

代数结构第7次作业反馈

Edited by 李昱祁

EX1

1. 对称性
2. 对称性
3. 不自反性, 传递性
4. 自反性, 反对称性, 传递性
5. 自反性, 对称性, 反对称性, 传递性

- 前两问部分同学没有考虑到 $S = \phi$ 的情况
- 反对称性、不自反性被直接忽视

EX2

1. 例如: $x\rho y \Leftrightarrow xy \geq 0$ 、 $x\rho y \Leftrightarrow |x - y| \leq 2$ 等
2. 例如: $x\rho y \Leftrightarrow x \geq y$ 等
3. 例如: $x\rho y \Leftrightarrow xy \neq 0$ 、 $x\rho y \Leftrightarrow xy > 0$ 等

- 作业中大家举的常见栗子如上; 或者自己写出一个关系的集合表示形式也可

EX3

1. $R_1 \circ R_2 = \{(c, d)\}$
2. $R_2 \circ R_1 = \{(a, d), (a, c)\}$
3. $R_1^2 = \{(a, a), (a, b), (a, d)\}$

4. $R_2^3 = \{(b, c), (b, d), (c, b)\}$

- 主要是计算细心问题
 - a. 第2小问很多同学把 (a, d) 重复写了两次
 - b. 第4小问题目要求的是 R_2^3 , 部分同学可能受第3问的影响求了 R_2^2

EX5

- R' 具有自反性:

