概率论与数理统计

庄玮玮
weizh@ustc.edu.cn

安徽 合肥

2021 年 9 月

教材

陈希孺,《概率论与数理统计》,
中国科学技术大学出版社, 2009 年.

课程目的

- 掌握初等概率（基于微积分）的基本理论
- 掌握数理统计的基本概念和方法
- 激发对随机数学课程学习的兴趣
- 培养用基本统计方法解决实际问题的能力

成绩计算

平时作业（30%）+ 期末考试（70%）

第一章 事件与概率

§1.1 概率论发展简史

- ▷ 自然与社会现象：确定性现象、偶然性现象
- ▷ 偶然和必然是人们认识世界过程中一个永恒的话题

数学

欧拉

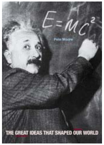
L. Euler

1707—1783

$$e^{i\pi}+1=0$$

最美的公式

物理



爱因斯坦

A. Einstein

(1879-1955)

E = MC²

有规律 发现规律

自然科学的确定性

- ▷ 概率论的任务：从偶然中悟出必然！

概率论的起源

概率论是一门研究随机现象规律的数学分支, 起源于17世纪中叶.

1650年前后的法国, 赌博在贵族中风靡一时, 且无法律限制.

贵族De Mere在与一名宫廷卫士一次赌博时关于如何分赌本的问题发生了争执, 于是请教他的好友著名的数学家Blaise Pascal.

Pascal与他的另一名好友数学家Pierre Fermat通信讨论该问题, 形成了概率论中一个重要的基本概念—数学期望.

Pascal

Fermat

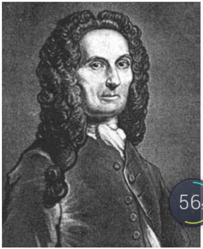
赌本分配问题： 你和老K两人赌技相同，互不服输。一天二人相约各出赌注500元，约定：谁先胜3局，则拿走全部1000元。现已赌了3局，你以两胜一负的战绩领先。此时，老K以家中有急事为由要提前结束赌局。请问，这1000元赌注该如何分配？

概率论的起源

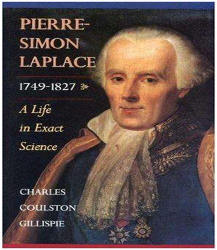
Christiaan Huygens在1657年写了世界上第一本关于概率论的著作"*On Reasoning in Games of Chance*"("论赌博中的计算").

1713年, Jacob Bernoulli在著作《猜度术》中对频率和概率接近这一事实给予了理论上的阐述, 建立了概率论中的第一个大数定律—Bernoulli大数律.

1718年, Abraham De Moivre在他的著作《机会论》中提出很多计算古典概率的方法, 包括乘法定理等. 最早使用正态分布密度曲线.



概率论的起源



概率论从此得到了迅速的发展,被广泛地应用到了不同的范畴和不同的学科. 今天,概率论已经成为一个非常庞大的数学分支,在此基础上,数理统计也得到了迅速的发展.

1812年, Pierre-Simon Laplace 在著作分析概率论》中最早叙述了概率论的几个基本定理,给出了古典概率的明确定义.将概率应用到赌博以外的各个领域,包括人口统计,保险等.

1933年, Andrey Kolmogorov 在著作 “*Foundations of the Theory of Probability*”) 中正式提出了概率论的公理体系,从而使得概率论成为一门严谨的数学分支.

§1.2 随机现象和随机事件

- 随机现象: 自然界中的客观现象, 当人们观测它时, 所得结果不能预先确定, 而仅仅是多种可能结果之一.

  例子: 明天是否下雨.

- 随机试验: 一个试验称为随机试验, 若该试验满足以下三条:
  - 在相同条件下可重复进行;
  - 所有的试验结果是明确可知的, 结果至少有两个;
  - 每次试验恰好出现这些结果中的一个, 但在试验之前无法预知该结果.

  例子: 掷一个硬币, 掷两枚骰子, 在一副扑克牌中随机抽取两张.

§1.2 随机现象和随机事件

基本概念：

- 样本点 (w)
- 样本空间 (Ω)
- 随机事件: 基本随机事件、复杂随机事件
- 特殊事件：必然事件 Ω、不可能事件 $\emptyset$

基本概念

样本点: 作试验的目的是考察试验出现的可能结果. 掷一枚硬币时, 用H (head) 表示硬币正面朝上, 用T (tail) 表示硬币反面朝上. 本试验的可能结果是H 和T. 称基本试验结果H 和T 是样本点(sample point).

基本概念

样本空间： 为了叙述的方便和明确，下面把一个特定的试验称为试验S. 称试验S的可能结果为样本点，用ω表示. 称试验S的样本点ω构成的集合为样本空间(sample space)，用Ω表示样本空间，有

$$\Omega = \{\omega \mid \omega \ \text{试验}S\text{的样本点}\}.$$

- 【例 1.2.1】 抛掷两枚硬币，写成样本点与样本空间.

解：将硬币区分为第一枚和第二枚，用“H”表示一枚硬币正面朝上，用“T”表示反面朝上，于是样本点有 4 个:

HH: 第一枚硬币正面朝上，第二枚正面朝上;

HT: 第一枚硬币正面朝上，第二枚反面朝上;

TH: 第一枚硬币反面朝上，第二枚正面朝上;

TT: 第一枚硬币反面朝上，第二枚反面朝上.

样本空间：$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$. ∎

基本概念

样本空间： 为了叙述的方便和明确，下面把一个特定的试验称为试验S. 称试验S 的可能结果为样本点，用ω 表示. 称试验S 的样本点ω 构成的集合为样本空间(sample space)，用Ω 表示样本空间，有

$$\Omega = \{\omega \mid \omega \ \ \text{试验}S\text{的样本点}\}.$$

- 【例 1.2.1】 抛掷两枚硬币，写成样本点与样本空间.

