复变函数 B 第一次习题课

张礼贤　邓凯宁

中国科学技术大学

2022 年 9 月 11 日

习题课两节内容概览

第一节 45 分钟 张礼贤 作业中的问题，及从作业回溯的基础知识

第二节 45 分钟 邓凯宁 拓展：什么是复数?

复数就是“一次多项式”，

复数就是特殊的矩阵

1. 第 2 题
   - 复数的三角形式——就要这个形式
   - 如何找辐角？关于反三角函数的说明
2. 第 7 题
   - 和差化积——注明关键变形的理由，否则一律当成不会做
   - 等比数列求和公式——运算律真的有意义
3. 第 16 题
   - 复数的乘除和模长——善用运算律，不要画蛇添足
   - 数列收敛
4. 第 19 题
   - 开集、边界、连通、区域——基本概念不能忘
5. 多项式（第 4 题、第 14 题）
   - 带余除法、一次因式定理（第 4 题）——简单但有用
   - 根与系数的关系、实系数多项式虚根成对定理（第 14 题）
   - 代数基本定理——基本定理不简单

1. 第 2 题
   - 复数的三角形式——就要这个形式
   - 如何找辐角？关于反三角函数的说明
2. 第 7 题
   - 和差化积——注明关键变形的理由，否则一律当成不会做
   - 等比数列求和公式——运算律真的有意义
3. 第 16 题
   - 复数的乘除和模长——善用运算律，不要画蛇添足
   - 数列收敛
4. 第 19 题
   - 开集、边界、连通、区域——基本概念不能忘
5. 多项式（第 4 题、第 14 题）
   - 带余除法、一次因式定理（第 4 题）——简单但有用
   - 根与系数的关系、实系数多项式虚根成对定理（第 14 题）
   - 代数基本定理——基本定理不简单

第 2 题

用三角式及指数式表示下列复数, 并求辐角的一般值:

(2) $z = -\sqrt{3}\mathrm{i}$

(4) $z = 1 - \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$

复数的三角形式

三角形式必须严格符合

$$r(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi), r \geq 0, \phi \in \mathbb{R} \tag{1}$$

第 (2) 小题，$-\sqrt{3}\mathrm{i}$，模长为 $\sqrt{3}$，辐角为 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$，$k \in \mathbb{Z}$.

不是三角形式

$\sqrt{3}\mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{2})$

是三角形式

$\sqrt{3}\left(\cos(-\frac{\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{2})\right)$

第 (4) 小题,

$$1 - \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \tag{2}$$

$$= 2\sin\frac{\theta}{2}(\sin\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\cos\frac{\theta}{2}) \tag{3}$$

是三角形式吗?

$$2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})\right)$$

讨论 θ 的范围，找到真正的三角形式!

问题

设 $1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta=r(\cos\phi+\mathrm{i}\sin\phi)$，如何找到 ϕ 的值?

有的同学这样做：首先计算模长：

$$r=|1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta|=\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta} \tag{4}$$

$$=\sqrt{2-2\cos\theta} \tag{5}$$

$$=\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}} \tag{6}$$

$$=2|\sin\frac{\theta}{2}| \tag{7}$$

这完全正确。接下来计算辐角的余弦：

$1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$

因为 $r\cos\phi=1-\cos\theta$，所以辐角的余弦：

$$\cos\phi=\frac{1-\cos\theta}{r} \tag{8}$$

$$=\frac{1-\cos\theta}{2|\sin\frac{\theta}{2}|} \tag{9}$$

$$=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2|\sin\frac{\theta}{2}|} \tag{10}$$

