微积分 I

第 14 周答疑课

助教：黄瑞轩

December 2, 2022

习题解答

习题 3.6，T5

- 对于（2）这样的题，构造辅助函数，讨论函数零点
- 对于（3）这样的题，构造辅助函数，讨论函数增减性

（2）证明：$x > 0$ 时 $\ln(1+x) > \dfrac{\arctan x}{1+x}$

提示 等价于 $(x+1)\ln(x+1) > \arctan x$，这是朝着有利于得出零点显式表达的方向转化的。

（3）证明：$0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ 时 $\dfrac{\tan x_2}{\tan x_1} > \dfrac{x_2}{x_1}$

证 等价于当 $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{\tan x_2}{x_2} > \frac{\tan x_1}{x_1}$.

设 $f(x) = \frac{\tan x}{x}$，则

$$f'(x) = \frac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2} = \frac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x} \geqslant \frac{x - \sin x}{x^2}\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

因 $x > \sin x$，故有 $f'(x) > 0$，这说明 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内增加，结论得证。 □

（8）证明：$x > 0, y > 0, 0 < \alpha < \beta$ 时 $(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha} > (x^\beta + y^\beta)^{1/\beta}$

习题 3.6，T6

这道题比较简单，说一下大家在概念上可能会搞混的点：

- 极值点是 “点” 还是 “坐标”?
- 极值点与驻点的关系
- 不连续极值点的情况
- 区间端点（定义，见 P171 讨论）

书上 P170 页的定理 3.6.3 给出了判断驻点是极值点的充分条件。
定理 3.6.3 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处满足 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$.
(1) 若 $f''(x_0)<0$, 则 x_0 是极大值点, 极大值为 $f(x_0)$;
(2) 若 $f''(x_0)>0$, 则 x_0 是极小值点, 极小值为 $f(x_0)$.

习题 3.6，T19

按定义来求就行。P173
定义 3.6.1 (凸函数) 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续. 如果对 I 中任意两点 x_1, x_2, 都有不等式

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

成立, 那么称 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数 (向下凸).
直接利用定义去判断函数的凹凸性是比较困难的. 有如下定理:
定理 3.6.4 设 $f(x)$ 在区间 I 内可导, 并且其一阶导数 $f'(x)$ 在 I 内严格单调增, 则 $f(x)$ 在 I 内是凸函数.
定理 3.6.6 (拐点) 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续, 在 x_0 的一个去心邻域内二阶可导, 且在 x_0 的两侧二阶导数异号, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点. 特别地, 当 $f(x)$ 在点 x_0 的二阶导数存在时, 点 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点的必要条件是 $f''(x_0)=0$.

习题 3.6，T21

琴生不等式。将琴生不等式应用在二点上，就回到了凸函数的基本性质：过一个凸函数上任意两点所作割线一定在这两点间的函数图象的上方，即：

$$tf(x_1)+(1-t)f(x_2)\geq f(tx_1+(1-t)x_2), 0\leq t\leq 1.$$

习题 3.6，T27

渐近线（一般 $y-x$ 形式）:

- 垂直渐近线
- 水平渐近线
- 一般的斜渐近线

参数方程表示的曲线的渐近线：转化

知识回顾

原函数
不定积分
不定积分表
不定积分的性质

- 求导和积分的互逆性
- 线性性
- 凑微分法、换元法、分部积分法
- 分项积分法（三角函数公式、分解定理）
- 万能公式

定理 4.2.4(分解定理) 设有真分式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}\quad(a_0\neq 0,b_0\neq 0).$$

若 $Q(x)$ 可以如上分解为一次因式和二次质因式的乘积:

$$Q(x)=b_0\left(x-a_1\right)^{k_1}\cdots\left(x-a_r\right)^{k_r}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\lambda_1}\cdots\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{\lambda_s},$$

则真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 可以唯一地分解为以下简单分式之和:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}=&\frac{A_1}{\left(x-a_1\right)^{k_1}}+\frac{A_2}{\left(x-a_1\right)^{k_1-1}}+\cdots+\frac{A_{k_1}}{x-a_1}+\cdots\\&+\frac{B_1}{\left(x-a_r\right)^{k_r}}+\frac{B_2}{\left(x-a_r\right)^{k_r-1}}+\cdots+\frac{B_{k_r}}{x-a_r}\\&+\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\lambda_1}}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\lambda_1-1}}+\cdots+\frac{M_{\lambda_1}x+N_{\lambda_1}}{x^2+p_1x+q_1}+\cdots\\&+\frac{R_1x+S_1}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{\lambda_s}}+\frac{R_2x+S_2}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{\lambda_s-1}}+\cdots+\frac{R_{\lambda_s}x+S_{\lambda_s}}{x^2+p_sx+q_s},\end{aligned}$$

其中 $A_1,\cdots,A_{k_1};B_1,\cdots,B_{k_r};M_1,\cdots,M_{\lambda_1};N_1,\cdots,N_{\lambda_1};R_1,\cdots,R_{\lambda_s};S_1,\cdots,S_{\lambda_s}$ 都是实常数.

结语

求函数的不定积分与求函数的导数明显不同。求函数的导数，总可以遵循求导法则和基本求导公式去做，而求一个函数的不定积分却没有固定的规则可循，只是有几个方法. 对具体题目要灵活应用所学的几个方法和做题技巧。计算能力的培养需要多做题、用心思考和及时总结。