# 数学分析B2期中复习

段雅丽

中国科学技术大学数学科学学院

ylduan01@ustc.edu.cn

# 主要内容

- 空间解析几何

- 多变量函数的微分学

  (1) 极限与连续

  (2) 微分与偏导数

  (3) 方向导数与梯度

  (4) 复合函数的偏导数

  (5) 隐函数的偏导数

  (6) 泰勒公式与极值

  (7) 空间曲线与曲面

- 多变量函数的重积分

  (1) 二重积分

  (2) 三重积分

1. $l$是过点$M_0(22,0,2)$且与两直线

$$L_1:\frac{x-1}{-1}=y+1=\frac{z+6}{-2}\quad L_2:\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-1}=z-1$$

都相交的直线，求出$l$的方向及$L_1$与$l$的交点.

2. 求直线$l:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$在平面$x-y+2z-1=0$上的投影直线$l_0$的方程，并求$l_0$绕$Oy$轴旋转一周所成曲面方程.

**答案：**

1. 方向$(6,5,-5)$，交点$(10-10,12)$.

2. $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$, $4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$

3. 点 $M(0,-1,1)$到直线 $L:\frac{x-1}{0}=2y+1=\frac{2z+1}{2}$的垂线为 $l$, 平面 $\Pi$ 过$l$, 并垂直于平面$y=0$, 求垂线 $l$ 和平面 $\Pi$ 的方程.
4. 在直角坐标系中，四面体的四个顶点为 $A(1,0,0)$, $B(2,2,1)$, $C(3,2,0)$, $D(4,1,0)$. (1) 求四面体$ABCD$的体积. (2) 求顶点$A$到面$BCD$的高所在直线$l$的方程. (3) 求$l$绕$z$轴旋转一周所得曲面方程.

**答案:**

3. $l$ 的方程为$x=y+1=2-2z$; $\Pi$ 的方程$x+2z-2=0$.
4. 体积$V=\frac{2}{3}$; $l$方程:$x-1=y=z$; 曲面方程$x^2+y^2-2z^2-2z-1=0$.

### 重极限

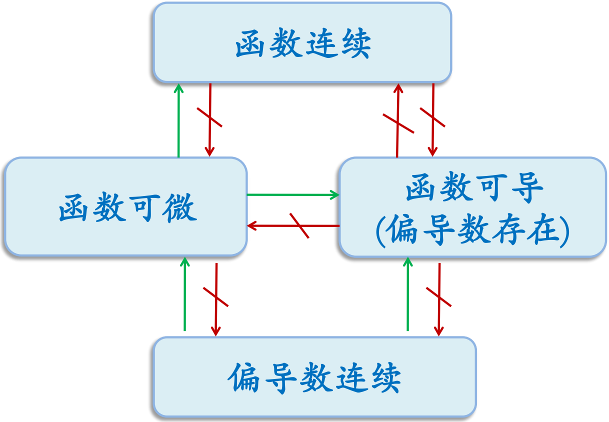
- 判断下面极限是否存在，若存在，求出极限值

$$(1)\ \lim_{(x,y)\to(0,5)}\frac{e^{xy}-1}{x}\qquad(2)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^3}{x^2+y^3}$$

### 答案：

(1) 5； (2) 不存在.

# 多元函数连续、可微与可导的关系



## 连续与可微

1. 设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(a\sqrt{|x|}+x^2+y^2+b)\dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

(1) 当$a,b$取何值时，函数$f(x,y)$在原点连续.

(2) 当$a,b$取何值时，函数$f(x,y)$在原点可微.

## 答案：

(1) $b=0$； (2) $a=0,b=0$.

## 连续与可微

2. 设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^n\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

其中$n$为正整数，讨论$n$为何值时，函数$f(x,y)$在原点$(0,0)$处(1) 连续; (2) 一阶偏导数存在; (3) 可微; (4) 一阶偏导数连续.

## 答案:

(1) $n\geq 1$; (2) $n\geq 2$; (3) $n\geq 2$; (4) $n\geq 3$.

