概率论与数理统计（第八周）

PB20111686 黄瑞轩

Class Test

若$X\sim\mathcal{U}(0,1)$，则$f_X(x)=1$，$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(x)\mathrm{d}x=x(0<x<1)$.

$P(G(X)\le x)=P(X\le F_X(x))=P(X\le x)=F_X(x)$，当 $0<x<1$.

$P(G(X)\le x)=P(X\le F_X(x))=P(X\le 0)=P(X\le x)=F_X(x)$，当 $x\le 0$.

$P(G(X)\le x)=P(X\le F_X(x))=P(X\le 1)=P(X\le x)=F_X(x)$，当 $x\ge 1$.

故$F_{G(X)}(x)=F_X(x)$，即$G(X)\sim F$.

3.48

（1）注意到每次掷骰子的事件是独立的，此题过程如下：

$$
\begin{aligned}
P(X=x,Y=y)&=P(\text{前}x-1\text{次的点数均不超过}2\text{，最后一次掷出}y)\\
&=\frac{1}{6}(\frac{1}{3})^{x-1},x=1,2,\dots,y=3,4,5,6\\
P(X=x)&=\sum_{y=3}^{6}P(X=x,Y=y)=\frac{2}{3}(\frac{1}{3})^{x-1},x=1,2,\dots\\
P(Y=y)&=\sum_{x=1}^{\infty}P(X=x,Y=y)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{4},y=3,4,5,6
\end{aligned}
$$

（2）因为

$$P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y)$$

故X,Y互相独立。

3.55

（1.1）$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-(x+1)\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}.$

（1.2）$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{1+y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}.$

（2.1）$f(x,y)=\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=\begin{cases}\dfrac{x\exp(-x)}{(1+y)^2}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{else}\end{cases}.$

（2.2）$f_X(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}x\exp(-x), & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}.$

（2.3）$f_Y(y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+y)^2}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}.$

（3）因为$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故X,Y相互独立。

3.58

设X,Y的边缘分布密度分别是$f_X(x),f_Y(y)$，则

$$
\begin{aligned}
f_X(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |x|<1,\\ 0, & \text{else.}\end{cases}\\
f_Y(y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |y|<1,\\ 0, & \text{else.}\end{cases}
\end{aligned}
$$

因为

$$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$$

故X,Y不是互相独立的。

设X^2,Y^2的联合分布函数为$G(z,w)$，则当$z\ge 0,w\ge 0$时

当$z<1,w<1$时，

$$G(z,w)=P(X^2\le z,Y^2\le w)=P(-\sqrt{z}\le X\le\sqrt{z},-\sqrt{w}\le Y\le\sqrt{w})$$

记$D=[-\sqrt{z},\sqrt{z}]\times[-\sqrt{w},\sqrt{w}]$，则

$$G(z,w)=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{zw}$$

此时

$$G_{X^2}(z)=G(z,1)=\sqrt{z}$$
$$G_{Y^2}(w)=G(1,w)=\sqrt{w}$$

即

$$G(z,w)=G_{X^2}(z)G_{Y^2}(w)$$

当$z<1,w\geq 1$时，记$D=[-\sqrt{z},\sqrt{z}]\times[-1,1]$，则

$$G(z,w)=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{z}$$

此时

$$G_{X^2}(z)=G(z,1)=\sqrt{z}$$
$$G_{Y^2}(w)=G(1,w)=1$$

即

$$G(z,w)=G_{X^2}(z)G_{Y^2}(w)$$

当$z\geq 1,w<1$时，记$D=[-1,1]\times[-\sqrt{w},\sqrt{w}]$，则

$$G(z,w)=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{w}$$

此时

$$G_{X^2}(z)=G(z,1)=1$$
$$G_{Y^2}(w)=G(1,w)=\sqrt{w}$$

即

$$G(z,w)=G_{X^2}(z)G_{Y^2}(w)$$

当$z\geq 1,w\geq 1$时，记$D=[-1,1]\times[-1,1]$，则

$$G(z,w)=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$$

此时

$$G_{X^2}(z)=G(z,1)=1$$
$$G_{Y^2}(w)=G(1,w)=1$$

即

$$G(z,w)=G_{X^2}(z)G_{Y^2}(w)$$

可见，在所有情况下，都满足

$$G(z,w)=G_{X^2}(z)G_{Y^2}(w)$$

因此X^2,Y^2相互独立。