参数估计（下）

在独立同分布场合，样本均值 $\bar{X}_n$ 和样本方差 S^2 分别是总体均值 μ 和总体方差 σ^2 的无偏估计和强相合估计，说明样本均值和样本方差都是不错的估计量。它告诉我们，在 n 比较大的时候，真值 μ 就在 $\bar{X}_n$ 附近，真值σ^2 就在 S^2 附近。但是到底离真值有多近呢？ n 多大就够了呢？区间估计可以回答这一问题。

> 测量没有系统偏差，即$EX=\mu$。

一个正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的区间估计

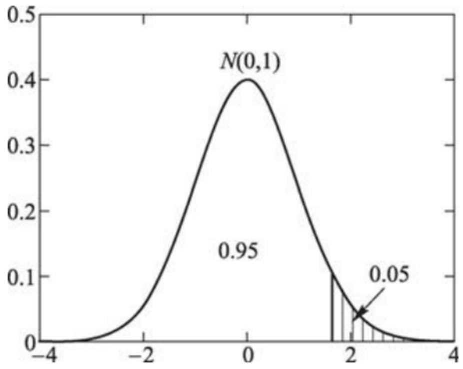


图5.6.1 $\alpha=0.05$, $z_\alpha=1.645$

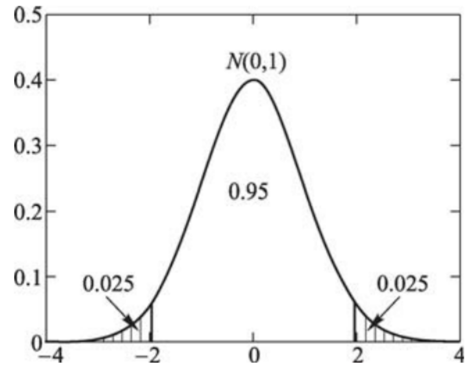


图5.6.2 $\alpha=0.05$, $z_{\alpha/2}=1.96$

> 前面讨论过，$E\bar{X}=\mu, D\bar{X}=\sigma^2/n$。

已知σ，求μ的区间估计

μ的一个良好点估计：$\bar{X}$；

确定枢轴变量：$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$，这个变量服从$N(0,1)$，与参数无关；

取$\alpha=0.05$时，有95%的概率确定Z落在$-z_{\alpha/2},z_{\alpha/2}$之间，得出不等式：

$$P(|Z|\le z_{\alpha/2})=1-\alpha$$

再展开，就知道有95%的概率确定

$$\mu\in\left[\bar{X}_n-\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}_n+\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

未知σ，求μ的区间估计

> 引理：若$X_1,\ldots,X_n$独立同分布，且$\sim N(\mu,\sigma^2)$，则
>
> （1）$(\bar{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})\sim N(0,1)$。（标准化）
>
> （2）$\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2/\sigma^2\sim\chi^2_{n-1}$。
>
> （3）$\bar{X}$与$\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2$独立。

μ的一个良好点估计：$\bar{X}$；

确定枢轴变量：$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$，这个变量服从$t_{n-1}$，与参数无关；

> 证明：首先$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，其实根据标准差的定义，$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}$，根据上面的引理（2），知道$S/\sigma\sim\sqrt{\chi^2_{n-1}/(n-1)}$。再根据引理（3），知道这两者相除满足$t$分布的定义。

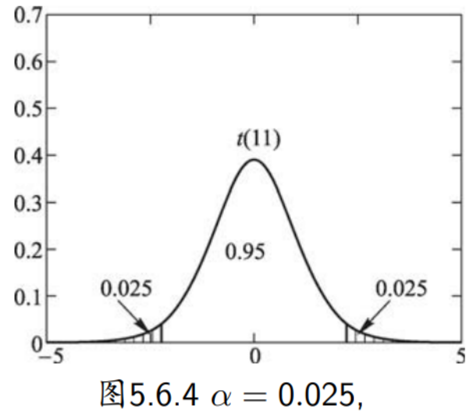


图5.6.4 $\alpha=0.025$, $t_{0.025}(11)=2.201$

取$\alpha=0.05$时，有95%的概率确定Z落在$-t_{\alpha/2}(m),t_{\alpha/2}(m)$之间，得出不等式：

$$P(|T_m| \le t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

再展开，就知道有95%的概率确定

$$\mu \in \left[\bar{X}_n - \frac{t_{\alpha/2}(n-1)S}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{t_{\alpha/2}(n-1)S}{\sqrt{n}}\right]$$

方差σ^2的区间估计

已知μ时

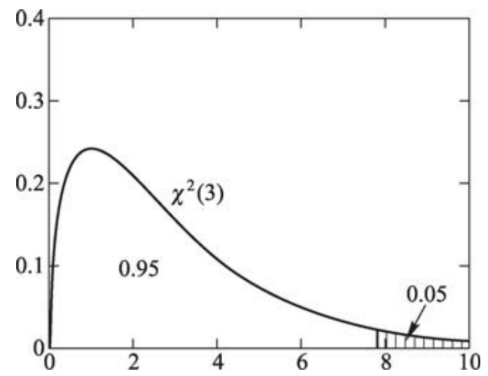
σ^2的一个良好点估计：$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$。

