1、**矢量标量化**：$\boldsymbol{A}=A_x(t)\mathbf{i}+A_y(t)\mathbf{j}+A_z(t)\mathbf{k}$ 从而$\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}=\frac{d}{dt}A_x(t)\cdot\boldsymbol{i}+\frac{d}{dt}A_y(t)\cdot\boldsymbol{j}+\frac{d}{dt}A_z(t)\cdot\boldsymbol{k}$

2、**直角坐标系中消去方位角**：$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

3、**自然坐标系、直角坐标系中 x、s、v、a 相互计算公式**

$x(t)=x_0+\int_0^t v(t')\mathrm{d}t'$ $s(t)=s_0+\int_0^t|v(t')|\mathrm{d}t'$ $v(t)=v_0+\int_0^t a(t')\mathrm{d}t'$

$v(t)=\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}$ $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2$

$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0+\int_{t_0}^t\boldsymbol{v}(t')\mathrm{d}t'$ $\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{v}_0+\int_0^t\boldsymbol{a}(t')\mathrm{d}t'$

自然坐标系下：$\boldsymbol{v}(t)=v(t)\boldsymbol{v}(t)$，即$\boldsymbol{v}(t)=v(t)\boldsymbol{e_t}$

加速度$\boldsymbol{a}(t)=\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}(t)+\frac{v^2(t)}{R(t)}\boldsymbol{n}(t)$ $\boldsymbol{a_t}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}$ $\boldsymbol{a_n}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}$

$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{v}|=a_n v=\frac{v^3(t)}{R(t)}$ $R(t)=\frac{v^3(t)}{|\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{v}(t)|}$ 直线运动计算公式可用

4、【方法】微分研究局部性质，再积分研究整体性质

5、**角速度**$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$，方向遵守右手螺旋定则，相关公式：

$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ $\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\xrightarrow{\text{乘积法则}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$

6、**平面极坐标系** $\frac{d\boldsymbol{r}(\theta)}{d\theta}=\boldsymbol{\theta}$ $\frac{d\boldsymbol{\theta}(\theta)}{d\theta}=-\boldsymbol{r}$（注意自变量是$\theta$）

$\boldsymbol{v}(t)=\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=r\boldsymbol{r}+r\theta\boldsymbol{\theta}$ $\boldsymbol{a}(t)=\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}=(r-r\theta^2)\boldsymbol{r}+(2r\theta+r\theta)\boldsymbol{\theta}$

7、**牛顿运动定律**

$$\boldsymbol{F}=\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}=m\boldsymbol{a}\qquad \boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}\begin{cases}F_x=mx\quad F_y=my\quad F_z=mz\\ F_t=m\frac{dv}{dt}\quad F_n=m\frac{v^2}{R}\\ F_r=m\left(r-r\theta^2\right)\quad F_\theta=m\left(2r\theta+r\theta\right)\end{cases}$$

对于接触力：$\boldsymbol{F_{B\to A}}=-\boldsymbol{F_{A\to B}}$，非接触力则不一定正确。

8、【方法】约束问题还要列出约束方程，如滑轮绳长不变。

9、【方法】绳子有质量、有摩擦力时，绳子的拉力并不处处相等。

10、 伽利略变换$\begin{cases}x'=x-ut\\ y'=y\\ z'=z\\ t'=t\end{cases}$ $\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}$ 在任何惯性系中，物理学定律具有相同的形式。

11、 **非惯性系** 分析非惯性系中的运动时，只要加上惯性力分析就可以了

① $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{f_i}=m\boldsymbol{a}'$($\boldsymbol{a}$是地面系下看到的加速度，$\boldsymbol{a}'$是非惯性系下看到的加速度)

② 真实力与惯性力的合力称为表现力，记为$\boldsymbol{F}_{\mathrm{eff}}$

③ $\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{b}'}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}'}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b}'$（$\boldsymbol{b}'$是 K'系[非惯性参考系]中的任意随时间变化的矢量）

④ $\boldsymbol{f}_{\mathrm{c}}=-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')$ 惯性离心力，指向离开转轴的方向。

⑤ 离心力与角速度有关，与角速度是否随时间变化无关。

⑥ $\boldsymbol{f}_{\mathrm{cor}}=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'_{\text{相}}$ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{cor}}=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'_{\text{相}}$ 科里奥利力，相对于 K'系做匀速运动的点

⑦ 一般情况$\boldsymbol{f}_{\mathrm{i}}=-m\boldsymbol{a}_0-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'_{\text{相}}-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')-m\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{D}t}\times\boldsymbol{r}'$