解：将硬币区分为第一枚和第二枚，用“H”表示一枚硬币正面朝上，用“T”表示反面朝上，于是样本点有 4 个:

HH: 第一枚硬币正面朝上，第二枚正面朝上;
HT: 第一枚硬币正面朝上，第二枚反面朝上;
TH: 第一枚硬币反面朝上，第二枚正面朝上;
TT: 第一枚硬币反面朝上，第二枚反面朝上.

样本空间：$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$. ∎

基本概念

样本空间可以有限，也可以无限。

- 【例 1.2.2】

(1) 一盒中装有编号 $1, 2, \ldots, n$ 的小球，随机选取一个:

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

(2) 一段时间某部电话接受的电话呼叫：

$$\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

(3) 测量某地水温： $\Omega = [0, 100]$.

事件

事件与随机事件的区别:

在通常意义下，事件是指对已发生的情况的描述；但随机事件是对某种或某些情况的一种陈述，可能已发生，也可能没有发生.
今后，随机事件简记为事件.

- 事件: 试验S 的样本空间Ω是一个全集,Ω的元素ω是样本点，Ω的子集是事件. 对于$A \subset \Omega$, 如果元素(试验的结果) $\omega \in A$, 则称事件A发生, 否则称A不发生.

⊛ 事件是样本空间Ω的子集. 通常用大写字母A, B, C, D 或$A_1, A_2, \cdots, B_1, B_2, \cdots$ 等表示事件.

事件

事件与随机事件的区别:

在通常意义下，事件是指对已发生的情况的描述；但随机事件是对某种或某些情况的一种陈述，可能已发生，也可能没有发生. 今后，随机事件简记为事件.

- 事件: 试验S 的样本空间Ω是一个全集,Ω的元素ω是样本点, Ω的子集是事件. 对于$A \subset \Omega$, 如果元素(试验的结果) $\omega \in A$, 则称事件A发生, 否则称A不发生.

⊛ 事件是样本空间Ω的子集. 通常用大写字母A, B, C, D 或$A_1, A_2, \cdots, B_1, B_2, \cdots$ 等表示事件.

事件

- 【例 1.2.3】 投掷一枚骰子的样本空间是

$$\Omega=\{\omega\,|\,\omega=1,2,\cdots,6\}.$$

- 用集合$A=\{3\}$表示掷出3点，则A是Ω的子集，称A是事件. 如果掷出3点，则称事件A发生,否则称事件A不发生;
- 用集合$B=\{2,4,6\}$表示掷出偶数点,B是Ω的子集，B也是事件. 如果掷出偶数点，则称事件B发生，否则称事件B不发生.

事件

- 单个样本点构成的事件，称为基本事件；
- 在随机试验中我们所关心的可能出现的各种结果，它由一个或若干个基本事件组成，称为复杂事件；
- 空集$\emptyset$ 是Ω的子集．由于$\emptyset$中没有样本点，永远不会发生，所以称$\emptyset$是不可能事件；
- Ω也是样本空间Ω的子集，包含了所有的样本点，因而总会发生，于是称Ω是必然事件．

事件的运算

对集合可以进行集合运算，其结果仍然是集合. 由于事件是子集，所以可以对事件进行集合的运算，其结果仍然是事件.

- 用$\overline{A} = \Omega - A$表示集合$A$的余集，则事件$A$发生和试验结果$\omega \in A$ 是等价的，事件A不发生和试验结果$\omega \in \overline{A}$ 是等价的;
- 当A, B是事件，则

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A - B = A\overline{B}$$

都是事件，用AB表示$A \cap B$，当$AB = \emptyset$，也用$A + B$表示$A \cup B$;
- 当事件$AB = \emptyset$，称事件A，B 互斥或不相容. 特别称$\overline{A}$为A的对立事件. 如果多个事件$A_1, A_2, \cdots$ 两两不相容: $A_iA_j = \emptyset$, $i \neq j$，则称他们互斥或互不相容.

事件的运算

- 事件的运算符号和集合的运算符号是相同的，例如：

(1) $A = B$ 表示事件 A, B 相等;

(2) $A \cup B$ 发生等价于至少 A, B 之一发生;

(3) $A \cap B$ (或 AB) 发生等价于 A 和 B 都发生;

(4) $A - B = A\overline{B}$ 发生等价于 A 发生和 B 不发生;

(5) $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$ 发生表示至少有一个 $A_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ 发生;

(6) $\bigcap_{j=1}^{n} A_j$ 发生表示所有的 $A_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ 都发生.

事件的运算

设 $\{A_i, i=1,\ldots,n\}$ 为一事件族 (n 有限或无限), 则

- 并交运算满足交换律、结合律、分配律

$$B\cap\left(\bigcup_{j=1}^{n}A_j\right)=\bigcup_{j=1}^{n}(B\cap A_j),\quad B\cup\left(\bigcap_{j=1}^{n}A_j\right)=\bigcap_{j=1}^{n}(B\cup A_j).$$

- 对偶原理（De Morgan 法则）：

$$\left(\bigcup_{j=1}^{n}A_j\right)^c=\bigcap_{j=1}^{n}A_j^c,\qquad \left(\bigcap_{j=1}^{n}A_j\right)^c=\bigcup_{j=1}^{n}A_j^c.$$

§1.3 古典概型

▶ 概率: 设 Ω 是样本空间. 对于 Ω 的事件A,我们用 $[0,1]$ 中的数 $P(A)$ 表示 A 发生的可能性的大小, 称 $P(A)$ 是事件 A 发生的概率, 简称为 A 的概率. 并且规定必然事件发生的概率等于1: $P(\Omega)=1$.

