1 磁力与磁场

1.1 习题4.1

取一个电流元$\mathrm{d}\vec{l}$，以导线中点为原点O，OP方向为x轴正方向建立坐标系。由BSL定律（由于电流元到P点的距离r与题设中的r容易混淆，这里我们暂且将题设中的r改称a。）

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

方向是垂直纸面向里的，大小

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{Ia\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

因此

$$B=\int\mathrm{d}B=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{Ia\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\frac{l}{\sqrt{l^2+4a^2}}$$

这里用到了积分公式

$$\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}=\frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$$

当$l>>a$时，(3)式第二项近似为1，即近似为无限长导线时的情况，即

$$B\approx\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

1.2 习题4.4

（1）先来研究一个半径为r的圆环中心处的磁场，设电流方向为顺时针，则磁场方向应该垂直纸面向里，大小

$$B=\int\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi r}\frac{I\mathrm{d}l}{r^2}=\frac{\mu_0 I}{2r}$$

这里要进行单位化，则单位长度内包含的线圈匝数为

$$n=\frac{N}{b-a}$$

则$r\sim r+\mathrm{d}r$内的线圈产生的磁感应强度

$$B' \mathrm{d}r = nB\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 IN}{2r(b-a)}\mathrm{d}r$$

总的磁感应强度

$$B_O = \int_a^b B' \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 IN}{2r(b-a)} \ln\frac{b}{a}$$

（2）仍然先来研究一个半径为r的圆环中心处的磁场，将$\vec{r}$分解为$\overrightarrow{r_{\text{平行}}} + \overrightarrow{r_{\text{垂直}}}$，由对称性，垂直方向分量引起的磁感应强度将被抵消，因此只需要考虑平行分量，则（由于电流元到O点的距离r与题设中的r容易混淆，这里我们暂且将题设中的r改称s。）

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ir\mathrm{d}l}{(r^2+s^2)^{3/2}}$$

因此

$$B = \int_0^{2\pi r} \mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I r^2}{2(r^2+s^2)^{3/2}}$$

则r～$r+\mathrm{d}r$内的线圈产生的磁感应强度

$$B' \mathrm{d}r = nB\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 INr^2}{2(b-a)(r^2+s^2)^{3/2}}\mathrm{d}r$$

总的磁感应强度

$$B_S = \int_a^b B' \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 IN}{2(b-a)}\left[\sinh^{-1}(\frac{b}{s}) - \sinh^{-1}(\frac{a}{s}) - \frac{b}{\sqrt{b^2+s^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2+s^2}}\right]$$

这里用到了积分公式

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \sinh^{-1}(\frac{x}{a}) - \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

1.3 习题4.8

电流为

$$I = \frac{e}{\frac{2\pi r}{v}} = 1.056\times 10^{-3}\mathrm{A}$$

由上题（1）的结果，磁感应强度应为

$$B = \int \mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{2r} = 12.5\mathrm{T}$$

1.4 习题4.12

内部圆柱的电流密度

$$j_1 = \frac{I}{\pi a^2}$$

外部圆柱壳的电流密度

$$j_2 = \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)}$$

（1）

由环路定理，取同心圆为环路，半径为r，则

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \pi r^2 j_1$$

即

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \pi r^2 \cdot \frac{I}{\pi a^2}$$

得

$$B = \frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2}$$

（2）

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

则

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

（3）

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \left[I - (\pi r^2 - \pi b^2) j_2 \right]$$

则

$$B = \frac{\mu_0 \left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} I \right)}{2\pi r}$$

（4）

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0(I - I) = 0$$

即

$$B = 0$$

1.5 习题4.16

先来计算沿着轴线方向的磁感应强度。

由半无限长通电螺线管产生的磁场强度的计算公式

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 nI$$

P点右侧有限长通电螺线管产生的磁感应强度的计算公式

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 nI \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

> 这里用到了有线长度通电螺线管的磁感应强度计算公式：
>
> 设O为长为l的通电螺线管的中心，P距离O为$x(-\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2})$。
>
> 则P处的磁感应强度（沿着轴线方向）为
>
> $$B = \frac{\mu_0 nI}{2}\left[\frac{x + \frac{l}{2}}{\sqrt{(x + \frac{l}{2})^2 + R^2}} - \frac{x - \frac{l}{2}}{\sqrt{(x - \frac{l}{2})^2 + R^2}}\right]$$

于是轴线方向磁感应强度为

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 nI \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

再来计算沿着径向方向的磁感应强度。

取一个以轴线为轴，r为半径，高度为$\mathrm{d}z$的圆柱作为高斯面，则

$$\iint_{(S)} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{(S_{上})} \vec{B}_{z+\mathrm{d}z} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{(S_{下})} \vec{B}_z \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{(S_{侧})} \vec{B}_r \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

整理上式，则

$$\pi r^2(B_{z+\mathrm{d}z} - B_z) + B_r \cdot 2\pi r \cdot \mathrm{d}z = 0$$

由Lagrange中值定理

$$B_{z+\mathrm{d}z}-B_z=B_z'\mathrm{d}z$$

故解得

$$B_r=-\frac{1}{2}rB_z'=-\frac{1}{4}\cdot\frac{\mu_0 nIrR^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

