第一部分　电力与电场

1　习题 1.2

该单位换算具有线性关系，不妨取

$$q_1 = q_2 = 1\mathrm{C}, r = 1\mathrm{m} \tag{1}$$

在国际单位制下

$$F = kq_1q_2/r^2 = 9\times10^9\mathrm{N} \tag{2}$$

在该单位制下

$$1\mathrm{N} = 10^5\mathrm{N}'，F' = x^2/100^2 \tag{3}$$

则有

$$F' = 10^5 F \tag{4}$$

解得

$$x = 3\times10^9 \tag{5}$$

即

$$1\mathrm{C} = 3\times10^9\mathrm{esu} \tag{6}$$

由此转换得到

$$e = 4.774\times10^{-10}\mathrm{esu} = 1.591\times10^{-19}\mathrm{C} \tag{7}$$

2　习题 1.4

质子质量 $m_p = 1.67\times10^{-27}\mathrm{kg}$，中子质量 $m_n = 1.67\times10^{-27}\mathrm{kg}$，电子质量 $m_e = 9.11\times10^{-31}\mathrm{kg}$，人体质量 $m = 50\mathrm{kg}$。

设人体质子数为 N，不妨设电子数为 $(1-10^{-8})N$，则

$$m_pN + m_nN + m_e(1-10^{-8})N = m \tag{8}$$

解得

$$N = 1.49\times10^{28} \tag{9}$$

人体静带电量

$$Q = 10^{-8}Ne = 23.8\mathrm{C} \tag{10}$$

此时静电力

$$F = kQ^2/r^2 = 5.1\times10^{12}\mathrm{N} \tag{11}$$

万有引力

$$F_{\text{引}} = Gm_1m_2/r^2 = 1.67\times10^{-7}\mathrm{N} \tag{12}$$

二者之比

$$\frac{F}{F_{\text{引}}} = 3.05\times10^{19} \tag{13}$$

若二者之比为 10000，则静电力

$$F' = 1.67\times10^{-3}\text{N} \tag{14}$$

则可倒推算出

$$q_1 = q_2 = 4.31\times10^{-7}\text{C} \tag{15}$$

则

$$\Delta N = q_1/e = 2.69\times10^{12} \tag{16}$$

再可倒推算出

$$N = 1.49\times10^{28} \tag{17}$$

偏差

$$\delta = \frac{\Delta N}{N} = 1.8\times10^{-16} \tag{18}$$

3 习题 1.6

$F = \int_0^{+\infty}\int_0^Q \left[\frac{k\mathrm{d}q\mathrm{d}Q}{(\sqrt{R^2+r^2})^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{R^2+r^2}}\right] = \frac{\lambda kQ}{R}$，其中 $\mathrm{d}q = \lambda\mathrm{d}r$.

4 习题 1.8

将 q_1 视为静止，则 q_2 的约化质量

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \tag{19}$$

则 q_2 的运动方程为

$$\frac{kq_1q_2}{x^2} = \mu\ddot{x} \tag{20}$$

积分变换：

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}\cdot\dot{x} \tag{21}$$

所以方程变为

$$\frac{kq_1q_2\mathrm{d}x}{x^2} = \mu\dot{x}\mathrm{d}\dot{x} \tag{22}$$

积分得到

$$kq_1q_2\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\mu(\dot{x})^2 \tag{23}$$

变形为

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{kq_1q_2\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{2}\mu}}} \tag{24}$$

积分得到

$$t=\pi\sqrt{\frac{\mu r_0^3}{8kq_1q_2}} \tag{25}$$

或者，这二体之间的关系应当满足类似开普勒第三定律的规律。
当 q_2 绕 q_1 做半径为 $r=r_0/2$ 匀速圆周运动时，有

$$\frac{kq_1q_2}{r^2}=\mu\frac{4\pi^2}{T^2}r \tag{26}$$

解得

$$T=\pi\sqrt{\frac{\mu r_0^3}{2kq_1q_2}} \tag{27}$$

所求

$$t=\frac{1}{2}T=\pi\sqrt{\frac{\mu r_0^3}{8kq_1q_2}} \tag{28}$$

5 习题 1.10

先求当 $r\geqslant R$ 时的情况，取高度为 $\mathrm{d}z$ 的小圆柱体，则

$$\mathrm{d}Q=\int_0^R \rho\cdot 2\pi r\mathrm{d}r\mathrm{d}z \tag{29}$$

由对称性，z 方向的电场强度将被抵消，仅有半径方向的 E 参与叠加。
则

$$\mathrm{d}E=\frac{k\mathrm{d}Q}{z^2+r^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{z^2+r^2}} \tag{30}$$