- 按照以上原则, 如果事件A, B发生的可能性相同, 则有 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)$. 于是, 投掷一枚均匀的硬币时, 正面朝上的概率等于反面朝上的概率, 都是1/2;
- 以后总用 $|A|$ 表示事件 A 的样本点个数, 用 $|\Omega|$ 表示 Ω 中的样本点个数.

§1.3 古典概型

- 古典概型: 试验结果有限、等可能性.
  - 试验结果的"等可能性": 设一个试验有有限个试验结果 $\{w_1, \ldots, w_n\}$. 若找不到理由认为一个试验结果比另一个试验结果更易于发生.
  - 等可能性是一个理想的假设。以掷骰子为例，要求质地均匀、标准的正六面体、从足够高的高处下落等.
- 古典概型应用: 在概率论中占有重要地位.
  - 模型简单，有助于理解许多基本概念;
  - 在产品抽检和理论物理中有应用.
- 古典概率: 设试验S的样本空间Ω是有限集合, $A \subset \Omega$. 如果Ω的每个样本点发生的可能性相同, 则称

$$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

为试验S下A发生的概率, 简称为事件A的概率.

§1.3 古典概型

- 古典概型: 试验结果有限、等可能性.
  - 试验结果的“等可能性”: 设一个试验有有限个试验结果 $\{w_1, \ldots, w_n\}$. 若找不到理由认为一个试验结果比另一个试验结果更易于发生.
  - 等可能性是一个理想的假设。以掷骰子为例，要求质地均匀、标准的正六面体、从足够高的高处下落等.
- 古典概型应用: 在概率论中占有重要地位.
  - 模型简单，有助于理解许多基本概念;
  - 在产品抽检和理论物理中有应用.
- 古典概率: 设试验S的样本空间Ω是有限集合, $A \subset \Omega$. 如果Ω的每个样本点发生的可能性相同, 则称

$$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

为试验S下A发生的概率, 简称为事件A的概率.

§1.3 古典概型

- 【例 1.3.1】 投掷一枚均匀的骰子, 样本空间是

$$\Omega = \{\omega \,|\, \omega = 1, 2, \cdots, 6\}.$$

用 $A = \{j\}$ 表示掷出点数j, $B = \{2, 4, 6\}$ 表示掷出偶数点. 则有

- $\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$,
- $\mathrm{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$.

§1.3 古典概型

▶ 【例 1.3.2】 设试验S的样本空间Ω是有限集合，若Ω的每个样本点发生的可能性相同，则对$A \subset \Omega$，$B \subset \Omega$，当$AB = \emptyset$，有

$$\mathrm{P}(A+B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$$

证明 因为$AB = \emptyset$，所以$|A+B| = |A| + |B|$,则由定义

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A+B) = \frac{|A+B|}{|\Omega|} &= \frac{|A|+|B|}{|\Omega|} \\ &= \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} \\ &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B). \end{aligned}$$

§1.3 古典概型

▶【例 1.3.2】 设试验S的样本空间Ω是有限集合，若Ω的每个样本点发生的可能性相同，则对$A \subset \Omega$，$B \subset \Omega$，当$AB = \emptyset$，有

$$\mathrm{P}(A+B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$$

证明　因为$AB = \emptyset$，所以$|A+B| = |A| + |B|$,则由定义

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A+B) = \frac{|A+B|}{|\Omega|} &= \frac{|A|+|B|}{|\Omega|} \\
&= \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} \\
&= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).
\end{aligned}$$

§1.3 古典概型

- 【例 1.3.3】 一批同型号的产品中，一等品所占的比例是 p_1，二等品所占的比例是 $p_2, \cdots, n$ 等品所占的比例是 p_n. 从中随机抽取一件.

(a) 抽到 j 等品的概率是多少?

(b) 对于 $i \neq j$, 抽到 i 等品或者 j 等品的概率是多少?

解 设这批产品的数量是 N, 则 $|\Omega| = N$. 抽到哪一件产品的可能性都是相同的，用 A_j 表示抽到 j 等品. 因为 j 等品的数量是 Np_j, 所以 $|A| = Np_j$. 根据定义得到

$$\mathrm{P}(A_j) = \frac{Np_j}{N} = p_j.$$

§1.3 古典概型

- 【例 1.3.3】 一批同型号的产品中，一等品所占的比例是 p_1，二等品所占的比例是 $p_2, \cdots, n$ 等品所占的比例是 p_n. 从中随机抽取一件.

(a) 抽到 j 等品的概率是多少?

(b) 对于 $i \neq j$，抽到 i 等品或者 j 等品的概率是多少?

解 设这批产品的数量是 N，则 $|\Omega| = N$. 抽到哪一件产品的可能性都是相同的，用 A_j 表示抽到 j 等品. 因为 j 等品的数量是 Np_j，所以 $|A| = Np_j$. 根据定义得到

$$\mathrm{P}(A_j) = \frac{Np_j}{N} = p_j.$$

§1.3 古典概型

事件 $B = A_i + A_j$ 表示抽到 i 等品或者 j 等品，由于抽到 i 等品就不能抽到 j 等品，所以 A_i 和 A_j 互不相容，即$A_iA_j = \varnothing$. 从例 1.3.2 的结论知

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A_i) + \mathrm{P}(A_j) = p_i + p_j.$$

在本例中，每件产品是一个样本点，被抽到的可能性相同．本例还表明，在随机抽样时，概率等于比例．

§1.3 古典概型

▶【例1.3.4】 从 5 双不同尺码的鞋子中随机取出 4 只，求以下事件概率.

事件 A: 4 只鞋任意 2 只不成双;
事件 B: 2 只鞋成双, 另 2 只不成双;
事件 C: 4 只鞋恰成两双.

