1. (1) 若 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4=1 \\ x_1-x_2+x_3+x_4=2 \\ 3x_1-4x_2+3x_3+x_4=t \end{cases}$ 有解，则参数 $t=$ 5.

考虑增广矩阵 $(A|b)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 3 & 1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow[-3r_1\to r_3]{-r_1\to r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & t-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_2\to r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-5 \end{pmatrix}$

线性方程组有解充要条件为 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}(A|b)$，现 $\mathrm{rank}A=2$，要求 $\mathrm{rank}(A|b)=2$，故 $t=5$，原方程有无穷多解.

(2) 若向量 $\alpha_1=(1,1,1)$, $\alpha_2=(1,2,3)$, $\alpha_3=(2,3,t)$ 生成 $\mathbb{R}^3$ 中2维子空间，则参数 $t=$ 4.

考虑向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩，令 $A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{pmatrix} \xrightarrow[-r_1\to r_3]{-r_1\to r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & t-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_2\to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & t-4 \end{pmatrix}$

当 $t=4$ 时，$\mathrm{rank}A=2$

(3) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，则A的相合规范型为 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$.

求A的特征值，根据A的特征值的符号得到相合规范型. $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & \lambda+1 \end{vmatrix}$

$=(\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 & 0 \\ -2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda-5)=0$，特征值为 $-1,-1,5$，一正两负.

故相合规范型为 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

(4) 二次曲面方程 $2x^2-3y^2-3z^2-2yz-5=0$ 表示曲面类型为 双叶双曲面.

考虑矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ 的特征值，$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+3 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+3 \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda+4)=0$

由特征值符号知 二次曲面标准形为 (正交相似) $2x^2-2y^2-4z^2=5$，即 $\frac{2}{5}x^2-\frac{2}{5}y^2-\frac{4}{5}z^2=1$，故曲面为 双叶双曲面.

(5) 实二次型 $Q(x,y,z)=x^2+y^2+3z^2+2txy+2txz+2yz$ 为正定时当且仅当参数 t 满足 $t\in(-1,1)$.

考虑实二次型对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & t & t \\ t & 1 & 1 \\ t & 1 & 3 \end{pmatrix}$，只要A的顺序主子式均 >0，则A正定，即要求

$1>0$ (成立)，$\begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix}=1-t^2>0$，$|A|=2(1-t^2)>0$，因此 $t\in(-1,1)$

2、判断：(1) A为n阶方阵，则 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}A^2$.

解：错误. 如：$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\mathrm{rank}A=2\neq 1=\mathrm{rank}A^2$.

事实上，当A可逆时，有 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}A^2$.

(2) 若0是矩阵A的特征值，则A一定为奇异矩阵.

解：正确. 谈特征值首先要求A为方阵，设A的特征值为 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ (n阶方阵)，因为 $\det A=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，只要存在 $\lambda_i=0$，则 $\det A=0$，则A为奇异方阵.

(3) 若A是n阶方阵，若对任意n维列向量 x 有 $x^TAx=0$，则A为反对称方阵。

解：正确。设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，取 $x_i=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ ← 第i行位置，有 $a_{ii}=x_i^TAx_i=0$。

取 $x_{ij}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ ← 第i行位置 ← 第j行位置 有 $a_{ii}+a_{ij}+a_{ji}+a_{jj}=x_{ij}^TAx_{ij}=0$

得 $a_{ij}=-a_{ji}$，对 $\forall i,j$ 成立，即A为反对称方阵。

(4) 若A、B为n阶正定矩阵，则AB也是n阶正定矩阵。

解：错误，AB未必对称。反例：$A=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$，$AB=\begin{pmatrix}4&5\\4&7\end{pmatrix}$，AB均正定但

