概率论与数理统计（第七周）

PB20111686 黄瑞轩

Chap 2 Prob. 71

设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 且随机变量 Y 定义为

$$Y=\begin{cases} X, & \text{若 } X\geq 1 \\ -X^2, & \text{若 } X<1 \end{cases}$$

试求 Y 的密度函数 $p(y)$.

$X\sim\mathcal{E}(\lambda)\Rightarrow f(x)=\lambda e^{-\lambda x},X>0$

取值范围：$y\geq 1$或$-1<y<0$。

当$y\geq 1$时，

$$\begin{aligned} P(Y=y)&=P(X=y)\\ &=|f_X(y)y'|\mathrm{d}y\\ &=\lambda e^{-\lambda y}\mathrm{d}y \end{aligned}$$

故

$$f_Y(y)=\frac{P(Y=y)}{\mathrm{d}y}=\lambda e^{-\lambda y}(y\geq 1)$$

当$-1<y<0$时，$0<X<1$，

$$\begin{aligned} P(Y=y)&=P(-X^2=y)\\ &=P(X=\sqrt{-y})\\ &=|f_X(\sqrt{-y})(\sqrt{-y})'|\mathrm{d}y\\ &=\frac{\lambda e^{-\lambda\sqrt{-y}}}{2\sqrt{-y}}\mathrm{d}y \end{aligned}$$

故

$$f_Y(y)=\frac{P(Y=y)}{\mathrm{d}y}=\frac{\lambda e^{-\lambda\sqrt{-y}}}{2\sqrt{-y}}(-1<y<0)$$

综上，

$$f_Y(y)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y\geq 1\\ \dfrac{\lambda\exp(-\lambda\sqrt{-y})}{2\sqrt{-y}}, & -1<y<0\\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

Chap 2 Prob. 73

（1）根据归一化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$$

得到

$$a=9$$

又$1\leq y\leq 2$，则当$y=2$时，

$$P(Y=y)=P(X\leq 1)=\int_{-\infty}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{27}$$

当$y=1$时，

$$P(Y=y)=P(X>2)=\int_{2}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=\frac{19}{27}$$

当$1<y<2$时，

$$P(Y=y)=P(X=y)=|f_X(y)y'|\mathrm{d}y=\frac{y^2}{9}\mathrm{d}y$$

则此时

$$f_Y(y)=\frac{y^2}{9}$$

则当$1<y<2$时，

$$P(Y\le y)=P(Y=1)+P(1<Y\le y)=\frac{19}{27}+\int_1^y f_Y(y)\mathrm{d}y=\frac{y^3}{27}+\frac{2}{3}$$

所以，

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & ,y<1\\ \frac{y^3}{27}+\frac{2}{3} & ,1\le y<2\\ 1 & ,y\ge 2\end{cases}$$

（2）根据全概率公式，

$$\begin{aligned}P(X\le Y)&=P(X\le Y|Y=1)P(Y=1)+P(X\le Y|1<Y<2)P(1<Y<2)+P(X\le Y|Y=2)P(Y=2)\\&=0+\frac{7}{27}+\frac{1}{27}\\&=\frac{8}{27}\end{aligned}$$

Chap 3 Prob. 11

（1）$P(X=i,Y=j)=p^2(1-p)^{j-2}$，这里$i,j\in\mathbb{N}^+,j\ge 2,i\ge 1,i<j$。

（2）$P(X=k)=p(1-p)^{k-1},k\in\mathbb{N}^+,k\ge 1$；$P(Y=k)=\sum_{i=1}^{k-1}P(X=i,Y=k)=(k-1)p^2(1-p)^{k-2}$。