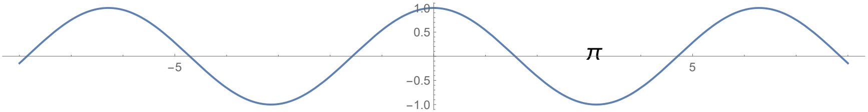
$$=|\sin\frac{\theta}{2}| \tag{11}$$

由此能否说明

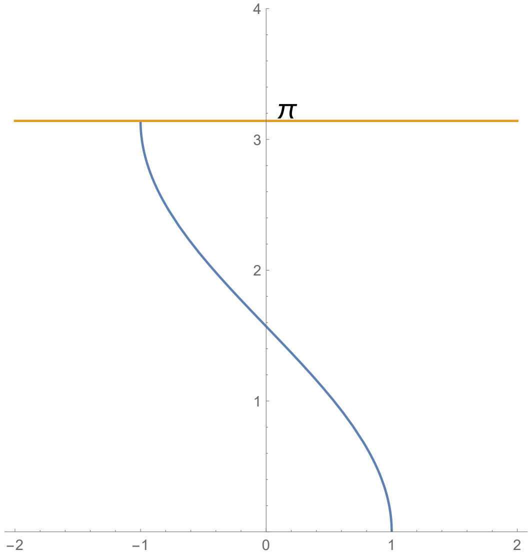
$$\phi=\arccos|\sin\frac{\theta}{2}|+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z} \tag{12}$$

?