AB不对称，则AB不正定。

Rmk：A、B均n阶正定矩阵，则AB正定 $\Longleftrightarrow AB=BA$

(5) 设A为n阶方阵，则A是正交矩阵当且仅当A的n个行向量组成n维实数空间的一组标准正交基。

解：正确。若 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ 为正交阵 $\Longleftrightarrow AA^T=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}(\alpha_1^T\ \alpha_2^T\cdots\alpha_n^T)=\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_1^T&\alpha_1\alpha_2^T&\cdots&\alpha_1\alpha_n^T\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \alpha_n\alpha_1^T&\alpha_n\alpha_2^T&\cdots&\alpha_n\alpha_n^T\end{pmatrix}=I$

$\Longleftrightarrow (\alpha_i,\alpha_j)=\alpha_i\alpha_j^T=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \Longleftrightarrow \alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为n维实数空间一组标准正交基。

3、$\mathbb{R}^3$ 中定义线性变换 $\mathcal{A}(x,y,z)=(x+2y,\ x-3z,\ 2y-z)$

(1) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1=(1,0,0),\alpha_2=(1,1,0),\alpha_3=(1,1,1)$ 下的表示矩阵。

(2) 是否存在基 β_1,β_2,β_3，使得 $\mathcal{A}$ 在该基下表示矩阵为 $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&3\\-1&0&1\end{pmatrix}$。

解：(1) $\mathcal{A}(\alpha_1)=(1,1,0)=\alpha_2$

$\mathcal{A}(\alpha_2)=(3,1,2)=2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3$

$\mathcal{A}(\alpha_3)=(3,-2,1)=5\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_3$

因此 $\mathcal{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&2&5\\1&-1&-3\\0&2&1\end{pmatrix}$

$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$

即A为 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的表示矩阵。

(2) 若 $\mathcal{A}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&3\\-1&0&1\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)B$，则矩阵A和B相似，故以下讨论A和B是否相似。

A的特征多项式 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&-5\\-1&\lambda+1&3\\0&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda\big((\lambda+1)(\lambda-1)+6\big)+\big((-2)(\lambda-1)-10\big)=\lambda^3+3\lambda-8$

B的特征多项式 $|\lambda I-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-1&\lambda-1&-3\\1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=3+(\lambda-1)\big((\lambda-1)^2-1\big)=\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda+3$

由于相似矩阵具有相同的特征多项式，但A和B特征多项式不同，故A和B不相似，即不存在基 β_1,β_2,β_3 使得 $\mathcal{A}$ 在基下矩阵为 $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&3\\-1&0&1\end{pmatrix}$。

4. 设 $V=\{f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\}$ 为次数不超过2的实系数多项式构成的线性空间.

(1) 证明 $(f(x),g(x))=f(0)g(0)+f(1)g(1)+f(2)g(2)$ 定义了V上的一个内积

(2) 应用 schmit 正交化将向量组 $\{1,x\}$ 改造为相对(1)内积的标准正交向量组.

(1) 证明：验证内积满足的条件：

设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$，$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2$，

1° 正定性：$(f(x),f(x))=a_0^2+(a_0+a_1)^2+(a_0+2a_1+4a_2)^2\geqslant 0$，且

$$(f(x),f(x))=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} a_0=0 \\ a_0+a_1=0 \\ a_0+2a_1+4a_2=0 \end{cases} \Longleftrightarrow a_0=a_1=a_2=0 \Longleftrightarrow f=0.$$

2° 对称性：$(f(x),g(x))=f(0)g(0)+f(1)g(1)+f(2)g(2)=(g(x),f(x))$ 成立

3° 关于第一个变量线性：$\forall \lambda,\mu\in\mathbb{R}$，$f,g,h\in V$，

$$(\lambda f+\mu h,g)=(\lambda f+\mu h)(0)g(0)+(\lambda f+\mu h)(1)g(1)+(\lambda f+\mu h)(2)g(2)$$

$$=\lambda f(0)g(0)+\lambda f(1)g(1)+\lambda f(2)g(2)+\mu h(0)g(0)+\mu h(1)g(1)+\mu h(2)g(2)$$

$$=\lambda(f,g)+\mu(h,g).$$

综上，$(f(x),g(x))$ 如上定义为V上一个内积

(2) 解．令 $\alpha_1=1$，$\alpha_2=x$，$\beta_1=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=x-\frac{(x,\frac{\sqrt{3}}{3})}{(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})}\frac{\sqrt{3}}{3}=x-\frac{\sqrt{3}}{1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=x-1$$

再单位化．令 $\gamma_1=\beta_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\gamma_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{x-1}{\sqrt{2}}$$

因此：向量组 $\{1,x\}$ 相对于V中内积的标准正交向量组为 $\left\{\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right\}$.

