装……订……线

中国科学技术大学

2016—2017学年第二学期考试试卷

考试科目 随机过程(B)　　得分 ________

所在系 ______　学号 __________　姓名 __________

(2017年6月22日上午8:30–10:30, 半开卷)

一. (29分) 填空或选择题.

1. 设随机变量X和Y的矩母函数$g_X(t)$和$g_Y(t)$均存在, 则下列说法错误的是(　).
   (A) $g_X(t)$能唯一决定X的分布
   (B) 若X的方差存在且$g_X(t)$二阶可导, 则$\mathrm{Var}(X) = g''_X(0) - [g'_X(0)]^2$
   (C) $X+Y$的矩母函数也存在且为$g_X(t)g_Y(t)$
   (D) 对任意$n>0$, n 阶矩$\mathrm{E}[X^n]$ 一定存在
2. 设 $\{N(t), t\geq 0\}$ 是一个强度为 λ 的Poisson过程, 则 $\mathrm{E}[N(1)N(2)] =$ ________; $\mathrm{E}[N(10)|N(5)] =$ ________; 若又已知$N(3)=1$, 则 $\mathrm{P}(N(2)-N(1)=1) =$ ________.　$|N(3)=1$
3. 假定某天文台观测到的流星流是一个Poisson过程, 据以往资料统计为每小时平均观测到 3 颗流星. 则在晚上 8 点到 10 点期间, 该天文台没有观察到流星的概率是______. 凌晨 0 点后该天文台观察到第一颗流星的时间的分布是 ______.
4. 设$\{X_n, n\geq 0\}$是一个Markov 链, 且一步转移概率矩阵为
$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$
若X_0 的分布律为$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, 则$X_2$的分布律为____________; 且该Markov 链的平稳分布为__________.
5. 在离散时间Markov 链中, 关于常返性下列说法正确的是(　).
   (A) 若状态 i 常返且 $j\to i$, 则状态 j 也是常返的
   (B) 若状态 i 常返且 $i\to j$, 则状态 j 不一定是常返的
   (C) 若状态 i 零常返, 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}$一定存在
   (D) 若状态 i 正常返, 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}$一定存在
6. 关于离散时间Markov 链的平稳分布和极限分布, 下列说法正确的是(　).
   (A) 只要有正常返类, 则必有平稳分布
   (B) 平稳分布和极限分布都存在, 则它们必相等
   (C) 极限分布若存在则与X_0 的取值无关
   (D) 平稳分布若存在则必唯一
7. 关于直线上的简单对称随机游动$\{X_n, n\geq 0\}$, 下列说法错误的是(　).
   (A) 所有状态的周期均为2

   (B) $\{X_n, n\geq 0\}$为一个Markov 链且无平稳分布
   (C) 若$X_0=0$, 则对任意整数n, 其最终能到达它的概率为1
   (D) 若$X_0=0$, 则其首次返回原点所需平均时间是有限的
8. 关于平稳过程, 下列说法正确的是(　).
   (A) 宽平稳过程具有平稳增量性
   (B) Possion过程是宽平稳过程
   (C) 初始状态服从平稳分布的Markov过程为严平稳过程
   (D) 严平稳过程一定是宽平稳过程

二. (12分) 假设一个电子管内到达阳极的电子数目 $N(t)$ 服从参数为 λ 的 Poisson 过程，每个电子携带能量相互独立且与电子数目 $N(t)$相互独立，并均服从区间 $[1,2]$ 上的均匀分布，设到 t 时刻的阳极接受的能量为 $S(t)$. 求$S(t)$ 的均值 $\mathrm{E}[S(t)]$ 和 方差$\mathrm{Var}[S(t)]$.

三. (20分) 现有红色、黄色、蓝色三种汽车，分别按强度为 λ_1, λ_2 和λ_3 且相互独立的 Poisson 过程通过公路上的某观察站，

(1) 若不论颜色，求第一辆车通过该观察站所需的时间的概率密度函数与期望；

(2) 在已知时刻 t_0 观察到一辆红车的条件下，

　(a) 下一辆仍是红车的概率是多少？　(b) 下一辆是黄车的概率是多少？

(3) 已知时刻 t_0 观察到一辆红车的条件下，接下来通过的 k 辆全是红车，而后是非红车的概率是多少？（$k\geq 0$）

(4) 在相继两辆红车之间通过该观察站的蓝车恰有n 辆的概率, $n=0,1,2,\cdots$.

四. (15分) 设马氏链 $\{X_n, n\geq 0\}$ 的状态空间为 $S=\{0,1,2,\ldots\}$（全体非负整数），转移概率为
$$P_{i,i+1} = P_{i,0} = \frac{1}{2}, \quad i\geq 0.$$

(1) 证明该马氏链为不可约遍历的；

(2) 试求该马氏链的极限分布 $\pi = \{\pi_i,\ i\geq 0\}$。

五. (8分) 设$X(t) = Y\cos(\omega t + \Theta)$, 其中 ω 为常数，Y 服从均值为μ, 方差为 σ^2 正态分布，Θ 服从区间 $[0,2\pi]$ 上的均匀分布，且 Y 与Θ 相互独立. 试判断$X(t)$ 是否为宽平稳过程。如是，请给出证明；否则，请说明原因。

六. (16分) 已知平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 的均值函数为 0,谱密度函数为
$$S(\omega) = \frac{\omega^2+4}{\omega^4 + 10\omega^2 + 21}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

(1) 求$X(t)$ 的协方差函数 $R(\tau)$;

(2) $X(t)$是否有均值遍历性？为什么？