则

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}E=\frac{4k\pi}{r}\left(\frac{1}{3}aR^3-\frac{1}{5}bR^5\right) \tag{31}$$

则当 $r<R$ 时

$$E=4k\pi\left(\frac{1}{3}ar^2-\frac{1}{5}br^4\right) \tag{32}$$

6 习题 1.13

将半圆柱面分割成无数细长条，则每一细长条可看成无限长的导线。
设每一根“导线”在 O 处产生的电场为 $\mathrm{d}E$。
由高斯定理

$$\mathrm{d}E\iint_S\mathrm{d}S=\int\frac{\mathrm{d}q}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma\mathrm{d}z}{2\pi R\varepsilon_0} \tag{33}$$

其中 $\mathrm{d}z=R\mathrm{d}\theta$.
则

$$E=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}E=\frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0} \tag{34}$$

或者，由对称性，平行方形截面方向的电场强度将被抵消，仅有垂直方向的 E 参与叠加。

则

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\mathrm{d}q}{r^2 + R^2} \cos\theta \cdot \frac{R}{\sqrt{r^2 + R^2}} = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0} \tag{35}$$

其中 $\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}r \cdot R\mathrm{d}\theta$.

7 习题 1.15

取无穷远处为电势零点，令 $\phi = \theta + \dfrac{\pi}{4}$，则电势

$$U = kq\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right) \tag{36}$$

其中

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2a^2 - 2\sqrt{2}ar\cos\phi}} \tag{37}$$

$$r_2 = \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2a^2 + 2\sqrt{2}ar\cos\phi}} \tag{38}$$

$$r_3 = \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2a^2 - 2\sqrt{2}ar\sin\phi}} \tag{39}$$

$$r_4 = \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2a^2 + 2\sqrt{2}ar\sin\phi}} \tag{40}$$

将 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 2x^2 - 2\sqrt{2}x\sin\phi}}$ 泰勒展开，保留三项，化简得

$$U = -\frac{3kql^2 \sin 2\theta}{2r^3} \tag{41}$$

故

$$E = -\nabla U = -\mathbf{e_r}\frac{\partial}{\partial r}U - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}U \tag{42}$$

得

$$E = -\mathbf{e_r}\frac{9kql^2 \sin 2\theta}{2r^4} + \mathbf{e}_\theta \frac{3kql^2 \cos 2\theta}{r^4} \tag{43}$$

8 习题 1.18

取一横切面，以横切面圆心为原点 O，指向狭缝方向为 x 正方形建立极坐标系。

则坐标系上任意一点的电场可以看成是完整的圆柱的电场 E_1 与带相反电荷的狭缝的电场 E_2 的叠加。

下面来求 E_1，取高斯面为与原圆筒共轴的半径为 r 的圆筒面。

当 $r < R$ 时，电荷均在外部，由高斯定理知场强为零。

当 $r \geqslant R$ 时，由高斯定理

$$E_1 \iint_S \mathrm{d}S = \int \frac{\mathrm{d}Q}{\varepsilon_0} \tag{44}$$

得

$$E_1 = \frac{R\sigma}{r\varepsilon_0} \tag{45}$$

下面来求 E_2，取高斯面为以狭缝为轴的圆筒面，半径为 r。因为 a 很小，可以看成一条导线。由高斯定理

$$E_2 \iint_S \mathrm{d}S = \int \frac{\mathrm{d}Q}{\varepsilon_0} \tag{46}$$

得

$$E_2 = \frac{a\sigma}{2\pi r\varepsilon_0} \tag{47}$$

则

$$\mathbf{E}_{内} = -\frac{a\sigma}{2\pi r'\varepsilon_0}\mathbf{e}_{\mathbf{r}'}，\ \mathbf{E}_{外} = \frac{R\sigma}{r\varepsilon_0}\mathbf{e}_{\mathbf{r}} - \frac{a\sigma}{2\pi r'\varepsilon_0}\mathbf{e}_{\mathbf{r}'} \tag{48}$$

其中 $\mathbf{e}_{\mathbf{r}'}$ 是以狭缝为原点，指向圆心方向建立极轴建立坐标系时的单位向量，$\mathbf{e}_{\mathbf{r}}$ 是以圆心为原点，指向狭缝方向建立极轴建立坐标系时的单位向量。