解：按组合计数, 视所有鞋各不相同.

$$|\Omega| = \binom{10}{4} = 210, \qquad |A| = \binom{5}{4}\cdot 2^4 = 80,$$

$$|B| = \binom{5}{1}\binom{4}{2}2^2 = 120, \qquad |C| = \binom{5}{2} = 10,$$

$$\Longrightarrow \mathrm{P}(A) == \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{8}{21}, \quad \mathrm{P}(B) = \frac{4}{7}, \quad \mathrm{P}(C) = \frac{1}{21}.$$

§1.3 古典概型

▶【例1.3.4】 从 5 双不同尺码的鞋子中随机取出 4 只，求以下事件概率.

事件 A: 4 只鞋任意 2 只不成双;
事件 B: 2 只鞋成双, 另 2 只不成双;
事件 C: 4 只鞋恰成两双.
解：按组合计数, 视所有鞋各不相同.

$$|\Omega| = \binom{10}{4} = 210, \qquad |A| = \binom{5}{4} \cdot 2^4 = 80,$$

$$|B| = \binom{5}{1}\binom{4}{2}2^2 = 120, \qquad |C| = \binom{5}{2} = 10,$$

$$\Longrightarrow \mathrm{P}(A) == \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{8}{21}, \quad \mathrm{P}(B) = \frac{4}{7}, \quad \mathrm{P}(C) = \frac{1}{21}.$$

§1.3 古典概型

▶【例1.3.5】 一笼子中有 10 只猫，其中有 7 只白猫，3 只黑猫．把笼门打开一个小口，使得每次只能钻出一只猫．猫争先恐后往外钻．如果 10 只猫全部钻出笼子，以 A_k 记 "第 k 只钻出的猫是黑猫" 的事件，求 $\mathrm{P}(A_k)$, $1 \le k \le 10$.

解法一：按 "猫可辨，排列" 计数：

$$|\Omega| = 10!, \qquad |A_k| = 3 \cdot 9! \implies \mathrm{P}(A_k) = \frac{3}{10}.$$

解法二：按 "同色猫不可辨" 计数：样本点 $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$ 是由黑猫钻出笼子的时刻确定，$x_i = 0$ (第 i 次钻出白猫)，$x_i = 1$ (第 i 次钻出黑猫)，$i = 1, \ldots, 10$.

$$|\Omega| = \binom{10}{3} = 120, \qquad |A_k| = \binom{9}{2} = 36 \implies \mathrm{P}(A_k) = \frac{3}{10}.$$

§1.3 古典概型

▶ 【例1.3.5】 一笼子中有 10 只猫，其中有 7 只白猫，3 只黑猫. 把笼门打开一个小口，使得每次只能钻出一只猫. 猫争先恐后往外钻. 如果 10 只猫全部钻出笼子，以 A_k 记“第 k 只钻出的猫是黑猫”的事件，求 $\mathrm{P}(A_k)$, $1 \le k \le 10$.

解法一：按“猫可辨，排列”计数：

$$|\Omega| = 10!, \qquad |A_k| = 3 \cdot 9! \implies \mathrm{P}(A_k) = \frac{3}{10}.$$

解法二：按“同色猫不可辨”计数：样本点 $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$ 是由黑猫钻出笼子的时刻确定，$x_i = 0$ (第 i 次钻出白猫)，$x_i = 1$ (第 i 次钻出黑猫)，$i = 1, \ldots, 10$.

$$|\Omega| = \binom{10}{3} = 120, \qquad |A_k| = \binom{9}{2} = 36 \implies \mathrm{P}(A_k) = \frac{3}{10}.$$

§1.3 古典概型

▶【例1.3.5】 一笼子中有 10 只猫，其中有 7 只白猫，3 只黑猫. 把笼门打开一个小口，使得每次只能钻出一只猫. 猫争先恐后往外钻. 如果 10 只猫全部钻出笼子，以 A_k 记"第 k 只钻出的猫是黑猫"的事件，求 $\mathrm{P}(A_k)$, $1 \le k \le 10$.

解法一：按"猫可辨，排列"计数：

$$|\Omega| = 10!, \qquad |A_k| = 3 \cdot 9! \implies \mathrm{P}(A_k) = \frac{3}{10}.$$

解法二：按"同色猫不可辨"计数：样本点 $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$ 是由黑猫钻出笼子的时刻确定，$x_i = 0$（第 i 次钻出白猫），$x_i = 1$（第 i 次钻出黑猫），$i = 1, \ldots, 10$.

$$|\Omega| = \binom{10}{3} = 120, \qquad |A_k| = \binom{9}{2} = 36 \implies \mathrm{P}(A_k) = \frac{3}{10}.$$

§1.3 古典概型

▶ 【例1.3.5】 一笼子中有 10 只猫, 其中有 7 只白猫, 3 只黑猫. 把笼门打开一个小口, 使得每次只能钻出一只猫. 猫争先恐后往外钻. 如果 10 只猫全部钻出笼子, 以 A_k 记 “第 k 只钻出的猫是黑猫” 的事件, 求 $\mathrm{P}(A_k)$, $1 \leq k \leq 10$.

解法三: 按 “猫可辨, 排列” 计数, 只考虑前 k 只出笼的猫情况:

$$|\Omega| = \binom{10}{k} k!, \qquad |A_k| = \binom{3}{1}\binom{9}{k-1}(k-1)!,$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{P}(A_k) = \frac{3}{10}.$$

※ 对于一个问题的求解要采用同一模式去计算 $|A|$ 和 $|\Omega|$;

※ “$\mathrm{P}(A_k)$ 与 k 无关” 说明了抽签中签的概率与抽签次序无关.

§1.3 古典概型

▶ 【例1.3.5】 一笼子中有 10 只猫，其中有 7 只白猫，3 只黑猫．把笼门打开一个小口，使得每次只能钻出一只猫．猫争先恐后往外钻．如果 10 只猫全部钻出笼子，以 A_k 记 "第 k 只钻出的猫是黑猫" 的事件，求 $\mathrm{P}(A_k)$, $1 \le k \le 10$.

