复变函数 B 作业 W4

习题 6

（1）$f(z)=\cos\frac{z}{2}$ 在全平面解析，且 $H(z)=2\sin\frac{z}{2}$ 是 $f(z)$ 的一个原函数，则

$$\int_0^{\pi+2i}\cos\frac{z}{2}dz=2\sin\frac{z}{2}\Big|_0^{\pi+2i}=\frac{\exp(i\frac{\pi+2i}{2})-\exp(-i\frac{\pi+2i}{2})}{i}=\frac{1}{e}+e$$

（3）$f(z)=\exp(-z)$ 在全平面解析，且 $H(z)=-\exp(-z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数，则

$$\int_{-\pi i}^{0}e^{-z}dz=-e^{-z}|_{-\pi i}^{0}=-1+e^{\pi i}=-2$$

习题 10

（1）$\int_C\frac{e^z}{1+z^2}dz=\int_C\frac{e^z/(z+i)}{z-i}dz$，设 $f(z)=e^z/(z+i)$，$f(z)$ 在 C 内解析，则由 Cauchy 积分定理

$$\int_C\frac{e^z/(z+i)}{z-i}dz=2\pi i f(i)=\pi e^i$$

（3）记 1、2、3 小题的闭路分别为 C_1,C_2,C_3，取闭路 $C_0=C_1^-+C_2^-+C_3$，$f(z)=e^z/(1+z^2)$ 在 C 及其围成的多连通区域内解析，根据 Cauchy 积分定理

$$\int_{C_3}f(z)dz=\int_{C_1}f(z)dz+\int_{C_2}f(z)dz=\pi e^i-\pi e^{-i}=2\pi i\sin 1$$

习题 13

（1）记 $f(z)=2z^2-z+1$，其在 C 及其围成的区域内解析，由 Cauchy 积分定理

$$g(1)=2\pi i f(1)=4\pi i$$

（2）取 $C_0:|z|=2$，$C_1:|z-z_0|=\rho$，$\rho>0$ 且 $\rho<|z_0|-2$，$C_2:|z|=|z_0|+2\rho$，$C=C_0^-+C_1^-+C_2$，则 $h(z)=\frac{2z^2-z+1}{z-z_0}$ 在 C 及其所围成的多连通区域内解析，则根据 Cauchy 积分定理

$$\int_{C_0}h(z)dz=\int_{C_2}h(z)dz-\int_{C_1}h(z)dz$$

根据 Cauchy 积分公式

$$\int_{C_0}h(z)dz=\int_{C_2}h(z)dz-\int_{C_1}h(z)dz=\int_{C_2}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-\int_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=0$$

习题 14

注意到

$$\int_C \frac{z^2dz}{(1+z^2)^2} = \int_C \frac{z^2/(z+i)^2}{(z-i)^2}dz$$

记 $f(z) = \frac{z^2}{(z+i)^2}$，则

$$f'(z)|_{z=i} = \left.\frac{2z(z+i)^2 - 2z^2(z+i)}{(z+i)^4}\right|_{z=i} = -\frac{i}{4}$$

根据 Cauchy 积分公式，有

$$\int_C \frac{z^2dz}{(1+z^2)^2} = \int_C \frac{z^2/(z+i)^2}{(z-i)^2}dz = \frac{2\pi i}{1!}f'(i) = \frac{\pi}{2}$$

习题 15

注意到

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z-a_1} + \frac{1}{z-a_2} + \cdots + \frac{1}{z-a_n}$$

假设闭路 C 内有 k 个零点，$0 \le k \le n$，分别记为 $a_{j_1},\ldots,a_{j_k}$；不在闭路 C 内的 $n-k$ 个零点记为 $a_{j_{k+1}},\ldots,a_{j_n}$。又因为闭路 C 不通过每个 a_i，设

$$J(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{z-a_{j_i}} \qquad \bar{J}(z) = \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{z-a_{j_i}} \qquad J(z) + \bar{J}(z) = \frac{P'(z)}{P(z)}$$

由 Cauchy 积分公式，得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C J(z)dz = \sum_{i=1}^{k} f(a_{j_i}) = \sum_{i=1}^{k} 1 = k$$

