第一次习题课张助教部分讲义

张礼贤

2022 年 9 月 11 日

讲义并不独立观看，请与 PPT 合起来看。

第 16 题。首先来回顾一下复数的模长：对于一个复数 $z = x + \mathrm{i}y$，

定义. z 的模长为 $\sqrt{x^2+y^2}$，记为 $|z|$.

所以说，如果我们写成三角形式：

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),\ r \geqslant 0, \theta \in \mathbb{R} \tag{1}$$

也就是说，

$$x = r\cos\theta \tag{2}$$

$$y = r\sin\theta \tag{3}$$

那么，按照定义，计算 z 的模长：

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} \tag{4}$$

因为

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{5}$$

所以

$$|z| = \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} = \sqrt{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \sqrt{r^2\cdot 1} = \sqrt{r^2} = r \tag{6}$$

模长与乘法如果有两个复数 z_1, z_2，我们分别写出它们的三角形式

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1),\ r_1 \geqslant 0, \theta_1 \in \mathbb{R} \tag{7}$$

$$z_1 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2),\ r_2 \geqslant 0, \theta_2 \in \mathbb{R} \tag{8}$$

那么，我们来计算 $z_1 \cdot z_2$，

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \tag{9}$$

$$= r_1r_2(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \tag{10}$$

$$= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_1\cos\theta_2 + \mathrm{i}\cos\theta_1\sin\theta_2) \tag{11}$$

$$= r_1r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)) \tag{12}$$

所以，

$$|z_1 \cdot z_2| = r_1r_2 = |z_1| \cdot |z_2| \tag{13}$$

那么 $|z^2|$ 呢？

$$|z^2| = |zz| = |z||z| = |z|^2 \tag{14}$$

$$|z^3| = |z^2z| = |z^2||z| = |z|^2|z| = |z|^3 \tag{15}$$

...

$$|z^n| = |z|^n \tag{16}$$

那么，除法呢？

$$|\frac{z_1}{z_2}| =? \frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{17}$$

因为

$$|z_1| = |\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2| \tag{18}$$

$$= |(\frac{z_1}{z_2}) \cdot z_2| = |\frac{z_1}{z_2}| \cdot |z_2| \tag{19}$$

所以

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} = |\frac{z_1}{z_2}| \tag{20}$$

例子：

$$|\frac{3+4\mathrm{i}}{6}| = \frac{|3+4\mathrm{i}|}{|6|} = \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{6} = \frac{5}{6} \tag{21}$$

$$|(\frac{3+4\mathrm{i}}{6})^n| = |\frac{3+4\mathrm{i}}{6}|^n = |(\frac{5}{6})^n \tag{22}$$

再举一个例子：$\dfrac{i^{n-1}}{n}$

$$|\frac{i^{n-1}}{n}| = \frac{|i|^{n-1}}{|n|} = \frac{1}{n} \tag{23}$$

关于复数的模与乘除法就说到这里。

第 16 题，第 1 小问。（$z_n = (\dfrac{3+4\mathrm{i}}{6})^n$）。那么，数列 z_n 的极限是多少呢？我知道这个数列的极限是 0，问题是你现在怎么往卷子上写理由，最漂亮，最干净，最简洁。

我们得回顾一下数列极限的定义：对任意正数 ε，存在正整数 N，当 $n > N$ 时，$|z_n - c| < \varepsilon$.

这里的 ε 是任意的，也就是说，这句话实际上意味着无数句话。正数有多少，就有多少句这样的话。

现在回到刚才的问题，怎么在卷子上写理由？最佳的方式是：

证明. 因为 $|z_n| = (\dfrac{5}{6})^n \to 0$，所以 $z_n \to 0$. □

因为从定义上看，$|z_n - c| \to 0$ 和 $z_n \to c$ 是一样的。特别地，$|z_n| \to 0$ 和 $z_n \to 0$ 是一样的。

有的同学把 z_n 的实部虚部都找到，说 $x_n = (\dfrac{5}{6})^n \cos n\phi \to 0, y_n = (\dfrac{5}{6})^n \sin n\phi \to 0$，所以 z_n 收敛于 0。我的评价是：不如我的简洁明了。

