

黄瑞轩

黄瑞轩

1.

E-mail:

第一部分 电力与电场

第二部分 静电场中的物质与电场能量

第三部分 电流与电路

1 习题 3.1

(1)

由电流的微观形式

$$I = neSu \quad (1)$$

取一段线元 Δl ，这段线元的体积为

$$V = S\Delta l \quad (2)$$

这段线元的摩尔数为

$$\nu = \frac{m}{M} = \frac{\rho V}{M} = 1 \times 10^5 \Delta V (\text{mol}) \quad (3)$$

这段线元单位体积所蕴含的自由电子数为

$$n = \frac{3\nu N_A}{\Delta V} = 1.81 \times 10^{29} \quad (4)$$

结合题给数据，得到

$$u = 1.72 \times 10^{-7} \text{ m/s} \quad (5)$$

(2)

由热运动的知识，方均根速率

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3KT}{m}} = 1.17 \times 10^5 \text{ m/s} \quad (6)$$

(3)

由于

$$\sigma = n \frac{e^2}{2m} \tau = \frac{1}{\rho} \quad (7)$$

得

$$\tau = 1.4 \times 10^{-14} \text{ s} \quad (8)$$

(4)

平均自由程

$$\lambda = \sqrt{v^2} \tau = 1.6 \times 10^{-9} \text{ m} \quad (9)$$

(5)

由 (1)，电流密度

$$j = neu \quad (10)$$

又由欧姆定律的微分形式

$$j = \frac{E}{\rho_{\text{电}}} \quad (11)$$

联立得电场强度

$$E = 1.40 \times 10^{-4} \text{ V/m} \quad (12)$$

2 习题 3.4

根据 Drude 模型, 电阻率

$$\rho = \frac{2m}{ne^2\tau} = 5.56 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} \quad (13)$$

3 习题 3.7

设通过第 i 只伏特表的电流为 I_{Vi} , 设通过第 i 只安培表的电流为 I_{Ai} , $1 \leq i \leq 50$, 设伏特表的电阻为 R , 则根据已知条件得

$$I_{V1} = I_{A1} - I_{A2} \quad (14)$$

$$U_1 = I_{V1}R \quad (15)$$

并且可得递推关系

$$I_{A3} = I_{A2} - I_{V2} \quad (16)$$

$$I_{A4} = I_{A2} - I_{V2} - I_{V3} \quad (17)$$

一直到

$$I_{A50} = I_{A2} - I_{V2} - I_{V3} - \dots - I_{V49} \quad (18)$$

由于

$$I_{A50} = I_{V50} \quad (19)$$

因此所求

$$\sum_{i=1}^{50} I_{Vi}R = U_1 + \sum_{i=2}^{49} I_{Vi}R + \left(I_{A2} - \sum_{i=2}^{49} I_{Vi} \right) R = 304V \quad (20)$$

4 习题 3.11

设电动势 \mathcal{E}_i 单独存在时, r_j 所在的支路通过的电流为 I_{ij} , 于是有

$$I_{11} = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)^{-1}} = \frac{13}{15} \text{A} \quad (21)$$

$$I_{12} = -\frac{I_{11} \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)^{-1}}{r_2} = -\frac{8}{15} \text{A} \quad (22)$$

$$I_{13} = -\frac{I_{11} \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)^{-1}}{r_3} = -\frac{1}{3} \text{A} \quad (23)$$

$$I_{22} = \frac{\mathcal{E}_2}{r_2 + \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right)^{-1}} = \frac{13}{14} \text{A} \quad (24)$$

$$I_{21} = -\frac{I_{22} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right)^{-1}}{r_1} = -\frac{4}{7} \text{A} \quad (25)$$

$$I_{23} = -\frac{I_{22} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right)^{-1}}{r_3} = -\frac{5}{14} \text{A} \quad (26)$$

$$I_{33} = \frac{\mathcal{E}_3}{r_3 + \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^{-1}} = \frac{6}{7} \text{A} \quad (27)$$

$$I_{32} = -\frac{I_{33} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^{-1}}{r_2} = -\frac{3}{7} \text{A} \quad (28)$$

$$I_{31} = -\frac{I_{33} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^{-1}}{r_1} = -\frac{3}{7} \text{A} \quad (29)$$

根据电流叠加原理，三条路上的电流为

$$I_j = \sum_{i=1}^3 I_{ij} \quad (30)$$

解得

$$I_1 = -0.133\text{A}, \quad I_2 = -0.033\text{A}, \quad I_3 = 0.167\text{A} \quad (31)$$

端电压

$$U_i = \mathcal{E}_i - I_i r_i \quad (32)$$

解得

$$U_1 = 1.267\text{V}, \quad U_2 = 1.467\text{V}, \quad U_3 = 1.533\text{V} \quad (33)$$

输出功率

$$P_i = I_i U_i \quad (34)$$

解得

$$P_1 = -0.17\text{W}, \quad P_2 = -0.05\text{W}, \quad P_3 = 0.26\text{W} \quad (35)$$

