

# 中国科学技术大学

## 2016—2017学年第二学期考试试卷

考试科目 随机过程(B) 得分 \_\_\_\_\_

所在系 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_

(2017年6月22日上午8:30-10:30, 半开卷)

### 一. (29分) 填空或选择题.

1. 设随机变量 $X$ 和 $Y$ 的矩母函数 $g_X(t)$ 和 $g_Y(t)$ 均存在, 则下列说法错误的是( ).  
 (A)  $g_X(t)$ 能唯一决定 $X$ 的分布  
 (B) 若 $X$ 的方差存在且 $g_X(t)$ 二阶可导, 则 $\text{Var}(X) = g_X''(0) - [g_X'(0)]^2$   
 (C)  $X + Y$ 的矩母函数也存在且为 $g_X(t)g_Y(t)$   
 (D) 对任意 $n > 0$ ,  $n$  阶矩 $E[X^n]$  一定存在
2. 设  $\{N(t), t \geq 0\}$  是一个强度为  $\lambda$  的Poisson过程, 则  $E[N(1)N(2)] =$  \_\_\_\_\_;  
 $E[N(10)N(5)] =$  \_\_\_\_\_; 若又已知 $N(3) = 1$ , 则  $P(N(2) - N(1) = 1) =$  \_\_\_\_\_.
3. 假定某天文台观测到的流星流是一个Poisson过程, 据以往资料统计为每小时平均观测到 3 颗流星. 则在晚上 8 点到 10 点期间, 该天文台没有观察到流星的概率是 \_\_\_\_\_. 凌晨 0 点后该天文台观察到第一颗流星的时间的分布是 \_\_\_\_\_.
4. 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一个Markov 链, 且一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 2 & 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 3 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

若 $X_0$ 的分布律为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ , 则 $X_2$ 的分布律为\_\_\_\_\_; 且该Markov 链的平稳分布为\_\_\_\_\_.

5. 在离散时间Markov 链中, 关于常返性下列说法正确的是( ).  
 (A) 若状态  $i$  常返且  $j \rightarrow i$ , 则状态  $j$  也是常返的  
 (B) 若状态  $i$  常返且  $i \rightarrow j$ , 则状态  $j$  不一定是常返的  
 (C) 若状态  $i$  零常返, 则极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)}$  一定存在  
 (D) 若状态  $i$  正常返, 则极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)}$  一定存在
6. 关于离散时间Markov 链的平稳分布和极限分布, 下列说法正确的是( ).  
 (A) 只要有正常返类, 则必有平稳分布  
 (B) 平稳分布和极限分布都存在, 则它们必相等  
 (C) 极限分布若存在则与 $X_0$  的取值无关  
 (D) 平稳分布若存在则必唯一
7. 关于直线上的简单对称随机游动 $\{X_n, n \geq 0\}$ , 下列说法错误的是( ).  
 (A) 所有状态的周期均为2

- (B)  $\{X_n, n \geq 0\}$  为一个 Markov 链且无平稳分布
- (C) 若  $X_0 = 0$ , 则对任意整数  $n$ , 其最终能到达它的概率为 1
- (D) 若  $X_0 = 0$ , 则其首次返回原点所需平均时间是有限的

8. 关于平稳过程, 下列说法正确的是( ).

- (A) 宽平稳过程具有平稳增量性
- (B) Poisson 过程是宽平稳过程
- (C) 初始状态服从平稳分布的 Markov 过程为严平稳过程
- (D) 严平稳过程一定是宽平稳过程

二. (12分) 假设一个电子管内到达阳极的电子数目  $N(t)$  服从参数为  $\lambda$  的 Poisson 过程, 每个电子携带能量相互独立且与电子数目  $N(t)$  相互独立, 并均服从区间  $[1, 2]$  上的均匀分布, 设到  $t$  时刻的阳极接受的能量为  $S(t)$ . 求  $S(t)$  的均值  $E[S(t)]$  和方差  $\text{Var}[S(t)]$ .

三. (20分) 现有红色、黄色、蓝色三种汽车, 分别按强度为  $\lambda_1, \lambda_2$  和  $\lambda_3$  且相互独立的 Poisson 过程通过公路上的某观察站,

- (1) 若不论颜色, 求第一辆车通过该观察站所需的时间的概率密度函数与期望;
- (2) 在已知时刻  $t_0$  观察到一辆红车的条件下,
  - (a) 下一辆仍是红车的概率是多少? (b) 下一辆是黄车的概率是多少?
- (3) 已知时刻  $t_0$  观察到一辆红车的条件下, 接下来通过的  $k$  辆全是红车, 而后是非红车的概率是多少? ( $k \geq 0$ )
- (4) 在相继两辆红车之间通过该观察站的蓝车恰有  $n$  辆的概率,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

四. (15分) 设马氏链  $\{X_n, n \geq 0\}$  的状态空间为  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$  (全体非负整数), 转移概率为

$$P_{i,i+1} = P_{i,0} = \frac{1}{2}, \quad i \geq 0.$$

- (1) 证明该马氏链为不可约遍历的;
- (2) 试求该马氏链的极限分布  $\pi = \{\pi_i, i \geq 0\}$ .

五. (8分) 设  $X(t) = Y \cos(\omega t + \Theta)$ , 其中  $\omega$  为常数,  $Y$  服从均值为  $\mu$ , 方差为  $\sigma^2$  正态分布,  $\Theta$  服从区间  $[0, 2\pi]$  上的均匀分布, 且  $Y$  与  $\Theta$  相互独立. 试判断  $X(t)$  是否为宽平稳过程. 如是, 请给出证明; 否则, 请说明原因.

六. (16分) 已知平稳过程  $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$  的均值函数为 0, 谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 10\omega^2 + 21}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

- (1) 求  $X(t)$  的协方差函数  $R(\tau)$ ;
- (2)  $X(t)$  是否有均值遍历性? 为什么?