12、 **动量守恒** $\boldsymbol{P}=\Sigma\boldsymbol{P}_{\mathrm{i}}=\mathrm{const}$ 分量式$\begin{cases}\text{if } F_x=0,\text{ then } P_x=\text{const}\\ \text{if } F_y=0,\text{ then } P_y=\text{const}\\ \text{if } F_z=0,\text{ then } P_z=\text{const}\end{cases}$

[动量定理] (微分)$\boldsymbol{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ 元冲量 $\mathrm{d}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$ (积分) $\boldsymbol{J}=\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t=\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_0$

[质点组动量定理] (微分) $\boldsymbol{F}_{\mathrm{ex}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}$ (积分)$\int_{t_0}^t\boldsymbol{F}_{\mathrm{ex}}\mathrm{d}t=\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0$ ($\boldsymbol{F}_{\mathrm{ex}}$为体系受外力矢量和)

• 在非惯性系中用动量定理要考虑惯性力的冲量

13、 **质心运动定理**（适用范围和牛顿第二定律相同）

$\boldsymbol{F}_{\mathrm{ex}}=m_C\boldsymbol{a}_C$ 质心$\begin{cases}m_C=\sum_i m_i\\ \boldsymbol{r}_C=\frac{\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i}\end{cases}$ $\begin{cases}m_C=\int\mathrm{d}m=\int\rho\mathrm{d}V\\ \boldsymbol{r}_C=\frac{\int\boldsymbol{r}\mathrm{d}m}{\int\mathrm{d}m}=\frac{\int\boldsymbol{r}\rho\mathrm{d}V}{\int\rho\mathrm{d}V}\end{cases}$

14、 **质心坐标系**（原点取在质心上，没有转动的平动坐标系）

① 质心坐标系可以是惯性系也可以是非惯性系

② 变质量问题：体系动量定理：$(m+\Delta m)(\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v})-(m\boldsymbol{v}+\Delta m\boldsymbol{u})=\boldsymbol{F}\Delta t$，

化为 $m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{F}$

15、 **动能定理**（惯性系下，非惯性系考虑惯性力）

质点动能定理 $E_k=mv^2/2$ $\mathrm{d}E_k=F\mathrm{d}s$ $P=\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$

功$A=\int_{r_0}^r\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{s_0}^s F\cos\theta\cdot\mathrm{d}s$ 功率 $P=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$

质点系动能定理 $E_k(t)-E_k(t_0)=A_{\text{外}}+A_{\text{内}}$

• 内力总动量为零，但是内力总功一般不为零 **//黄瑞轩**

16、**势能**

① 有心力做功只和初始位置有关，与路径无关：$\oint\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0$

② 保守力：$\begin{cases}\text{一维运动，位置}x\text{的单值函数}f(x)=-k(x-x_0)\\ \text{大小和方向都与位置无关的力，如重力}\\ \text{有心力}\end{cases}$

③ 保守力场定义标量函数 $V(\boldsymbol{r})$，称为势能（势函数，位能），使得从 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}\to\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}$ 保守力做功为 $A(\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}\to\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}})=V(\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}})-V(\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}})$。保守力做功使其势能减少。

$$\begin{cases}V(\boldsymbol{r})=\int_{r_0}^{r}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+V_0\\ \boldsymbol{F}=-\nabla V(\boldsymbol{r})=-\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial V}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial V}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right)\end{cases}$$

17、**机械能守恒定律**

① $E(t)-E(t_0)=A_{ex}+A_{nbin}$ 外力的功和非保守内力的功之和等于 ΔE

② 在非惯性系用动能原理要引入惯性力，也可以引入保守惯性力和非保守惯性力，如平移惯性力（保守性的）；对旋转参考系可以引入惯性离心力的离心势能。

18、**质心系**

① 总动能等于内外动能之和 $E_k=m_C v_C^2/2+E_{kC}$
（质点系的动量等于质心的动量，但质点系的动能一般不等于质心的动能）

② 只要我们选择质心系，即使它不是惯性系，也不需要考虑惯性力所做的功。

③ 两体问题

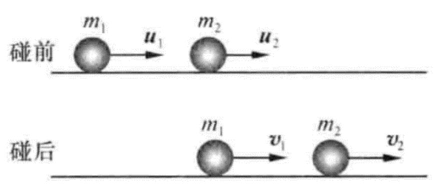
1）$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$约化质量，$u=v_1-v_2$相对速度