顺便提一下，有的人写辐角就算了，还画蛇添足地写上 $\phi = 53\deg$

下一题是 $1, i/2. -1/3$，道理是一样的。

下面看看第（3）小问。1，i，-1，-i，1，i，-1，-i。一眼就看出来不收敛。问题是怎么说理由？

回顾数列极限的定义。不收敛就是说不存在这样的 c 使得这句话成立。

有的同学说，$|z_n| = 1$，所以它不收敛于 0。

证明. 假设数列收敛于 c，则对于 $\varepsilon = 0.01$，存在 N，当 $n > N$ 时，$|z_n - c| < 0.01$，所以某一项 1 与 c 的距离小于 0.01，但是之后的项 i 就必然与 c 的距离大于 0.01，矛盾。如果想说的更清楚些，用三角不等式即可。 □

还有很多办法说它不收敛。你可以说取两个常值子列，可以说柯西收敛准则。

但是总之，你要把理由讲清楚。什么叫讲清楚了？要么直接从定义出发，要么用课本上正文当中的定理。不要跟我说显然，改卷子的人比你更觉得它显然。人人都写显然，还考你什么呢。

下面来看超级多人犯概念性错误的第 19 题。

给了一个平面点集 A，如果你是一个高中学生，你就知道，平面上的点就按与 A 的关系分成了两类：属于 A 的点和不属于 A 的点。如果你上了数分 B2，你就知道，平面上的点按与 A 的关系，用另外一种方式分类，分成三类：A 的内点，A 的边界点和 A 的外点。这两种分类方式有什么区别呢？第一种方式：每个点想知道自己是不是属于 A，只要自己一个人去问 A 就行了，不用管别人怎样。第二种方式：每个点要知道自己是内点、边界点还是外点，就不光要关注自己，还要关注自己身边的点。

现在我们把 A 的所有内点构成的集合叫 A 的内部，A 的所有边界点构成的集合叫 A 的边界。

下面我们来看看两种分类的关系。属于 A 的点，可以是 A 的内点，也可以是 A 的边界点。

或者说：属于 A 的点再去分，只分为两类：A 的内点和 A 的边界点。

反之，A 的内点一定属于 A，但是 A 的边界点不一定属于 A。所以 A 的内部含于 A。而 A 的边界则与 A 没有一定的包含关系。边界可以含于 A，也可以不含在 A 中。

来说说开集：属于 A 的点恰好都是 A 的内点。换句话说，A 的边界不含于 A。闭集：闭集就是 A 的边界含于 A。

另外，还要强调一点：刚才这些概念的前提是什么？首先，你有一个全平面 P，然后你有一个子集 A。这些概念都不仅仅跟 A 有关系，也跟全平面 P 有关系。

如果不是考虑把 A 放进三维空间，又不一样了。

如果我们的整个空间不是完整的平面，而是某一部分。

开集、边界就说到这里。

下面说连通。

连通就是不断开，连在一起的。好吧，这么说就等于没说。说得粗略一些，就是不能被两个开集分开。

集合 C 不连通的严格定义是：如果开集 A，B 不相交，而 $C = (C \cap$

$A) \cup (C \cap B)$，而且 $(C \cap A)$，$(C \cap B)$ 都非空，那么 C 就不连通。

不是不连通的，那么就是连通的。

另外一个概念叫道路连通。指的是你能从集合中的任何一点连续地走到另外一点，而不会跑到集合外面去。

道路连通一定连通，反之不然。定义区域为联通的开集。一定道路连通。

现在到了最激动人心的时刻，让我们回到小学。

我们小学时怎么做除法？$14 \div 3 = 4...2$，我们可以把同样的事情用在多项式上：我来做个示范：$(z^3 - 1) \div (z - 1)$，除尽了，余数为 0.

