第一章 极限

◯1.1 实数

① 自然数集对加法运算封闭，对减法运算不封闭；

② 整数集对乘法运算封闭，但对除法运算不封闭；

③ 有理数 $c=\frac{p}{q}$，其中 $\frac{p}{q}$ 是既约分数；

④ 十进制小数表示 $a=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}+\ldots$

⑤ 循环小数转换为分数；

⑥ 实数的完备性（连续性）公理：

设 X 和 Y 是实数集 $\mathbb{R}$ 的两个非空子集，满足对任何 $x\in X, y\in Y$，有 $x\le y$，那么一定存在一个介于 X 和 Y 之间的实数。即存在 $c\in\mathbb{R}$，使得对任何 $x\in X, y\in Y$，有 $x\le c\le y$。

⑦ 有理数在 $\mathbb{R}$ 上的稠密性：

任何两个实数之间一定存在一个有理数。

证明：利用不等式 $[x]\le x<[x]+1$。

设 $a,b\in\mathbb{R}$ 且 $0<b-a<1$，则存在 $c\in\mathbb{Q}$，使得 $c\cdot(b-a)>1$.
则 $bc>1+ac$，$[ac]\le ac\le[ac]+1$，
$\therefore a<\frac{1+[ac]}{c}, b>\frac{1+ac}{c}\ge\frac{1+[ac]}{c}$，
即 $a<\frac{1+[ac]}{c}<b$.

习题结论

① 求证：$\sqrt{n}(n\ne k^2, k=0,1,2,\ldots)$ 是无理数；

证明：（反证法）

假设 $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$（既约分数），由于 $n\ne k^2$，故一定能找到正整数 m，使 $m<\frac{p}{q}<m+1$。

变形可得 $0<p-mq<q$.

$\sqrt{n}=\frac{p}{q}\Rightarrow p^2=nq^2\Rightarrow p^2-mpq=nq^2-mpq\Rightarrow\frac{p}{q}=\frac{nq-mp}{p-mq}$.

令 $p_1=nq-mp,\ q_1=p-mq$，则 p_1,q_1 仍然是正整数。且

$$\begin{cases}q_1-q=p-(m+1)q<0\Rightarrow q_1<q.\\ p_1-p=nq-(m+1)p<0\left[\because nq=\frac{p^2}{q}<(m+1)p\right]\Rightarrow p_1<p.\end{cases}$$

对等式 $\frac{p}{q}=\frac{p_1}{q_1}$ 反复地进行同样的讨论，可以得出两串递减的正整数列 $p>p_1>p_2>\ldots,\quad q>q_1>q_2>\ldots$，且满足 $\frac{p}{q}=\frac{p_1}{q_1}=\frac{p_2}{q_2}=\ldots$。

这是不可能的，因为从 p 或 q 开始的正整数不可能无止尽地递减下去，所以 $\sqrt{n}$ 不是有理数。

② 若实数 $a_i(i=1,2,\ldots,n)$ 有相同的符号，且都大于 -1，求证：

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\ge1+a_1+a_2+\ldots+a_n$$

证明：数学归纳法。

◯1.2 数列极限

① 数列极限定义：给定数列 $\{a_n\}$ 和实数 a，若对 $\forall\varepsilon>0$，总是存在 $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$，使得 $n>N$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$ 成立，则记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$；

注记：有时可给 ε 的取值范围寻找一个上界，如选择 $\varepsilon<1$，我们断言当 n 充分大时 a_n 不会超过 $a+1$。

② 有极限的数列称为收敛数列，不收敛的数列称为发散数列；

③ 数列极限的几何描述；（进而可证明数列极限是唯一的。）

④ 使用适当放大法的一些常用不等式：

1、$[x]\le x<[x]+1$，或 $x-1<[x]\le x$

2、（三角形不等式）$|a|-|b|\le|a\pm b|\le|a|+|b|$

3、（平均值不等式）$\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}\le\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}a_i}\le\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}\le\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}{n}}$

4、（伯努利不等式）设 $x>-1, x\ne0$，则当

1° $\alpha>1\,||\,\alpha<0$ 时有 $(1+x)^\alpha>1+\alpha x$

2° $0<\alpha<1$ 时有 $(1+x)^\alpha<1+\alpha x$

5、（赫尔德不等式）设 $x_i,y_i(i=1,2,\ldots,n)$ 非负且不全为 0，则

$$\sum x_iy_i\le(\sum x_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum y_i^q)^{\frac{1}{q}}$$

其中$p,q>1$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1, n\ge 2$。

⑤ 收敛数列的性质（设数列$\{a_n\}$收敛于实数a。）

1° 若$\{a_n\}$收敛，则$\{a_n\}$的极限值唯一；

注记：如何从$\varepsilon-N$定义说明两个数相等？

证明：（反证法）假设$a\ne b$都是数列$\{a_n\}$的极限，不妨设$a<b$。

取$\varepsilon=\dfrac{b-a}{2}>0$，由数列极限的定义知：

$\exists N\in\mathbb{Z}_+$，使得$n>N$时，有$|a_n-a|<\varepsilon$，$|a_n-b|<\varepsilon$同时成立。