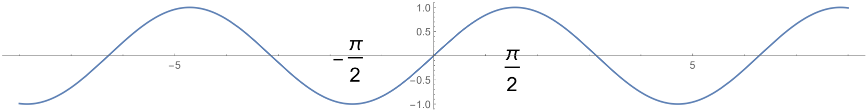
余弦函数



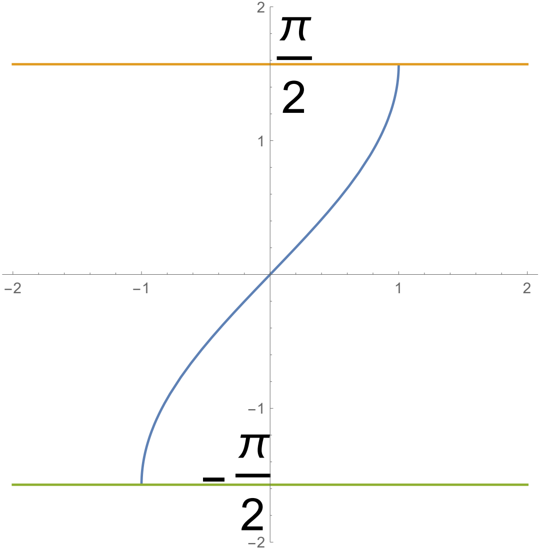
反余弦函数 $arccos(x)$



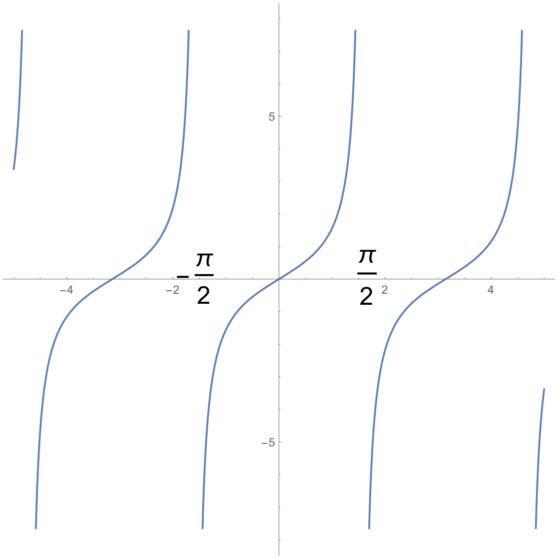
正弦函数



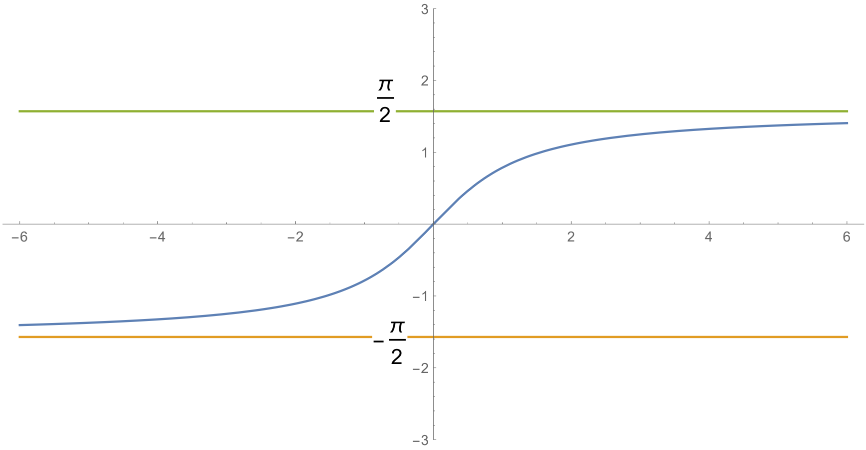
反正弦函数 $arcsin(x)$



正切函数

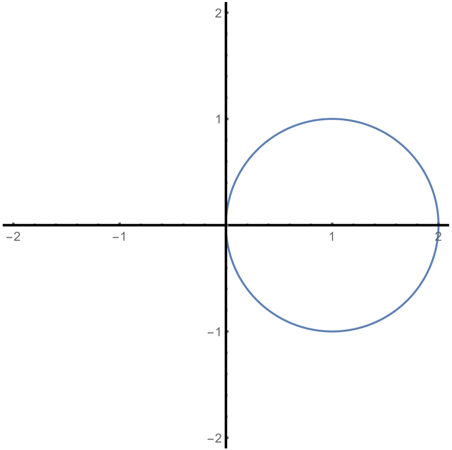


反正切函数 $arctan(x)$



如何确定 $1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 的辐角?

就此题而言，由于 $1-\cos\theta$ 总是非负的，所以仅由辐角的正弦或者正切就能确定辐角。



1. 第 2 题
   - 复数的三角形式——就要这个形式
   - 如何找辐角？关于反三角函数的说明
2. 第 7 题
   - 和差化积——注明关键变形的理由，否则一律当成不会做
   - 等比数列求和公式——运算律真的有意义
3. 第 16 题
   - 复数的乘除和模长——善用运算律，不要画蛇添足
   - 数列收敛
4. 第 19 题
   - 开集、边界、连通、区域——基本概念不能忘
5. 多项式（第 4 题、第 14 题）
   - 带余除法、一次因式定理（第 4 题）——简单但有用
   - 根与系数的关系、实系数多项式虚根成对定理（第 14 题）
   - 代数基本定理——基本定理不简单

第 7 题

利用复数的指数式，证明以下等式：

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta = \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2} - \frac{\cos(n\theta + \frac{\theta}{2})}{2\sin\frac{\theta}{2}}, 0 < \theta < \pi \tag{13}$$

解答

因为 $e^{ik\theta} = \cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta$，所以 $\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta$ 就是 $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$ 的虚部.

利用等比数列求和公式

$$\sum_{k=1}^{n} (e^{i\theta})^k = \frac{e^{i\theta}(1-(e^{i\theta})^n)}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta}(1-e^{in\theta})}{1-e^{i\theta}} \tag{14}$$

常规操作：分子分母同乘以 $1 - e^{-i\theta}$ 以把分母化为实数。

$$\frac{e^{i\theta}(1-e^{in\theta})(1-e^{-i\theta})}{(1-e^{i\theta})(1-e^{-i\theta})} = \frac{(e^{i\theta}-1)(1-e^{in\theta})}{2(1-\cos\theta)} \tag{15}$$

找到它的虚部：

$$\frac{\sin\theta - \sin(n+1)\theta + \sin n\theta}{2(1-\cos\theta)} \tag{16}$$

三角恒等变形：

$$\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}} - \frac{\sin(n+1)\theta - \sin n\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}} \tag{17}$$

要证的是

$$\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2} - \frac{\cos(n\theta+\frac{\theta}{2})}{2\sin\frac{\theta}{2}} \tag{18}$$

和差化积， $\sin(n+1)\theta - \sin n\theta = 2\cos(n\theta + \frac{\theta}{2})\sin\frac{\theta}{2}$.

和差化积

只要记住有这么个公式，现场推导即可

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos \mathit{or} \sin(??)\cos \mathit{or} \sin(??)$$

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} \tag{19}$$

$$\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} \tag{20}$$

运算律真的有意义

定理

等比数列求和公式：设 $1-q$ 可以作分母，则：

$$1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \tag{21}$$

证明.

