1}{2}$时的特殊情形。

最后，作为定理3及其推论的应用，给出如下定理。

定理7　设f是定义在$[a,b]$上的可导函数，$x+f(x)\in[a,b]$，若存在常数$k\in(0, 1)$，使得对一切$x\in[a, b]$，成立不等式$|1+f'(x)|\leqslant k$，则方程$f(x)=0$在$[a,b]$上至少有一个根。

证明：令$F(x)=x+f(x)$，$x\in[a,b]$，容易验证F符合定理3推论的条件，因此，由初始值$x_1\in[a,b]$和递推公式$x_{n+1}=F(x_n)=x_n+f(x_n)$,$n\in N^+$通过迭代生成的数列$\{x_n\}$收敛。设数列$\{x_n\}$的极限为$\xi$，则由定理1，$\xi$为$F$在$[a,b]$上的不动点，即$\xi=F(\xi)=\xi+f(\xi)$，从而，$f(\xi)=0$，因此，方程$f(x)=0$在$[a,b]$上至少有一个根。

参考文献：

[1] 徐萃薇.计算方法引论[M].北京:高等教育出版社,1985.

[2] 刘世伟,李逊.泛函分析概要[M].北京:高等教育出版社,1987.

[3] 吴良森,毛羽辉,宋国栋,等.数学分析习题精解[M].北京:科学出版社,2002.

[4] 席泓,李庆玉.关于两类递推数列的极限[J].贵州教育学院学报,2001,12(4).

〔责任编辑　王三福〕