## 连续与可微

3. 函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，证明函数在$(0,0)$点连续，偏导数存在但不可微.

4. $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，其中$\varphi(x,y)$在点$(0,0)$处的某邻域内连续. 证明：$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微的充要条件是$\varphi(0,0)=0$.

## 微分与偏导数

1. 设函数$f(x,y)$可微, $f(1,1)=0$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq |x-y|$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq |x-y|$, 证明: $|f(2,0)| \leq 2$.

2. 若函数$u=f(x,y,z)$在凸的开区域$\Omega$内可微(开区域$\Omega$中任意两点的连线段还在$\Omega$内), 并且存在正数$M>0$, 使$|\mathbf{grad}\, u| \leqslant M$. 证明: 对$\Omega$ 中任意两点$A,B$ 都有

$$|f(A)-f(B)| \leqslant M \cdot \rho(A,B),$$

其中$\rho(A,B)$是$A,B$两点间的距离.

## 方向导数与梯度

- **方向导数**

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}\right|_{M_0} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

为$f(x,y)$在点$M_0$沿方向 $\boldsymbol{e}$ 的**方向导数**.

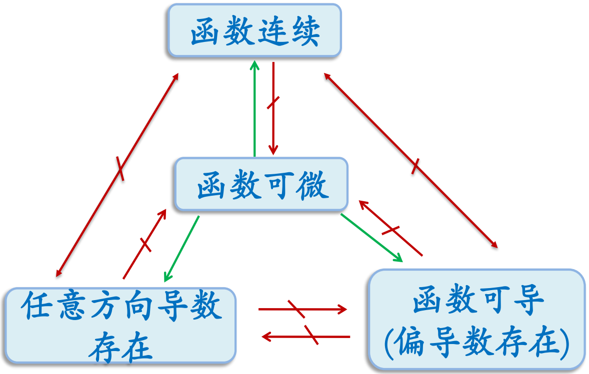
- **梯度**

数量场$f$在点$M_0$处的**梯度**是一个**向量**，记为$\mathbf{grad}\ f$，**大小**是$f$在点$M_0$处所有方向导数的最大值，**方向**是取到这个最大值所沿的那个方向. 梯度的定义是与坐标系无关的.

若$f(x,y)$可微，在直角坐标系下

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot(\cos\alpha, \cos\beta) = \mathbf{grad} f\cdot\boldsymbol{e} = |\mathrm{grad}\ f|\cos\theta\ ,$$

$f$ 沿$x$轴正向的方向导数为$\frac{\partial f}{\partial x}$，$f$沿$x$ 轴负向的方向导数为$-\frac{\partial f}{\partial x}$.




可微、可导、连续与方向导数存在的关系

## 方向导数与梯度

1. 求函数$u=xyz$在$(1,1,1)$处的梯度及沿$(1,-2,2)$的方向导数.

2. 求函数$u=xyz$在曲线$x=t^3, y=2t^2, z=-2t^3$上点$t=1$处与$z$轴正向夹角为锐角的切线方向的方向导数.

3. 设函数$f(x,y)=\varphi(|xy|)$, 其中函数$\varphi(0)=0$, 在$u=0$的某邻域满足$|\varphi(u)|\le u^2$.
(1)求$f(x,y)$在$(0,0)$点的梯度. (2)证明$f(x,y)$在$(0,0)$点可微.

## 答案:

1. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.　2. $-\sqrt{61}$.　3. $(0,0)$.