即当$n>N$时，有$\dfrac{a+b}{2}=b-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon=\dfrac{a+b}{2}$。

由此得出矛盾。

或者：$|a-b|<|a-a_n+a_n-b|<|a-a_n|+|a_n-b|<2\varepsilon$，

事实上这说明$a=b$，也与条件矛盾。

2° 改变数列$\{a_n\}$中有限多项的值，不影响数列的敛散性及其极限；

3* 若$\{a_n\}$为有界数列，则存在一个正数M（与n无关）使得$|a_n|\le M$对所有的正整数n成立；

证明：选择$\varepsilon<1$，我们断言当n充分大时a_n不会超过$a+1$.

设满足此条件最小的$n=N$。

则$\exists M=\max\{|a_1|,|a_2|,\ldots,|a_N|,|a|+1\}$满足条件。

注记：（1）逆命题不成立，如数列$\{(-1)^n\}$；

（2）逆否命题：若$\{a_n\}$是无界数列，则$\{a_n\}$一定发散。

4° 若有一个实数$k<a$，则当n充分大时有$a_n>k$；

5° 若有一个实数k使得当n充分大时有$a_n\ge k$，则$a\ge k$；

（不能用严格不等式$a_n>k$推出$a>k$，如$a_n=\dfrac{1}{n}$，则$a_n>0$而$a=0$）

6° 有限个收敛数列的极限可以进行四则运算：

1） $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

2） $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

3） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$，这里$\lim\limits_{n\to\infty}b_n\ne 0$

证明：（2）由于数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$都收敛，故都有界，

即存在$M>0$，使得$|a_n|,|b_n|<M$。

由极限的保序性知，$|b|\le M$。

同时由数列极限的定义知，

对$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$，使得$n>N$时，有

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2M},|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2M}$$

从而当$n>N$时，有

$$\begin{aligned}|a_nb_n-ab|&=|a_nb_n-a_nb+a_nb-ab|\\&\le|a_n||b_n-b|+|b||a_n-a|\\&\le M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon.\end{aligned}$$

7* （保号性）设数列$\{a_n\},\{b_n\}$分别收敛于实数a,b，则

1） 若当n充分大时有$a_n\ge b_n$，则$a\ge b$；

2） 若$a>b$，则当n充分大时有$a_n>b_n$。

8* （夹逼定理）若数列$\{a_n\},\{b_n\}$都收敛于实数a，且对所有充分大的n，都有$a_n\le c_n\le b_n$，则数列$\{c_n\}$也收敛，且极限为a。

9* 设数列$\{a_n\}$收敛于实数a，则任何一个数列$\{a_n\}$的子列也收敛于实数a。

证明要点：选取了子列$\{a_{n_k}\}$，也就一定有$n_k>k$。

（选取子列时是不改变原有顺序的）

（用这个性质可以检验一个数列是否发散。）

⑥ 实数完备性若干等价命题

1° （确界原理）

1）$\mathbb{R}$ 中任何有上（下）界的数列一定有上（下）确界

2）单调有界数列一定收敛于其所有项构成的数集的上或下确界；

证明： 不妨设 $\{a_n\}$ 是单调递减有下界的数列，

则数集 $E=\{a_n \mid n\in\mathbb{N}_+\}$ 为非空有下界的集合，

由确界原理知，$\inf E$ 存在，记为 β。下证 $\lim a_n=\beta$。

事实上，由下确界的定义知，对 $\forall\varepsilon>0$，存在一个数 $a_N\in E$ 使

$$\beta+\varepsilon>a_N\ge\beta$$

又因为 $\{a_n\}$ 是单调递减的，所以当 $n>N$ 时，有

$$\beta+\varepsilon>a_N\ge a_n\ge\beta>\beta-\varepsilon$$

因此得证。$\{a_n\}$ 是单调递增有上界的数列时同理可证相关结论。

2* （区间套定理）

设有一列闭区间 $[a_n,b_n],n=1,2,\dots$，满足：

（1）$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\dots\supset[a_n,b_n]\supset\dots$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$。

则存在唯一一点 ξ 属于所有闭区间 $[a_n,b_n],n=1,2,\dots$。

证明：(存在性) 由条件1°可知，区间左端点构成的数列 $\{a_n\}$ 是单调增且有上界 b_1，区间右端点构成的数列 $\{b_n\}$ 是单调减且有下界 a_1. 由单调有界判别法知，两个数列都收敛，记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 且有 $a_n\le a\le b\le b_n$. 再由条件2°可知，

$$b=\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)+\lim_{n\to\infty}a_n=a=\xi\in[a_n,b_n].$$

(唯一性) 假设有 $\xi'\ne\xi$ 也属于 $[a_n,\ b_n]$，
由 $0<|\xi'-\xi|\le b_n-a_n\to0\ (n\to\infty$, 矛盾，所以 $\xi'=\xi$.

