随机过程B Week 3

黄瑞轩 PB20111686

Ch2 T9

$N_1(t)$是一个泊松过程，证明如下：

(i) $N_1(0)=0$；

(ii) 因为$N(t)$具有独立增量，由题可知，$N_1(t)$也具有独立增量；

(iii) 当$t>s>0, 0<m<n$时，$N_1(t)-N_1(s)$的分布：

$$\begin{aligned}
P(N_1(t)-N_1(s)=m) &= \sum_{n=m}^{\infty} P(N_1(t)-N_1(s)=m \mid N(t)-N(s)=n)P(N(t)-N(s)=n) \\
&= \sum_{n=m}^{\infty} C_m^n p^m (1-p)^{n-m} \frac{\lambda^n (\Delta t)^n}{n!} e^{-\lambda(\Delta t)} \\
&= \frac{(p\lambda\Delta t)^m}{m!} e^{-\lambda\Delta t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda\Delta t]^n}{n!} \\
&= \frac{(p\lambda\Delta t)^m}{m!} e^{-p\lambda\Delta t}
\end{aligned}$$

这说明$N_1(t)-N_1(s)\sim\mathcal{P}(p\lambda\Delta t)$。

综上，$N_1(t)$是强度为$p\lambda$的泊松过程。

若记$N_2(t)=N(t)-N_1(t)$，则与上面完全类似，只是概率p用$1-p$替代，则$N_2(t)$是强度为$(1-p)\lambda$的泊松过程。

$$\begin{aligned}
P(N_1(t)=m, N_2(t)=n) &= P(N_1(t)=m, N(t)=m+n) \\
&= P(N_1(t)=m|N(t)=m+n)P(N(t)=m+n) \\
&= C_{m+n}^m p^m (1-p)^n \frac{(\lambda t)^{m+n}}{(m+n)!} e^{-\lambda t} \\
&= \frac{p^m (1-p)^n (\lambda t)^{m+n}}{m!n!} e^{-\lambda t} \\
&= P(N_1(t)=m)P(N_2(t)=n)
\end{aligned}$$

所以$N_1(t)$和$N_2(t)$是独立的。

Ch2 T11

按题意，有

$$\{T>t\} = \left\{\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \le \alpha\right\}$$

则

$$
\begin{aligned}
P\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k \le \alpha\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \le \alpha \mid N(t)=n\right) P(N(t)=n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k \le \alpha\right) P(N(t)=n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\alpha} \mu e^{-\mu y} \frac{(\mu y)^{n-1}}{(n-1)!} dy \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} dt
\end{aligned}
$$

这里第二步使用独立性，第三步使用命题2.2结论。

则

$$
\begin{aligned}
ET &= \int_0^{\infty} P(T>t)dt \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\alpha} \mu e^{-\mu y} \frac{(\mu y)^{n-1}}{(n-1)!} dy \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{\alpha} \mu e^{-\mu y} \frac{(\mu y)^{n-1}}{(n-1)!} dy \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n \lambda^n}{n!(n-1)!} \int_0^{+\infty} \int_0^{\alpha} e^{-\mu y} y^{n-1} dy e^{-\lambda t} t^n dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu\lambda)^n}{n!(n-1)!} \int_0^{\alpha} e^{-\mu y} y^{n-1} dy \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^n dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu\lambda)^n}{n!(n-1)!} \int_0^{\alpha} e^{-\mu y} y^{n-1} dy \int_0^{+\infty} e^{-s} s^n \frac{1}{\lambda^{n+1}} ds \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{\lambda \cdot n!(n-1)!} \int_0^{\alpha} e^{-\mu y} y^{n-1} dy \cdot \Gamma(n+1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{\lambda(n-1)!} \int_0^{\alpha} e^{-\mu y} y^{n-1} dy \\
&= \int_0^{\alpha} \mu \frac{e^{-\mu y}}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^{n-1} y^{n-1}}{(n-1)!} dy \\
&= \int_0^{\alpha} \frac{\mu e^{-\mu y}}{\lambda} e^{\mu y} dy = \frac{\mu\alpha}{\lambda}
\end{aligned}
$$