选取枢轴量：$Z = \frac{nS_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$。

未知μ时

σ^2的一个良好点估计：$S_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$。

选取枢轴量：$Z = \frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$。【上面的引理（2）】

> 这里需要注意的是，χ^2分布不再像前面的$N(0,1)$和t分布那样是对称的，χ^2分布是一个非负的分布，具体可以看下面这张图来直观了解。
>
> 
>
>
> 图5.6.6 $\chi^2_{0.05}(3) = 7.815$

取$\alpha = 0.05$时，有95%的概率确定Z落在$\chi^2_{1-\alpha/2}(m), \chi^2_{\alpha/2}(m)$之间，得出不等式：

$$P(\chi^2_{1-\alpha/2} \le Z \le \chi^2_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

再展开，就知道有95%的概率确定

$$\sigma^2 \in \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right]$$

> χ^2分布的定义是要求总体服从标准正态$N(0,1)$，如果平方和不是标准正态，则需要标准化。

单侧置信限

比较简单，不多赘述。重要的是将$\alpha/2$改成α，并且对于非负的分布，通过置信上限确定的置信区间下限是0而不是$-\infty$。

两个独立正态总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$和$N(\mu_2, \sigma_2^2)$的区间估计

均值差$\mu_1 - \mu_2$的区间估计

总体X, Y相互独立⇒样本$[X_i], [Y_j]$相互独立。

良好的点估计：$\overline{X_n} \sim \mu_1, \overline{Y_m} \sim \mu_2, S_1^2 \sim \sigma_1^2, S_2^2 \sim \sigma_2^2$。

> $\overline{X_n} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2/n), \overline{Y_m} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2/m)$,
>
> 从而$\overline{X_n} - \overline{Y_m} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m)$。

选取枢轴量：$Z = \frac{\left(\bar{X}_n - \bar{Y}_m\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m}} \sim N(0,1)$

已知σ_1^2, σ_2^2时

有$1-\alpha$的把握认为

$$\mu_1 - \mu_2 \in \left[\left(\bar{X}_n - \bar{Y}_m\right) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}, \left(\bar{X}_n - \bar{Y}_m\right) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}\right]$$

已知$\sigma_1^2=\sigma_2^2$但是不知道具体的值

利用$ES_1^2=ES_2^2=\sigma^2$，可以验证

$$S_w^2=\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}$$

是σ_1^2,σ_2^2的无偏估计，即$ES_w^2=\sigma_1^2=\sigma_2^2$。

用S_w代替σ_1,σ_2，则新的枢轴量选取为

$$T=\frac{\left(\bar{X}_n-\bar{Y}_m\right)-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\sim t(n+m-2)$$

则有$1-\alpha$的把握认为

$$\mu_1-\mu_2\in\left[\left(\bar{X}_n-\bar{Y}_m\right)-t_{\alpha/2}S_w\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}},\left(\bar{X}_n-\bar{Y}_m\right)+t_{\alpha/2}S_w\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right]$$

已知方差的比$\sigma_1^2/\sigma_2^2=b^2$，但不知道方差具体的值

利用 $\mathrm{E}S_1^2=\sigma_1^2=b^2\sigma_2^2,\mathrm{E}S_2^2=\sigma_2^2$，可以验证

$$S_b^2=\frac{(n-1)S_1^2/b^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}$$

是 σ_2^2 的无偏估计：$\mathrm{E}S_b^2=\sigma_2^2$。用 S_b^2 代替 σ_2^2，得到的枢轴量

$$T=\frac{\left(\bar{X}_n-\bar{Y}_m\right)-(\mu_1-\mu_2)}{S_b\sqrt{b^2/n+1/m}}\sim t(n+m-2)$$

则有$1-\alpha$的把握认为

$$\mu_1-\mu_2\in\left[\left(\bar{X}_n-\bar{Y}_m\right)-t_{\alpha/2}S_b\sqrt{\frac{b^2}{n}+\frac{1}{m}},\left(\bar{X}_n-\bar{Y}_m\right)+t_{\alpha/2}S_b\sqrt{\frac{b^2}{n}+\frac{1}{m}}\right]$$

方差比σ_1^2/σ_2^2的区间估计

设总体 $X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$ 和总体 $Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$ 独立，$X_1,X_2,\cdots$，X_n 是总体 X 的样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 是总体 Y 的样本。可以计算出枢轴量

$$F=\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n-1,m-1)$$

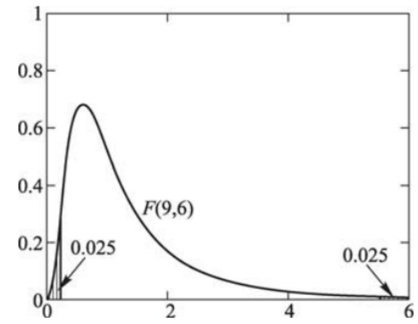


图5.6.9 $F_{0.975}(9,6)=0.23$,
$F_{0.025}(9,6)=5.52$

> 查表时，对于 $\alpha>0.5$，需要用下面的公式进行换算:
>
> $$F_\alpha(n,m)=\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)},n,m\geqslant 1$$

可以得到 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left[\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}},\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}}\right]$$

> 这是因为有
>
> $$\begin{aligned}&P\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}}\leqslant\sigma_1^2/\sigma_2^2\leqslant\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}}\right)\\=&P\left(F_{1-\alpha/2}\leqslant\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\leqslant F_{\alpha/2}\right)\\=&P\left(F\geqslant F_{1-\alpha/2}\right)-P\left(F>F_{\alpha/2}\right)\\=&1-\alpha/2-\alpha/2=1-\alpha\end{aligned}$$