多维随机变量

对随机事件 $A, B, A_1, A_2, \cdots, A_n$, 以后用 $\{A, B\}$ 表示 AB, 用

$$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\} \text{ means } \bigcap_{j=1}^{n} A_j$$

于是有

$$\{X \leqslant x, Y \leqslant y\} = \{X \leqslant x\} \cap \{Y \leqslant y\}$$

离散型随机向量

联合分布函数

对于随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_m$, 有

$$\{X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \cdots, X_m \leqslant x_m\} = \bigcap_{j=1}^{m} \{X_j \leqslant x_j\}$$

对于随机向量 (X, Y), 称

$$F(x, y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y)$$

为 (X, Y) 的联合分布函数。

> $F(x,y)$是$x(\text{or } y)$的单调不减函数。

边缘分布函数

设 $F(x, y)$ 是 (X, Y) 的联合分布函数，由于 $\{Y \leqslant \infty\}$ 和 $\{X \leqslant \infty\}$ 是必然事件，所以 X, Y 分别有概率分布

$$F_X(x) = P(X \leqslant x, Y \leqslant \infty) = F(x, \infty)$$
$$F_Y(y) = P(X \leqslant \infty, Y \leqslant y) = F(\infty, y)$$

这时称 X 的分布函数 $F_X(x), Y$ 的分布函数 $F_Y(y)$ 为 (X, Y) 的边缘分布函数。

独立性

设 $X_1, X_2, \ldots$ 是随机变量.

(1) 如果对任何实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,

$$P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1) \ldots P(X_n \leq x_n)$$

则称随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立。

(2) 如果对任何n，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，则称随机变量序列 $\{X_j\} = \{X_j \mid j = 1, 2, \cdots\}$ 相互独立。

> 设随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 有联合分布函数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n), X_i$ 有分布函数 $F_i(x_i)$. 根据独立性的定义知道, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立的充分必要条件是对任何 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 有
>
> $$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_1(x_1) F_2(x_2) \cdots F_n(x_n)$$
>
> 容易理解, 如果 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 是 n 个独立进行的试验, X_i 是试验 S_i 下的随机变量,则 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立. 如果 $S_1, S_2, \cdots$ 是独立 进行的试验, X_i 是试验 S_i 下的事件, 则 $X_1, X_2, \cdots$ 相互独立.

离散型随机向量的边缘分布

设离散型随机向量 (X, Y) 有联合概率分布

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), \quad i, j \geqslant 1$$

则 X 和 Y 分别有概率分布

$$p_i \equiv P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, i \geqslant 1$$
$$q_j \equiv P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, j \geqslant 1$$

这时称 X 的分布 $\{p_i\}, Y$ 的分布 $\{q_j\}$ 为 (X, Y) 的边缘分布.

> **【示例：三项分布】** 设 A, B, C 是试验 S 的完备事件组, $P(A) = p_1, P(B) = p_2, P(C) = p_3$. 对试验 S 进行n次独立重复试 验时，用 X_1, X_2, X_3 分别表示 A, B, C 发生的次数，则 (X_1, X_2, X_3) 的联合分布是

$$P\left(X_1=i, X_2=j, X_3=k\right)=\frac{n!}{i!j!k!} p_1^i p_2^j p_3^k$$

其中 $i, j, k \geqslant 0, i+j+k=n$.

将 $1,2, \cdots, n$ 分成有次序的3组, 不考虑每组中元素的次序, 第 $1,2,3$ 组分别有 i, j, k 个元素的不同结果共有

$$N=\frac{n!}{i!j!k!}$$

个。用第l个分组结果 $\left\{a_1, a_2, \cdots, a_i\right\} \equiv A_l,\left\{b_1, b_2, \cdots, b_j\right\} \equiv B_l,\left\{c_1, c_2, \cdots, c_k\right\} \equiv C_l$ 表示第 $a_1, a_2, \cdots, a_i$ 次试验 A 发生，第 $b_1, b_2, \cdots, b_j$ 次试验 B 发生, 第 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 次试验 C 发生, 则

$$P\left(A_l B_l C_l\right)=p_1^i p_2^j p_3^k, 1 \leqslant l \leqslant N$$

因为对于不同的l，事件 $A_l B_l C_l$ 互不相容，所以得到

$$\begin{aligned}
P\left(X_1=i, X_2=j, X_3=k\right) & =P\left(\bigcup_{l=1}^N A_l B_l C_l\right) \\
& =\sum_{l=1}^N P\left(A_l B_l C_l\right)=\frac{n!}{i!j!k!} p_1^i p_2^j p_3^k
\end{aligned}$$

