# 1 电磁现象的基本规律与电磁波

#### 1.1 习题8.4

为了使得接地板电势为0,可以设置正负交替、间距为2x的带相同电量Q的一系列像电荷,不妨设原来左侧电荷为正,则其所在处的电势为

$$U_1 = 2\sum_{k=1}^{\infty}rac{1}{4\piarepsilon_0}\cdotrac{(-1)^kQ}{2kx}$$

右侧电荷所在处的电势为

$$U_2=2\sum_{k=1}^{\infty}rac{1}{4\piarepsilon_0}\cdotrac{(-1)^k(-Q)}{2kx}$$

故原来的相互作用能为

$$W_e=rac{1}{2}(QU_1-QU_2+q_sU_s)$$

这里 $q_s$ 为感应电荷,因为导体接地,故 $U_s=0$ ,因此有

$$W_e=2\sum_{k=1}^{\infty}rac{1}{4\piarepsilon_0}\cdotrac{(-1)^kQ^2}{2kx}=rac{Q^2}{4\piarepsilon_0x}\sum_{k=1}^{\infty}rac{(-1)^k}{k}=-rac{Q^2}{4\piarepsilon_0x}{
m ln}\,2$$

后来相距无穷远,所以相互作用能为0,由功能原理

$$A=W_e'-W_e=rac{Q^2}{4\piarepsilon_0x}{\ln 2}$$

#### 1.2 习题8.6

(1)

由对称性,像电荷应在Oq连线上,设其到球心距离为d',电荷量为q'。建立极坐标系,空间一点 $P(r,\theta)$ ,其电势为

$$U=k\left(rac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos heta}}+rac{q'}{\sqrt{r^2+d'^2-2rd'\cos heta}}
ight)$$

球面电势为0,即

$$U|_{r=R}=0$$

解得

$$d'=rac{R^2}{d},q'=-rac{qR}{d}$$

因此U的表达式改写为

$$U=k\left[rac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos heta}}-rac{qR/d}{\sqrt{r^2+(R^2/d)^2-2r(R^2/d)\cos heta}}
ight]$$

因此

$$egin{aligned} ec{E} &= -
abla U \ &= kq \left[ rac{r - d\cos heta}{(r^2 + d^2 - 2rd\cos heta)^{3/2}} + rac{R(dR^2\cos heta - rd^2)}{(r^2d^2 + R^4 - 2rdR^2\cos heta)^{3/2}} 
ight] \mathbf{e_r} \ &+ kq \left[ rac{rd\sin heta}{(r^2 + d^2 - 2rd\cos heta)^{3/2}} - rac{drR^3\sin heta}{(r^2d^2 + R^4 - 2rdR^2\cos heta)^{3/2}} 
ight] \mathbf{e_ heta} \end{aligned}$$

(2)

由对称性,像电荷应在Oq连线上,设其到球心距离为d',电荷量为q'。建立极坐标系,空间一点 $P(r,\theta)$ ,其电势为

$$U'=U+rac{Q+q}{4\piarepsilon_0R}$$

后一项是因为导体产生了感应电荷(未接地),内表面为-q,外表面为Q+q,导体上的电荷对球内的贡献叠加于原来的U上,由于导体是等势体,故

$$U|_{r=R}=\mathrm{Const}$$

上式对任意的 $\theta$ 都成立,因此解条件与(1)中相同,解(q',d')相同。

故

$$ec{E}' = -
abla U' = -
abla (U+C) = -
abla U = ec{E}$$

## 1.3 习题8.8

电像为与平面对称的、带电量相等,符号相反的一根导线,则所要求的电容等效于这两根导线之间的电容。

由高斯定理,一根导线单独存在时,距离为r时的电场强度大小为

$$E=rac{a^2\lambda_e}{2rarepsilon_0}$$

设空间中 $r_0$ 处的电势为0,因此r处电势为

$$\phi(r) = \phi(r_0) - \int_{r_0}^r E \mathrm{d}r = rac{a^2 \lambda_e}{2 arepsilon_0} \mathrm{ln} \, rac{r_0}{r}$$

一根导线在自己身上产生的电势为

$$\phi_1 = rac{a^2 \lambda_e}{2 arepsilon_0} {
m ln} \, rac{r_0}{a}$$

另一根导线在这根导线上产生的电势为

$$\phi_2 = -rac{a^2\lambda_e}{2arepsilon_0} {
m ln}\,rac{r_0}{2b-a}$$

由电势叠加原理,这根导线的电势为

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = rac{a^2 \lambda_e}{2 arepsilon_0} ext{ln} \, rac{2b-a}{a}$$