设 $S=1+q+q^2+\ldots+q^n$，则

$$qS=q+q^2+\ldots+q^n+q^{n+1} \tag{22}$$

所以

$$(1-q)S=S-qS=1-q^{n+1} \tag{23}$$

到目前为止用了哪些运算律？接下来怎么做？板书 □

方阵

等比方阵列求和公式：

设 A 是方阵，$I-A$ 是可逆的，则：

$$I + A + A^2 + ... + A^n = (I - A)^{-1}(I - A^{n+1}) \tag{24}$$

$$I + A + A^2 + ... + A^n = (I - A^{n+1})(I - A)^{-1} \tag{25}$$

线性变换

等比线性变换列求和公式：

设 $\mathcal{A}$ 是线性变换，$\mathcal{I}-\mathcal{A}$ 是可逆的，则：

$$\mathcal{I}+\mathcal{A}+\mathcal{A}^2+\ldots+\mathcal{A}^n=(\mathcal{I}-\mathcal{A})^{-1}(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{n+1}) \tag{26}$$

$$\mathcal{I}+\mathcal{A}+\mathcal{A}^2+\ldots+\mathcal{A}^n=(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{n+1})(\mathcal{I}-\mathcal{A})^{-1} \tag{27}$$

1. 第 2 题
   - 复数的三角形式——就要这个形式
   - 如何找辐角？关于反三角函数的说明
2. 第 7 题
   - 和差化积——注明关键变形的理由，否则一律当成不会做
   - 等比数列求和公式——运算律真的有意义
3. **第 16 题**
   - **复数的乘除和模长——善用运算律，不要画蛇添足**
   - **数列收敛**
4. 第 19 题
   - 开集、边界、连通、区域——基本概念不能忘
5. 多项式（第 4 题、第 14 题）
   - 带余除法、一次因式定理（第 4 题）——简单但有用
   - 根与系数的关系、实系数多项式虚根成对定理（第 14 题）
   - 代数基本定理——基本定理不简单

第 16 题

下面复数列是否有极限？如果有则求出其极限值；如果没有则说明理由：

(1) $\dfrac{3+4\mathrm{i}}{6}, \left(\dfrac{3+4\mathrm{i}}{6}\right)^2, \cdots, \left(\dfrac{3+4\mathrm{i}}{6}\right)^n, \cdots.$

(2) $1, \dfrac{\mathrm{i}}{2}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{\mathrm{i}}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{\mathrm{i}}{6}, -\dfrac{1}{7}, -\dfrac{\mathrm{i}}{8}, \cdots.$

(3) $1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}, 1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}, \cdots.$

复数的乘除和模长

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \tag{28}$$

$$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{29}$$

$$\text{当 } n > 1 \text{ 时，} |z_n - 0| < 0.8.$$
$$\text{当 } n > 8 \text{ 时，} |z_n - 0| < 0.2.$$
$$\text{当 } n > 12 \text{ 时，} |z_n - 0| < 0.1.$$
$$\text{当 } n > 16 \text{ 时，} |z_n - 0| < 0.05.$$
$$\text{当 } n > 25 \text{ 时，} |z_n - 0| < 0.01.$$
$$\text{当 } n > 37 \text{ 时，} |z_n - 0| < 0.001.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

一句顶一万句

数列收敛于 c 的定义

如果下面这句话成立，就把 c 称为 $\{z_n\}$ 的极限，或者说 $\{z_n\}$ 收敛于 c:

对任意正数 ε，存在正整数 N，当 $n > N$ 时，$|z_n - c| < \varepsilon$.

数列收敛以及不收敛的定义

对任意正数 ε，存在正整数 N，当 $n > N$ 时，$|z_n - c| < \varepsilon$

如果上面这句话成立，就说数列收敛于 c。
如果上面这句话不成立，就说数列不收敛于 c。
如果存在 c，使得数列收敛于 c，就说数列收敛。
如果对任意 c，数列不收敛于 c，就说数列不收敛。

收敛的等价刻画

子列刻画

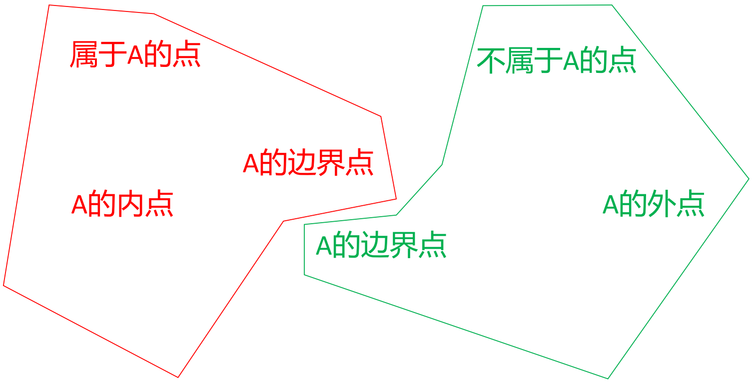
一个数列收敛，当且仅当：其所有子列都收敛于同一极限值。

柯西收敛准则

数列 $\{z_n\}$ 收敛，当且仅当：对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $m, n > N$ 时，$|z_n - z_m| < \varepsilon$.