解法三：按 "猫可辨，排列" 计数，只考虑前 k 只出笼的猫情况：

$$|\Omega| = \binom{10}{k} k!, \qquad |A_k| = \binom{3}{1}\binom{9}{k-1}(k-1)!,$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{P}(A_k) = \frac{3}{10}.$$

※ 对于一个问题的求解要采用同一模式去计算 $|A|$ 和 $|\Omega|$;

※ "$\mathrm{P}(A_k)$ 与 k 无关" 说明了抽签中签的概率与抽签次序无关.

§1.3 古典概型

▶ 【例1.3.5】 一笼子中有 10 只猫, 其中有 7 只白猫, 3 只黑猫. 把笼门打开一个小口, 使得每次只能钻出一只猫. 猫争先恐后往外钻. 如果 10 只猫全部钻出笼子, 以 A_k 记“第 k 只钻出的猫是黑猫”的事件, 求 $\mathrm{P}(A_k)$, $1 \le k \le 10$.

解法三: 按“猫可辨, 排列”计数, 只考虑前 k 只出笼的猫情况:

$$|\Omega| = \binom{10}{k} k!, \qquad |A_k| = \binom{3}{1}\binom{9}{k-1}(k-1)!,$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{P}(A_k) = \frac{3}{10}.$$

※ 对于一个问题的求解要采用同一模式去计算 $|A|$ 和 $|\Omega|$;

※ “$\mathrm{P}(A_k)$ 与 k 无关”说明了抽签中签的概率与抽签次序无关.

一些计数模式

- 排列组合
  - 从n个不同的元素中有放回地每次抽取一个，依次抽取m个排成一列，可以得到n^m个不同的排列. 当随机抽取时,得到的不同排列是等可能的;
  - 从n个不同的元素中(无放回)抽取m个元素排成一列时，可以得到$\mathrm{A}_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$个不同的排列. 当随机抽取和排列时,得到的不同排列是等可能的;
  - 从n个不同的元素中(无放回)抽取m个元素,不论次序地组成一组,可以得到 $\mathrm{C}_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ 个不同的组合. 当随机抽取时,得到的不同组合是等可能的.
  - 将n个不同的元素分成有次序的k组，不考虑每组中元素的次序，第$i(1 \leqslant i \leqslant k)$ 组恰有 n_i 个元素的不同结果数是

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

当随机分组时，得到的不同结果是等可能的.

一些计数模式

- 不相邻问题

现有 A、B 两类不同的个体做全排列，使得 B 类中个体在排列中互不相邻. 求排列数.

引进等价排列机制：先将 A 类个体做全排列，然后在 A 类排列的每相邻两个个体之前插入一个空位，在 A 类个体的最左侧和最右侧各插入一个空位，再从这些空位中选取适当个数的空位来排列 B 类个体.

- 【例 1.3.6】 将 4 个男生和 3 个女生排成一排，使得 3 个女士互不相邻，求排列数.

解：现将 4 个男生做全排列（排列数为 4!），男生用 □ 表示，然后再插入空位 (空位用 △ 表示)，见下图. 再从 5 个空位中选择出 3 个，把 3 个女生排列进去：

$$\triangle \ \square \ \triangle \ \square \ \triangle \ \square \ \triangle \ \square \ \triangle,$$

所以总排列的个数为 $4!\binom{5}{3}3!$. ∎

一些计数模式

- 不相邻问题

现有 A、B 两类不同的个体做全排列，使得 B 类中个体在排列中互不相邻．求排列数．

引进等价排列机制：先将 A 类个体做全排列，然后在 A 类排列的每相邻两个个体之前插入一个空位，在 A 类个体的最左侧和最右侧各插入一个空位，再从这些空位中选取适当个数的空位来排列 B 类个体．

- 【例 1.3.6】 将 4 个男生和 3 个女生排成一排，使得 3 个女士互不相邻，求排列数．

解：现将 4 个男生做全排列（排列数为 4!），男生用 □ 表示，然后再插入空位 (空位用 △ 表示)，见下图．再从 5 个空位中选择出 3 个，把 3 个女生排列进去：

$$\triangle \square \triangle \square \triangle \square \triangle \square \triangle,$$

所以总排列的个数为 $4!\binom{5}{3}3!$. ∎

一些计数模式

- 不相邻问题

现有 A、B 两类不同的个体做全排列，使得 B 类中个体在排列中互不相邻．求排列数．

引进等价排列机制：先将 A 类个体做全排列，然后在 A 类排列的每相邻两个个体之前插入一个空位，在 A 类个体的最左侧和最右侧各插入一个空位，再从这些空位中选取适当个数的空位来排列 B 类个体．

- 【例 1.3.6】 将 4 个男生和 3 个女生排成一排，使得 3 个女士互不相邻，求排列数．

解：现将 4 个男生做全排列（排列数为 4!），男生用 □ 表示，然后再插入空位 (空位用 Δ 表示)，见下图．再从 5 个空位中选择出 3 个，把 3 个女生排列进去：

$$\Delta\ \square\ \Delta\ \square\ \Delta\ \square\ \Delta\ \square\ \Delta,$$

所以总排列的个数为 $4!\binom{5}{3}3!$. ∎

一些计数模式

- 接【例 1.3.6】 若将 4 个男生和 3 个女生排成一圈，使得 3 个女士互不相邻，求排列数.

解：现将 4 个男生排成一圈（排列数为 3!），然后再插入空位. 再从 4 个空位中选择出 3 个，把 3 个女生排列进去，总排列的个数为 $3!\binom{4}{3}3!$. ∎

一些计数模式

- 接【例 1.3.6】 若将 4 个男生和 3 个女生排成一圈，使得 3 个女士互不相邻，求排列数.