9 习题 1.21

取以原球心为球心，半径为 $r < R$ 的球为高斯面。

$$E \iint_S \mathrm{d}S = \int \frac{\mathrm{d}Q}{\varepsilon_0} \tag{49}$$

$$\iint_S \mathrm{d}S = 4\pi r^2，\ \int \frac{\mathrm{d}Q}{\varepsilon_0} = \int_0^r \left[\frac{4}{3}\pi(x+\mathrm{d}x)^3 - \frac{4}{3}\pi x^3\right] \frac{\rho_0 e^{-kx}}{\varepsilon_0 x} \tag{50}$$

则

$$E = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 k^2 r^2}[1-(kr+1)e^{-kr}] \tag{51}$$

10 习题 1.24*

在那个宇宙中，仅让一静电力对一个电荷量为 q_0 的电荷做功，从 P 移到 Q 处。做功

$$A = q_0 \int_P^Q \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = q_0 \int_{r_P}^{r_Q} \frac{kq\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{kqq_0}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_P^2} - \frac{1}{r_Q^2}\right) \tag{52}$$

与路径无关。

因此可定义电势

$$U = \frac{A_{Q\to\infty}}{q_0} = \frac{kq}{8\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{53}$$

事实上，这里我们默认该电场力是有心力，那么一定有 $\mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = r\mathrm{d}r$，就可以定义势能。

则平板对讨论点的势能

$$\mathscr{U} = \lim_{R\to+\infty}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{k\sigma r'\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r'}{8\pi\varepsilon_0(r^2+r'^2)} = \lim_{R\to+\infty}\frac{k\sigma}{8\varepsilon_0}\ln\frac{R^2+r^2}{r^2} \tag{54}$$

其中 r' 是极坐标下的哑元，R 是选取的圆盘半径。

可以看到这里再设置无限远处为电势零点并不适合，应取 $r=r_0$ 有限点处为电势零点。则

$$U = \frac{kq}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_0^2}-\frac{1}{r^2}\right) \tag{55}$$

这样

$$\mathscr{U} = \lim_{R\to+\infty}\frac{k\sigma}{8\varepsilon_0}\left(\ln\frac{R^2+r_0^2}{r_0^2}-\ln\frac{R^2+r^2}{r^2}\right) = \frac{k\sigma}{4\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0} \tag{56}$$

11 习题 1.25

由于是带电导体球，由导体的电荷分布知球壳的电荷都分布在表面。设外表面的电荷为 $+(q+Q)$，内表面的电荷为 $-q$，则内球的电荷量为 $+q$。内球的电势为 0，因此可列方程

$$U = k\left(\frac{q+Q}{R_3}-\frac{q}{R_2}+\frac{q}{R_1}\right) = 0 \tag{57}$$

解得

$$q = \frac{R_1R_2}{R_1R_3-R_1R_2-R_2R_3}Q \tag{58}$$

球内离球心 $r>R_1$ 处的电场为

$$E = \frac{kq}{r^2} \tag{59}$$

则球壳电势为

$$U = \int_{R_1}^{R_2}E\mathrm{d}r = \frac{k(q+Q)}{R_3} \tag{60}$$

【以下是错误做法，因为没看到是导体球】

半径为 R，带电量为 q 的球体在球心处产生的电势与在表面产生的电势相等（球体内部场强为 0，因此做功为 0），为

$$U = \frac{kq}{R} \tag{61}$$

不妨设题中球壳的电密度为 ρ，则有

$$Q = \rho\cdot\frac{4\pi}{3}(R_3^3-R_2^3) \tag{62}$$

则球壳在球心产生的电势

$$U_1 = \frac{kq_1}{R_3}-\frac{kq_2}{R_2} \tag{63}$$

其中 $q_1=\rho\cdot\dfrac{4\pi R_3^3}{3}$，$q_2=\rho\cdot\dfrac{4\pi R_2^3}{3}$。

球体在球心产生的电势

$$U_2 = -\frac{kq_3}{R_1} \tag{64}$$

又有

$$U_1 + U_2 = 0 \tag{65}$$

则

$$q_3 = \frac{R_1R_2 + R_1R_3}{R_3^2 + R_2R_3 + R_2^2}Q \tag{66}$$

【错误做法结束】

12 习题 1.28

$U = \int \frac{k\mathrm{d}q}{\sqrt{x^2+R^2}} = \frac{kQ}{\sqrt{x^2+R^2}}$，这里取无限远处为电势零点。

