1 映射

1.1 映射

1.1.1 基本知识

（1）$f: A \to B$把元素a映成b，则记为$f(a)=b$

（2）设$f(a)=b$，我们说$(a,b)\in f$，即$f\subseteq A\times B$（$(a,b)\in f,(a,c)\in f\Rightarrow b=c$）

（3）值域$R_f=\{b|b\in B,且\exists a\in A使得f(a)=b\}$

（4）映射相等：$f,g: A\to B,\forall a\in A, f(a)=g(a)$

（5）是映射的条件：集合A的每个元素在f作用下均有像并且像是唯一的。

tips: 证明...是双射，先要证明是映射，再证明单射、满射。

（6）满射：$R_f=B$；单射：$f(a_1)=f(a_2)\Leftrightarrow a_1=a_2$

（7）逆映射：$f(a)=b, f^{-1}(b)=a$

（8）像集：$S\subseteq A, f(S)=\{f(x)|x\in S\}$

（9）映射合成：$g\circ f(a)=g[f(a)]$，右边的先执行

1.1.2 定理

（1）从有限集合A到有限集合B的映射一共有$|B|^{|A|}$个（注意顺序）

（2）A，B是有限集合，存在从A到B的满射的充要条件是$|A|\geq|B|$

（3）A，B是有限集合，存在从A到B的双射的充要条件是$|A|=|B|$

（4）两个n元集合之间有$n!$个不同的双射

（5）f有逆映射f^{-1}，则$f^{-1}\circ f=I_A$

（6）映射的合成满足结合律

（7）映射的合成保持单射、双射、满射性质，且满足脱衣规则

即若f,g都是双射，则$g\circ f$也是双射。在这种情况下，$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

1.2 置换

1.2.1 置换基本知识

（1）A→A的双射称为A的置换，若$|A| = n$，则称之为n元置换

（2）$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & \cdots & \sigma(a_n) \end{pmatrix}, \sigma(a_i) \in A, 1 \leqslant i \leqslant n$

（3）若$\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$中逆序个数为奇数，则称之为奇置换，否则称之为偶置换。

（4）n元置换一共有n!个

（5）σ_i和σ_j相继执行，记为$\sigma_j \cdot \sigma_i$，一般不满足交换律

（6）σ为置换，使得$\sigma^n=\sigma_I$的最小正整数n称为σ的阶

1.2.2 轮换基本知识

（1）定义：a_i是A={1,2,...,n}的r个不同元素，σ是A上的置换，它使得$\sigma(a_i) = a_{i+1}, \sigma(a_r) = a_1$，并且其他元素都有$\sigma(a) = a$，称之为长为$r$的轮换，记作σ=($a_1$ a_2 ... a_r)，这些元素称之为σ搬动的元素。

（2）若σ=(a_1 a_2 ... a_r)，则σ^{-1}=(a_r a_{r-1} ... a_1)

（3）(a_1 a_2 ... a_r)=(a_2 a_3 ... a_r a_1)=...

（4）每个置换都可以写成若干个不相交的轮换之积，如果不考虑（3）中情况，这种分解是唯一的

（5）不相交的轮换乘积是可以交换的

（6）若σ是长为r的轮换，那么σ的阶为r

（7）置换的阶等于它的轮换分解中各因子长度的最小公倍数

1.2.3 对换基本知识

（1）两个文字的轮换叫做对换

(a_1 a_2 ... a_r)=(a_1 a_r)(a_1 a_{r-1})...(a_1 a_3)(a_1 a_2)

（2）任何轮换可以表示成对换的乘积（于是每个置换可以表示成对换之积，但是表示不唯一，但是不同分解的对换因子个数奇偶性固定）

（3）对换是奇置换

（4）奇置换分解成奇数个对换之积，偶置换分解成偶数个对换之积

（5）全体n元置换中奇置换与偶置换各半，都有$\frac{n!}{2}$个（建立奇置换集合与偶置换集合之间的映射）

1.3 开关函数

（1）令$F_2=\{0,1\}$，n元开关函数$f(x_1,x_2,\dots,x_n)$是F_2^n到F_2的映射

（2）n元开关函数有2^{2^n}个

（3）$\bar{f}(\mathbf{x})=\overline{f(\mathbf{x})}$，$(f+g)(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x})$，$(f\cdot g)(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})\cdot g(\mathbf{x})$

$x_1+x_2,x_1\cdot x_2$由真值表定义。

（4）开关函数是布尔代数，因此满足结合律、交换律、分配律

$f+0=f,\quad f\cdot 1=f,\quad f+\bar{f}=1,\quad f\cdot\bar{f}=0$

（5）$f+f=f$，$f\cdot f=f$（证明方法）

（6）其实开关函数和集合的并交补是同构的，因此德·摩根律、吸收律什么的都满足

（7）$x^a=\delta(x,a)$，小项表达式定义式如下

$$\begin{aligned}f\left(x_1,x_2,x_3\right)=&f(0,0,0)x_1^0x_2^0x_3^0+f(0,0,1)x_1^0x_2^0x_3^1\\&+f(0,1,0)x_1^0x_2^1x_3^0+f(0,1,1)x_1^0x_2^1x_3^1\\&+f(1,0,0)x_1^1x_2^0x_3^0+f(1,0,1)x_1^1x_2^0x_3^1\\&+f(1,1,0)x_1^1x_2^1x_3^0+f(1,1,1)x_1^1x_2^1x_3^1\\=&\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+\bar{x}_1x_2\bar{x}_3+\bar{x}_1x_2x_3+x_1\bar{x}_2x_3+x_1x_2x_3\end{aligned}$$