3° （列紧性定理，又称波尔查诺—魏尔斯特拉斯定理）

有界数列一定存在收敛的子列，即使原数列是发散的。

(1) 构造闭区间列 $\{[a_n,\ b_n]\}$.

设有界数列 $\{x_n\}$ 包含在闭区间 $[a_1,\ b_1]$ 内，将区间 $[a_1,\ b_1]$ 平均分成两个小区间，则必有一个小区间包含着数列的无穷多项，记此区间为 $[a_2,\ b_2]$；以此类推，平分包含着数列的无穷多项区间，可以得到闭区间列 $\{[a_n,\ b_n]\}$，它们都包含 $\{x_n\}$ 的无穷项，且满足条件

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots;$$

$$b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b_1-a_1)\to0\ (n\to\infty).$$

由闭区间套定理，从而存在唯一的公共点 $\xi\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,\ b_n]$.

(2) 构造收敛于 ξ 的子列.

在区间 $[a_1,\ b_1]$ 中选取数列 $\{x_n\}$ 的一项 x_{n_1}；在区间 $[a_2,\ b_2]$ 中选取 x_{n_2}，且 $n_2>n_1$ 这是可以做到的，因为区间 $[a_2,\ b_2]$ 中包含着数列 $\{x_n\}$ 的无穷多项；依次顺序取出 x_{n_k}，使得脚标 $n_k>n_{k-1}>\cdots>n_2>n_1$，由子列 $\{x_{n_k}\}$ 的取法有 $a_k\leqslant x_{n_k}\leqslant b_k$，而 $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}b_k=\xi$，由夹逼定理可得子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 ξ.

4* （Cauchy 收敛准则）

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是数列 $\{a_n\}$ 是一个基本列。

（证明 $\left|a_{n+p}-a_n\right|<\varepsilon$ 可以转化为证明

$$\left|a_{n+p}-a_{n+p-1}\right|+\left|a_{n+p-1}-a_{n+p-2}\right|+\dots+\left|a_{n+1}-a_n\right|<\varepsilon\text{。）}$$

⑦ 发散到无穷大的数列：若对任意给定的正数 M，都存在自然数 N，使得 $\left|a_n\right|>M$，则称数列 $\{a_n\}$ 发散到无穷大。

注记： 发散到无穷大的数列一定是无界的，反之则不然。

⑧ 单调数列发散到无穷大的充分必要条件是其为无界数列。

⑨ （Stolz 定理）

1° （$\dfrac{*}{\infty}$ 型 Stolz 定理）设有两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，且 $\{b_n\}$ 严格单调趋于 $+\infty\,||\,-\infty$，则可以根据 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$，得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=A$。

2° （$\dfrac{0}{0}$ 型 Stolz 定理）设有两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均收敛于 0，且 $\{b_n\}$ 严格递减，则可以根据 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$，得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=A$。

注记：（1）A 可以是有限数、$+\infty\,||\,-\infty$，但注意不能是 ∞；

（2）Stolz 定理的逆命题一般不成立。

⑩ （Cauchy 命题）

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n} = a$。

习题结论

① $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^k - n^k] = 0$；

② 给定正整数 m，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + ... + a_m^n} = \max\{a_1, a_2, ..., a_m\}$；

③ 数列 $\{a_n\}$ 收敛，其中 $a_n = \dfrac{n}{c^n}, c > 1$；

④ $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n}} = +\infty$。

三种判别法的应用

① 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛，并求其极限，其中 $a_0 = 1, a_n = 1 + \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1}$。

解法1: (单调有界定理) 显然 $a_n \geq 1$,
$n > 1$ 时 $a_n = 2 - \dfrac{1}{1+a_{n-1}}$, 所以 $1 \leqslant a_n < 2$. 又 $a_n = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{a_{n-1}}}$
(二重连分式), 计算 $a_1 = \dfrac{3}{2}$, $a_2 = \dfrac{8}{5} > a_1$, 由数学归纳法易证 $a_{n+1} > a_n$.
(数学归纳法：假设 $a_n > a_{n-1}$, 则 $2 - \dfrac{1}{1+a_n} > 2 - \dfrac{1}{1+a_{n-1}}$,
即 $a_{n+1} > a_n$.)
由上可知 $\{a_n\}$ 单调递增有上界, 故由单调有界定理知 $\{a_n\}$ 收敛.
设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 对已知递推式两边求极限, 解
得 $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $a = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, 因 $1 \leqslant a_n < 2$, 所以

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

注记：对偶重连分式, 若 $a_2 > a_1$, 则 $a_{n+1} > a_n$, $\{a_n\}$ 是递增数列;
若 $a_2 < a_1$, 则 $a_{n+1} < a_n$, $\{a_n\}$ 是递减数列.

