复变函数 B 作业 W8

习题 5

（1）因为 $\deg\left(\left(x^2+a^2\right)^2\right)-\deg\left(x^2\right)\geqslant 2$， $\left\{x \mid \left(x^2+a^2\right)^2=0\right\}=\varnothing$，可以直接使用公式计算。令 $f(z)=x^2/(x^2+a^2)^2$，此函数在上半平面只有 $z=ai$ 为奇点，并且是 2 级极点。所以

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx &= 2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{\left(z^2+a^2\right)^2},ai\right]\\
&= 2\pi i\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to ai}\left[\frac{z^2}{(z+ai)^2}\right]'\\
&= 2\pi i\lim_{z\to ai}\frac{2z(z+ai)^2-2z^2(z+ai)}{(z+ai)^4}\\
&= 2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{4a}\right)=\frac{\pi}{2a}
\end{aligned}
$$

（2）同（1）理，$f(z)$ 在上半平面有 1 级极点 $z_1=ai$,$z_2=bi$，则

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)} &= 2\pi i\left(\lim_{z\to z_1}\frac{1}{\left(z+z_1\right)\left(z^2+b^2\right)}+\lim_{z\to z_2}\frac{1}{\left(z^2+a^2\right)\left(z+z_2\right)}\right)\\
&= 2\pi i\left(\frac{1}{(b^2-a^2)\cdot 2ai}+\frac{1}{(a^2-b^2)\cdot 2bi}\right)\\
&= \frac{\pi}{a^2-b^2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=\frac{\pi}{ab(a+b)}
\end{aligned}
$$

（3）被积函数是偶函数，所以有 $\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$。$f(z)=\frac{1+z^2}{1+z^4}$ 有 1 级极点 $z_1=e^{i\frac{\pi}{4}}$， $z_2=e^{i\frac{3\pi}{4}},z_3=e^{i\frac{5\pi}{4}}$， $z_4=e^{i\frac{7\pi}{4}}$, 其中 z_1,z_2 在上半平面。

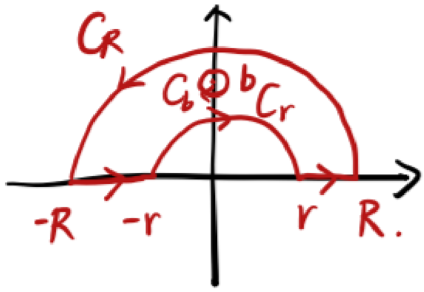
$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx &= 2\pi i\left(\lim_{z\to z_1}\frac{1+z^2}{\left(z-z_2\right)\left(z-z_3\right)\left(z-z_4\right)}+\lim_{z\to z_2}\frac{1+z^2}{\left(z-z_1\right)\left(z-z_3\right)\left(z-z_4\right)}\right)\\
&= 2\pi i\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}(1+i)\cdot\sqrt{2}i}+\frac{1-i}{-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}i\cdot\sqrt{2}(-1+i)}\right)\\
&= 2\pi i\left(\frac{1}{2\sqrt{2}i}+\frac{1}{2\sqrt{2}i}\right)=\sqrt{2}\pi
\end{aligned}
$$

所以

$$
\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi
$$

习题 6

（2）取 $f(z)=\dfrac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}$，积分路径选为如图:



其中 $0<r<b<R$，$f(z)$ 在此闭路内解析。由柯西积分公式有

$$\int_{C_b} f(z)dz = \int_{-R}^{-r} f(x)dx + \int_{C_r} f(z)dz + \int_r^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz \quad (*)$$

由引理 1：

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2} = 0, \quad 故 \lim_{R\to+\infty} \int_{c_k} f(z)dz = 0$$

由引理 2 推论：

$$\lim_{r\to 0} \int_{C_R} f(z)dz = -\pi i \left(\lim_{z\to 0} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2} \right) = -\frac{\pi i}{b^2}$$

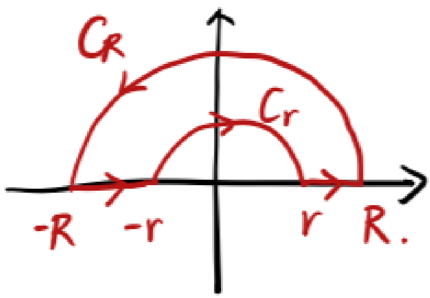
由留数定理：

$$\lim_{r_b\to 0} \int_{C_{r_b}} f(z)dz = 2\pi i \lim_{z\to bi} \frac{e^{iaz}}{z(z+bi)} = \frac{-e^{-ab}}{b^2}$$

在（*）两端令 $r\to 0, R\to +\infty$, 有 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{\pi i\left(1-e^{-ab}\right)}{b^2}$

$$\therefore \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x\left(x^2+b^2\right)} dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{\pi}{2b^2}\left(1-e^{-ab}\right)$$