连续型随机向量

联合密度函数

设 (X, Y) 是随机向量，如果有 R^2 上的非负函数 $f(x, y)$ 使得对 R^2 的任何**长方形子集**

$$D=\{(x, y) \mid a<x \leqslant b, c<y \leqslant d\}$$

有

$$P((X, Y) \in D)=\iint_D f(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{~d} y$$

则称 (X, Y) 是连续型随机向量, 并称 $f(x, y)$ 是 (X, Y) 的联合概率密度。

示性函数

设 $f(x, y)$ 是 (X, Y) 的联合密度. 可以证明对 R^2的**任何子区域**B, 有

$$\begin{aligned}
P((X, Y) \in B) & =\iint_{R^2} \mathrm{I}[(x, y) \in B] f(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{~d} y \\
& =\iint_B f(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{~d} y
\end{aligned}$$

其中

$$\mathrm{I}[(x, y) \in B]= \begin{cases}1, & \text { 当 }(x, y) \in B \\ 0, & \text { 否则 }\end{cases}$$

是集合 B 的示性函数，也常简写成 $\mathrm{I}[B]$.

> **Fubini定理**
>
> 设 D 是 R^2 子区域，函数 $h(x, y)$ 在 D 中非负，或 $|h(x, y)|$ 在 D 上的积分有限。用 $\mathrm{I}[D]$ 表示 D 的示性函数, 则
>
> $$\begin{aligned}
> \iint_D h(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{~d} y & =\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \mathrm{I}[D] \mathrm{d} y\right) \mathrm{d} x \\
> & =\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \mathrm{I}[D] \mathrm{d} x\right) \mathrm{d} y
> \end{aligned}$$
>
> 定理给出了化二重积分为一元积分的方法。注意，计算
>
> $$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \mathrm{I}[D] \mathrm{d} y\right) \mathrm{d} x$$
>
> 时, 将 x 视为常数先对 y 积出 $\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \mathrm{I}[D] \mathrm{d} y$，然后再对 x 进行积分。

边缘密度函数

如果 $f(x, y)$ 是随机向量 (X, Y) 的联合密度，则称 X, Y 各自的概率密度为 $f(x, y)$ 或 (X, Y) 的边缘密度，下 面计算 (X, Y) 的边缘密度。对任何 X，从概率密度的定义和

$$\begin{aligned}
P(X \leqslant x) & =P(X \leqslant x, Y<\infty) \\
& =\int_{-\infty}^x\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) d y\right) d x
\end{aligned}$$

知 X 有边缘密度（Y的情形类似）

$$f_x(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$$

求解示例：二维均匀分布

设 D 是 R^2 的子区域，D 的面积 $m(D)$ 是正数。如果 (X,Y) 有联合密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{m(D)}, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$$

则称 (X,Y) 在 D 上均匀分布，记做 $(X,Y)\sim\mathcal{U}(D)$.

> **【例题】** 设 (X,Y) 在单位圆 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\right\}$ 内均匀分布，求 X 和 Y 的概率密度。
>
> **【解答】** 用 $\mathrm{I}[D]$ 表示 D 的示性函数，即
>
> $$\mathrm{I}[D]=\mathrm{I}\left[x^2+y^2\leqslant 1\right]=\begin{cases}1, & \text{当 } x^2+y^2\leqslant 1\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$
>
> 则 (X,Y) 有联合密度 $f(x,y)=\frac{1}{\pi}\mathrm{I}[D]$。
>
> X 只在 $[-1,1]$ 中取值，用上一小节得到的公式来求：（Y的情况类似，**注意要写范围**）
>
> $$\begin{aligned} f_x(x)&=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{I}\left[x^2+y^2\leqslant 1\right]\mathrm{d}y\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{I}\left[|y|\leqslant\sqrt{1-x^2}\right]\mathrm{d}y\\ &=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2},|x|\leqslant 1\end{aligned}$$

独立性

设 X,Y 分别有概率密度 $f_x(x),f_y(y)$。则 X,Y 独立的充分必要条件是随机向量 (X,Y) 有联合密度

$$f(x,y)=f_x(x)f_y(y)$$

> **【证明】** 只需证明$f(x,y)=f_x(x)f_y(y)\Leftrightarrow F(x,y)=F_x(x)F_y(y)$即可。

设 X 有概率密度 $f_x(x)$，则 X 的取值范围是 $\{x\mid f_x(x)>0\}$。如果观测到 $X=x$，则 $f_x(x)>0$。

设 (X,Y) 有联合密度 $f(x,y)$，对于确定的 x，已知 $X=x$ 时，Y 的取值范围是$\{y\mid f(x,y)>0\}$。

如果 X,Y 独立，则已知 $X=x$ 时，可将 Y 的取值范围写成$\{y\mid f_X(x)f_Y(y)>0\}=\{y\mid f_Y(y)>0\}$。

定理1

设 (X,Y) 是随机向量。已知 $X=x$ 时，如果 Y 的取值范围和 x 有关，则 X,Y 不独立。

定理2

若连续型随机向量 $(X_1,\ldots,X_n)$ 的概率密度函数 $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ 可表为 n 个函数 $g_1,\ldots,g_n$ 之积，其中 g_i 只依赖于 x_i，即

$$f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=g_1\left(x_1\right)\cdots g_n\left(x_n\right)$$