解法2: (夹逼定理) 因为有

$$\begin{aligned}
0 < |a_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2}| &= \left|\frac{1+2a_{n-1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}(1+a_{n-1})}{1+a_{n-1}}\right| \\
&= \left|\frac{1}{1+a_{n-1}}\right|\left|\frac{3-\sqrt{5}}{2}a_{n-1} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| \\
&< \frac{3-\sqrt{5}}{4}\left|a_{n-1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| \\
&< \frac{1}{4}\left|a_{n-1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| < \cdots < \left(\frac{1}{4}\right)^n\left|a_0 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|
\end{aligned}$$

故由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

解法3: (柯西收敛准则) 因为有

$$\begin{aligned}
|a_{n+1} - a_n| = \left|\frac{a_n - a_{n-1}}{(1+a_n)(1+a_{n-1})}\right| &< \frac{1}{4}|a_n - a_{n-1}| \\
&< \cdots < \left(\frac{1}{4}\right)^n |a_1 - a_0|.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &\leqslant |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + \cdots |a_{n+1} - a_n| \\
&< \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+p-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+p-2} + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]|a_1 - a_0| \\
&< \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n |a_1 - a_0| \to 0. \quad (n\to\infty)(\forall p \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

故由柯西收敛准则知 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 同上解
得 $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

② 若 $a_n > 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} > 1$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。

③ 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均为正数列，满足 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \dfrac{b_{n+1}}{b_n}, n = 1,2,...$，求证：若 $\{b_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 收敛。

④ 若 $a_n > 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i} = a$。

⑤ 若 $a_n > 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = a$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = a$。

⑥ 求证数列 $\{a_n\}$ 收敛，其中 $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n} - \ln n$。

⑦ 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = \mathrm{e}$；

⑧ 求证 $(1+\dfrac{1}{n})^n < \mathrm{e} < (1+\dfrac{1}{n})^{n+1}$；

⑨ 求证 $\dfrac{1}{n+1} < \ln(1+\dfrac{1}{n}) < \dfrac{1}{n}$；

⑩ 求证 $(\dfrac{n+1}{\mathrm{e}})^n < n! < \mathrm{e}(\dfrac{n+1}{\mathrm{e}})^{n+1}$；

◯1.3 函数极限

① 函数在无穷远处的极限

1° 设函数 $y=f(x)$ 在 $|x|>a>0$ 处有定义。如果有一个实数 l 满足对任意给定的正数 ε，总存在一个正数 $X=X(\varepsilon)>a$，使得当 $|x|>X$ 时有 $|f(x)-l|<\varepsilon$。则记 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$。

2° $f(+\infty)=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists M=M(\varepsilon)>0,$ 使得当 $x>M$ 时有 $|f(x)-l|<\varepsilon$。

3° $f(-\infty)=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists M=M(\varepsilon)>0,$ 使得当 $x<-M$ 时有 $|f(x)-l|<\varepsilon$。

② $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 存在且相等。

③ 函数在一点处的极限

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 附近有定义（在 x_0 处可以没有定义），当 $|x-x_0|$ 充分小时，$|f(x)-l|$ 可以任意小。

对任意给定的正数 ε，存在 $\delta>0$ 使得 $|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-l|<\varepsilon$。

④ 单侧极限

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 左侧附近有定义，若对任意给定的正数 ε，存在 $\delta>0$ 使得 $-\delta<x-x_0<0$ 时有 $|f(x)-l|<\varepsilon$，称 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=l$。

右极限的定义类似。

习惯上，这两个极限分别记为 $f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$。

⑤ 极限的性质

（1）设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$，则

1° 极限是唯一的；

2° $f(x)$ 在 x_0 附近有界，即存在 $M,\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)|\le M$。

3° 若 $a<l<b$，则存在一个正数 δ，当 $|x-x_0|<\delta$ 时有 $a<f(x)<b$。

（2）设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$、$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=l'$，则

1° 若在 x_0 附近 $f(x)\ge g(x)$，则 $l\ge l'$。

2° 若 $l>l'$，则在 x_0 附近 $f(x)>g(x)$。即存在一个正数 δ，当 $|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>g(x)$。

（3）极限的四则运算。

（4）设 $f(x)$ 在 x_0 附近、$g(t)$ 在 t_0 附近有定义，但当 $t\ne t_0$ 时 $g(t)\ne x_0$，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$、$\lim\limits_{t\to t_0}g(t)=x_0$，则 $\lim\limits_{t\to t_0}f(g(t))=l$。

⑥ 对于函数 $f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$ 存在的充分必要条件是：

对于任意一个以 x_0 为极限的数列 $\{a_n\}(a_n\ne x_0)$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$。

当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的趋向性态如果在**两个趋于 x_0 的点列**上不一致，则 $f(x)$ 一定没有极限。

⑦ 函数极限存在的判别法

1° 夹逼定理

设在 x_0 的附近，有 $h(x)\le f(x)\le g(x)$，且当 $x\to x_0$ 时 $h(x)$ 与 $g(x)$ 都以 l 为极限，那么 $f(x)$ 也以 l 为极限。

2° 单调有界性

设 $f(x)$ 在 (a,b) 中单调有界，则 $f(a+0)$ 和 $f(b-0)$ 均存在。

进而，$f(x)$ 在 (a,b) 中每一点 x_0 都有左右极限。

3° Cauchy 判别准则

设 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义，则 $f(x)$ 在 x_0 处有极限的充要条件是：