1.6 习题4.17

（1）

根据动量定理，某一时刻$t\sim t+\Delta t$时间内有

$$(-F_{浮}+mg+BIl)\Delta t=m\Delta v$$

由初始条件有

$$mg=F_{浮}$$

因此

$$Bl\Delta q=m\Delta v$$

设初速度为v_0，上式对两边求和，得到

$$Blq=mv_0$$

由能量关系有

$$\frac{1}{2}mv_0^2=mgh$$

代入得

$$q=\frac{m\sqrt{2gh}}{Bl}$$

（2）

将数据（$g=9.8\mathrm{m/s^2}$）代入得

$$q=3.13\mathrm{C}$$

1.7 习题4.18

（1）

由于是静磁场，所以牛顿第三定律适用，所求即长直导线对圆电流的作用力。由对称性知，过圆心做垂直于I_1的直径，则关于这条直径上下对称的两电流元受到的磁力在垂直直径方向上的分量将被抵消。

对I_1使用环路定理

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_1$$

距离I_1为r处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

以圆心为原点，上述直径向右为正方向建立极轴，位于(R, θ)处的电流元所受到的磁力的横向分量为

$$F = B_r I_2 R \mathrm{d}\theta \cos\theta$$

其中

$$B_r = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(L + R\cos\theta)}$$

故

$$F_{磁} = 2\int_0^{\pi} \frac{\mu_0 I_1 I_2 R\cos\theta}{2\pi(L + R\cos\theta)}\mathrm{d}\theta = \mu_0 I_1 I_2 \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 - R^2}}\right)$$

则圆电流对长直导线的作用力为

$$-F_{磁} = \mu_0 I_1 I_2 \left(\frac{L}{\sqrt{L^2 - R^2}} - 1\right)$$

这里用到了积分公式($a^2 > b^2$)

$$\int \frac{1}{a + b\cos x}\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\arctan\left(\frac{b+a}{b-a}\tan\frac{x}{2}\right) + C$$

（2）

无任何转动，磁力矩为0。

1.8 习题4.23

$$\vec{F}=I_1\overrightarrow{L_1}\times\vec{B}+I_1\overrightarrow{L_2}\times\vec{B}+I_2\overrightarrow{L_3}\times\vec{B}+I_2\overrightarrow{L_4}\times\vec{B}$$

其中

$$I=I_1+I_2$$

$$\overrightarrow{L_1}+\overrightarrow{L_2}=\overrightarrow{L_3}+\overrightarrow{L_4}=\vec{L}$$

于是进一步化简

$$\vec{F}=I_1(\overrightarrow{L_1}+\overrightarrow{L_2})\times\vec{B}+I_2(\overrightarrow{L_3}+\overrightarrow{L_4})\times\vec{B}=I\vec{L}\times\vec{B}$$

1.9 习题4.27

将电子的速度分解为平行磁场方向v_1和垂直磁场方向v_2，平行磁场方向做匀速直线运动，垂直磁场方向做匀速圆周运动。

$$qBv_2=m\frac{v_2^2}{R}$$

即

$$v_2=\frac{qBR}{m}$$

回旋周期

$$T=\frac{2\pi R}{v_2}=\frac{2\pi m}{qB}$$

平行磁场方向

$$v_1T=h$$

于是

$$v_1=\frac{h}{T}=\frac{qBh}{2\pi m}$$

于是速度为

$$v=\sqrt{v_1^2+v_2^2}=\frac{qB}{m}\sqrt{R^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}$$

1.10 习题4.32

将初速度分解为垂直磁场方向v_1和平行磁场方向v_2，于是

$$v_1 = v_0 \sin\beta$$
$$v_2 = v_0 \cos\beta$$

在平行磁场方向上始终做匀速直线运动，因此

$$x = v_2 t = v_0 t \cos\beta$$

粒子在z轴负方向受到重力，将v_1分解为v_1^+, v_1^-，其中v_1^-产生的洛伦兹力抵消重力，即

$$qv_1^- B = mg$$

所以

$$v_1^- = \frac{mg}{qB}$$

所以

$$v_1^+ = v_1 + v_1^- = v_0 \sin\beta + \frac{mg}{qB}$$

粒子在yOz平面内做以v_1^-为速度大小的匀速直线运动（朝向y轴负方向）和以v_1^+为速度大小的匀速圆周运动。

匀速圆周运动的运动半径为

$$R = \frac{mv_1^+}{qB} = \frac{mv_0 \sin\beta}{qB} + \frac{m^2 g}{q^2 B^2}$$

这个匀速直线运动的运动轨迹为

$$z = z_0$$
$$y = -\frac{mg}{qB} t$$

这个匀速圆周运动的运动轨迹为

$$z = z_t - R + R\cos\theta$$
$$y = y_t + R\sin\theta$$

其中

> $$\theta=\omega t=\frac{v_1^+}{R}t=\frac{qB}{m}$$
>
> 于是
>
> $$z=\frac{mv_0\sin\beta}{qB}-\left(\frac{mv_0\sin\beta}{qB}+\frac{m^2g}{q^2B^2}\right)+\left(\frac{mv_0\sin\beta}{qB}+\frac{m^2g}{q^2B^2}\right)\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

> 怎么说呢做到这里我才意识到应该不考虑重力。。。

在yOz平面上做匀速圆周运动，有

$$R=\frac{mv_0\sin\beta}{qB}$$

角速度为

$$\omega=\frac{v_1}{R}=\frac{qB}{m}$$

于是

$$y=\frac{mv_0\sin\beta}{qB}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)$$
$$z=\frac{mv_0\sin\beta}{qB}\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)$$