1. 第 2 题
   - 复数的三角形式——就要这个形式
   - 如何找辐角？关于反三角函数的说明
2. 第 7 题
   - 和差化积——注明关键变形的理由，否则一律当成不会做
   - 等比数列求和公式——运算律真的有意义
3. 第 16 题
   - 复数的乘除和模长——善用运算律，不要画蛇添足
   - 数列收敛
4. 第 19 题
   - 开集、边界、连通、区域——基本概念不能忘
5. 多项式（第 4 题、第 14 题）
   - 带余除法、一次因式定理（第 4 题）——简单但有用
   - 根与系数的关系、实系数多项式虚根成对定理（第 14 题）
   - 代数基本定理——基本定理不简单

平面点集中的点的分类:



连通与道路连通

可以证明：

道路连通一定连通

注意：

连通不一定道路连通

区域

定义

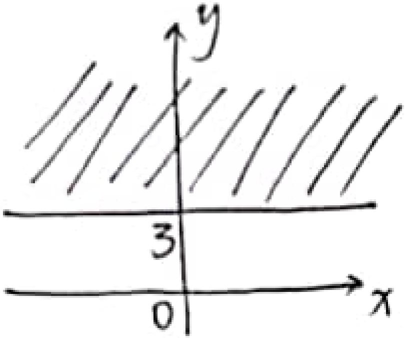
区域就是连通的开集。

可以证明:

开集如果是连通的，则必定是道路连通的。
换句话说，区域总是道路连通的。

第 19 题

(2) $\operatorname{Im} z \geqslant 3$

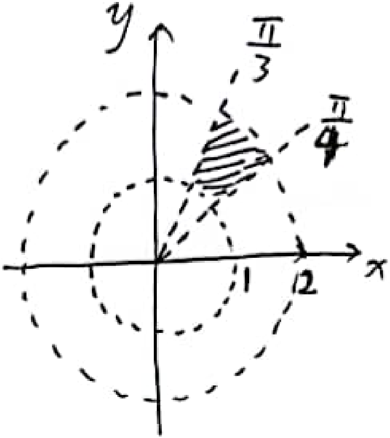


不是区域，因为它不是开集。

边界：直线 $y = 3$。

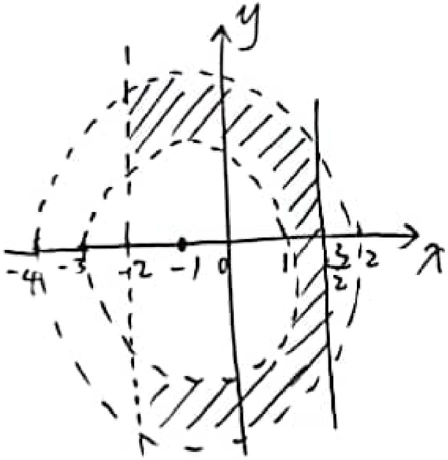
第 19 题

(4) $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{3}$ 且 $1 < |z| < 2$



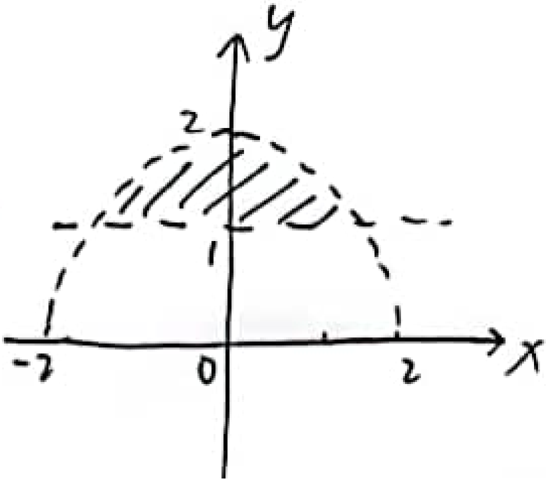
第 19 题

(6) $2 < |z+1| < 3$ 且 $-2 < \operatorname{Re} z \leqslant \dfrac{3}{2}$



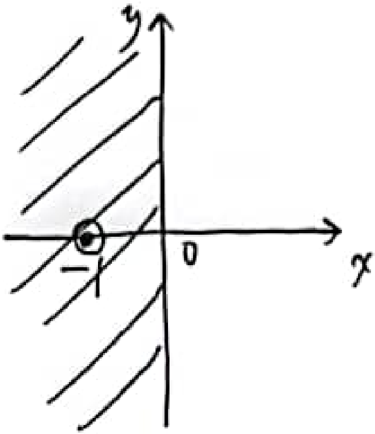
第 19 题

(8) $\operatorname{Im} z > 1$ 且 $|z| < 2$



第 19 题

(10) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| > 1.$



第 19 题

边界有范围则要注明

是线段，就不要只写一个直线。是弧，就不要写整个圆。

边界总是闭集

用区间来表述，要带上端点，即写成闭区间！

1. 第 2 题
   - 复数的三角形式——就要这个形式
   - 如何找辐角？关于反三角函数的说明
2. 第 7 题
   - 和差化积——注明关键变形的理由，否则一律当成不会做
   - 等比数列求和公式——运算律真的有意义
3. 第 16 题
   - 复数的乘除和模长——善用运算律，不要画蛇添足
   - 数列收敛
4. 第 19 题
   - 开集、边界、连通、区域——基本概念不能忘
5. 多项式（第 4 题、第 14 题）
   - 带余除法、一次因式定理（第 4 题）——简单但有用
   - 根与系数的关系、实系数多项式虚根成对定理（第 14 题）
   - 代数基本定理——基本定理不简单

带余除法练习题

练习 0

$$(2x^6 + 5x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 7x - 2) \div (x^2 + 1)$$

练习 1

$$(2x^7 - x^6 + 7x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 7x - 2) \div (x^5 + 3x^3 + x - 2)$$

带余除法练习题

练习 2

$$(x^3 - 10x + 5) \div (x - 3)$$

练习 3

$$(x^4 - 4x^2 + 2x - 4) \div (x - 2)$$

带余除法练习题答案

练习 0

$$(2x^6 + 5x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 7x - 2) \div (x^2 + 1)$$
$$= (2x^4 + 5x^3 - 4x^2 + x - 1) \ldots (6x - 1)$$

练习 1

$$(2x^7 - x^6 + 7x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 7x - 2) \div (x^5 + 3x^3 + x - 2)$$
$$= (2x^2 - x + 1) \ldots (x^3 + 4x)$$

带余除法练习题答案

练习 2

$$(x^3 - 10x + 5) \div (x - 3)$$
$$= (x^2 + 3x - 1)...2$$

练习 3

$$(x^4 - 4x^2 + 2x - 4) \div (x - 2)$$
$$= (x^3 + 2x^2 + 2)...0$$

一次因式定理

定理

若 $f(x)$ 是多项式，$f(a)=0$，则 $f(x)$ 有一次因式 $(x-a)$.

很多同学初中就知道这个定理，即使不知道有这么个定理，大概也在默默地使用它。但是多数人恐怕并没有意识到如何严谨地证明它。

第 4 题

求解方程 $z^3 = -\mathrm{i}$.

解答

$z^3 = -\mathrm{i}$ 等价于 $z^3 + \mathrm{i} = 0$,
而
$$z^3 + \mathrm{i} = (z - \mathrm{i})(z^2 + \mathrm{i}z - 1) \tag{30}$$
所以 $z = \mathrm{i}$ 或者 $z^2 + \mathrm{i}z - 1 = 0$,
后者是一个二次方程，由二次方程求根公式得
$$z = \frac{-\mathrm{i} \pm \sqrt{3}}{2} \tag{31}$$

第 14 题

题目

设 z_1, z_2 是两复数, 如果 $z_1 + z_2$ 和 $z_1 z_2$ 都是实数, 证明 z_1 和 z_2 或者都是实数, 或者是一对共轭复数.

绝大多数同学的做法是设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 来讨论。

我的证明

设 $z_1 + z_2 = -b, z_1 z_2 = c$, 由题意 b, c 都是实数. 由二次方程根与系数的关系（或者说韦达定理）, z_1, z_2 是关于 z 的实系数一元二次方程 $z^2 + bz + c = 0$ 的两个根. 由求根公式,

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

若 $b^2 - 4c \geq 0$, 则 z_1, z_2 都是实数, 否则 z_1, z_2 是一对共轭的复数.