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $|x'-x_0|,|x''-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

第二章 单变量函数的连续性

0. 连续的定义

Def. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续。

1. 局部有界性

Th1. 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，则存在 x_0 的一个邻域 $B(x_0,\delta)$，使得在 $B(x_0,\delta)$ 上 $f(x)$ 有界。

Pro: 若设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，

则 $\forall 0<\varepsilon<\varepsilon_0,\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-A|<\varepsilon$。

则 $|f(x)|=|f(x)-A+A|\le|f(x)-A|+|A|\le\varepsilon_0+|A|$，

取 $M=\varepsilon_0+|A|$ 即证。

2. 局部保号性

Th2. 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，不妨设 $f(x_0)>0$，则存在 x_0 的一个邻域 $B(x_0,\delta)$，使得在 $B(x_0,\delta)$ 上 $f(x)$ 恒为正。

Pro: 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$，

则 $\forall 0<\varepsilon<\dfrac{A}{2},\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-A|<\varepsilon$。

则 $\dfrac{A}{2}<f(x)<\dfrac{3A}{2}$ 在 $B(x_0,\delta)$ 内恒成立。即证。

Inf: 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，x_0 的任意邻域 $B(x_0,\delta)$ 上 $f(x)$ 都又有正又有负，则只能有 $f(x_0)=0$。

3. 零点定理

Th3. 若 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(a)\cdot f(b)\le 0$，则一定 $\exists\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=0$。

Pro: **（证法 1）**

设 $f(a)<0<f(b)$，取 $x=\dfrac{a+b}{2}$，

若 $f(\dfrac{a+b}{2})=0$，则命题得证。

若 $f(\dfrac{a+b}{2})\ne 0$，则 $f(\dfrac{a+b}{2})$ 一定与 $f(a)$ 或 $f(b)$ 异号。

取 $\dfrac{a+b}{2}$ 与 a 或 b 重新构成原条件，记为 $[a_1,b_1]$。

重复下去，假设都没有 $f(\dfrac{a_n+b_n}{2})=0$，

则有 $a_n<b_n$，$f(a_n)<0<f(b_n)$，满足闭区间套定理。

即一定 $\exists\xi\in[a_n,b_n]$，使得 $\lim a_n=\lim b_n=\xi$。

则 $f(\xi)=\lim f(a_n)\le 0\le\lim f(b_n)=f(\xi)$，即 $f(\xi)=0$.

（证明 2）

设 $f(a)<0<f(b)$，令 $S=\{x\in[a,b]\,|\,f(x)\ge 0\}$，
由于 $f(a)>0$，则 $a\in S,S$ 非空，
由于 S 有界，则一定有上确界，设 $\xi=\sup S$。
由上确界定义，对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 有

$$\xi-\frac{1}{n}\le x_n\le\xi$$

其中 $x_n\in S$，则 $\{x_n\}$ 收敛于 ξ。

$f(\xi)=f(\lim x_n)=\lim f(x_n)\ge 0$。

而若 $f(\xi)>0$，则存在一个正数 δ，使 $f(\xi+\delta)>0$，
这与 ξ 是上确界矛盾，故只能有 $f(\xi)=0$。

4. 介值定理

Th4. 若 $f(x)\in C[a,b]$，则 $f(x)$ 可以取到 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意值。

Pro：考虑 $g(x)=f(x)-r$，r 是你想验证的任意值。

5. 区间有界性

Th5. 若 $f(x)\in C[a,b]$，则 $\exists M>0$，则当 $x\in[a,b]$ 时有 $|f(x)|\le M$。

Pro:（反证法）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，则对于 $\forall n\in\mathbb{N}$，都存在

$$|f(x_n)|>n$$

其中 $x_n\in[a,b]$，即 $\{x_n\}$ 是有界数列，

则 $\{x_n\}$ 一定有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x$，

则 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})\overset{continous}{=}f(\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k})=f(x)$，

这与 $|f(x_{n_k})|>n_k$ 矛盾，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

6. 最值定理

Th6. 若 $f(x)\in C[a,b]$，则 $\exists x_1,x_2\in[a,b]$，当 $x\in[a,b]$ 时 $f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$。

Pro:（证法 1，仅证明上确界可达到）

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，

设 $M=\sup\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$，

由上确界定义知，对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 有

$$M-\frac{1}{n}\le f(x_n)\le M$$

其中 $x_n\in[a,b]$，即 $\{x_n\}$ 是有界数列，

则 $\{x_n\}$ 一定有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x^*$，

则 $M=\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x^*)$，

即找到了 $x^*\in[a,b],f(x^*)=M$。

（证法 2，仅证明上确界可达到）

设 $M=\sup\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$，

若 $f(x)<M$，即取不到上确界。

令 $\varphi(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}$，则由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界知 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