## 复合函数的微分

**定理：** 设$z=f(u,v)$在对应点$(u,v)$处可微,$u=\varphi(x,y)$,
$v=\psi(x,y)$在点$(x,y)$存在偏导数，则复合函数
$z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 在点$(x,y)$存在偏导数，且有如下**链式法则**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial x}=f_1'\frac{\partial \varphi}{\partial x}+f_2'\frac{\partial \psi}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial y}=f_1'\frac{\partial \varphi}{\partial y}+f_2'\frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

复合函数链式法则：**分路和，沿路乘**

**关键是变量之间的关系链**

## 复合函数的偏导数

1. 设$z=f(t,x),t=\varphi(x+y)$其中$\varphi,f$分别有连续的二阶导数和二阶偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.
2. 设$z=f(u)$, $u=\varphi(u)+\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}P(t)dt$, 其中$f(u)$可微，$\varphi'(u)$连续，且$\varphi'(u)\neq 1$, $P(t)$连续，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.
3. 设函数$w=f(x+y+z,xyz)\in C^2$, 求$\dfrac{\partial w}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

## 答案：

1. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{11}\varphi'^2+f''_{12}\varphi'+f'_1\varphi''$. 2. $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2f'(u)\frac{P(x+y)}{1-\varphi'(u)}$.
3. $\frac{\partial w}{\partial x}=f'_1+yzf'_2$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=f''_{11}+yf''_{12}(x+z)+xy^2zf''_{22}+yf'_2$.

## 复合函数的偏导数

4. 设$u=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$, 其中$\varphi$具有二阶导数, $\psi$具有一阶导数, 证明$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
5. 设函数$u=xye^{x+y}$ 求$\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}$, 其中$p,q$为正整数.

## 答案:

5. $\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}=(x+p)(y+q)e^{x+y}$.

## 复合函数的偏导数

6. $z = f\left(\dfrac{x}{g(y)}, y\right) = xg(y)$, 可微函数$g(y) \neq 0$, 求$\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$.

7. 设$f(x,y) = x^y + \displaystyle\int_1^x dv \int_v^x e^{-u^2} du \quad (x > 1)$,

求$\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

## 答案:

6. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2g(y)g'(y)$;

7. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} + (x-1)e^{-x^2}$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x$.

## 复合函数的偏导数

8. 设函数$f(u)$具有二阶连续导数，函数$z=f(e^x\sin y)$满足方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(z+1)e^{2x}$，求$f(u)$所满足的常微分方程.
9. 设$z=z(x,y)\in C^2$，令$u=x+ay, v=x+by$，则方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 变为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求常数$a,b$.
10. 变量代换$u=\frac{x}{y}, v=x, w=xz-y$ 把函数$z=z(x,y)$的方程$y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y}$ 化为函数$w=w(u,v)$ 的方程，其中$z(x,y), w(u,v)\in C^2$，求$w=w(u,v)$ 所满足的方程.

## 答案：

8. $f''=f+1$. 9. $a=-1, b=-\frac{1}{3}$或$a=-\frac{1}{3}, b=-1$.

10. $\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\frac{v}{u}$.

## 复合函数的偏导数

11. 试用变量代换$\xi = \frac{y}{x}, \eta = y$将方程
$x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$

12. 证明: 方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial x} = z$ 在变换$u = \dfrac{x+y}{2}$,
$v = \dfrac{x-y}{2}$, $w = ze^y$ 下化为函数$w = w(u,v)$ 的方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 2w,$$

其中函数$z(x,y)$, $w(u,v)$ 都具有二阶连续偏导数.

## 隐函数的偏导数

对于由方程$F(x,y)=0$确定的隐函数$y=y(x)$, 求导数常用方法:

(1) 利用隐函数的求导公式, 即**公式法**.

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

(2) 利用复合函数求导法则直接对方程$F(x,y)=0$两边对$x$求导, 也就是**求导法**.

(3) 利用一阶微分形式不变性直接对方程$F(x,y)=0$两边求微分, 由全微分公式, 得到偏导数, 即**微分法**.
此方法的优点是: 在微分运算时, 不必先区分变量是因变量还是自变量, 而把所有的变量看成同等地位.

## 隐函数的偏导数

对于由方程$F(x,y,z)=0$确定的隐函数$z=z(x,y)$，求偏导数常用方法:

(1) 利用隐函数的求导公式，即**公式法**.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

(2) 利用复合函数求导法则直接对方程$F(x,y,z(x,y))=0$两边分别对$x$，$y$求偏导数，也就是**求导法**.