5. 设M为2n阶方阵 $\begin{pmatrix} I & A \\ A & I \end{pmatrix}$，其中A为满足 $A^2=I$ 的n阶实对称方阵.

(1) 求矩阵M所有特征值　(2) 求可逆矩阵P，使得 $P^{-1}MP$ 为对角矩阵.

解. (1)
$$|\lambda I-M|=\begin{vmatrix} (\lambda-1)I & -A \\ -A & (\lambda-1)I \end{vmatrix} \overset{\lambda\neq1}{=\!=} (\lambda-1)^n\begin{vmatrix} I & -\frac{1}{\lambda-1}A \\ -A & (\lambda-1)I \end{vmatrix} \xrightarrow[A^2=I]{Ar_1\to r_2} (\lambda-1)^n\begin{vmatrix} I & -\frac{1}{\lambda-1}A \\ 0 & \lambda-1-\frac{1}{\lambda-1}I \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda^2-2\lambda)^n=0$$　因此 $\lambda=0,2$ 为M的全部特征值

注意到 $\lambda=1$ 时 $|I-M|=\begin{vmatrix} 0 & -A \\ -A & 0 \end{vmatrix}=-|A|^2=-1\neq0$，故 $\lambda=1$ 不为M的特征值.

(2) 解方程组．当 $\lambda=0$ 时 $(\lambda I-M)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -I & -A \\ -A & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=0 \xRightarrow{A^2=I} IX+AY=0$ 知

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -A \\ I \end{pmatrix}T$　$T\in\mathbb{R}^{n\times n}$，基础解系为 $\begin{pmatrix} -A \\ I \end{pmatrix}$

当 $\lambda=2$ 时 $(\lambda I-M)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & -A \\ -A & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=0 \xRightarrow{A^2=I} IX-AY=0$ 知 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}T$，$T\in\mathbb{R}^{n\times n}$

基础解系为 $\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$，于是令 $P=\begin{pmatrix} A & -A \\ I & I \end{pmatrix}$，有 $P^{-1}MP=\begin{pmatrix} 2I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为对角阵.

6、设A.B均为n阶正定矩阵，证明：$\det A\cdot\det B \le \left(\frac{1}{n}tr(AB)\right)^n$.

证明：设AB的特征值为$\lambda_1,\cdots\lambda_n$，则 $\det A\cdot\det(B) = \det(AB) = \lambda_1\cdots\lambda_n$

$tr(AB) = \lambda_1+\cdots+\lambda_n$，利用基本不等式 $\sqrt[n]{\lambda_1\cdots\lambda_n} \le \frac{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}{n}$ 求证，前提是$\lambda_1,\cdots,\lambda_n>0$.

下证：若A.B均为正定矩阵，则AB的特征值$\lambda_i>0$，$\forall i=1,2,\cdots n$.

由A正定，存在可逆阵P，使得$PAP^T=I$；于是：$PABP^{-1} = \underbrace{PAP^T}_{= I}(P^T)^{-1}BP^{-1} = (P^{-1})^TBP^{-1}$

即AB与矩阵$(P^{-1})^TBP^{-1}$相似，而$(P^{-1})^TBP^{-1}$与B合同，故$(P^{-1})^TBP^{-1}$正定，特征值全大于0。

由相似矩阵具有相同的特征值知AB特征值$\lambda_i>0$，$\forall i=1,2,\cdots n$.

综上：$\det A\cdot\det B = \lambda_1\cdots\lambda_n \le \left(\frac{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}{n}\right)^n = \left(\frac{trAB}{n}\right)^n$ 成立. #