13 习题 1.30

电子球电荷密度为

$$\rho = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi r_a^3} \tag{67}$$

正电荷在 r 处产生的电势

$$\varphi_1 = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{68}$$

负电荷球体被分为两部分，内球在 r 处产生的电势

$$\varphi_2 = -\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{Zer^2}{4\pi\varepsilon_0 r_a^3} \tag{69}$$

外球在 r 处产生的电势

$$\varphi_3 = -\int_r^{r_a} \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi\left[(r' + \mathrm{d}r')^3 - r'^3\right]}{4\pi\varepsilon_0 r'} = -\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r_a^3} \cdot \left(\frac{3}{2}r_a^2 - \frac{3}{2}r^2\right) \tag{70}$$

故总电势

$$\varphi = \sum_{i=1}^{3} \varphi_i = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2r_a} + \frac{r^2}{2r_a^3}\right) \tag{71}$$

14 习题 1.31

以球心为原点，细隧道方向为极轴 Ox 建立极坐标系，当 $r = x, \theta = 0$ 时，由牛顿第二定律可知

$$-\frac{kq \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi x^3}{x^2} = m\ddot{x} \tag{72}$$

化简为

$$-\frac{q\rho}{3\varepsilon_0}x = m\ddot{x} \tag{73}$$

因此该物体将做简谐运动，周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3\varepsilon_0 m}{q\rho}} \tag{74}$$

15 习题 1.32

先来讨论无穷大平面的电场强度，设面密度为 σ。
取一圆柱为高斯面，则由高斯定理

$$E \cdot 2S = \frac{S\sigma}{\varepsilon_0} \tag{75}$$

则

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{76}$$

可知无限大平面产生匀强电场，则在平板层外一点，电场强度

$$\mathscr{E} = \int_0^d E \mathrm{d}r \tag{77}$$

得到

$$\mathscr{E} = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \tag{78}$$

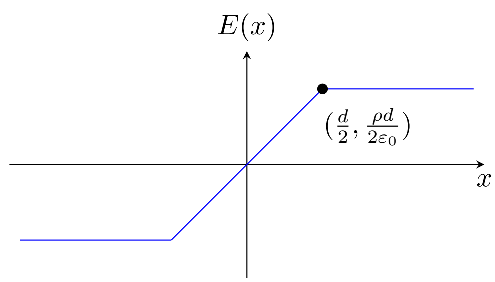
在平板层内一点，离原点距离为 x 处，电场强度

$$\mathscr{E} = \int_{-\frac{d}{2}}^{x} E \mathrm{d}r - \int_{x}^{\frac{d}{2}} E \mathrm{d}r \tag{79}$$

得到

$$\mathscr{E} = \frac{\rho x}{\varepsilon_0} \tag{80}$$

$E(x) - x$ 图如下：



16 习题 1.34

若平板补齐，则产生的电场为

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{81}$$

带负电的圆盘对 P 点的电场为

$$E_2 = \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{k\sigma r' \mathrm{d}r' \mathrm{d}\theta}{r'^2 + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{r'^2 + x^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}\right) \tag{82}$$

故 P 点电场为

$$E = E_1 - E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}} \tag{83}$$

电势为

$$U = \int_0^x E\mathrm{d}x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{x^2+r^2} - r) \tag{84}$$

17 习题 1.36

取一共轴圆筒面为高斯面，半径为 r。

当 $r > R_2$ 时，由高斯定理

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{2\pi R_1 l \lambda_1 + 2\pi R_2 l \lambda_2}{\varepsilon_0} \tag{85}$$

得到

$$E = \frac{R_1\lambda_1 + R_2\lambda_2}{r\varepsilon_0} \tag{86}$$

当 $R_1 < r < R_2$ 时，由高斯定理

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{2\pi R_1 l \lambda_1}{\varepsilon_0} \tag{87}$$

得到

$$E = \frac{R_1\lambda_1}{r\varepsilon_0} \tag{88}$$

当 $r < R_1$ 时，由高斯定理

$$E = 0 \tag{89}$$

若 $\lambda_1 = -\lambda_2$，仅 $r > R_2$ 时的场强需要修改为

$$E = \frac{(R_1 - R_2)\lambda_1}{r\varepsilon_0} \tag{90}$$