第六次习题课

助教：黄瑞轩 2022/11/4

PART I 习题答案

习题 3.2，3

$(1)\dfrac{\mathrm{d}x}{x-2\pi}$

$(2)\dfrac{x\ln 5}{(1+x^4)\sqrt{\arctan x^2}}5^{\sqrt{\arctan x^2}}\ \mathrm{d}x$

$(3)\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$

$(4)x\sin x\ \mathrm{d}x$

$(5)\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}$

$(6)8x\tan\left(1+2x^2\right)\sec\left(1+2x^2\right)dx$

$(7)a\cos(ax+b)e^{\sin(ax+b)}dx$

$(8)-\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

习题 3.2 5：略

习题 3.2 7

隐含的条件是：这里 x 是中间变量，所以 d^2x 不一定为 0；t 是自变量，$\mathrm{d}^2t=0$

① $y=\sin x$

$dy=\cos x\,dx$

$d^2y=-\sin x\,dx\cdot dx+\cos x\,d(dx)=-\sin x\,dx^2+\cos x\,d^2x$

② $y=\sin x\,,x=e^t$

$dx=e^tdt$

$d^2x=e^tdt\cdot dt+e^td(dt)=e^tdt^2$

$d^2y=-\sin e^t\,(e^tdt)^2+\cos e^t\,(e^tdt^2)=e^t(\cos e^t-e^t\sin e^t)dt^2$

习题 3.2 10

① $dy=e^xdx$

$d^2y=e^xdx\cdot dx+e^xd(dx)=e^xdx^2$

② $d^2y=e^xdx\cdot dx+e^xd(dx)=e^x(dx^2+d^2x)$

习题 3.3 4

$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上有二阶导数

$F(x)=(x-1)^2 f(x)$

$F'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2 f'(x)$

$F(x)$ 在 $[1,2]$ 上有二阶导数 → $F'(x)$ 在 $[1,2]$ 上有一阶导数

$F(1)=F(2)=0$
$F(x)$在$[1,2]$闭区间连续，开区间可导

$F'(1)=0$
$F'(x)$在$[1,\eta]$闭区间连续，开区间可导

$\exists \eta \in (1,2), F'(\eta)=0$ → $\exists \xi \in (1,\eta), F''(\xi)=0$

习题 3.3 6

（1）

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$

$f(x)$ 在 $[1,2], [2,3], [3,4]$ 闭区间连续，开区间可导

至少 $\exists \xi_1 \in (1,2), \xi_2 \in (2,3), \xi_4 \in (3,4), f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$

$f(x)$ 是四次多项式，则 $f'(x)$ 是三次多项式，最多有 3 个零点

$f'(x)$ 有三个零点，分别位于 $(1,2), (2,3), (3,4)$

（2）设 $P_n(x)=a_0\prod_{i=1}^{m}(x-x_i)^{k_i}$，其中 $x_1<x_2<\cdots<x_m$ 分别是 $P_n(x)=0$ 的 $k_1,k_2,\ldots,k_m$ 重根，且 $\sum_{i=1}^{m}k_i=n$（代数学基本定理）。

由罗尔定理，在相邻的两个不同的零点之间，存在 $P_n'(x)=0$ 的一个根。

这样的“间隙”有 $m-1$ 个，由此我们可以得到 $P_n'(x)=0$ 的 $m-1$ 个根。

当 x_j 是 $P_n(x)$ 的 $k_j(k_j>1)$ 重根时，其为 $P_n'(x)=0$ 的 k_j-1 重根。

这样的重根个数为 $\sum_{i=1}^{m}(k_i-1)=n-m$。

现在我们知道 $P_n'(x)$ 至少有 $n-m+m-1=n-1$ 个实零点。因为 $P_n'(x)$ 是 $n-1$ 次多项式，至多有 $n-1$ 个零点，所以 $P_n'(x)$ 的所有零点都是实零点。