二次方程的韦达定理

设

$$az^2 + bz + c = 0$$

为一元二次方程，如果 z_1, z_2 是它的两个根，则

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}$$

反之，如果两个复数 z_1, z_2 满足上述两式，则它们是 $az^2 + bz + c = 0$ 的两根.

二次方程韦达定理的证明

证明.

由因式定理，若 az^2+bz+c 有零点 z_1, z_2，则它有一次因式 $(z-z_1)$，有一次因式 $(z-z_2)$，所以

$$az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2)$$

比较两边的 z 的系数就知道 $b=-a(z_1+z_2)$.
比较两边的常数项就知道 $c = az_1z_2$.
反之，如果 z_1, z_2 满足上述两式，那么 $a(z-z_1)(z-z_2) = az^2+bz+c$，所以它们是 az^2+bz+c 的两根. □

三次方程的韦达定理

设

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

为一元三次方程，如果 z_1, z_2, z_3 是它的三个根，则

$$z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{b}{a}$$

$$z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1 = \frac{c}{a}$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -\frac{d}{a}$$

反之，如果两个复数 z_1, z_2, z_3 满足上述三式，则它们是 $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ 的三根.

三次方程韦达定理的证明

证明.

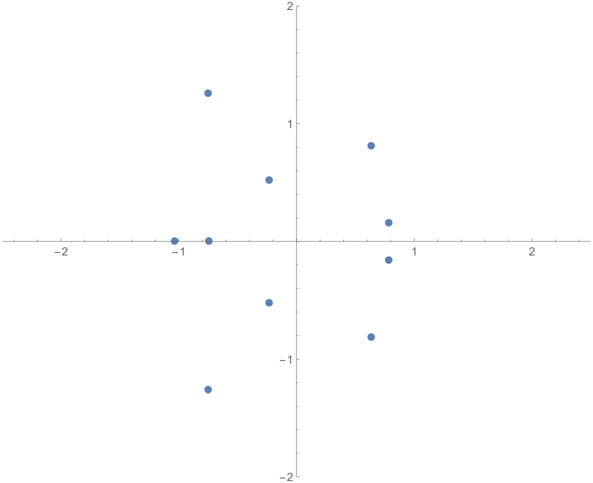
由因式定理，若 az^3+bz^2+cz+d 有零点 z_1,z_2,z_3，则它有一次因式 $(z-z_1)$，有一次因式 $(z-z_2)$，有一次因式 $(z-z_3)$，所以

$$az^3+bz^2+cz+d=a(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$$

比较两边的 z^2 的系数就知道 $b=-a(z_1+z_2+z_3)$.
比较两边的 z 的系数就知道 $c=a(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)$.
比较两边的常数项就知道 $d=-az_1z_2z_3$.
反之，如果 z_1,z_2,z_3 满足上述三式，那么
$a(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)=az^3+bz^2+cz+d$，所以它们是
az^3+bz^2+cz+d 的三根. □

虚根共轭成对

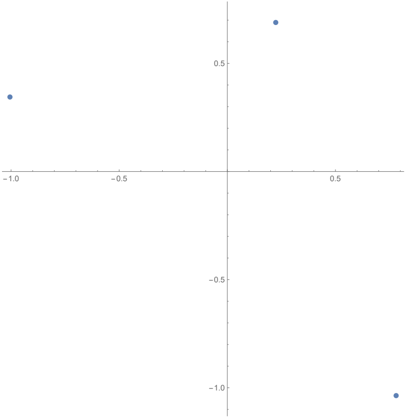
证明在这就不写了，当作一道练习题，同学们自己试试看，不会的看群里的文件《1 答案和作业中的问题.pdf》。



实系数多项式虚根共轭成对

前提！实系数！！！实系数！！！实系数！！！

比如说：$z^3 + iz + 1 = 0$ 的三个根：
$-1.0047 + 0.345379i, 0.224543 + 0.690315i, 0.780156 - 1.03569i$



代数基本定理

定理

一元 n 次复系数多项式恰能分解为 n 个一次因式的乘积。

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n)$$

代数基本定理——等价表述

定理

一元 n 次复系数多项式一定存在一个复数根。

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

代数基本定理——实系数多项式的情形

定理

实系数多项式总能分解为一次因式和二次因式的乘积。

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = (z - x_1)(z - x_2)\ldots(z^2 + b_0 z + c_0)(z^2 + b_1 z + c_1)\ldots$$