2）在两体问题中我们只要利用约化质量，就可以把参考系取在任一物体上，无需引入惯性力，像是惯性系一样考虑问题。

3）质心系中的机械能：$E_C=\frac{1}{2}\mu u^2+V(r)$（系统的势能）

19、**碰撞**

① 正碰$\begin{cases}v_1=\frac{m_1-em_2}{m_1+m_2}u_1+\frac{(1+e)m_2}{m_1+m_2}u_2\\ v_2=\frac{(1+e)m_1}{m_1+m_2}u_1+\frac{m_2-em_1}{m_1+m_2}u_2\end{cases}$



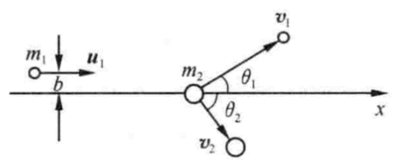
碰撞过程中动量守恒，质心动能不变，只需计算在质心系中动能的改变

$E_{kC}=\frac{1}{2}\mu u^2$ $E_{kC}'=\frac{1}{2}\mu e^2u^2$ $\Delta E_k=E_{kC}'-E_{kC}=\frac{1}{2}\mu(e^2-1)u^2$

② 斜碰【正交分解】

• b 称为碰撞参量，碰撞结果与它有关；

• 一般需要实验测定 v_1、v_2、θ_1、θ_2 中的一个（弹性）或两个（非弹性），才能求出其他两个。



③ 质心系中的碰撞

1）正碰 $v_{C1}=-eu_{C1}$ $v_{C2}=-eu_{C2}$ $v_C=\frac{m_1u_1+m_2u_2}{m_1+m_2}=const$

2）斜碰 与②差别不大。

3）在质心系中，两球完全弹性碰撞后他们的速度都只改变方向，不改变大小。可以用 $\theta_1+\theta_2$ 表示运动方向改变的程度，这与 b 有关。

20、**角动量守恒**

① 掠面速度$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ 角动量$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ 体系角动量 $\boldsymbol{L}=\Sigma_i\boldsymbol{l}$

② 两个质点孤立体系的角动量守恒；角动量是相对给定的参考点定义的，且参考点在所选的参考系中必须是固定点；把参考点取为坐标原点时角动量的定义才如上所述，否则 $\boldsymbol{r}$ 要修正。角动量单位是 $\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$。

③ 力 $\boldsymbol{F}$ 对原点的力矩$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$，则$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}$，积分$\int_0^t\boldsymbol{M}\mathrm{d}t=\boldsymbol{l}-\boldsymbol{l}_0$（冲量矩）

④ 当外力对给定点的总外力矩之和为 **0** 时，体系的角动量守恒。（外力的矢量和与外力矩的矢量和是独立的，一个为 **0** 与另一个为 **0** 无关。）

⑤ 质心系下角动量定理

• $\boldsymbol{M}_C=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}$ $\boldsymbol{L}_C$是质心系中体系对质心的角动量。

• 无论质心系是惯性系还是非惯性系，都适用。

• 体系在质心系中相对质心的角动量与体系在惯性系中相对原点的角动量并不相同。有 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_C+\boldsymbol{L}_{CM}$，即惯性系中体系相对于原点的角动量等于质心的角动量与体系相对于质心的角动量之和。

21、**万有引力**

① 开普勒三定律：轨道定律，面积定律，周期定律。

② $F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$ $g=\frac{GM}{R^2}$

③ $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots+\boldsymbol{F}_n=\sum_i G\frac{mm_i}{r_i^2}\frac{\boldsymbol{r}_i}{r_i}$（两质点之间的引力与其他质点无关）

④ 一个密度均匀的球壳对球壳外一质点的引力等效于它的所有质量都集中于它的中心时的引力。

⑤ 一个密度均匀的球壳对球壳内任意质点的引力为 0.

⑥ 质点在有心力场($\boldsymbol{F}=f(r)\boldsymbol{r}$)中的运动

基本方程：$m\boldsymbol{r}=f(r)\boldsymbol{r}$ 角动量：$\boldsymbol{l}=mr^2\theta(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\theta})$

势能 $U(r)$：$\int_{r_0}^r f(r)\mathrm{d}r=-\left[U(r)-U(r_0)\right]$

机械能 E：$E=\frac{1}{2}mr^2+\frac{1}{2}mr^2\theta^2+U(r)$（$\frac{1}{2}mr^2\theta^2$是等效的斥力势能）

有效势能 $U_{\text{eff}}(r)=\frac{1}{2}mr^2\theta^2+U(r)$，$\frac{1}{2}mr^2\theta^2=\frac{1}{2}\frac{mh^2}{r^2}$，$h$ 是掠面速度两倍。

求拱点处的 r 值：$\dot r=0$，于是有$r^2+G\frac{Mm}{E}r-\frac{mh^2}{2E}=0$.

