数理逻辑作业（Week 3）

黄瑞轩 PB20111686

P30 2

命题2-2°

即证$\vdash \neg(p \to \neg q) \to q$。

(1) $\neg q \to (p \to \neg q)(L1)$
(2) $(\neg q \to (p \to \neg q)) \to (\neg(p \to \neg q) \to \neg\neg q)$(换位率)
(3) $\neg(p \to \neg q) \to \neg\neg q(1, 2, MP)$
(4) $\neg\neg q \to q$(双重否定律)
(5)$\neg(p \to \neg q) \to q(3, 4, HS)$

命题2-3°

即证$\vdash \neg(p \to \neg q) \to \neg(q \to \neg p)$。

由演绎定理，即证$\{\neg(p \to \neg q)\} \vdash \neg(q \to \neg p)$。

如果把$q \to \neg p$作为新假定，得到如下证明：

(1) $\neg(p \to \neg q) \to q$(已证明)
(2) $q \to \neg p$(假定)
(3) $\neg(p \to \neg q) \to \neg p(1, 2, HS)$
(4) $\neg(p \to \neg q) \to p$(按命题2-1°)

按归谬律，得证。

命题2-4°

即证$\vdash p \to \neg(p \to \neg p)$。

按演绎定理，即证$\{p\} \vdash \neg(p \to \neg p)$。

如果把$p \to \neg p$作为新假定，得到如下证明：

$(1)p$（假定）

$(2)p \to \neg p$（假定）

$(3)\neg p(1, 2, MP)$

按归谬律，得证。

命题4-1°

记$r = \neg(p \wedge q), s = \neg p \vee \neg q$，即证$\vdash r \leftrightarrow s$，即证$\vdash (r \to s) \wedge (s \to r)$，即证$\vdash \neg((r \to s) \to \neg(s \to r))$。

下面先证明：$\vdash r \to s, \vdash s \to r$。

1° 按演绎定理，即证$\{\neg\neg(p \to \neg q)\} \vdash (\neg\neg p \to \neg q)$。

$(1)\neg\neg(p \to \neg q) \to (p \to \neg q)$（双重否定律）

$(2)\neg\neg(p \to \neg q)$（假定）

$(3) p \to \neg q$（1,2,MP）

$(4) \neg\neg p \to p$（双重否定律）

$(5) \neg\neg p \to \neg q$（3,4,HS）

2° 按演绎定理，即证$\{\neg\neg p \to \neg q\} \vdash \neg\neg(p \to \neg q)$。

$(1) \neg\neg p \to \neg q$（假定）

$(2) p \to \neg\neg p$（第二双重否定律）

$(3) p \to \neg q$（1,2,HS）

$(4) (p \to \neg q) \to \neg\neg(p \to \neg q)$（第二双重否定律）

$(5) \neg\neg(p \to \neg q)$（3,4,MP）

下面给出原命题的证明：

如果把$(r \to s) \to \neg(s \to r)$作为新假定，则

$(1...5) r \to s$

$(6...10) s \to r$

$(11) (r \to s) \to \neg(s \to r)$（假定）

$(12) \neg(s \to r)$

按归谬律，得证。