则

$$C/\Delta x = rac{Q/\Delta x}{\phi} = rac{\pi a^2 \lambda_e}{rac{a^2 \lambda_e}{2arepsilon_0} \ln rac{2b-a}{a}} = rac{2arepsilon_0}{\ln rac{2b-a}{a}} = rac{2arepsilon_0}{\ln rac{2b}{a}} (b >> a)$$

## 1.4 习题8.10

(1)

未分裂导线:

设线电荷密度为λ,两导线(1,2)所带电荷相反,则

$$E_1=rac{\lambda}{2\piarepsilon_0 r}$$

1导线在离其 $r_1$ 处点P产生的电势为

$$U_1 = \int_{r_1}^{R_0} E_1 \mathrm{d}r = rac{\lambda}{2\piarepsilon_0} \mathrm{ln}\,rac{R_0}{r_1}$$

同理,2导线在P处的电势为

$$U_2 = -rac{\lambda}{2\piarepsilon_0} {
m ln}\,rac{R_0}{r_2}$$

两根导线在P处产生的电势为

$$U(P) = U_1 + U_2$$

于是在A、B两点处产生的电势为

$$U_A = rac{\lambda}{2\piarepsilon_0} {
m ln} \, rac{d-r_0}{r_0} \sim rac{\lambda}{2\piarepsilon_0} {
m ln} \, rac{d}{r_0} 
onumber$$
 $U_B = -rac{\lambda}{2\piarepsilon_0} {
m ln} \, rac{d}{r_0}$ 

输送电压为

$$U=U_A-U_B=rac{\lambda}{\piarepsilon_0} {\lnrac{d}{r_0}} \Rightarrow \lambda=rac{\piarepsilon_0 U}{\lnrac{d}{r_0}}$$

导线表面的电场强度最大

$$E_{1max} = rac{\lambda}{2\piarepsilon_0 r_0} + rac{\lambda}{2\piarepsilon_0 (d-r_0)} \sim rac{\lambda}{2\piarepsilon_0 r_0} = rac{U}{2r_0 \ln rac{d}{r_0}}$$

两分裂导线:

近似条件:  $d >> c >> r_0$ , 因此

$$U(P) = rac{\lambda}{2\piarepsilon_0} ext{ln} \, rac{r_2 r_2'}{r_1 r_1'}$$

在A、B导线表面的电势为

$$U_A = rac{\lambda}{2\piarepsilon_0} {
m ln} \, rac{d(d-c)}{cr_0} \sim rac{\lambda}{2\piarepsilon_0} {
m ln} \, rac{d^2}{cr_0} = -U_B$$

输送电压

$$U=U_A-U_B=rac{\lambda}{\piarepsilon_0} ext{ln} \, rac{d^2}{cr_0} \Rightarrow \lambda = rac{\piarepsilon_0 U}{ ext{ln} \, rac{d^2}{cr_0}}$$

故表面电场强度

$$E_{2max} = rac{U}{2r_0 \ln rac{d^2}{cr_0}}$$

所以

$$rac{E_{2max}}{E_{1max}} = rac{\ln(d/r_0)}{\ln(d^2/cr_0)} = rac{\ln(d/r_0)}{\ln(d/r_0) + \ln(d/c)} < 1$$

(2)

代入数据可得

$$rac{E_{2max}}{E_{1max}} = rac{\ln(d/r_0)}{\ln(d^2/cr_0)} = 61.57\%$$

#### 1.5 习题8.11

一根导线,距离其为r处的电场记为E(r)。

电位移线在垂直穿过界面时不发生偏转, 则高斯定理

$$D_1 \cdot \pi r l + D_2 \cdot \pi r l = \lambda l$$

环路定理

$$E_1 \cdot \pi r - E_2 \cdot \pi r = 0$$

则

$$E_1 = rac{\lambda}{(arepsilon_r+1)arepsilon_0\pi r}$$

故电势为

$$\phi = \phi_0 - \int_{r_0}^r E_1 \mathrm{d}r = rac{\lambda}{(arepsilon_r + 1)arepsilon_0 \pi} \mathrm{ln} \, rac{r_0}{r}$$

上式取 $\varepsilon_r = 1$ 即得无介质时的情况,由

$$C'/\Delta x = rac{Q/\Delta x}{\phi}$$

得

$$C'/C=rac{arepsilon_r+1}{2}$$

即

$$C'=rac{arepsilon_r+1}{2}C$$

#### 1.6 习题8.13

离轴线为r处产生感应电场 $E_k$ ,满足

$$\int_{L} \overrightarrow{E_{k}} \cdot \mathrm{d} ec{l} = E_{k} \cdot 2 \pi r = -rac{\mathrm{d} \Phi}{\mathrm{d} t}$$