解：现将 4 个男生排成一圈（排列数为 3!），然后再插入空位. 再从 4 个空位中选择出 3 个，把 3 个女生排列进去，总排列的个数为 $3!\binom{4}{3}3!$. ∎

古典概型实例

- 【例 1.3.8】 n 双相异的鞋 $2n$ 只，随机分成 n 堆，每堆 2 只，记 A 为“n 堆鞋恰分别配对”，求 $\mathrm{P}(A)$.

解：有如下两种解法。

方法一：按排列问题求解，把 $2n$ 只鞋从左到右排成一列，1、2 号位置鞋合成第 1 堆，3、4 位置鞋合成第 2 堆，余类推. 因此，

$$|\Omega| = (2n)!, \qquad |A| = 2n\cdot(2n-2)\cdots 2 = (2n)!!,$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathrm{P}(A) = \frac{1}{(2n-1)!!}.$$

方法二：按分堆问题求解. 易知，

$$|A| = n!, \qquad |\Omega| = \frac{(2n)!}{2^n},$$

于是 $\mathrm{P}(A) = 1/(2n-1)!!$. ∎

古典概型实例

▶ 【例 1.3.8】 n 双相异的鞋 $2n$ 只，随机分成 n 堆，每堆 2 只，记 A 为"n 堆鞋恰分别配对"，求 $\mathrm{P}(A)$.

解: 有如下两种解法。

方法一：按排列问题求解，把 $2n$ 只鞋从左到右排成一列，1、2 号位置鞋合成第 1 堆，3、4 位置鞋合成第 2 堆，余类推. 因此,

$$|\Omega| = (2n)!, \qquad |A| = 2n \cdot (2n-2)\cdots 2 = (2n)!!,$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathrm{P}(A) = \frac{1}{(2n-1)!!}.$$

方法二：按分堆问题求解. 易知,

$$|A| = n!, \qquad |\Omega| = \frac{(2n)!}{2^n},$$

于是 $\mathrm{P}(A) = 1/(2n-1)!!$. ∎

古典概型实例

▶ 【例 1.3.8】 n 双相异的鞋 $2n$ 只，随机分成 n 堆，每堆 2 只，记 A 为"n 堆鞋恰分别配对"，求 $\mathrm{P}(A)$.

解: 有如下两种解法。

方法一：按排列问题求解，把 $2n$ 只鞋从左到右排成一列，1、2 号位置鞋合成第 1 堆，3、4 位置鞋合成第 2 堆，余类推. 因此,

$$|\Omega| = (2n)!, \qquad |A| = 2n \cdot (2n-2) \cdots 2 = (2n)!!,$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathrm{P}(A) = \frac{1}{(2n-1)!!}.$$

方法二：按分堆问题求解. 易知,

$$|A| = n!, \qquad |\Omega| = \frac{(2n)!}{2^n},$$

于是 $\mathrm{P}(A) = 1/(2n-1)!!$. ∎

古典概型实例

- 【例 1.3.9】 盒中有 r 个红球，b 个黑球，从中随机取出 n 个 $(r+b \geq n)$. 分别对有放回和无放回情形求“恰取出 k 个红球”的概率 $(k \leq r)$.

解: 无放回情形对应超几何分布

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\binom{r}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{r+b}{n}}.$$

有放回情形对应二项分布

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\binom{n}{k} r^k b^{n-k}}{(r+b)^n} = \binom{n}{k}\left(\frac{r}{r+b}\right)^k \left(\frac{b}{r+b}\right)^{n-k}.$$

古典概型实例

- 【例 1.3.10】 将 10 本不同的书随机分给 5 个人，试求以下事件的概率：(1) 甲、乙、丙各得2本，丁得 3 本，戊得 1 本；(2) 有 3 人各得 2 本，有 1 人得 3 本，有 1 人得 1 本.

解：将书和人编号，样本点为 $(x_1, \ldots, x_{10})$，其中 x_j 表示第 j 本书分给的人编号. 题中两事件分别记为 A, B，则 $|\Omega| = 5^{10}$.

(1) 求 $|A|$：先将 10 本书分成 5 堆，从左至右每堆数分别为 $2, 2, 2, 3, 1$；再将每堆书分别给甲乙丙丁戊，故

$$|A| = \frac{10!}{(2!)^3 3! 1!}.$$

(2) 求 $|B|$：先将 10 本书按 (1) 分成 5 堆，从左至右每堆数分别为 2, 2, 2, 3, 1; 再将 5 个人分成 3 组, 每组人数分别为 3, 1, 1 (每组内的人按甲乙丙丁戊先后顺序排列好); 最后将每堆书分别发给以站好顺序的 5 个人, 故

$$|B| = \frac{10!}{(2!)^3 3! 1!} \cdot \frac{5!}{3! 1! 1!} = \frac{5! 10!}{2^3 6^2}.$$

古典概型实例

▶ 【例 1.3.10】 将 10 本不同的书随机分给 5 个人，试求以下事件的概率：(1) 甲、乙、丙各得2本，丁得 3 本，戊得 1 本；(2) 有 3 人各得 2 本，有 1 人得 3 本，有 1 人得 1 本.

解：将书和人编号，样本点为 $(x_1, \ldots, x_{10})$，其中 x_j 表示第 j 本书分给的人编号. 题中两事件分别记为 A, B，则 $|\Omega| = 5^{10}$.

(1) 求 $|A|$：先将 10 本书分成 5 堆，从左至右每堆数分别为 $2, 2, 2, 3, 1$; 再将每堆书分别给甲乙丙丁戊，故

$$|A| = \frac{10!}{(2!)^3 3! 1!}.$$

(2) 求 $|B|$：先将 10 本书按 (1) 分成 5 堆，从左至右每堆数分别为 2, 2, 2, 3, 1; 再将 5 个人分成 3 组, 每组人数分别为 3, 1, 1 (每组内的人按甲乙丙丁戊先后顺序排列好); 最后将每堆书分别发给以站好顺序的 5 个人, 故

$$|B| = \frac{10!}{(2!)^3 3! 1!} \cdot \frac{5!}{3! 1! 1!} = \frac{5! 10!}{2^3 6^2}.$$

古典概型实例

▶ 【例 1.3.10】 将 10 本不同的书随机分给 5 个人，试求以下事件的概率：(1) 甲、乙、丙各得2本，丁得 3 本，戊得 1 本；(2) 有 3 人各得 2 本，有 1 人得 3 本，有 1 人得 1 本.