(3) 利用一阶微分形式不变性直接对方程$F(x,y,z)=0$两边求微分，由全微分公式得到相应的偏导数，即**微分法**.

此方法的优点是: 在微分运算时，不必先区分变量是因变量还是自变量，而把所有的变量看成同等地位; 另外，可以同时得到所有的一阶偏导数.

**隐函数的偏导数**

一般, 对由方程组所确定的隐函数组求导数(或偏导数)常用方法:

(1) 利用复合函数求导法则, 对每个方程的两边关于相应的自变量求导数(或偏导数), 得到一个关于隐函数相应导数(或偏导数)的线性代数方程组, 解此方程组, 得所求隐函数的导数(或偏导数), 即**求导法**.

(2) 利用一阶微分形式不变性直接对所给方程组的各个方程两边求微分, 得到关于各变量微分的一个方程组, 再解此方程组, 得所求隐函数的相应全微分公式, 从而得到所求隐函数的导数(或偏导数), 即**微分法**.

## 隐函数的偏导数

1. 设$f$可微函数，$u=f(x^2+y^2+z^2)$，函数$z=z(x,y)$为由方程$3x+2y^2+z^3=6xyz$在$P_0(1,1,1)$附近确定的隐函数，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}|_{P_0}$.

2. 设函数$z=f(x,y)$由方程$x^2+y^2+z^2-4z=0$所确定，求微分$\mathrm{d}z$及$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

3. 设$z=z(x,y)$是由方程$F(x,y,z)=0$所确定的隐函数，$F_z'\neq 0$，$F(x,y,z)\in C^2$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

4. 设$f(u,v),g(u,v)$有连续偏导数，方程组$\begin{cases} y+f(xy,z)=0, \\ z+g(xy,z)=0, \end{cases}$确定$y$和$z$是$x$的函数，求$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

## 隐函数的偏导数

5. 设$u=f(x,y,z)\in C^1$，函数$y=y(x)$和$z=z(x)$分别由$e^{xy}-xy=2$和$e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$确定，求$\frac{du}{dx}$.

## 二元函数的极值

- **极值的必要条件:**
  若$f(x,y)$在$D$中有偏导数, $M_0(x_0,y_0)$是$f(x,y)$的极值点, 则

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0.$$

  使函数一阶偏导数都为零的点, 称为函数的**驻点**.

  **注记:** 具有偏导数的极值点必是驻点, 但驻点未必是极值点. 例如, 函数$f(x,y)=xy$, $(0,0)$ 是一个驻点, 但显然不是极值点.

## 二元函数的极值

- **极值的充分条件:(极值判别法)**

**定理:** 设$f(x,y)$为区域$D$上的$C^2$函数, $(x_0,y_0)$为$f(x,y)$的驻点. 记$\Delta = AC - B^2$,其中

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0).$$

那么

(1°) $\Delta > 0$ 且$A > 0$时, $(x_0,y_0)$为$f$的极小值点;

(2°) $\Delta > 0$ 且$A < 0$时, $(x_0,y_0)$为$f$的极大值点;

(3°) $\Delta < 0$时, $(x_0,y_0)$不是$f$的极值点.

**注记:** $\Delta = 0$时, 无法判断$(x_0,y_0)$是不是$f$的极值点.

**注记**：多元函数求最值的步骤:

(1) 求出区域内部的极值（驻点与不可导点）;

(2) 求出函数在边界上的最值;

(3) 对内部的极值和边界上的最值进行比较, 最大者为最大值, 最小者为最小值.