反复进行上述过程，即可得证。

习题 3.3 7

（1） 令 $f(x)=x^n(n>1)$，其在 $[a,b]$ 闭区间连续，开区间可导，由 Lagrange 中值定理可知存在 $\xi\in(a,b), f'(\xi)=\frac{a^n-b^n}{a-b}$，因为 $f'(x)=nx^{n-1}$ 是 $(0,\infty)$ 上的增函数，所以 $f'(a)<f'(\xi)<f'(b)$，不等式同乘 $(a-b)$ 即可得证（为负，不等号方向改变）。

（2） 令 $f(x)=e^x$，不妨令 $t>0$，其在 $[0,t]$ 闭区间连续，开区间可导，由 Lagrange 中值定理可知存在 $\xi\in(0,t), f'(\xi)=\frac{1-e^t}{0-t}$，因为 $f'(x)=e^x>1(\text{as } x>0)$，所以 $1-e^t<-t$。$t<0$ 亦然，即证。

（3） 令 $f(x)=\ln x$，仿（1）。
（4） 令 $f(x)=\ln(x+1)$，仿（2）。
（5） 令 $f(x)=x\ln x$，其在 $[a,b]$ 闭区间连续，开区间可导，由 Lagrange 中值定理可知：

- 存在 $\xi\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right), f'(\xi)=\frac{a\ln a-\frac{a+b}{2}\ln\frac{a+b}{2}}{a-\frac{a+b}{2}}$
- 存在 $\eta\in\left(\frac{a+b}{2},b\right), f'(\eta)=\frac{\frac{a+b}{2}\ln\frac{a+b}{2}-b\ln b}{\frac{a+b}{2}-b}$

因为 $f'(x)=1+\ln x$ 是 $(0,\infty)$ 上的增函数，所以 $f'(\xi)<f'(\eta)$，即证。

习题 3.3 8：略，提供思路

在各自的定义域上，定义函数 $f(x)$，得到 $f'(x)$ 在某区间上恒为 0，说明在此区间上 $f'(x)\equiv C$，再带入一个好算的点把 C 算出来。

习题 3.3 11

不妨设 $0<x_1\le x_2$，$f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上满足 Lagrange 中值定理的条件：

- 存在 $\xi\in(0,x_1), f(x_1)-f(0)=f'(\xi)(x_1-0)\Rightarrow f(x_1)=f'(\xi)x_1$
- 存在 $\eta\in(x_2,x_1+x_2), f(x_1+x_2)-f(x_2)=f'(\eta)(x_1+x_2-x_2)\Rightarrow f(x_1+x_2)-f(x_2)=f'(\eta)x_1$

因为 $f''(x)<0$，所以 $f'(x)$ 是严格减函数，所以

$$f'(\xi)>f'(\eta)\Rightarrow f'(\xi)x_1>f'(\eta)x_1\Rightarrow f(x_1)>f(x_1+x_2)-f(x_2)$$

习题 3.3 12

用反证法，假设 $|f'(x)|<M, \text{as } x\in(a,b)$，则固定一个点 $c\in(a,b)$，对于 $\forall x\in(a,b) \text{ and } x\neq c$，由 Lagrange 中值定理，$\exists\xi\in(c,x) \text{ or } (x,c)$，使得

$$f(x)-f(c)=(x-c)f'(\xi)\Rightarrow|f(x)|=|(x-c)f'(\xi)|<|b-a|M$$

说明 $f(x)$ 有界，矛盾。

逆命题：举反例，考虑 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}, x\in(0,1)$

习题 3.3 13

只要找到不同的两点 x_1,x_2 使得 $f(x_1)f(x_2)<0$ 就可以应用连续函数的零点定理。用反证法，假设不存在这样的两点 x_1,x_2 使得 $f(x_1)f(x_2)<0$，说明 $f(x)$ 在 (a,b) 上恒正或者恒负，不妨设为恒正，所以对于 $x\in(a,b)$，有 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0, \frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0$，对这两个式子分别取 $x\to a^+, x\to b^-$ 的极限，就得到 $f'_+(a)>0, f'_-(b)<0$，矛盾。