解：将书和人编号，样本点为 $(x_1, \dots, x_{10})$，其中 x_j 表示第 j 本书分给的人编号. 题中两事件分别记为 A, B，则 $|\Omega| = 5^{10}$.

(1) 求 $|A|$：先将 10 本书分成 5 堆，从左至右每堆数分别为 $2, 2, 2, 3, 1$；再将每堆书分别给甲乙丙丁戊，故

$$|A| = \frac{10!}{(2!)^3 3! 1!}.$$

(2) 求 $|B|$：先将 10 本书按 (1) 分成 5 堆，从左至右每堆数分别为 2, 2, 2, 3, 1; 再将 5 个人分成 3 组, 每组人数分别为 3, 1, 1 (每组内的人按甲乙丙丁戊先后顺序排列好); 最后将每堆书分别发给以站好顺序的 5 个人, 故

$$|B| = \frac{10!}{(2!)^3 3! 1!} \cdot \frac{5!}{3! 1! 1!} = \frac{5! 10!}{2^3 6^2}.$$

古典概型实例

- 【例 1.3.11】(抽签问题) n 个签中有m 个标有“中”，无放回依次随机抽签时，第j次抽到“中”的概率是m/n.

解 设想将这n个签放入一个口袋中摇匀，则无论用什么方法抽出一个时，抽到“中”的概率是m/n. 现在在袋中依次抽取第1，第2，$\cdots$，第$j-1$个签攥在手中不拿出，将抽取的第j个拿出，该签是“中”的概率仍是m/n.

古典概型实例

- 【例 1.3.11】 (抽签问题) n 个签中有m 个标有“中”，无放回依次随机抽签时，第j次抽到“中”的概率是m/n.

解 设想将这n个签放入一个口袋中摇匀，则无论用什么方法抽出一个时，抽到“中”的概率是m/n. 现在在袋中依次抽取第1，第2，$\cdots$，第$j-1$个签攥在手中不拿出，将抽取的第j个拿出，该签是“中”的概率仍是m/n.

古典概型实例

- 【例 1.3.12】(生日问题) 全班有n个同学，计算

(a) 至少有一个同学的生日在今天的概率q_n;

(b) 至少有两个同学生日相同的概率p_n.

解 认为每个人的生日等可能地出现在365天中的任一天，则样本空间Ω的元素数为$|\Omega| = 365^n$.

(a) 用A表示没有一个人的生日在今天，则$|A| = 364^n$，于是$\mathrm{P}(A) = (364/365)^n$. 因为$\mathrm{P}(\overline{A}) + \mathrm{P}(A) = 1$，所以要计算的概率是

$$q_n = \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A) = 1 - (364/365)^n.$$

对于不同的n，可以计算出下面结果.

n	50	60	80	100	300	600	900
q_n	0.128	0.152	0.197	0.240	0.561	0.807	0.915

古典概型实例

- 【例 1.3.12】(生日问题) 全班有n个同学，计算

(a) 至少有一个同学的生日在今天的概率q_n;

(b) 至少有两个同学生日相同的概率p_n.

解 认为每个人的生日等可能地出现在365天中的任一天，则样本空间Ω的元素数为$|\Omega| = 365^n$.

(a) 用A表示没有一个人的生日在今天，则$|A| = 364^n$，于是$\mathrm{P}(A) = (364/365)^n$. 因为$\mathrm{P}(\overline{A}) + \mathrm{P}(A) = 1$，所以要计算的概率是

$$q_n = \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A) = 1 - (364/365)^n.$$

对于不同的n，可以计算出下面结果.

n	50	60	80	100	300	600	900
q_n	0.128	0.152	0.197	0.240	0.561	0.807	0.915

古典概型实例

- 【例 1.3.12】(生日问题)

(b) 用C表示n个人的生日互不相同，则作为Ω的子集，$|C| = \mathrm{A}_{365}^{n}$. 因为$\mathrm{P}(\overline{C}) + \mathrm{P}(C) = 1$，所以要求的概率

$$p_n = \mathrm{P}(\overline{C}) = 1 - \mathrm{P}(C) = 1 - \mathrm{A}_{365}^{n}/365^n.$$

对$k > n$，这里和以后规定$\mathrm{A}_n^k = 0$，$\mathrm{C}_n^k = 0$. 对于不同的n，可以计算出以下结果.

n	20	30	40	50	60	70	80
p_n	0.411	0.706	0.891	0.970	0.994	0.999	0.999 9

从中看出，全班有50个同学时，我们以97%的把握保证至少有两个人生日相同. 全班有60个同学时，我们以99.4%的把握保证至少有两个人生日相同.

§1.4 概率的公理化

设Ω是试验S 的样本空间. 因为在实际问题中往往并不需要关心Ω的所有子集, 所以只要把关心的子集称为事件就够了. 但是事件必须是 Ω 的子集, 并且满足以下条件:

- Ω和空集$\emptyset$ 是事件;
- 事件经过有限次集合运算得到的集合是事件;
- 如果A_j是事件, 则$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$是事件. 这里的运算

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

称为可列并运算, 这是因为求并的运算可以依次进行.

§1.4 概率的公理化

对于事件A, 概率$\mathrm{P}\,(A)$是表示A发生的可能性的大小的实数, 必须满足以下三个条件.