则 $X_1,\ldots,X_n$ 相互独立，且 X_i 的边缘密度函数 $f_i\left(x_i\right)$ 与 $g_i\left(x_i\right)$ 只相差一个常数因子。

离散型随机向量的函数

Possion分布的可加性

如果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，$X_i\sim\mathcal{P}\left(\lambda_i\right)$，则 $Z_n=X_1+X_2+\cdots+X_n\sim\mathcal{P}\left(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n\right)$。

二项分布的可加性

如果 X_i 服从二项分布 $\mathcal{B}\left(m_i,p\right),X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，则它们的和 $Z_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 服从二项分布 $\mathcal{B}\left(m_1+m_2+\cdots+m_n,p\right)$。

连续型随机向量的函数

设随机向量 (X,Y) 有联合密度 $f(x,y),U=u(x,y)$ 是二元函数，则 $U=u(X,Y)$ 是随机变量。于是可以研究 U 的概率密度的计算问题。

瑞利密度函数

设 X, Y 独立，都服从标准正态分布 $N(0,1)$，求脱靶量 $R=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度。

【解】(X, Y) 有联合密度

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi} \exp \left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$

R 在 $(0, \infty)$ 中取值。定义 $D=\left\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leqslant r\right\}$。对 $r>0$，得到 R 的分布函数

$$\begin{aligned}
F_R(r) & =P\left(\sqrt{X^2+Y^2} \leqslant r\right) \\
& =\iint_D \frac{1}{2\pi} \exp \left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \mathrm{d} x \mathrm{~d} y \\
& =\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d} \theta \int_0^r \mathrm{e}^{-z^2/2} z \mathrm{~d} z \quad [\text{取 } x=z \cos \theta, y=z \sin \theta] \\
& =\int_0^r \mathrm{e}^{-z^2/2} z \mathrm{~d} z
\end{aligned}$$

$F_R(r)$ 连续，求导得到 R 的概率密度

$$f_R(r)=r \mathrm{e}^{-r^2/2}, r>0$$

称为瑞利概率密度。

$U=X+Y$的概率密度

设 (X, Y) 有联合密度 $f(x, y)$，则 $U=X+Y$ 有概率密度

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x, u-x) \mathrm{d} x$$

当 X, Y 独立时，$U=X+Y$ 有概率密度

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(u-x) \mathrm{d} x$$

【解】对 $x>0$，利用 $\mathrm{I}[x+y \leqslant u]=\mathrm{I}[y \leqslant u-x]$ 得到

$$\begin{aligned}
F_u(u) & =P(U \leqslant u)=P(X+Y \leqslant u) \\
& =\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \mathrm{I}[x+y \leqslant u] \mathrm{d} y\right) \mathrm{d} x \\
& =\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{u-x} f(x, y) \mathrm{d} y\right) \mathrm{d} x .
\end{aligned}$$

分布函数 $F_u(u)$ 是 u 的连续函数。对 u 求导数，并让求导数穿过第一个积分号，得到 U 的概率密度。

$V=X-Y$的概率密度

设 (X, Y) 有联合密度 $f(x, y)$，则 $V=X-Y$ 有概率密度

$$f_V(v)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x, x-v) \mathrm{d} x$$

特别当 X, Y 独立时，$V=X-Y$ 有概率密度

$$f_V(v)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(x-v) \mathrm{d} x$$

微分形式的概率密度

如果平面的开集 D 使得 $P((X, Y) \in D)=1$，且 D 中的连续函数 $g(x, y)$ 使得

$$P(X=x, Y=y)=g(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{~d} y,(x, y) \in D$$

则

$$f(x, y)=g(x, y),(x, y) \in D$$

是 (X, Y) 的联合密度。

> 和一元情况相似，在应用上述结论时，要遵守以下约定:
>
> 1. 只有在 $A=B$ 时，才能写 $P(A)=P(B)$;
> 2. 只有在 $A=\bigcup_{i=1}^n A_i$, 且 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 作为集合互不相交 时, 才能写
>
> $$P(A)=\sum_{i=1}^n P\left(A_i\right)$$