则 $\exists\mu>0,\ s.t.\ \forall x\in[a,b],\ \varphi(x)<\mu.$

则 $f(x)<M-\dfrac{1}{\mu}$，这与 $M=\sup\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$ 矛盾，

故一定存在 $x^*\in[a,b],f(x^*)=M$。

7. 映射定理

Th7. 若 $f(x)\in C[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域是一个闭区间。

Pro: 记 $I=[a,b]$，由最值定理知存在 $x_1,x_2\in[a,b]$，使得 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值为 $f(x_1)$，最大值为 $f(x_2)$，即 $f(I)\subset[f(x_1),f(x_2)]$。

又由介值定理知，任给一个数 $r\in[f(x_1),f(x_2)]$，

都存在 $x_0\in[a,b]$ 使得 $f(x_0)=r\in f(I)$，即 $[f(x_1),f(x_2)]\subset f(I)$。

因此可知 $[f(x_1),f(x_2)]=f(I)$。

8. 反函数存在定理

Th8_1. 若 $f(x)\in C[a,b]$，则 $f(x)$ 有反函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调。

Pro:（充分性：$f(x)$ 有反函数 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调，反证法）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不严格单调，

不妨设 $x_1,x_2,x_3\in[a,b],x_1<x_2<x_3$，且 $f(x_1)<f(x_2),f(x_3)<f(x_2)$。

由介值定理知，一定存在 $r\in[\max\{f(x_1),f(x_3)\},f(x_2)]$，

且 $x_1^*,x_3^*\in[a,b]$，使 $f(x_1^*)=f(x_3^*)=r$，

则 $f^{-1}(r)=x_1^*,x_3^*$，与 $f(x)$ 有反函数矛盾！

（必要性：$f(x)$ 有反函数 $\Leftarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调）

显然，$[a,b]\to f([a,b])$ 是一一映射，则 $f([a,b])\to[a,b]$ 也是一一映射。

Th8_2. 若 $f(x)\in C[a,b]$ 且严格单调，则 $f^{-1}(y)$ 也是严格单调且连续的。

9. 一致连续性

Def. 若 $f(x)$ 定义在 I 上，对 $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0,$ 使对满足 $|x_1-x_2|<\delta$ 的 $\forall x_1,x_2\in I$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 I 上一致连续。

Th10.若 $f(x)\in C[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。

Pro. （反证法）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不一致连续，

则 $\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x',x''\in[a,b],\ |x'-x''|<\delta$ 但 $|f(x')-f(x'')|>\varepsilon_0.$

若令 $\delta_n=\dfrac{1}{n}$，则可取出 n 个 x_n',x_n''，使得

$$|x_n'-x_n''|<\frac{1}{n},\quad |f(x_n')-f(x_n'')|>\varepsilon_0.\ (*)$$

由于 $x_n',x_n''\in[a,b]$，则有收敛子列 $\{x_{n_k}'\},\{x_{n_k}''\}$，

则 $|x_{n_k}'-x_{n_k}''|<\dfrac{1}{n_k}$，说明 $\{x_{n_k}'\},\{x_{n_k}''\}$ 极限相同，

由连续性，则 $\{f(x_{n_k}')\},\{f(x_{n_k}'')\}$ 极限也应该相同，

则可推出 $|f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')|<\varepsilon$，当 k 充分大时成立，与（*）矛盾！

Inf1. 若 $f(x)\in C(a,b)$，且 $f(a+0),f(b-0)$ 存在，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续且有界。反之亦然。

Inf2. 若 $f(x)\in C[a,+\infty)$，且 $f(+\infty)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续且有界。反之不真，如 $f(x)=x.$

Pro: 因为 $f(+\infty)$ 存在，由 Cauchy 收敛准则知：

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists M>\max\{0,a\}\ 使对\ \forall x_1,x_2>M,\ 都有\ |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

由定理 Th10 知，在 $[a,M+1]$ 上，$f(x)$ 有界且一致连续。

取 $|x_1-x_2|<\delta<1$ 即证。

第三章 单变量函数的微分学

第一节 导数

（1）函数在 $x=x_0$ 处的导数

条件：$f(x)$ 在 $B(x_0,\delta)$ 内都有定义。

若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在且有限，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导，记该极限值为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数或微商。

（2）左、右导数

左导数 $f_-'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

右导数 $f_+'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

（3）可导与连续的关系

Th. 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，反之不真。

Pro. ①若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$，

即对 $\forall\varepsilon\in(0,1)$，$\exists\delta>0$，对 $|x-x_0|<\delta$，有 $\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-l\right|<\varepsilon.$

则有 $\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|<\varepsilon+|l|$.

则 $|f(x)-f(x_0)|<(\varepsilon+|l|)|x-x_0|$.