解释：强度λ越大，表示冲击来的越频繁，寿命越短；μ越大，说明每次冲击的损害越小，寿命越长；α越小，说明限度越小，寿命越小。

Ch2 T12

结论：在一般情况下，$X_1, X_2, \ldots$不独立、不同分布，分析如下。

任取指标$1 \le s < r$，考察X_s, X_r独立性。设s发生的时间是W_s，由$W_s \le w_s \Leftrightarrow N(w_s) \ge s$和$W_s = \sum_{i=1}^{s} X_i$，先考察$W_s, W_r$的联合分布$F_{(W_s,W_r)}(w_s, w_r)$。

记$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du$，则

$$
\begin{aligned}
P(W_s \leq w_s, W_r \leq w_r) = P(N(w_s) \geq s, N(w_r) \geq r) \\
&= \sum_{k=s+1}^{\infty} \sum_{l=s}^{k} P(N(w_s) = l, N(w_r) = k), 0 \leq w_s < w_r \\
&= \sum_{k=s+1}^{\infty} \sum_{l=s}^{k} P(N(w_s) = l, N(w_r) - N(w_s) = k - l) \\
&= \sum_{k=s+1}^{\infty} \sum_{l=s}^{k} \frac{\Lambda^l(w_s)(\Lambda(w_r) - \Lambda(w_s))^{k-l}}{l!(k-l)!} \exp(-\Lambda(w_r))
\end{aligned}
$$

很难看出这是$g_1(w_s)g_2(w_r)$的形式，为此，取$s=1, r=2$，则

$$
\begin{aligned}
P(W_1 \leq w_1, W_2 \leq w_2) &= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=1}^{k} \frac{\Lambda^l(w_1)(\Lambda(w_2) - \Lambda(w_1))^{k-l}}{l!(k-l)!} \exp(-\Lambda(w_2)) \\
&= \exp(-\Lambda(w_2)) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Lambda^k(w_2) - (\Lambda(w_2) - \Lambda(w_1))^k}{k!} \\
&= \exp(-\Lambda(w_2)) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k(w_2) - (\Lambda(w_2) - \Lambda(w_1))^k}{k!} - \Lambda(w_1) \right) \\
&= \exp(-\Lambda(w_2))(\exp(\Lambda(w_2)) - \exp(\Lambda(w_2) - \Lambda(w_1)) - \Lambda(w_1)) \\
&= 1 - \exp(-\Lambda(w_1)) - \Lambda(w_1) \exp(-\Lambda(w_2))
\end{aligned}
$$

即

$$
F_{(W_1,W_2)}(w_1, w_2) = 1 - \exp(-\Lambda(w_1)) - \Lambda(w_1) \exp(-\Lambda(w_2))
$$

故联合密度

$$
f_{(W_1,W_2)}(w_1, w_2) = \frac{\partial^2 F_{(W_1,W_2)}(w_1, w_2)}{\partial w_1 \partial w_2} = \lambda(w_1) \lambda(w_2) \exp(-\Lambda(w_2))
$$

由于$W_1 = X_1, W_2 = X_1 + X_2$，从$(w_1, w_2)$变换到$(x_1, x_2)$的Jacobi行列式

$$
\frac{\partial(w_1, w_2)}{\partial(x_1, x_2)} = 1
$$

故联合密度

$$
f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = \lambda(x_1)\lambda(x_1 + x_2) \exp(-\Lambda(x_1 + x_2)), x_1, x_2 > 0
$$

一般情况下不能将上式拆分为$h_1(x_1)h_2(x_2)$的形式，所以X_1, X_2不独立。

密度函数

$$
f_{X_1}(x_1) = \int_0^{\infty} \lambda(x_1)\lambda(x_1 + x_2) \exp(-\Lambda(x_1 + x_2)) dx_2 = \lambda(x_1)[\exp(-\Lambda(x_1)) - \exp(-\Lambda(\infty))]
$$

$$
\int_0^{\infty} f_{X_1}(x_1) dx_1 = 1 = 1 - (\Lambda(\infty) + 1) \exp(-\Lambda(\infty))
$$