当r < a时,螺线管内部磁通量为

$$\Phi = \mu_0 n I \cdot \pi r^2 = \mu_0 n I_0 \pi r^2 \sin \omega t$$

故

$$E_k = -rac{1}{2\pi r} \mu_0 n I_0 \pi r^2 \omega \cos \omega t$$

则位移电流密度

$$j_d = rac{\partial D}{\partial t} = arepsilon_0 rac{\partial E_k}{\partial t} = rac{1}{2} arepsilon_0 \mu_0 n I_0 r \omega^2 \sin \omega t$$

当 $r \ge a$ 时,螺线管内部磁通量为

$$\Phi = \mu_0 n I \cdot \pi a^2 = \mu_0 n I_0 \pi a^2 \sin \omega t$$

故

$$E_k = -rac{1}{2\pi r} \mu_0 n I_0 \pi a^2 \omega \cos \omega t$$

则位移电流密度

$$j_d=rac{\partial D}{\partial t}=arepsilon_0rac{\partial E_k}{\partial t}=rac{1}{2r}arepsilon_0\mu_0nI_0a^2\omega^2\sin\omega t$$

## 1.7 习题8.15

取

$$ec{E}=kx\overrightarrow{e_x}$$

满足题设所有要求,下面证明该电场的存在性。

由于不存在时变,则磁场

$$B = 0$$

麦克斯韦方程1

$$abla \cdot \vec{E} = k$$
(有源)

麦克斯韦方程2

$$abla imes ec{E} = 0$$
(无旋)

麦克斯韦方程3

$$abla \cdot \vec{B} = 0$$

麦克斯韦方程4

$$abla imes \vec{H} = 0$$

根据唯一性定理,这样的电场一定存在。

## 1.8 习题8.17

根据分压公式, 开关断开时电容器上分压为

$$U=\frac{R_1}{R_1+R_2}U_0$$

(1)

断开开关后,电容器与 $R_1$ 组成回路,RC电路方程为

$$R_1 \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = 0$$

解得

$$q=q_0\mathrm{e}^{-rac{t}{R_1C}}$$

其中

$$q_0=CU=rac{\pi b^2}{4\pi k d}\cdotrac{R_1}{R_1+R_2}U_0=rac{\pi b^2arepsilon_0}{d}\cdotrac{R_1}{R_1+R_2}U_0$$
  $C=rac{\pi b^2arepsilon_0}{d}$ 

所以

$$q=rac{\pi b^2arepsilon_0 R_1 U_0}{d(R_1+R_2)} \mathrm{e}^{-rac{dt}{R_1\pi b^2arepsilon_0}}$$

对电容器, 在数值上

$$egin{align} I_d &= rac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = CU \cdot (-rac{1}{R_1C}) \mathrm{e}^{-rac{dt}{R_1\pi b^2arepsilon_0}} \ &= -rac{U_0}{R_1+R_2} \mathrm{e}^{-rac{dt}{R_1\pi b^2arepsilon_0}} \end{split}$$

(2)

由对称性,知道电容器磁场是环形分布,根据环路定理

$$2\pi r\cdot B = \mu_0 I_d\cdot rac{r^2}{b^2} \Rightarrow B = rac{\mu_0 I_d r}{2\pi b^2} = -rac{\mu_0 r}{2\pi b^2} rac{U_0}{R_1 + R_2} \mathrm{e}^{-rac{dt}{R_1\pi b^2arepsilon_0}}$$

负号与方向有关。

能量密度

$$egin{align} w &= rac{1}{2} (ec{D} \cdot ec{E} + ec{B} \cdot ec{H}) = rac{1}{2} (arepsilon_0 E^2 + rac{B^2}{\mu_0}) \ E &= rac{I_d R_1}{d} = rac{U_0 R_1}{(R_1 + R_2) d} \mathrm{e}^{-rac{dt}{R_1 au b^2 arepsilon_0}} \ \end{aligned}$$

鉴于答案不是要求算这个我就不代入了哈。

能流密度

$$|ec{S}| = |ec{E} imes ec{H}|$$

在这电磁场中, $\vec{E}$ 与 $\vec{H}$ 是互相正交的,因此

$$|ec{S}| = |ec{E}| |ec{H}| = rac{U_0 R_1}{(R_1 + R_2) d} \mathrm{e}^{-rac{dt}{R_1 \pi b^2 arepsilon_0}} \cdot rac{r}{2 \pi b^2} rac{U_0}{R_1 + R_2} \mathrm{e}^{-rac{dt}{R_1 \pi b^2 arepsilon_0}}$$

#### 1.9 习题8.19

(1)