## 条件极值

- **拉格朗日乘数法**

  引进辅助函数 $F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$, 则条件极值点应满足下列驻点方程

$$\begin{cases} F'_x(x,y)=f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0, \\ F'_y(x,y)=f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0, \\ F'_\lambda=\varphi(x,y)=0. \end{cases}$$

  从上述方程组中解出驻点, 再根据题意, 判别哪些驻点是极值点. 这种方法称为**拉格朗日乘数法**. $\lambda$称为**拉格朗日乘子**. 一般在解驻点方程时, 不必求出$\lambda$ 的值, 所以在求解过程中往往先设法消除$\lambda$.

**条件极值**

**注记:** 对于条件极值问题的求解, 基本想法是把它化为无约束条件的极值问题, 主要方法有:

(1) 用$Lagrange$乘数法. 实质是引入$Lagrange$乘数后构造辅助函数, 把原目标函数在条件等式约束下的极值问题, 化为相应的辅助函数的无条件极值问题.

(2) 把条件等式直接代入目标函数化为无条件的极值问题来求解.

## 极值与最值

1. 求函数$z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$的所有极值.
2. 求函数$z = (2x + 3y - 6)^2$在椭圆$x^2 + 4y^2 \le 4$中的最值.
3. 设$z = z(x, y)$是由方程$x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$所确定的函数，求$z = z(x, y)$的极值点与极值.
4. 抛物面$z = x^2 + y^2$被平面$x + y + z = 1$截成一椭圆，求原点到这椭圆的最长与最短距离.
5. 设实数$x, y, z$满足$x + y + z = 0$，求函数$f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z$的取值范围.

## 答案：

前两个辅导书上　3.极小值$z(9, 3 = 3)$,极大值$z(-9, -3) = -3$.
4.$\sqrt{9 + 5\sqrt{3}}, \sqrt{9 - 5\sqrt{3}}$.　5.$[-\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3}]$

## 极值与最值

6. 求函数$f(x,y,z)=x+y-z$在$x^2+y^2+z^2\le 1$上的最值.

7. 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2=2z \\ x^2+y^2+xy=1 \end{cases}$到$Oxy$平面的最小和最大距离.

8. 在椭球面$\Sigma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$位于第一卦限部分上求一点，使过该点的切平面与三个坐标面围成的四面体体积最小，并求这个最小体积.

## 答案:

6. 最大值$\sqrt{3}$,最小值$-\sqrt{3}$.
7. 最小距离$\frac{1}{3}$,最大距离1.
8. $M(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{c}{\sqrt{3}})$，最小体积为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}abc$

## 空间曲线

- **参数曲线:**

$$L:\ x=(x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)),\quad t\in[\alpha,\beta]$$

切向量: $\mathbf{r}'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$

- **隐式曲线:**

(1) 平面隐式曲线: $F(x,y)=0,\quad (x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2$

法向量: $\textbf{grad}\ F=(F'_x,F'_y)$

(2) 空间隐式曲线: $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0,\end{cases}\qquad (x,y,z)\in V\subset\mathbb{R}^3$

切向量:

$$\begin{aligned}&\textbf{grad}\ F|_{M_0}\times\textbf{grad}\ G|_{M_0}\\ =&(F'_x(M_0),F'_y(M_0),F'_z(M_0))\times(G'_x(M_0),G'_y(M_0),G'_z(M_0))\\ =&\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\Big|_{M_0},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\Big|_{M_0},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\Big|_{M_0}\right)\end{aligned}$$

# 9.5 空间曲线与曲面

## 空间曲面

- **参数曲面:**

  $S:\ x=(x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v)),\quad (u,v)\in D$

  法向量: $\mathbf{n}=\left(\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\ \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$

- **空间隐式曲面:**

  $F(x,y,z)=0,\quad (x,y,z)\in V\subset\mathbb{R}^3$

  法向量: $\mathbf{grad}\ F=(F'_x,F'_y,F'_z)$

  **显式曲面**$z=f(x,y)$可以看成是由方程

  $$F(x,y,z)=z-f(x,y)=0$$

  确定的隐式曲面. **法向量为**$(-f'_x,\ -f'_y,\ 1)$.