则$\exp(-\Lambda(\infty)) = 0$，则$f_{X_1}(x_1) = \lambda(x_1) \exp\left(-\int_0^{x_1} \lambda(u) du\right), x_1 > 0$，

$f_{X_2}(x_2) = \int_0^{\infty} \lambda(x_1)\lambda(x_1 + x_2) \exp(-\Lambda(x_1 + x_2)) dx_1, x_2 > 0$。

所以X_1, X_2不同分布，结论得证，并顺便求出了这两个随机变量的分布（密度函数）。

Ch2 T13

因为$\lambda(t) > 0$，则$m(t)$是严格的增函数，且$m(0) = 0$，故$l(0) = 0$。

（i）$N_1(0) = N(l(0)) = N(0) = 0$；

（ii）任取指标$0 \le a < b \le c < d$，因为$m(t)$是严格增函数，所以$l(t)$也是严格增函数，所以

$$0 \le l(a) < l(b) \le l(c) < l(d)$$

又因为

$$\begin{aligned} N_1(b) - N_1(a) = N(l(b)) - N(l(a)) \\ N_1(d) - N_1(c) = N(l(d)) - N(l(c)) \end{aligned}$$

且$N(t)$是独立增量过程，所以$N_1(b) - N_1(a)$与$N_1(d) - N_1(c)$独立，所以$N_1(t)$是独立增量过程。

（iii）对$\forall t > 0, s \ge 0$，计算

$$\begin{aligned} P(N_1(s+t) - N_1(s) = k) &= P(N(l(s+t)) - N(l(s)) = k) \\ &= \frac{(m(l(s+t)) - m(l(s)))^k}{k!} \exp(-(m(l(s+t)) - m(l(s)))) \\ &= \frac{t^k}{k!} \exp(-t) \end{aligned}$$

所以$N_1(t)$是强度为1的泊松过程。

Ch3 T2

$$\begin{aligned} & P\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2\} \\ & = P\{x_2 = 2 \mid X_1 = 1, X_0 = 0\} P\{x_1 = 1, X_0 = 0\} \\ & = P\{x_2 = 2 \mid X_1 = 1\} P\{x_1 = 1 \mid X_0 = 0\} P\{X_0 = 0\} \\ & = 0 \times 0.2 \times 0.3 = 0 \end{aligned}$$

Ch3 T4

记A罐中球数为$k, 0 \le k \le N$。一次实验有四种情况：B→A，A→A，A→B，B→B，故$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$中$|j - i| \le 1$。

取值的三种情况：

（1）当$i = 0$，j只能取$0, 1$；

（2）当$i = N$，j只能取$N, N-1$；

（3）当$0 < i < N$，j可取$i-1, i, i+1$。

对于（1）（2）两种情况：

$$\begin{aligned} & p_{00} = P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) = q \\ & p_{01} = P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0) = p \\ & p_{NN} = P(X_{n+1} = N \mid X_n = N) = p \\ & p_{N(N-1)} = P(X_{n+1} = N-1 \mid X_n = N) = q \end{aligned}$$

对于（3）情况：

$$
\begin{aligned}
p_{i(i-1)} &= P\left(X_{n+1}=i-1 \mid X_n=i\right)=\frac{i}{N} \cdot q \\
p_{ii} &= P\left(X_{n+1}=i \mid X_n=i\right)=\frac{i}{N} \cdot p+\frac{N-i}{N} \cdot q \\
p_{i(i+1)} &= P\left(X_{n+1}=i+1 \mid X_n=i\right)=\frac{N-i}{N} p
\end{aligned}
$$

除了上面定义过的p_{ij}，其余元素均为0。所要求的矩阵就是$N+1$阶方阵$P_{ij}=(p_{ij})$。