第四次答疑课

助教　黄瑞轩　10.28

一、导数的存在性

1. 可导必定连续，连续不一定可导

- 连续性是“点”的性质，只要保证 $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 就可以
- 导数定义：若 $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，记为 $f'(x_0)$，可见一个点的可导性还和这个点的邻域内的值有关。
- 可导必定连续，连续不一定可导

例题 1（习题 3.1，4）设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$，求 $f'(0)$

2. 左右导数存在，且相等

- 如果是闭区间端点，可以考虑一侧导数，但是严谨地来讲不能说存在导数

例题 2（习题 3.1，11(3)）设 $f(x)=\begin{cases}\ln x, x\geq 1\\ x-1, x<1\end{cases}$，判断是否可导。

3. 闭区间上导数的存在性

- 闭区间 $[a,b]$ 上可导 = 在开区间 (a,b) 上每一点可导 + 在区间端点有一侧导数

二、导数怎么计算

计算导数一定要搞清楚对**谁**求导，比如 $\frac{dy}{dx}$ 中，下方的 x 是自变量，一般也会用 y_x 或者 y'_x 这样的记号来写。

- 利用导数的定义 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，适用于分段函数
- 利用导数的四则运算
  - 复杂函数的求导，最终归结为四则运算，如 $y=\frac{x+\sqrt{x}}{x\arctan x}$

例题 3（习题 3.1 12(2)）求导数：$y=\sqrt[5]{x}+\frac{a}{\sqrt[3]{x}}+\frac{b}{\sqrt[5]{3}}(a,b\in R)$

- 利用基本初等函数求导表
- 利用导函数的复合求导法则
  - $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$，令 $u(x)=\sqrt{x+1}$
  - $\frac{df}{dx}=\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

例题 4（习题 3.1 12(19)）求导数：$y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

- 利用反函数的求导法则
  - $f(x)$ 假设有反函数 $f^{-1}(y) \coloneqq g(y)$，则 $\frac{dg}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$
  - 几何直观解释

例题 5（习题 3.1 16(4)）求反函数的导数：$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

- 利用对数求导法
  - 可解决 $f(x) = u(x)^{v(x)}$ 类问题，用到了复合函数求导法则
  - 注意定义域

例题 6（习题 3.1 15(15)）求导数：$y = a^x e^{\sin(\tan x)}$

- 曲线参数化
  - 设 $y = \varphi(t), x = \psi(t)$ 都在 I 上可导，则 $y = y(x)$ 可导，$y'(x) = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$
  - 注意：$y''(x) \neq \frac{\varphi''(t)}{\psi''(t)}$

例题 7（习题 3.1 18(3)）求参数定义曲线的导数：$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^2}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^2}, \end{cases}$ 在 $t = 2$ 处

- 隐函数的求导
  - $F(x,y) \coloneqq F\big(x,y(x)\big)=0$，两边对 x 求导，把 y' 解出来

例题 8（习题 3.1 22(4)）求$\frac{dy}{dx}$：$\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

- 高阶导数
  - 莱布尼兹公式 $[v(x)\cdot u(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k[u(x)]^{(n-k)}[v(x)]^{(k)}$
  - （预告）泰勒展开
  - 常见的高阶函数表（了解即可）

例题 9（习题 3.1 22(4)）求$\left(\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}\right)^{(100)}$

- 其他要说的
  - 分段函数求导：在分段点要求左右导数，而不是先求导后再取左右极限
  - 奇函数求导为偶函数，偶函数求导为奇函数
  - 周期函数求导后为周期函数，周期相同