## 空间曲线与曲面

1. 求常数$\lambda$的值，使得曲面$xyz=\lambda$与椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$在第一卦限内相切，并求出切点处两曲面的公共切平面.
2. 设函数$f(u,v)$可微，证明曲面$f\left(\frac{y-b}{x-a},\frac{z-c}{x-a}\right)=0$的所有切平面都通过同一个定点.
3. 证明曲面$z^2=(x^2+y^2)f\left(\frac{x}{y}\right)$的切平面恒过原点($f$可微).

## 答案：

1. 切点$x=\frac{a}{\sqrt{3}},y=\frac{b}{\sqrt{3}},z=\frac{c}{\sqrt{3}}$,切平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\sqrt{3}$.

2. 定点$(a,b,c)$.

## 空间曲线与曲面

4. 设函数$f(x,y,z)$有一阶连续偏导，$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是$f(x,y,z)$在空间光滑曲线$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$上的极值点，$\mathbf{grad}\,f(P_0)\neq\mathbf{0}$，$\left(\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)\neq\mathbf{0}$，证明：等值面$f(x,y,z)=f(x_0,y_0,z_0)$与曲线$\Gamma$在$P_0$相切.

## 10.1 二重积分

- **定义：**
  $f(x,y)$在$D$上的**二重积分**

$$\lim_{|T|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\sigma(D_i)=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \quad 或 \quad \int_D f.$$

- **二重积分的几何意义：** 当连续函数$z=f(x,y)\geqslant 0$时，二重积分$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$表示曲顶柱体的体积. 特别，
  $f(x,y)\equiv 1$时，$\iint_D 1\mathrm{d}\sigma=\sigma(D)$，其中$\sigma(D)$表示$D$的面积.
- **二重积分的物理意义：** $f(x,y)$为薄板$D$的密度函数，那么二重积分就是这个薄板的质量.

## 函数可积的必要和充分条件

- **可积的必要条件:**

**定理:** 若$f(x,y)$ 在$D$上可积, 则$f(x,y)$ 为$D$上的有界函数.

**注记:** 可积必有界, 有界未必可积.

如定义在二维区间$D=[0,1]\times[0,1]$上的$Dirichlet$函数

$$D(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\text{为有理点},\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

由定义易证$D(x,y)$在$D$上不可积, 因为黎曼和的极限不存在.

**注记:** 函数$f(x,y)$的黎曼可积性, 要求**积分区域有界, 函数有界**.

## 函数可积的必要和充分条件

- **可积的充要条件：**

  **定理：** $D$上有界函数$f(x,y)$ 可积$\Longleftrightarrow \lim\limits_{|T|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\sigma(D_i)=0.$

- **可积的充分条件：**

  **定理：** (1) 若$f(x,y)$在$D$上连续，那么在$D$上可积.

  (2) 若$f(x,y)$的不连续点分布在$D$中可测的且测度为零的点集上，则$f(x,y)$ 在$D$ 上可积.

  **推论：** 若$D$上有界函数$f(x,y)\neq g(x,y)$的点分布在$D$中可测的且测度为零的点集上，则$f(x,y)$ 和$g(x,y)$ 在$D$ 上有相同的可积性，且可积时有$\int_D f=\int_D g.$

**注记：** 1. 连续必可积，可积未必连续.

2. 在测度为零的点集上任意改变函数的值，不会改变函数的可积性和积分值.

# 10.1 二重积分

**二重积分的性质**

线性性；乘积可积性；保序性；绝对可积性；对区域的可加性；积分中值定理

**二重积分的计算**

- **化为累次积分**

  选择合适的积分顺序

- **变量代换**

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

重点掌握极坐标变换

**利用区域的对称性与被积函数的奇偶性计算二重积分**

## 二重积分

1. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2} (3x^2+5y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

2. $\displaystyle\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D$为$x$轴和上半圆周$x^2+y^2-2x=0$围成.

3. $\displaystyle\iint\limits_{D} (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D$为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2) \quad (a>0)$所围区域.