5 习题 3.14

下面考虑 Δ 型电路。设电流从节点处流入，从节点 i 处流入的电流记为 I_i ，节点 ij 之间的电压记为 U_{ij} ，则

$$I_1 = \frac{U_{31}}{R_{31}} - \frac{U_{12}}{R_{12}} \quad (36)$$

$$I_2 = \frac{U_{12}}{R_{12}} - \frac{U_{23}}{R_{23}} \quad (37)$$

$$I_3 = \frac{U_{23}}{R_{23}} - \frac{U_{31}}{R_{31}} \quad (38)$$

注意：由于这里规定三个点电势依次降低，因此 U_{ij} 是有正负的，这是上面三式子中符号的来源。

下面考虑 Y 型电路。

$$U_{12} = I_1 R_1 - I_2 R_2 \quad (39)$$

$$U_{23} = I_2 R_2 - I_3 R_3 \quad (40)$$

$$U_{31} = I_3 R_3 - I_1 R_1 \quad (41)$$

联立上面的式子，解得

$$R_1 = \frac{R_{31} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (42)$$

$$R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (43)$$

$$R_3 = \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (44)$$

反解

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} \quad (45)$$

$$R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1} \quad (46)$$

$$R_{31} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2} \quad (47)$$

6 习题 3.17

(1)

观察可知，中间那个方格的四个顶点均为无交叉电流通过的点，因此可先将网格拆分成两个“ $r-L-r$ ”并联的形式，这里 L 是由三个方格叠成的 L 型结构，这个结构的通电点为 L 的左上、右下两个节点。进一步地， L 结构中间的节点为无交叉电流通过的点，因此又可将该结构分为 $4r$ 并 $r-\square-r$ 结构，这里 \square 的通电节点为两个对角线。综上可以得到等效电阻为

$$R = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{4r} + \frac{1}{2r + \frac{1}{2} \cdot 2r} \right)^{-1} + 2r \right] = \frac{13}{7} r \quad (48)$$

(2)

观察可知，与通电点直接相连的三个节点均为等势点，因此直接与节点相连的三个电阻并联，中间六个电阻并联，这三个结构之间为串联关系，则等效电阻

$$R = \frac{1}{3} r + \frac{1}{6} r + \frac{1}{3} r = \frac{5}{6} r \quad (49)$$

(3)

观察可知，这个球最上面的顶点与最下面的顶点是等势点，将这两点相连，因此从这两个顶点向四周出发的四个电阻两两之间可看作并联关系，即电阻 $r \rightarrow \frac{1}{2} r$ ，于是这个电阻可等效成 \boxtimes 的结构，最外边的四边电阻为 r ，中间四个电阻为 $0.5r$ ，因此等效电阻

$$R = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{0.5r \times 2} + \frac{1}{2r + \frac{1}{2} r} \right)^{-1} = \frac{5}{12} r \quad (50)$$

7 习题 3.23

设三个支路的电流从上到下分别为 I_1, I_2, I_3 (方向蕴含在下述方程中), 则根据基尔霍夫第一方程, 有

$$I_1 + I_2 = I_3 \quad (51)$$

根据基尔霍夫第二方程, 两个回路分别列出

$$\mathcal{E}_3 - I_1 R_3 + I_2 R_2 - I_1 R_4 = 0 \quad (52)$$

$$\mathcal{E}_2 - I_3 R_1 - \mathcal{E}_1 - I_2 R_2 = 0 \quad (53)$$

解得

$$I_1 = \frac{2}{7} \text{A} \quad (54)$$

$$I_2 = -\frac{8}{7} \text{A} \quad (55)$$

即 R_4 上的电压

$$U_4 = I_1 R_4 = \frac{12}{7} \text{V} \quad (56)$$

通过 R_2 的电流

$$|I_2| = \frac{8}{7} \text{A} \quad (57)$$

8 习题 3.28

假设电流计中无电流通过, 则两端等势, 则意味着两个电容器两端的电压是相等的。设平均充电电流分别为 I_1, I_2 , 则两条路一定同时完成充电和放电, 若不然, 假设 C_1 先充满电, C_2 未充满电, 则 C_1 也应当给 C_2 充电, 矛盾, 故得证。因此

$$Q_{1,2} = I_{1,2} t \quad (58)$$

又因为电容器两端电压相等, 设为 U , 因此

$$C_{1,2} = \frac{Q_{1,2}}{U} = \frac{I_{1,2} t}{U} \quad (59)$$

又因为

$$I_{1,2} = \frac{U'}{R_{1,2}} \quad (60)$$

则

$$C_{1,2} = \frac{U' t}{U R_{1,2}} \quad (61)$$

即可得到

$$C_1 R_1 = C_2 R_2 \quad (62)$$

证毕。

9 习题 3.29

设某一时刻电流为 $I = \frac{dQ}{dt}$, 于是整个回路有

$$\frac{dQ}{dt}R + \frac{Q}{C} = \mathcal{E} \quad (63)$$

这个微分方程的解是

$$Q = C\mathcal{E}(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (64)$$

充电电流

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \quad (65)$$

当 $t = 1\text{s}$ 时

(1) 电荷的增加速率

$$\left.\frac{dQ}{dt}\right|_{t=1\text{s}} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{1}{RC}} = 9.55 \times 10^{-7} \text{A} \quad (66)$$

(2) 储存能量 $W_e = \frac{Q^2}{2C}$, 因此其变化率

$$\frac{dW_e}{dt} = \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} = \frac{\mathcal{E}^2}{R}(1 - e^{-\frac{t}{RC}})e^{-\frac{t}{RC}} \quad (67)$$

$$\left.\frac{dW_e}{dt}\right|_{t=1\text{s}} = 1.08 \times 10^{-6} \text{W} \quad (68)$$

(3) 电阻上的热功率 $P = I^2R$, 因此

$$P|_{t=1\text{s}} = 2.74 \times 10^{-6} \text{W} \quad (69)$$

(4) 电源的输出功率 $P_{out} = P + \frac{dW_e}{dt}$, 因此

$$P_{out}|_{t=1\text{s}} = 3.82 \times 10^{-6} \text{W} \quad (70)$$