复变函数 B 作业 W6

习题 8

因为 $f(z)$ 是解析函数, 所以可以在 $z=z_0$ 处展开为

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m)}\left(z_0\right)}{m!}\left(z-z_0\right)^m$$

同理 $\varphi(z)$ 可以在 $z=z_0$ 处展开为

$$\varphi(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(m)}\left(z_0\right)}{m!}\left(z-z_0\right)^m$$

由于 z_0 是 $f(z)$ 的至少 n 级零点, 所以对 $0\leqslant k<n$, 都有

$$f^{(k)}\left(z_0\right)=0$$

同理, 对 $0\leqslant k<n$, 都有

$$\varphi^{(k)}\left(z_0\right)=0$$

所以当 $\varphi^{(n)}(z_0)\neq 0$ 时，有

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{\varphi(z)} &= \lim_{z\to z_0}\frac{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}\left(z-z_0\right)^m}{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(m)}(z_0)}{m!}\left(z-z_0\right)^m} \\
&= \lim_{z\to z_0}\frac{\sum_{m=n}^{\infty}\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}\left(z-z_0\right)^m}{\sum_{m=n}^{\infty}\frac{\varphi^{(m)}(z_0)}{m!}\left(z-z_0\right)^m} \\
&= \lim_{z\to z_0}\frac{\sum_{m=n}^{\infty}\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}\left(z-z_0\right)^{m-n}}{\sum_{m=n}^{\infty}\frac{\varphi^{(m)}(z_0)}{m!}\left(z-z_0\right)^{m-n}} \\
&= \lim_{z\to z_0}\frac{f^{(n)}\left(z_0\right)}{\varphi^{(n)}\left(z_0\right)}=\frac{f^{(n)}\left(z_0\right)}{\varphi^{(n)}\left(z_0\right)}
\end{aligned}$$

习题 9

由题可知，存在在 $z=z_0$ 处解析且值不为 0 的两个函数 $f_1(z)$,$g_1(z)$ 使得

$$f(z)=(z-z_0)^m f_1(z)\quad g(z)=(z-z_0)^n g_1(z)$$

（1）可知

$$f(z)g(z)=(z-z_0)^{m+n}f_1(z)g_1(z)$$

$f_1(z)g_1(z)$ 在 $z=z_0$ 解析且值不为 0，所以 $f(z)g(z)$ 在 $z=z_0$ 处有 $m+n$ 级零点。

（2）可知

$$\begin{aligned} f(z)+g(z) &= (z-z_0)^m f_1(z)+(z-z_0)^n g_1(z) \\ &= (z-z_0)^n[(z-z_0)^{m-n}f_1(z)+g_1(z)] \end{aligned}$$

当 $m>n$ 时，$(z-z_0)^{m-n}f_1(z)+g_1(z)$ 在 $z=z_0$ 处解析且值不为 0，所以有 n 级零点；当 $m=n$ 时，$f(z)+g(z)=(z-z_0)^n[f_1(z)+g_1(z)]$，由于不能确定 $f_1(z)+g_1(z)$ 是否有因式 $(z-z_0)$，只能确定 $f(z)+g(z)$ 有至少 n 级的零点。

（3）可知

$$f(z)/g(z)=(z-z_0)^{m-n}f_1(z)/g_1(z)$$

当 $m>n$ 时，由于 $f_1(z)/g_1(z)$ 在 $z=z_0$ 处解析且值不为 0，所以有 $m-n$ 级零点；当 $m=n$ 时，$z=z_0$ 是可去奇点。

习题 10

（1）

$$\frac{1}{z^2(1-z)}=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=-2}^{\infty}z^n$$

（2）

$$z^2\exp(\frac{1}{z})=z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}z^{-n}$$

习题 11

对于前三个小问首先裂项处理：

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)$$

（1）当 $0\le|z|<|a|$ 时有

$$\begin{aligned} \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right) &= \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{b}}-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{a}}\right) \\ &= \frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^n-\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)\right] \\ &= \frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{b^{n+1}}-\frac{1}{a^{n+1}}\right)z^n \end{aligned}$$

（2）当 $|a| < |z| < |b|$ 时有

$$\begin{aligned}\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right) &= \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{a}{z}}+\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{b}}\right)\\ &= \frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n+\frac{1}{b}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^n\right]\\ &= \frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a^n}{z^{n+1}}+\frac{z^n}{b^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

（3）当 $|b| < |z| < \infty$ 时有

$$\begin{aligned}\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right) &= \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{a}{z}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{b}{z}}\right)\\ &= \frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{b}{z}\right)^n\right]\\ &= \frac{1}{a-b}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a^{n-1}-b^{n-1}\right)\frac{1}{z^n}\end{aligned}$$

（4）当 $0 < |z-a| < |z-b|$ 时有

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-a)(z-b)} &= -\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{(b-a)-(z-a)}\\ &= -\frac{1}{(b-a)(z-a)}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{b-a}}\\ &= -\frac{1}{(b-a)(z-a)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-a}{b-a}\right)^n\\ &= -\sum_{n=-1}^{+\infty}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+2}}\end{aligned}$$

（5）当 $|b-a| < |z-a| < \infty$ 时有

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-a)(z-b)} &= \frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{(z-a)-(b-a)}\\ &= \frac{1}{(z-a)^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{b-a}{z-a}}\\ &= \frac{1}{(z-a)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{b-a}{z-a}\right)^n\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(b-a)^{n-2}}{(z-a)^n}\end{aligned}$$

（6）当 $0 < |z-b| < |a-b|$ 时有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-a)(z-b)} &= -\frac{1}{z-b} \cdot \frac{1}{(a-b)-(z-b)} \\
&= -\frac{1}{(a-b)(z-b)} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-b}{a-b}} \\
&= -\frac{1}{(a-b)(z-b)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-b}{a-b}\right)^n \\
&= -\sum_{n=-1}^{+\infty} \frac{(z-b)^n}{(a-b)^{n+2}}
\end{aligned}$$

（7）当 $|a-b| < |z-b| < \infty$ 时有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-a)(z-b)} &= \frac{1}{z-b} \cdot \frac{1}{(z-b)-(a-b)} \\
&= \frac{1}{(z-b)^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{a-b}{z-b}} \\
&= \frac{1}{(z-b)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a-b}{z-b}\right)^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(a-b)^{n-2}}{(z-b)^n}
\end{aligned}$$