再来试试：$(z^3 + i) \div (z - 1)$，除不尽，余数是 $1 + i$。$(z^3 + i) \div (z + i)$，除尽了，没有余数。

首先看看第 0 个练习题。如果把 $x = i$ 代入这个式子，得到的结果是 $6i - 1$，刚好跟余式 $6x - 1$ 吻合。

再看看，再看看第 2 个练习题，如果把 $x = 3$ 代进被除式，得到 2，刚好就是余数。

第 3 个练习题，把 $x = 2$ 代进被除式，得到 0，刚好就是余数。

这是巧合吗？不是的。实际上如果 $f \div g = q...r$，那么就是说 $f = qg + r$，如果 g 有零点 a：$g(a) = 0$，那么自然有 $f(a) = r(a)$。

特别地，如果 g 是 $x^2 + 1$，你代入 $x = i$，就得到 $f(i) = r(i)$；

如果 g 是一次因式 $x - a$，你代入 $x = a$，就得到 $f(a) = r$. 更特别地，如果 $f(a) = 0$，就意味着 $f(x) = (x - a)q(x)$，这叫余式定理。

讲了这些我们再来看第 4 题。

再来看看第 14 题。

同一次因式定理一样，韦达定理也是大家从初中就开始用，但是至今很多人只知其然不知其所以然的一个东西。

一般 n 次方程的韦达定理，大家自己举一反三。

还是回到刚才的第 14 题，14 题的证明中我们用到了二次方程求根公式，它告诉我们：一元二次方程有两个根，如果系数都是实数，那么或者有两个实根，或者两个虚根共轭成对。

我们来看看三次方程如何。四次方程。九次方程。十次方程。

我们发现，总是虚根总是两两共轭成对。

但前提是：实系数！

最后，刚才我们发现了一个现象：n 次多项式有 n 个零点。这似乎是一个普遍现象。不论系数是实数还是复数。

构造过程	原始对象	等价标准	等价类被称作
整数到有理数	整数对	等比例（$p_1q_2 = p_2q_1$）	有理数
有理数到实数	有理数列	等极限（$a_n - b_n \to 0$）	实数
实数到复数	实系数多项式	模（$x^2 + 1$）的余式相同	复数

但是说 n 次多项式有 n 个零点其实不太恰当，因为可能有重根。

更恰当地说法是：n 次方程是否恰好能分解为 n 个一次因式的乘积？

答案是肯定的。这个事实如此地基本，以至于人们叫它代数基本定理。

实际上我们只需证明：任何多项式都有复根。这是因为：如果多项式有一个一次因式，那么因式定理告诉我们可以有 f=(x-a)g，继续对 g 讨论就知道。

所以，问题实际上归结为：是不是一定有复根。

不要小瞧这个定理！高斯在他的博士论文中批驳了前人对这个定理的证明（包括达朗贝尔、欧拉、勒让德、拉格朗日），并认为自己第一个严格证明了这个定理，尽管高斯确实比前人更进一步，但是后来人们仍然发现这个证明有漏洞。

受限于时代，高斯那时候并不具备复变函数的知识，虚数的概念也并不被大家接受。他实际上证明的是：实系数多项式总能分解为一次因式和二次因式的乘积。

本课程将利用解析函数的性质给出一个证明。

最后来升华一下：

第一：虚数、复数这样的概念并不是古已有之，而是逐渐形成的。用 $i^2 = -1$ 定义虚数是非常非常耍流氓的做法，逻辑上很难让人接受。数学上，定义一个新概念，总应该从已有的概念出发。

我们暂且把整数看作最基本的概念。(实际上他们可以从集合论出发给出定义，在这里就不提了）。那么有理数，实数，复数就分别是：约分等价类，极限等价类，实系数多项式模（$x^2 + 1$）的等价类。

第二，站在巨人的肩膀上摘苹果。高斯尚且不能解决的问题，今天我们却可以轻而易举地解决。大家不要觉得今人不如古人，实际上，今天大多数普通的大学生，掌握的数学知识都比高斯多。后人看今人，也是一样。我们要敢于学习，勇于学习，在这个历史长河中在前人的基础上往前进那么一点。