坐标变换

如果 $x=x(u,v),y=y(u,v)$ 在平面的开集 D 内有连续的偏导数，并且雅可比行列式

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\partial x/\partial u & \partial x/\partial v\\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v\end{vmatrix}\neq 0$$

则有

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=|J|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,\quad (u,v)\in D$$

其中$|J|$是J的绝对值。

> 设(X,Y)有联合密度$f(x,y),(U,V)$由线性变换$U=2X-Y,V=2X+3Y$决定，求(U,V)的联合密度。
>
> 【解】从$u=2x-y,v=2x+3y$解出 $x=(3u+v)/8,\quad y=(-u+v)/4,$
>
> 并且$J^{-1}=\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=8,\quad J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{8}$
>
> 对于(u,v)，从
>
> $$\begin{aligned}P(U=u,V=v)&=P(2X-Y=u,2X+3Y=v)\\&=P\left(X=\frac{3u+v}{8},Y=\frac{v-u}{4}\right)\\&=f\left(\frac{3u+v}{8},\frac{v-u}{4}\right)|J|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\end{aligned}$$
>
> 得到(U,V)的联合密度
>
> $$g(u,v)=\frac{1}{8}f\left(\frac{3u+v}{8},\frac{v-u}{4}\right)$$

二维正态分布

如果 Y_1,Y_2 **独立**，都服从标准正态分布 $N(0,1)$，则 $Y=(Y_1,Y_2)$ 有联合密度

$$\varphi\left(y_1,y_2\right)=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{y_1^2+y_2^2}{2}\right)$$

这时称 $Y=(Y_1,Y_2)$ 服从**二维标准正态分布**，记作$Y\sim N(0,I)$。

设 $Y=(Y_1,Y_2)$ 服从二维标准正态分布 $N(0,I),ad-bc\neq 0$。定义

$$\begin{cases}X_1=aY_1+bY_2+\mu_1\\X_2=cY_1+dY_2+\mu_2\end{cases}$$

则称 (X_1,X_2) 服从的分布为二维正态分布。

引入

$$\sigma_1=\sqrt{a^2+b^2},\sigma_2=\sqrt{c^2+d^2},\rho=(ac+bd)/\left(\sigma_1\sigma_2\right)$$

则可以把 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2)$ 的联合密度写成（略去推导）

$$f\left(x_1,x_2\right)=\tfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\tfrac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\tfrac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\tfrac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\tfrac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

因为中只有 5 个参数 $\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho$，所以又称$(X_1,X_2)$服从参数为$\left(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho\right)$的正态分布，记做

$$(X_1,X_2)\sim N\left(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho\right)$$

定理

如果 (X_1,X_2) 有上面的联合密度$f(x_1,x_2)$，则

(1) $X_1\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right),X_2\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$；

(2) X_1,X_2独立的充分必要条件是$\rho=0$；

(3) 当$a_1a_4-a_3a_2\neq 0$，随机向量(Z_1,Z_2)服从二维正态分布，其中

$$\begin{cases}Z_1=a_1X_1+a_2X_2+c_1\\Z_2=a_3X_1+a_4X_2+c_2\end{cases}$$

(4) 线性组合 $Z_1=a_1X_1+a_2X_2+c_1$ 服从正态分布。

定理的推论

- 如果 $Y=(Y_1,Y_2)$ 服从二维标准正态分布 $N(0,I)$，$X_1=Y_1+bY_2, X_2=-bY_1+Y_2$，则 X_1,X_2 独立，都服从正态分布 $N\left(0,1+b^2\right)$；
- 如果 $Y=(Y_1,Y_2)$ 服从二维标准正态分布 $N(0,I), a, b$ 是不全为0的常数，则线性组合 $X=aY_1+bY_2+c$ 服从正态分布；
- 如果 $X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right), Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$ 独立，且 X,Y 独立，常数 $a\neq 0$，则线性组合$U=aX+bY+c$服从正态分布。