习题 3.3 14

令 $g(x)=x^2$，使用 Cauchy 中值定理。

习题 3.3 15

令 $g(x)=\ln x$，使用 Cauchy 中值定理。

习题 3.3 16

注意：没说 $f'(x)$ 二阶可导

取 $0 < a < b$，由 Lagrange 中值定理：

- 存在 $\xi \in (0,a), f(a) - f(0) = f'(\xi)(a-0) \Rightarrow f(a) = af'(\xi)$
- 存在 $\eta \in (a,b), f(b) - f(a) = f'(\eta)(b-a) \Rightarrow f(b) - f(a) = (b-a)f'(\eta)$

因为 $f'(x)$ 严格递增，所以 $f'(\xi) < f'(\eta)$，则

$$\frac{f(b)}{b} = \frac{(b-a)f'(\eta) + f(a)}{b} > \frac{(b-a)f'(\xi) + f(a)}{b} = \frac{f(a)}{a}$$

所以 $\frac{f(x)}{x}$ 严格递增。

习题 3.3 17

- $f(0) = -a_n < 0$
- 存在 $x_0 \in (0,\infty)$ 使得 $x_0^n > a_n$，所以 $f(x_0) > 0$

由连续函数零点定理得原方程有一个正根。

- $f(x), n \geq 1$ 是一个严格增函数（考虑到 $a_i \geq 0$）

所以原方程仅有一个正根。

习题 3.3 18

由条件③知，$f'(x)$ 是 $[a,\infty)$ 的不增函数

再由条件②知，在 $[a,\infty)$ 上 $f'(x) < 0$

所以在 $[a,\infty)$ 上 $f(x)$ 严格递减

假设 $f'(a) = -\delta, \delta > 0$，则 $f'(x) \leq -\delta$

对 $x > a$，由 Lagrange 中值定理：$f(x) = (x-a)f'(\xi) + f(a) \leq -\delta(x-a) + f(a)$

因为 $\delta, f(a)$ 是给定的数，所以只要 $x > a + \frac{f(a)}{\delta}$ 就有 $f(x) < 0$

由条件①和连续函数零点定理，得证。

PART II　知识复习

一、函数的微分

- 微分的定义（书 P129）

设函数$y=f(x)$在某区间$\mathcal{I}$内有定义。对于$\mathcal{I}$内一点x_0，当x_0变动到附近的$x_0+\Delta x$（也在此区间内）时，如果函数的**增量**$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$可表示为 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$（其中$A$是不依赖于$\Delta x$的常数），而$o(\Delta x)$是比$\Delta x$高阶的无穷小，那么称函数$f(x)$在点$x_0$是可微的，且$A\Delta x$称作函数在点$x_0$相应于自变量增量$\Delta x$的微分，记作$\mathrm{d}y$，即$\mathrm{d}y=A\Delta x$，$\mathrm{d}y$是$\Delta y$的**线性主部**。[1]:141

通常把自变量x的增量Δx称为自变量的微分，记作$\mathrm{d}x$，即$\mathrm{d}x=\Delta x$。

- 理解：函数的微分是指对函数的局部变化的一种**线性描述**。微分可以近似地描述当函数自变量的取值作足够小的改变时，函数的值是怎样改变的。
- 可微性（可导性和可微性对于一元函数是等价的）
- $dy=f'(x)dx$，基本初等函数微分表、微分四则运算
- 一阶微分形式不变性

一阶微分形式不变性是指：无论 u 是自变量还是中间变量，函数 z=f(u) 的微分形式是一样的。此性质的好处是：一方面是可以不用区分变量直接利用一元函数的微分性质计算；另一方面是不用区分变量是自变量、因变量还是中间变量，以及它们的结构问题就可以利用微分性质直接计算。

- 高阶微分不具有形式不变性
- 对符号 $dx^2,(dx)^2,d(x^2),d(dx),d^2x,\frac{dy}{dx},\frac{d}{dx},\frac{d^2}{dx^2},\frac{d^2y}{dx^2}$ 的区分和理解

二、微分中值定理

- 费马定理：极值点 ＋ 可导 → 驻点：导数为 0（理解“极值点”的定义）
- 从几何意义理解罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理