## 答案:

1. $2\pi R^4$.  2. $\frac{2}{3}$.  3. $\frac{\pi}{8}a^4$.

## 二重积分

4. 设$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t e^{-x^2}\mathrm{d}x \quad (t>1)$, 求$F'(2)$.

5. $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 e^{y^2}\mathrm{d}y$.

6. 计算二重积分$\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]dxdy$, 其中$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le\sqrt{2},x\ge 0,y\ge 0\}$,$[x]$表示不超过$x$的最大整数.

## 答案：

4. $e^{-4}$. 5. $\frac{e-1}{2}$. 6. $\frac{3}{8}$.

## 二重积分

7. 已知函数$f(x,y)\in C^2$，且$f(1,y)=0$，$f(x,1)=0$，
$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=a$，$D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$，
计算二重积分$\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

8. 连续函数$f(x)>0$，$x\in[a,b]$，证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\ge(b-a)^2.$$

## 答案：

7. $a$.

## 二重积分

9. (1) 设$f(r,\theta)=0$确定$r$是$\theta$在$[\alpha,\beta]$上的非负可微函数，平面区域$D$在极坐标下由$\theta=\alpha$，$\theta=\beta$，$f(r,\theta)=0$和$f(2r,\theta)=0$ 围成，求证

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=(\beta-\alpha)\ln 2.$$

(2) 计算下面积分，其中$D$由$x^2+y^2=1$和$x+y=1$围成$(x\geq 0, y\geq 0)$，

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{xy(\ln^2 x+\ln^2 y)}.$$

## 答案：

9. $\frac{\pi}{2}\ln 2$.

**三重积分的计算**

- **累次积分:**
  (1) 先一后二的累次积分法 (投影法)
  (2) 先二后一的累次积分法 (截面法)
- **变量代换:**

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\iiint_{V'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

重点掌握球坐标变换和柱坐标变换

利用区域的对称性与被积函数的奇偶性计算三重积分

## 三重积分

1. $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $V$ 由曲面$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$与$z=8$围成.
2. $\iiint\limits_V (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $V$ 由平面$z=0$和椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的上半部分围成, $a,b,c>0$.
3. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $V$ 由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球面$x^2+y^2+z^2=R^2$ 围成($z\geq 0$).

## 答案:

1. $\frac{1024}{3}\pi$.　2. $\frac{\pi abc^2}{4}$.　3. $\frac{\pi(2-\sqrt{2})R^4}{4}$.

## 三重积分

4. $\iiint_\Omega z(x^2+y^2+y)\,\mathrm{d}V$, 其中$\Omega$ 由$z\geq\sqrt{x^2+y^2}$ 和$1\leq x^2+y^2+z^2\leq 4$ 确定.

5. $\iiint_V \frac{x^2y^2}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $V$ 由$z=\frac{x^2+y^2}{a}$, $z=\frac{x^2+y^2}{b}$, $xy=c$, $xy=d$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$ 围成, 其中$0<a<b$, $0<c<d$, $0<\alpha<\beta$.

6. 设$a,b,c>0$, 求$\iiint_V (x^2y+xyz+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中$V$是$x^2+y^2+\frac{a^2-b^2}{c^2}z^2=a^2$与$|z|\leq c$所围成的空间区域.

## 答案:

4. $\frac{21}{16}\pi$; 5. $\frac{1}{3}(d^3-c^3)\ln\frac{b}{a}\ln\frac{\beta}{\alpha}$; 6. $\frac{2}{15}\pi c^3(2a^2+3b^2)$

## 三重积分

7. 计算 $\iiint_V (x^2+y^2)dV$, 其中$V$是由$x^2+y^2+(z-2)^2 \geq 4$, $x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 9$, 所围成的空心立体.

8. 计算 $\iiint_V (|x|+z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz$, 其中$V: 1 \leq x^2+y^2+z^2 \geq 4$.

## 答案:

7. $\frac{1688}{15}\pi$; 8. $\pi(2e^{-1}-5e^{-4})$.