求轨道：$\frac{mh^2}{2r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{mh^2}{2r^2}+U(r)=E$ 得$\frac{h\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{\frac{2[E-U(r)]}{m}-\frac{h^2}{r^2}}}=\mathrm{d}\theta$

轨道的微分公式：$\frac{h^2}{r^2}\left(\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}+\frac{1}{r}\right)=-\frac{f}{m}$。知道 $f(r)$，就可求出轨道方程。

万有引力轨道公式$r=\frac{r_0}{1+\varepsilon\cos\theta}$，$r_0$是初条件确定的曲率半径。$\varepsilon$是离心率。

22、刚体力学

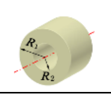
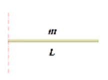
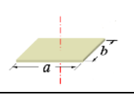
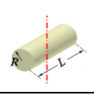
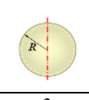
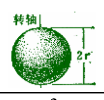
质心$\begin{cases} m_C=\int\mathrm{d}m=\int\rho\mathrm{d}V \\ r_C=\frac{\int r\mathrm{d}m}{\int\mathrm{d}m}=\frac{\int r\rho\mathrm{d}V}{\int\rho\mathrm{d}V}\end{cases}$

① 刚体内任意两质点间的距离保持不变，即$(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_k)\cdot(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_k)=$const，因此内力做功为 0.

② 运动方程：平动$\boldsymbol{F}_{\text{ex}}=m\boldsymbol{a}_C$ 定轴转动$\boldsymbol{M}_{\text{ex},C}=J_C\boldsymbol{\beta}_C$

③ 角速度的绝对性：不管选择刚体上哪一点，角速度的方向及大小都不变。

④ 角动量$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}=m\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ 转动定律 $\boldsymbol{M}=J\boldsymbol{\beta}$

匀质厚圆筒	细直棒	匀质矩形薄板	匀质圆柱体	匀质薄球壳	实心球
					
$J=\frac{1}{2}m(R_1^2+R_2^2)$	$J=\frac{1}{3}mL^2$	$J=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$	$J=\frac{1}{4}mR^2+\frac{1}{12}mL^2$	$J=\frac{2}{3}mR^2$	$J=\frac{2}{5}mr^2$

⑤ 设任意物体绕某固定轴 O 的转动惯量为 J，绕通过质心而平行于轴 O 的转动惯量为 J_C，则有 $J=J_C+md^2$。

⑥ x,y 轴在平面内，z 轴与平面垂直，则有 $J_z=J_x+J_y$。广义上来讲，在 O-xyz 坐标系中，$J_x+J_y+J_z=2\sum_i^{\infty}m_ir_i^2$。

⑦ 刚体平衡条件：$\sum_i\boldsymbol{F}_i=0$，$\sum_i\boldsymbol{M}_i=0$。

⑧ 纯滚动判据：$v_C=R\omega$，$a_C=R\beta$。a_C应理解为切向加速度。

1）静摩擦力做功为 0.

2）若设滚动摩擦系数为 k，则 $f_g=\frac{k}{r}mg$，$M_g=kmg$。

⑨ 瞬心 O'在与 v_C垂直的方向上距离 C 点v_C/ω处。

⑩ 刚体的动能定理：1）$E_k=\frac{1}{2}m_Cv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2$

2）$E_k(t)-E_k(t_0)=A_{ex}=\int_{r_0}^{r}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{\varphi_0}^{\varphi}M_C\mathrm{d}\varphi$（一定取质心作基点）

23、振动与波

① 受力$F=-k(x-x_0)$ 势能$V(x)=\frac{1}{2}kx^2$ 运动范围$\left(-\sqrt{\frac{2E}{k}},\sqrt{\frac{2E}{k}}\right)$

② 简谐振动

1）方程$m\ddot x=-kx$，解为$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$

A 振幅，$A^2\propto E$；固有频率$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$；频率$\nu=\frac{1}{T}$；相位$\varphi=\omega t+\varphi_0$。

2）若设$s=Ae^{i(\omega t+\varphi_0)}=\mathcal{A}e^{i\omega t}$，$\mathcal{A}=e^{i\varphi_0}$，则$v=\frac{ds}{dt}=i\omega s$，$a=(i\omega)^2s$。

3）能量 $x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$ $v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$ $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

$E_k=\frac{1}{2}mv^2$ $V=\frac{1}{2}kx^2$ $E=E_k+V=\frac{1}{2}kA^2$ $\overline{E_k}=\overline{V}=\frac{1}{2}E$