设 $a_{j_i}(k+1 \le i \le n)$ 离闭路 C 上点的最小距离为 d_i，a_{ji} 两两之间距离的最小值为 d_{n+1}，记 $d = \min_{k+1\le i\le n+1} d_i$，取 $\rho \in (0,d)$；设闭路 C 上点离原点的最远距离为 D，取 $\rho' \in (D,\infty)$。定义如下 $n-k+2$ 个闭路 $(k+1 \le i \le n)$：

$$C_i : |z - a_{j_i}| = \rho \quad C_{k+1} : |z| = \rho' \quad C_{k+2} = \sum_{i=k+1}^{n} C_i^- + C^- + C_{k+1}$$

$\bar{J}(z)$ 在 C_{k+2} 及其围成的多连通区域内解析，由 Cauchy 积分定理和公式

$$\int_C \bar{J}(z)dz = \int_{C_{k+1}} \bar{J}(z)dz - \int_{\sum_{i=k+1}^n C_i} \bar{J}(z)dz = \int_{C_{k+1}} \bar{J}(z)dz - \sum_{i=k+1}^{n}\int_{C_i} \bar{J}(z)dz = 0$$

所以

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{P'(z)}{P(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C [J(z)+\bar{J}(z)]dz = k$$

习题 17

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3ax^2 + 2bxy + cy^2$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6ax + 2by$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = bx^2 + 2cxy + 3dy^2$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2cx + 6dy$$

因为 u 是调和函数，所以

$$u''_x + u''_y = 0 \Rightarrow 3ax + by + cx + 3dy = 0$$

因为 x,y 是变量，只能系数等于零，即

$$b + 3d = 0, \quad c + 3a = 0$$

习题 18

（1）因为 $f(z) = u + iv$ 是解析函数，所以：

1. $f(z)$ 满足 C-R 方程：$u'_x = v'_y \quad u'_y = -v'_x$
2. $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 都是调和函数：$u''_x + u''_y = 0 \quad v''_x + v''_y = 0$

记 $t = \ln|f(z)| = \frac{1}{2}\ln(u^2 + v^2)$，则有

$$t'_x = \frac{uu'_x + vv'_x}{u^2 + v^2}$$
$$t''_x = \frac{[(u'_x)^2 + uu''_x + (v'_x)^2 + vv''_x](u^2 + v^2) - 2(uu'_x + vv'_x)^2}{(u^2 + v^2)^2}$$

对 y 求偏导同理，只需更换下标，结合上面的条件 1，有

$$t''_x + t''_y = \frac{(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (v'_x)^2 + (v'_y)^2}{u^2 + v^2} - 2\frac{(uu'_y + vv'_y)^2 + (uu'_x + vv'_x)^2}{(u^2 + v^2)^2} = 0$$

所以 $t = \ln|f(z)|$ 是调和函数。
（2）$w = |f(z)|^2 = u^2 + v^2$，所以

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2[(u'_x)^2 + uu''_x + (v'_x)^2 + vv''_x + (u'_y)^2 + uu''_y + (v'_y)^2 + vv''_y]$$

结合 $f(z)$ 是解析函数的性质，化简得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2[(u'_x)^2 + (v'_x)^2 + (u'_y)^2 + (v'_y)^2] = 4[(u'_x)^2 + (v'_x)^2] = 4|f'(z)|^2$$

习题 20

（1） $u'_x = 3x^2 - 12xy - 3y^2 = v'_y$，所以 $v = \int v'_y dy = 3x^2y - 6xy^2 - y^3 + \phi(x)$。
$u'_y = -6x^2 - 6xy + 6y^2 = -v'_x = -(6xy - 6y^2 + \phi'(x))$，所以 $\phi'(x) = 6x^2$，所以 $\phi(x) = 2x^3 + C$。又 $f(0) = 0$ 即 $v(0,0) = 0$，解得 $C = 0$。
综上，$v(x,y) = 3x^2y - 6xy^2 - y^3 + 2x^3$，$f(z) = u + iv$。
（3） $v'_y = -\frac{(x+1)^2-y^2}{[(x+1)^2+y^2]^2} = u'_x$，所以 $u = \int u'_x dx = \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} + \phi(y)$。
$u'_y = -\frac{2(x+1)y}{[(x+1)^2+y^2]^2} + \phi'(y) = -v'_x = \frac{2y(x+1)}{[(x+1)^2+y^2]^2}$，所以 $\phi'(y) = \frac{4y(x+1)}{[(x+1)^2+y^2]^2}$，所以 $\phi(y) = -\frac{2(x+1)}{(x+1)^2+y^2} + C$。又 $f(0) = 2$ 即 $u(0,0) = C - 1 = 2$，所以 $C = 3$。
综上，$u(x,y) = -\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} + 3$，$f(z) = u + iv$。