条件分布

设 A,B 是事件，$P(A)>0$。已知 A 发生的条件下，B 的条件概率是

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

以后称 $P(B\mid A)$ 是 $B\mid A$ 的概率。完全类似地，如果随机变量 X 的取值是 $x_1,x_2,\cdots$，则称

$$h_i=P\left(X=x_i\mid A\right), i=1,2,\cdots$$

为 $X\mid A$ 的概率分布。

> 【例题】设 (X,Y) 是离散型随机向量，有联合分布
>
> $$p_{ij}=P\left(X=x_i,Y=y_j\right)>0,\quad i,j=1,2,\cdots$$
>
> 对确定的 j，计算 $X\mid\{Y=y_j\}$ 的分布；对确定的 i，计算 $Y\mid\{X=x_i\}$ 的分布。
>
> 【解答】X,Y分别有边缘分布
>
> $$\begin{aligned}p_i=P\left(X=x_i\right)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}, i=1,2,\cdots\\ q_j=P\left(Y=y_j\right)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}, j=1,2,\cdots\end{aligned}$$
>
> 根据条件概率公式得到 $X\mid\{Y=y_j\}$ 的概率分布
>
> $$P\left(X=x_i\mid Y=y_j\right)=\frac{p_{ij}}{q_j}, i=1,2,\cdots$$
>
> 同理得到 $Y\mid\{X=x_i\}$ 的概率分布
>
> $$P\left(Y=y_j\mid X=x_i\right)=\frac{p_{ij}}{p_i}, j=1,2,\cdots$$

根据微分法知道，已知 $Y=y$ 的条件下，X 有条件密度

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

以后称 $f_{X|Y}(x\mid y)$ 为 $X\mid\{Y=y\}$ 的概率密度。

> $$\begin{aligned}P(X=x\mid Y=y)&=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}\\&=\frac{f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{f_Y(y)\mathrm{d}y}\\&=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

设随机向量 (X,Y) 有联合密度 $f(x,y), Y$ 有边缘密度 $f_Y(y)$。如果在 y 处 $f_Y(y)>0$，则称

$$F_{X|Y}(x\mid y)=P(X\leqslant x\mid Y=y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(s,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}s, x\in R$$

为 $X\mid\{Y=y\}$ 的分布函数，简称为**条件分布函数**。称

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, x\in R$$

为 $X\mid\{Y=y\}$ 的概率密度，简称为**条件密度。**

根据上述定义，可以得到条件密度和条件分布函数的关系如下：

如果 y 使得 $f_Y(y)>0$，则

$$F_{X|Y}(x\mid y)=P(X\leqslant x\mid Y=y)=\int_{-\infty}^{x}f_{X|Y}(s\mid y)\mathrm{d}s, x\in R$$

容易看出，X,Y 独立的充分必要条件是

$$F_{X|Y}(x \mid y)=F_X(x),\ f_{X|Y}(x \mid y)=f_X(x)$$

之一对所有的 x, y 成立。

> 【例题】设炮击的目标是 (μ_1, μ_2)，弹落点的坐标(X, Y)服从正态分布 $N\left(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho\right)$，有概率密度
>
> $$f(x, y)=\frac{1}{2 \pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{\left(x-\mu_1\right)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2 \rho\left(x-\mu_1\right)\left(y-\mu_2\right)}{\sigma_1 \sigma_2}+\frac{\left(y-\mu_2\right)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$
>
> 已知弹落点的纵坐标是 y 时，计算弹落点横坐标的概率密度。
>
> 【解答】对确定的 y，需要计算 $X \mid\{Y=y\}$ 的概率密度 $f_{X|Y}(x \mid y)$。
>
> 定义
>
> $$\mu_y=\mu_1+\rho\left(\sigma_1 / \sigma_2\right)\left(y-\mu_2\right), \sigma_y^2=\left(1-\rho^2\right) \sigma_1^2$$
>
> 用 $A(x) \propto B(x)$ 表示函数 $A(x)$ 和 $B(x)$ 相差一个常数因子。对于确定的 y，作为 x 的函数，有
>
> $$\begin{aligned} f_{x|Y}(x \mid y) \propto & \quad f(x, y) \\ \propto & \quad \exp \left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{\left(x-\mu_1\right)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2 \rho\left(x-\mu_1\right)\left(y-\mu_2\right)}{\sigma_1 \sigma_2}\right]\right\} \\ \propto & \quad \exp \left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right) \sigma_1^2}\left[\left(x-\mu_1\right)^2-2 \rho\left(\sigma_1 / \sigma_2\right)\left(x-\mu_1\right)\left(y-\mu_2\right)\right]\right\} \\ \propto & \quad \exp \left\{-\frac{1}{2 \sigma_y^2}\left[x-\mu_1-\rho\left(\sigma_1 / \sigma_2\right)\left(y-\mu_2\right)\right]^2\right\} \\ \propto & \quad \frac{1}{\sqrt{2 \pi} \sigma_y} \exp \left[-\frac{\left(x-\mu_y\right)^2}{2 \sigma_y^2}\right] . \end{aligned}$$
>
> 说明 $X \mid\{Y=y\}$ 服从正态分布 $N\left(\mu_y, \sigma_y^2\right)$。