③ 方向相同振动的合成

1）方向相同、频率相同

$$\begin{cases}x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)\\ x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)\end{cases}\Rightarrow x=x_1+x_2=A\cos(\omega t+\varphi)$$

其中$\begin{cases}A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}\\ \tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}\end{cases}$

2）方向相同、频率不同

$$\begin{cases}x_1=A_1\cos(\omega_1t+\varphi_1)\\ x_2=A_2\cos(\omega_2t+\varphi_2)\end{cases}\Rightarrow x=2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\right)$$

3）方向垂直、频率相同

$$\begin{cases}x=A_x\cos(\omega t+\varphi_x)\\ y=A_y\cos(\omega t+\varphi_y)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{A_x}+\frac{y}{A_y}=A_+\cos(\omega t+\varphi)\\ \frac{x}{A_x}-\frac{y}{A_y}=A_-\sin(\omega t+\varphi)\\ \frac{\left(\frac{x}{A_x}+\frac{y}{A_y}\right)^2}{A_+^2}+\frac{\left(\frac{x}{A_x}-\frac{y}{A_y}\right)^2}{A_-^2}=1\end{cases}$$

其中$A_+=2\cos\frac{\varphi_y-\varphi_x}{2}$，$A_-=2\cos\frac{\varphi_y-\varphi_x}{2}$，$\varphi=\frac{\varphi_y-\varphi_x}{2}$。

4）方向垂直、频率不同（李萨如图形闭合的条件是频率成整数比）

④ 阻尼振动（粘滞阻力 $\boldsymbol{f}=-h\boldsymbol{v}$）

1）方程$m\ddot x=-kx-h\dot x$，令$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$，$2\beta=\frac{h}{m}$，则$\ddot x+2\beta\dot x+\omega_0^2x=0$。

2）解：$x=A_1e^{r_1t}+A_2e^{r_2t}$，$r_1=-\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$，$r_2=-\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$.

3）欠阻尼：$x=A_0e^{-\beta t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t+\varphi_0\right)$，对应$\beta<\omega_0$。此时机械能减少的速率$\frac{dE}{dt}=-hv^2=-hv\cdot v$为摩擦力的功率。品质因数$Q\approx\frac{\omega_0}{2\beta}$。

4）临界阻尼与过阻尼，通解变为$x=(A_1+A_2t)e^{-\beta t}$，没有振动。

⑤ 受迫振动（强迫力 F_0）

1）$m\ddot x=-kx-h\dot x+F_0$，令$x=X+\frac{F_0}{k}$，变为$m\ddot X=-kX-h\dot X$。

2）解：$x=A_0e^{-\beta t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t+\varphi_0\right)+B\cos(\omega t-\varphi)$

⑥ 波：波方程 $y=A\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi_0)$，波长 $\lambda=vT$，v 为波速，$\frac{2\pi}{\lambda}$ 为波数。这是右行波；左行波 $y=A\cos(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi_0)$；动力学方程 $\frac{\partial^2y}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2y}{\partial x^2}$.

⑦ 驻波：$\xi_1=A\cos(\omega t-kx+\varphi_1),\xi_2=A\cos(\omega t+kx+\varphi_2)$ 合成后

$$\xi=\xi_1+\xi_2=2A\cos(kx+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2})\cos(\omega t+\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2})$$

$x=\frac{n\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2\pi}\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}$ 为波腹，振幅最大；$x=\frac{(2n+1)\lambda}{4}-\frac{\lambda}{2\pi}\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}$ 为波节，振幅为 0.

⑧ 多普勒效应$\frac{v'}{v}=\frac{V+v_D}{V-v_S}$，$v'$观察者接收到的频率，$v$ 波源频率，V 是真空中的波速，v_D 是观察者的绝对速度（垂直球面波，为正表示接近波源），v_S 是波源的绝对速度（垂直球面波，为正表示接近观察者）。

⑨ 马赫锥，$\sin\alpha=\frac{V}{v_S}$，α 是半顶角，V 是波速，v_S 是波源移动速度。

24、相对论

① 洛伦兹变换$\begin{cases}x'=\gamma(x-vt)\\ y'=y,z'=z\\ t'=\gamma(t-\frac{v}{c^2}x)\end{cases}$，（设$t=t'=0$时 O 和 O'重合，事件 P 在 S 系下的坐标是(x,y,z,t)，在 S'系下的坐标是(x',y',z',t')，其中

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

② 只有在 S'系同时同地发生的两件事，在 S 系下观察才是同时的。

③ 长度收缩：$l=l_0\sqrt{1-\beta^2},\beta=\frac{v}{c}$.

④ 时间变慢：$\Delta t=\frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$.（运动的钟走得慢）