让 $(\varepsilon+|l|)|x-x_0|<\varepsilon'$，则 $|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon'}{1+|l|}$，

取 $\delta'=\dfrac{\varepsilon'}{1+|l|}$，就有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon'$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。

②或 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 x_0 附近有界：$\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|<M\left|x-x_0\right|$。

③或 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\left[\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]\left[\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)\right]=O(1)\cdot o(1)=0$

（4）注记

可导是点态的概念，函数在一点可导，在该点的邻域内未必可导，甚至未必连续。

Example: $\begin{cases} f(x)=\begin{cases}0, x\in\mathbb{Q}\\ x^2, x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}, \text{仅在} x=0 \text{处可导} \\ f(x)=\begin{cases}0, x\in\mathbb{Q}\\ x, x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}, \text{仅在} x=0 \text{处连续，在这点也不可导}\end{cases}$

（5）导数的四则运算

（6）反函数的导数

Example: 求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin x$。

Solution: $y=\arcsin x\Leftrightarrow x=\sin y$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\cos y, \text{则} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

（7）基本初等函数的导数

$(c)'=0$, c是常数;	$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$;
$(a^x)'=a^x\ln a\quad(0<a\neq 1)$;	$(e^x)'=e^x$;
$(\ln\lvert x\rvert)'=\dfrac{1}{x}$;	$(\log_a\lvert x\rvert)'=\dfrac{1}{x\ln a}\quad(0<a\neq 1)$;
$(\sin x)'=\cos x$;	$(\cos x)'=-\sin x$;
$(\tan x)'=\sec^2 x$;	$(\cot x)'=-\csc^2 x$;
$(\sec x)'=\sec x\tan x$;	$(\csc x)'=-\csc x\cot x$;
$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$;	$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$;
$(\sinh x)'=\cosh x$;	$(\cosh x)'=\sinh x$.

$(\sinh^{-1}x)'=[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$(\cosh^{-1}x)'=[\ln(x+\sqrt{x^2-1})]'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(\tanh^{-1}x)'=(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x})'=\dfrac{1}{1-x^2}$

（8）复合函数求导

$[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)$，即 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

（9）求导技巧：

①取对数：$(\ln|f(x)|)'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

②幂指函数变形：$v^u=e^{u\ln v}$，则 $(v^u)'=e^{u\ln v}\cdot(u\ln v)'$

（10）参数方程求导

设 $y=\varphi(t), x=\psi(t)$ 都在 I 上可导，则 $y=y(x)$ 也可导，且 $y'(x)=\dfrac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$。

注意：$y''(x)\neq\dfrac{\varphi''(t)}{\psi''(t)}$，应为 $y''(x)=\dfrac{\mathrm{d}\dfrac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}}{\mathrm{d}\varphi(t)}$。

（11）特殊求导

1) 隐函数求导

2) 分段函数求导：在分段点要求左右导数，而不是先求导后再取左右极限。

3) 奇函数求导为偶函数，偶函数求导为奇函数。

4) 周期函数求导后为周期函数，周期相同。

（12）基本初等函数的高阶导函数

$$1^\circ\ \ (x^m)^{(n)}=\begin{cases} m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n}, & n<m \\ m!, & n=m; \\ 0, & n>m \end{cases}$$

$$2^\circ\ \ (x^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n};$$

$$3^\circ\ \ [\sin(ax+b)]^{(n)}=a^n\sin(ax+b+\tfrac{n\pi}{2});$$

$$4^\circ\ \ [\cos(ax+b)]^{(n)}=a^n\cos(ax+b+\tfrac{n\pi}{2});$$

$$5^\circ\ \ (e^{ax})^{(n)}=a^ne^{ax},\qquad (e^x)^{(n)}=e^x;$$

$$6^\circ\ \ (a^x)^{(n)}=(\ln a)^na^x;$$

$$7^\circ\ \ \left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x+a)^{n+1}};$$

$$8^\circ\ \ [\ln(x+a)]^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n}.$$

莱布尼兹公式：$[v(x)\cdot u(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k[u(x)]^{(n-k)}[v(x)]^{(k)}$

第二节 微分

（1）定义

若 $y=f(x)$ 在 I 上有定义，$x_0,x_0+\Delta x\in I$，且存在常数 $A=A(x_0)$，使得

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x),\Delta x\to 0$$

则称 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微；

称 $A\Delta x$ 是 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的微分，记为 $\mathrm{d}y$。

1） $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微的充要条件是 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导；

2）当 x 是自变量时，$\mathrm{d}x=\Delta x$，$\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x$。

（2）运算法则

$\mathrm{d}uv=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$　　　$\mathrm{d}\dfrac{u}{v}=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}$

（3）一阶微分形式不变性

1) 不论 x 是自变量还是中间变量，形式上都有

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$$

2) 当 x 是中间变量时，$\Delta x=\mathrm{d}x+o(\Delta u)$,其中 $x=\varphi(u)$。

3) 高阶微分一般不具有形式不变性，除非 x 是自变量的线性函数。

如：$\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}(f'(x)\mathrm{d}x)=\mathrm{d}(f'(x))\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}(\mathrm{d}x)=f''(x)\mathrm{d}x^2+f'(x)\mathrm{d}^2x$