$$xR'x \Leftrightarrow xI_Ax \text{ 或 } xRx, \text{ 而 } xI_Ax \text{ 恒成立}$$

- $R \subseteq R'$ 显然成立
- 对任意满足 P 有自反性且 $R \subseteq P$ 的集合 P

$$xR'y \Leftrightarrow xI_Ay \text{ 或 } xRy$$

若 xI_Ay , 则 $x = y$, 且 P 有自反性 $\Rightarrow xPy$

若 xRy , 因为 $R \subseteq P$, 故 xPy

综上两种情况, 对任意满足 $xR'y$ 的 x, y , 都有 xPy

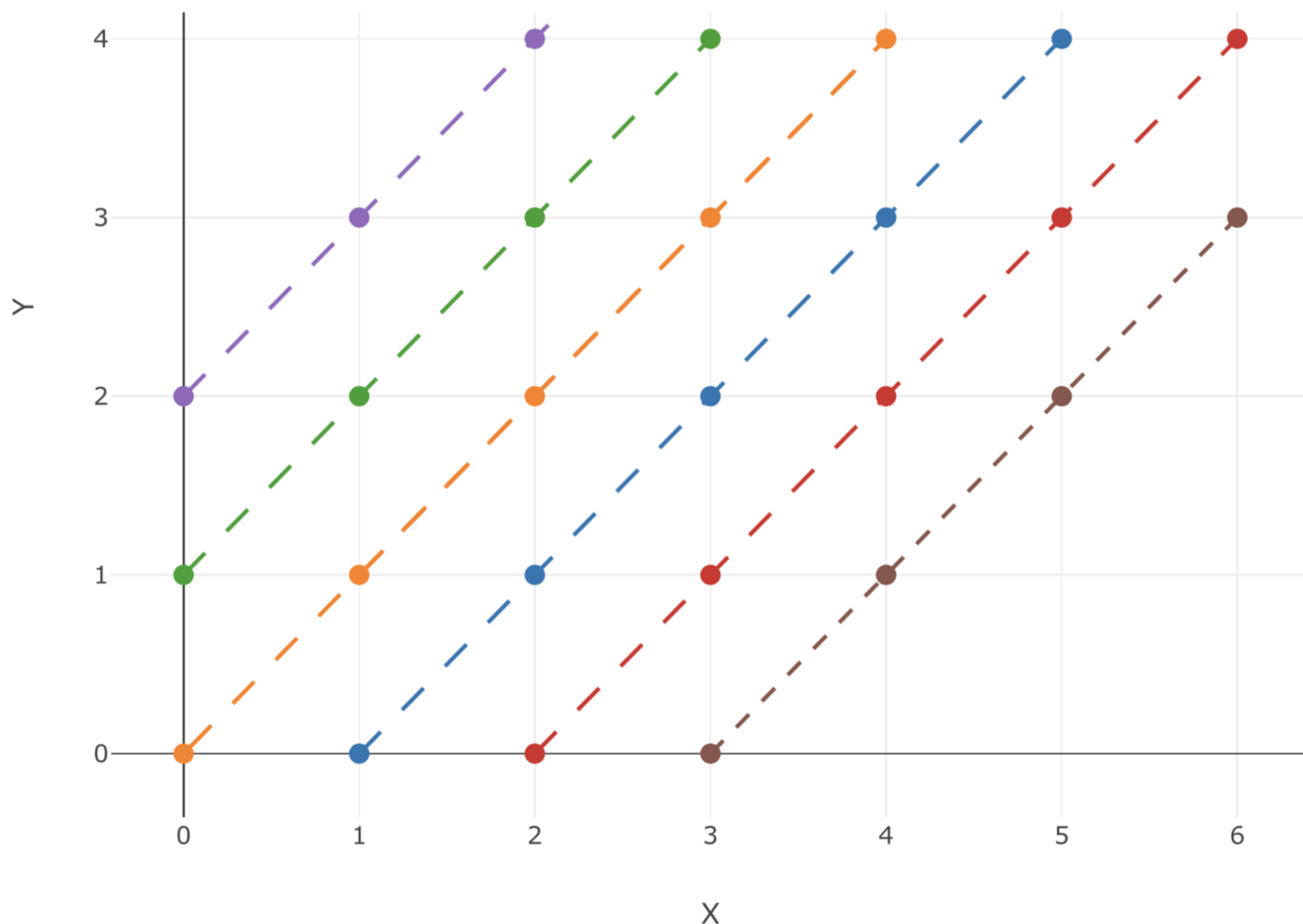
$$\Rightarrow R' \subseteq P$$

- 重点在于证明 $R' \subseteq P$
- 三种性质闭包的相关定理课本上已经给出 (Th 4.2 ~ 4.4) 其余两个定理的证明课本上已经给出, 大家最好都看看。虽然考试不一定考具体证明过程 (考试大概率会像小测一样, 给定一个具体的关系然后让求某种闭包), 但是这些证明可以帮你再次确认下构造闭包的思路。(小测时相关题目出错率特别高)

EX6

- 自反性: $a + b = a + b \Rightarrow (a, b) \sim (a, b)$
- 对称性: $a + b = c + d \Leftrightarrow c + d = a + b$
- 传递性: 若 $(a, b) \sim (c, d), (c, d) \sim (e, f), \Rightarrow a + b = c + d = e + f \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$

画图：（每个等价类用一种颜色标识）斜率为1



注：由于题目要求比较特殊，关系被定义在 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上，因此做出的应该是散点图（作业中直接画了直线也没有扣分）。同一个等价类中的元素对应的点应该分布在同一条直线上，且该直线斜率为1

EX7

- 自反性: $\forall S \in \wp(A), |S| = |S|$
- 对称性: $\forall S, T \in \wp(A), S \sim T \Rightarrow |S| = |T| \Rightarrow |T| = |S| \Rightarrow T \sim S$
- 传递性: $\forall S, T, V \in \wp(A), S \sim T, T \sim V \Rightarrow |S| = |T|, |T| = |V| \Rightarrow |S| = |V| \Rightarrow S \sim V$

商集 $\{ [\phi], [\{1\}], [\{1, 2\}], [\{1, 2, 3\}], [\{1, 2, 3, 4\}] \}$

本题比较简单，没有什么需要特别提醒的。

PS. 看到几个同学商集表示时大括号和中括号写反了，还有很多同学写出 $[\{\phi\}]$ 这样的形式.....针对本题，不知道是笔误还是其它原因

依照课程的表示方法，中括号里只会写一个元素（一般是你取的代表元），表示整个等价类集合

本题这里出现的大括号，只是因为元素定义在 $\wp(A)$ 上，是集合；而空集 ϕ 已经是集合，它自然不需要像后面的 $[\{1\}]$ 等那样加上 $\{\}$. 上述商集中第一个元素，要么写作 $[\phi]$ ，或者因为该等价类只有一个元素而写作 $\{\phi\}$

EX9

- 自反性: $\forall x \in R, x \text{ 与 } x \text{ 相差 } 0 \Rightarrow x \rho x$
- 对称性: $\forall x, y \in R, x \rho y \Rightarrow |x - y| = k, k \in \mathbb{N} \Rightarrow y \rho x$
- 传递性: $\forall x, y, z \in R, x \rho y, y \rho z \Rightarrow x - y = k_1, y - z = k_2 (k_1, k_2 \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x - z = k_1 + k_2 \Rightarrow x \rho z$

全部等价类的代表元: $[0, 1)$ 上的所有实数

没什么需要补充的~ 基本上唯一会出错的就是写出代表元这里