（4）令 $f(z) = \dfrac{e^{2aiz}-e^{2biz}}{z^2}$，积分路径选为如图：



其中 $0<r<R$，则由柯西积分公式，有

$$\int_{-R}^{-r} f(x)dx + \int_r^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz + \int_{C_r} f(z)dz = 0$$

$$\lim_{z\to+\infty} zf(z) = 0, \lim_{R\to\infty} \int_{cR} f(z)dz = 0$$

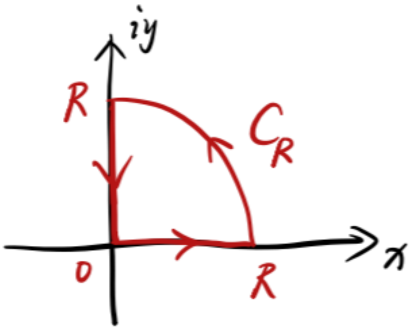
$$\lim_{r\to 0} \int_{c_r} f(z)dz = -\pi i \lim_{z\to 0} \left(2aie^{2aiz} - 2bie^{2biz}\right) = -\pi i(2ai-2bi) = 2\pi(a-b)$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \mathrm{Re}[2\pi(b-a)], \quad \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \pi(b-a)$$

习题 7

(1) 命 $f(z) = \frac{e^{iz}-e^{-z}}{z}$，其中 $z=0$ 为可去奇点，可补定义使之在全平面上解析。选择积分路径为：



由柯西积分公式，有

$$\begin{aligned}
&\int_0^R \frac{e^{ix}-e^{-x}}{x}dx + \int_{C_R} f(z)dz + \int_R^0 \frac{e^{-y}-e^{-iy}}{y}dy = 0 \\
\Rightarrow &\int_0^R \frac{e^{ix}-e^{-x}}{x}dx + \int_{C_R} f(z)dz + \int_0^R \frac{e^{-ix}-e^{-x}}{x}dx = 0 \\
\Rightarrow &\int_0^R \frac{2\left(\cos x - e^{-x}\right)}{x} + \int_{C_R} f(z)dz = 0
\end{aligned}$$

由引理 3 证明过程可以看出其对上半平面张角小于 π 的弧也成立。由引理 3，有

$$\lim_{z\to+\infty}\frac{1}{z} = 0, \quad \text{故} \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$

做变换 $w \to -iz$，则

$$\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz = \int_{C_R^*}\frac{e^{-w}}{w}dw$$

其中 C_R^* 是 C_R^* 顺时针旋转 90 度得到的弧，那么只要做反变换即可得到

$$\int_{C_R^*}\frac{e^{iz}}{z}dz = \int_{C_R}\frac{e^{-w}}{w}dw$$

两边取极限，左边仍使用引理 3，得

$$0 = \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R^*}\frac{e^{iz}}{z}dz = \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{e^{-z}}{z}dz$$

所以

$$\int_0^R \frac{2\left(\cos x - e^{-x}\right)}{x} + \int_{C_R} f(z)dz = 0 \text{令} R\to\infty \Rightarrow \text{原积分} = 0$$

习题 9

（1）令 $f(z)=2z^5+8$,$\phi(z)=-z^3+z^2-2z$，当 $|z|=1$ 时，$|f(z)|>8-2=6$,$|\phi(z)|<1+1+2=4$，即 $|f(z)|>|\phi(z)|$，而 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内无零点，所以 $f(z)+\phi(z)$ 在 $|z|<1$ 内无零点。
(2) 令 $f(z)=-6z^5$,$\phi(z)=-z^7+z^2-3$, 当 $|z|=1$ 时, $|f(z)|=6$,$|\phi(z)|<1+1+3=5<|f(z)|$，即 $|f(z)|>|\phi(z)|$，而 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内有 5 个零点，所以 $f(z)+\phi(z)$ 在 $|z|<1$ 内有 5 个零点。
（3）令 $f(z)=-3z^n$,$\phi(z)=-e^z$,$z=x+iy(x,y\in\mathbb{R})$，当 $|z|=1$ 时，$|f(z)|=3$,$|\phi(z)|=|e^xe^{iy}|=e^x<e<3=|f(z)|$，即 $|f(z)|>|\phi(z)|$，而 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内有 n 个零点，所以 $f(z)+\phi(z)$ 在 $|z|<1$ 内有 n 个零点。

习题 10

（1）

【一方面】令 $f(z)=z^4$,$\phi(z)=6z+1$，当 $|z|=2$ 时，$|f(z)|=16$,$|\phi(z)|<6*2+1=13<|f(z)|$，即 $|f(z)|>|\phi(z)|$，而 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内有 4 个零点，所以 $f(z)+\phi(z)$ 在 $|z|<2$ 内有 4 个零点。
【另一方面】令 $f(z)=6z$,$\phi(z)=z^4+1$，当 $|z|=1/2$ 时，$|f(z)|=3$,$|\phi(z)|<1/16+1<|f(z)|$，即 $|f(z)|>|\phi(z)|$，而 $f(z)$ 在 $|z|<1/2$ 内有 1 个零点，所以 $f(z)+\phi(z)$ 在 $|z|<2$ 内有 1 个零点。
【最后】因为不存在 z_0 满足 $|z_0|=1/2$ 且 $z_0^4+6z_0+1=0$，所以环 $1/2<|z|<2$ 内有 $z^4+6z+1=0$ 的三个根。