由麦克斯韦第二方程

$$abla imes ec{E} = -rac{\partial ec{B}}{\partial t}$$
 $abla imes ec{E} = rac{\partial E}{\partial z} (\mathbf{e_z} imes \mathbf{e_x}) = -E_0 \omega \sqrt{\mu_0 arepsilon_0} \sin(\omega \sqrt{\mu_0 arepsilon_0} z - \omega t) \mathbf{e_y}$ 

故

$$ec{B}=\int (-rac{\partial ec{B}}{\partial t})\mathrm{d}t=E_0\sqrt{\mu_0arepsilon_0}\cos(\omega\sqrt{\mu_0arepsilon_0}z-\omega t)\mathbf{e_y}$$

故磁场

$$ec{H}=rac{ec{B}}{\mu_0}=|ec{E}|\sqrt{rac{arepsilon_0}{\mu_0}}\mathbf{e_y}$$

(2)

$$ec{S} = ec{E} imes ec{H} = |ec{E}| |ec{H}| \mathbf{e_z} = |ec{E}|^2 \sqrt{rac{arepsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{e_z} \ ec{S_a} = rac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} ec{S} \mathrm{d}t = rac{1}{2} E_0^2 \sqrt{rac{arepsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{e_z} \ ec{S} \mathrm{d}t$$

# 1.10 习题8.21

(1)

电场

$$E=rac{u}{d}=rac{U_m\cos\omega t}{d}$$
 $ec{E}=E\mathbf{e_z}$ 

电位移通量

$$\Phi_D = arepsilon E \cdot \pi R^2$$

位移电流

$$I_d = rac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = -rac{\omega U_m arepsilon \pi R^2}{d} \sin \omega t$$

传导电流

$$I_0 = rac{u}{r} = rac{U_m \cos \omega t}{rac{1}{\sigma} rac{d}{\pi B^2}} = rac{\sigma \pi R^2 U_m \cos \omega t}{d}$$

安培环路定理

$$egin{aligned} H \cdot 2\pi r &= (I_d + I_0) \cdot rac{r^2}{R^2} \ ec{H} &= rac{r}{2\pi R^2} \cdot (rac{\sigma \pi R^2 U_m \cos \omega t}{d} - rac{\omega U_m arepsilon \pi R^2}{d} \sin \omega t) = rac{r U_m}{2d} (\sigma \cos \omega t - \omega arepsilon \sin \omega t) \end{aligned}$$

则瞬时坡印廷矢量

$$ec{S} = ec{E} imes ec{H} = rac{rU_m^2 \cos \omega t}{2d^2} (\sigma \cos \omega t - \omega arepsilon \sin \omega t) \mathbf{e_r}$$

平均坡印廷矢量

$$\overrightarrow{S_a} = rac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} ec{S} \mathrm{d}t = rac{\sigma r U_m^2}{4d^2} \mathbf{e_r}$$

(2)

进入电容器的平均功率(A为电容器柱面的侧面)

$$\left. P_{in,a} = \iint_A \overrightarrow{S_a} 
ight|_{r=R} \cdot \mathrm{d} ec{A} = rac{\sigma R U_m^2}{4d^2} \cdot 2\pi R \cdot d = rac{\sigma \pi R^2 U_m^2}{2d}$$

消耗的功率

$$P_{rac{t}{t}}=rac{u^2}{r}=rac{\sigma\pi R^2 U_m^2\cos^2\omega t}{d}$$

平均损耗功率

$$\overline{P_{eta \parallel}} = rac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} P_{eta} \mathrm{d}t = rac{\sigma \pi R^2 U_m^2}{2d}$$

## 1.11 习题8.25

在t时间内射到人造卫星表面的能量

$$W = S \cdot \pi r^2 \cdot t$$

动量为

$$p=mc=rac{W}{c^2}c=rac{S\pi r^2t}{c}$$

根据冲量定理

$$I = rac{1}{2}p + rac{1}{2}[p - (-p)] = rac{3}{2}p$$

则压力为

$$F = rac{{
m d}I}{{
m d}t} = rac{3S\pi r^2}{2c} = 2.12 imes 10^{-5}{
m N}$$

附加加速度为

$$a = \frac{F}{m} = 2.12 \times 10^{-7} \text{m/s}^2$$

## 1.12 习题8.28

在t时间内射入的能量

$$W = Pt$$

动量

$$p = mc = \frac{W}{c^2}c = \frac{Pt}{c}$$

冲量定理

$$I = p$$

则压力为

$$F = rac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = rac{P}{c} = 1.43 imes 10^{-11} \mathrm{N}$$

压强为

$$\mathscr{P}=rac{F}{\pi r^2}=rac{P}{\pi cr^2}=3.17 imes 10^{-12} \mathrm{Pa}$$