(a) 非负性: 对于任何事件A, $\mathrm{P}\,(A) \geqslant 0$;
(b) 完全性: $\mathrm{P}\,(\Omega) = 1$, $\mathrm{P}\,(\emptyset) = 0$;
(c) 可加性: 对于互不相容的事件$A_1, A_2, \cdots$, 有

$$\mathrm{P}\,\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}\,(A_j), \quad \mathrm{P}\,\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}\,(A_j).$$

条件(a), (b), (c)称为概率的公理化条件. 不满足公理化条件的 P 不是概率.

§1.4 概率的公理化

- 定理 概率 P 有如下的性质:

(1) $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A) \leqslant 1$;
(2) 单调性: 如果$B \subset A$, 则$\mathrm{P}(B) \leqslant \mathrm{P}(A)$;
(3) 次可加性: 对于事件$A_1, A_2, \cdots$, 有

$$\mathrm{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(A_j), \quad \mathrm{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_j).$$

如果用$\mathcal{F}$表示样本空间Ω的事件的全体, 用P 表示概率, 则称$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$为概率空间.

概率与频率

古典概型的两个条件往往不能满足，此时如何定义概率？常用的一种方法是把含有事件A的随机试验独立重复做 N 次(Bernoulli试验)，称

$$f_N = \frac{N\text{次试验中}A\text{发生的次数}}{N}$$

是N次独立重复试验中，事件A发生的频率(frequency). 当N越来越大时，频率会在某个值$\mathrm{P}(A)$附近波动，且波动越来越小，这个值$\mathrm{P}(A)$就定义为事件A的概率.

当$N \to \infty$, f_N会收敛到$P(A)$？

概率与频率

例1.4.1 下表是用计算机进行的投掷一枚均匀的骰子的试验的总结，其中N是试验的次数，表中的百分数是频率. 例如表中第2行第2列的17.00%，表示试验次数$N=10^2$时，点数1出现的频率是17.00%.

表1.4.1

点	$N=10^2$	$N=10^3$	$N=5000$	$N=10^4$	$N=10^5$	$N=10^6$
1	17.00%	16.50%	16.28%	16.61%	16.72%	16.69%
2	15.00%	15.50%	17.12%	16.62%	16.44%	16.62%
3	18.00%	17.10%	16.78%	16.94%	16.84%	16.69%
4	18.00%	16.00%	16.68%	16.97%	16.76%	16.64%
5	13.00%	16.60%	15.50%	15.94%	16.69%	16.64%
6	19.00%	18.30%	17.64%	16.92%	16.56%	16.71%

从表1.4.1可以看出，随着试验次数N的增加，每个点数出现的频率f_N 在概率 $1/6=16.667\%$ 附近波动

§1.5 几何概型

- 古典概型：试验结果有限，等可能性.
- 几何概型：取消“试验结果有限”，对“等可能性”作不同假设.

一个自然的引申：等长度 (等面积、等体积)，等概率.

【例 1.5.1】 甲乙两人约定于某日 6 时至 7 时到达某处，每人在该处停留 10 分钟，求他们可在该处见面的概率.

§1.5 几何概型

- 古典概型：试验结果有限, 等可能性.
- 几何概型：取消“试验结果有限”，对“等可能性”作不同假设.
  一个自然的引申: 等长度 (等面积、等体积), 等概率.

【例 1.5.1】 甲乙两人约定于某日 6 时至 7 时到达某处，每人在该处停留 10 分钟，求他们可在该处见面的概率.

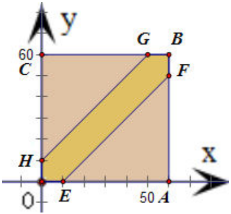
§1.5 几何概型

解: 设 x, y 表示两人到达的时刻，则

$$\Omega = \{(x, y) : 6 \le x, y \le 7\}.$$

记两人在此相遇的事件为 A, 则

$$A = \{(x, y) : |x - y| \le 1/6, (x, y) \in \Omega\}.$$



利用等面积等可能性，得 $\mathrm{P}(A) = L(A)/L(\Omega) = 11/36.$ ∎

§1.5 几何概型

【例 1.5.2】（蒲丰(Buffon)投针问题）平面上画满了间距为 a 的平行线，向该平面随机投掷一枚长为 ℓ 的针 $(\ell < a)$，求针与直线相交的概率.

解: 记“针与直线相交”的事件为 A, 针与直线的夹角为 φ, 针的中心到最近一条直线的距离为 x, 则

$$\Omega = \left\{(x,\varphi) : 0 \le x \le \frac{a}{2}, 0 \le \varphi \le \pi\right\}.$$

§1.5 几何概型

【例 1.5.2】 (蒲丰(Buffon)投针问题) 平面上画满了间距为 a 的平行线，向该平面随机投掷一枚长为 ℓ 的针 $(\ell < a)$，求针与直线相交的概率.

解: 记“针与直线相交”的事件为 A, 针与直线的夹角为 φ, 针的中心到最近一条直线的距离为 x, 则

$$\Omega = \left\{(x,\varphi) : 0 \le x \le \frac{a}{2}, 0 \le \varphi \le \pi\right\}.$$

§1.5 几何概型

【例 1.5.2】 (蒲丰(Buffon)投针问题)

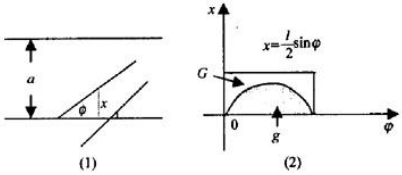


图1 蒲丰投针简图

注意到 A 发生当且仅当 $x \le \frac{\ell}{2}\sin\varphi$, 即

$$A = \left\{(x,\varphi) : x \le \frac{\ell}{2}\sin\varphi, (x,\varphi) \in \Omega\right\}.$$

利用等面积等可能，于是 $\mathrm{P}(A) = S_g/S_G = 2\ell/(\pi a)$. ∎