注：$\mathrm{d}x^2=(\mathrm{d}x)^2,\mathrm{d}^2x=\mathrm{d}(\mathrm{d}x)$

第三节 微分中值定理

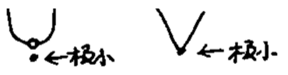
（1）极值

设 $f(x)$ 定义在区间 I 上，x_0 是 I 的内点，若存在 $B(x_0,\delta)$，使得对任意的 $x\in B(x_0,\delta)$，都有 $f(x)\le f(x_0)$，则称 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点，$f(x_0)$ 是极大值。

类似定义：极小值、严格极值点和极值。

注：一个点是否是极值点，与它在这点是否连续或可导无关。

（2）费马(Fermat)定理



Th: 设 $f(x)$ 定义在区间 I 上，x_0 是其一个极值点，若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则必有 $f'(x_0)=0$。

Pro：设 $|\Delta x|<\delta$，$f(x_0)$ 是极大值，则 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\le 0$，

当 $\Delta x>0,\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\le 0$，当 $\Delta x<0,\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ge 0$，

令 $\Delta x\to 0$，则有 $f_-'(x_0)\ge 0,f_+'(x_0)\le 0$，

由于 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f_-'(x_0)=f_+'(x_0)=0$，即 $f'(x_0)=0$。

注记：①满足 $f'(x_0)=0$ 的点 x_0 称为 $f(x)$ 的驻点；

②驻点不一定是极值点，若函数可导，则极值点一定是驻点。

③ $f(x)$ 的极值点有两类，一类是不可导点，一类是驻点。

（3）罗尔(Rolle)定理

条件：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)$。

Th: 若条件满足，则在 (a,b) 上至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$。

Pro: (i)因为 $f(x)\in C[a,b]$，则在 $[a,b]$ 上一定有 $M(ax),m(in)$；

(ii)若 M,m 中至少有一个在 (a,b) 内，$f(\xi)=M\,||\,m$，由费马定理得证。

(iii)若 M,m 都在区间端点取到，则 $f(x)\equiv C$，每一点都可成为所求。

（4）拉格朗日(Lagrange)中值定理（微分中值定理）

条件：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导。

Th: 若条件满足，则在 (a,b) 至少存在一点ξ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$。

Pro: 令 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}x$，再用 Rolle 定理。

推论①：$f(x)\equiv C \Leftrightarrow f'(x)\equiv 0$

Pro:（充分性）显然成立。

（必要性）任取 $x_0\in I$，则对 $\forall x\in I\,|\,x_0$，都有 $\xi\in(x,x_0)\,||\,(x_0,x)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

则 $f(x)-f(x_0)=0$，则 $f(x)\equiv f(x_0)$。

推论②：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且导函数有界 M，设 $M>0$，则对任意

$x_1,x_2\in[a,b]$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\le M\,|x_1-x_2|$。

注记：该推论条件也称为 Lipschitz 连续条件，Lipschitz 连续未必可导，而导函数有界一定有 Lipschitz 连续。

推论③：若 $f(x)$ 在**有限区间** (a,b) 内可导无界，则 $f'(x)$ 在 (a,b) 上也必无界。
逆否命题：若 $f'(x)$ 在**有限区间** (a,b) 上有界，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内也有界。

Pro: 设 $|f'(x)|\le M$，取定 $x_0\in(a,b)$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

则 $f(x)=f'(\xi)(x-x_0)+f(x_0)$，

则 $\left|f(x)\right|\le\left|f'(\xi)\right|\left|x-x_0\right|+\left|f(x_0)\right|\le M(b-a)+\left|f(x_0)\right|$，证毕。

注记：无穷区间不成立，逆命题不成立。

（5）柯西(Cauchy)中值定理

条件：$f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，$g'(x)\neq 0$。

Th: 若条件满足，则在 (a,b) 至少存在一点ξ，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}$。

Pro: 令 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}g(x)$，再用 Rolle 定理。

（6）导函数的零值定理

Th: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内可导，$f_+'(a)f_-'(b)<0$，则必有 $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=0.$

Pro: 不妨设 $f_+'(a)>0$、$f_-'(b)<0$，$f_+'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，
由极限保号性，对于 $x\in(a,a+\delta)$，都有 $f(x)>f(a)$，
则 $f(a)$ 不是最大值，同理 $f(b)$ 也不是最大值。
则由于 $f(x)\in C[a,b]$，一定有 $\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)$ 成为最大值。
由 Fermat 定理，$f'(\xi)=0$。

（7）导函数的介值定理（*Darboux* 定理）

Th: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内可导，则 $f'(x)$ 可取到 $f_+'(a)$、$f_-'(b)$ 之间的任何值。

Pro: 任取 $\lambda\in(f_+'(a),f_-'(b))\,||\,(f_-'(b),f_+'(a))$，令 $F(x)=f(x)-\lambda x$ 即可证明。

注记：这并不要求导函数在所考虑的区间上连续。

（8）导函数的极限定理

Th: 若 $f(x)$ 在 $B(x_0,\delta)$ 上连续，在 $B^o(x_0,\delta)$ 内可导，且 $f'(x_0\pm 0)=k$，则 $f'(x_0)=k$。