1　格与布尔代数

1.1 格

1.1.1 格的定义

（1）在部分序集$\langle A,\leq\rangle$中，如果对任意的$a,b\in A$，$\{a,b\}$都有一个最大下界与最小上界，则称$\langle A,\leq\rangle$是格。

（2）$\{a,b\}$的最大下界记为$a*b$，最小上界记为$a\oplus b$，格$\langle A,\leq\rangle$也可写成$\langle A,*,\oplus\rangle$。

（3）格中的最小上界，最大下界是唯一的，否则就不能称之为格。

（4）举例

① A是集合，则$\langle\mathscr{P}(A),\subseteq\rangle$是格，$*,\oplus => \cap,\cup$

② $\mathbf{Z}$是整数集，则$\langle\mathbf{Z},|\rangle$是格，$*,\oplus => (,),[,]$

③ G是群，$L(G)=\{H|H\leq G\}$，则$\langle L(G),\subseteq\rangle$是格，$* => \cap$，$\oplus => \langle,\rangle$

tips: $\langle A,B\rangle=\langle A\cup B\rangle$是包含$A\cup B$的最小的群（证明：书130页）

④ G是群，$N(G)=\{H|H\lhd G\}$，则$\langle N(G),\subseteq\rangle$是格，运算同③，不同的是，由于A、B均是正规子群，则有$<A,B>=AB$，即$A\oplus B=AB$。

1.1.2 格的性质

（1）运算律

1、幂等律，即$a*a=a,x+x=x$

2、交换律，即$a*b=b*a$，$x+y=y+x$

3、结合律，即$a*(b*c)=(a*b)*c$，$x+(y+z)=(x+y)+z$

4、吸收律，即$a*(a+b)=a$，$x+(x*y)=x$

（2）这三个命题等价：$a\leq b$，$a*b=a$，$a+b=b$

（3）若A是格，对于A中的任意元素a,b,c，如果$b\leq c$，则$a*b\leq a*c$，$a+b\leq a+c$

（4）若A是格，对于A中的任意元素a,b,c，满足分配不等式：

$$\begin{aligned} a+(b*c)\leq(a+b)*(a+c) \\ a*(b+c)\geq(a*b)+(a*c) \end{aligned} \tag{1}$$

（5）若A是格，对于A中的任意元素a,b,c，

$$a \le b \Leftrightarrow a + (b * c) \le b * (a + c) \tag{2}$$

（6）若A是格，A的任意有限子集S必有最大下界和最小上界。

（7）对偶原理：$\le, \ge, *, +$换成$\ge, \le, +, *$也成立。

1.1.3 特殊的格

（1）如果A的任意子集均有最大下界和最小上界，称之为完全格；若A有限，则A是完全格；

（2）若A是格，若部分序集中有最大元（记为1）和最小元（记为0），则A中任意元素，有$0 \le a \le 1$，称之为有界格；完全格必是有界格。

（3）在有界格$< A, \le, 0, 1 >$中，如果$a * b = 0, a + b = 1$，则称a, b互为补元；一般的有界格中元素可能有多个补元，也可能没有补元；如果每个元素都至少有一个补，则称之为有补格。

（4）若A是格，对于A中的任意元素a, b, c，满足：

$$\begin{aligned} a + (b * c) = (a + b) * (a + c) \\ a * (b + c) = (a * b) + (a * c) \end{aligned} \tag{3}$$

则称之为分配格。

tips: 子集格是分配格，正整数整除格是分配格；有补格不一定是分配格，分配格不一定是有补格。

（5）任意一个线性序集（Hasse图是一条链）都是一个分配格。

（6）若A是分配格，对于A中的任意元素a, b, c，若$a * c = b * c, a + c = b + c$，则$a = b$。

（7）有界分配格A中，如果A的元素a有补元，则其补元唯一。

（8）若A是有界分配格，a, b的补元分别为a', b'，则

$$\begin{aligned} (a * b)' = a' + b' \\ (a + b)' = a' * b' \end{aligned} \tag{4}$$

（9）有补分配格称之为布尔格。（蕴含有界）

（10）在格A中，对于A中的任意元素a, b, c，如果$a \le b$时均有

$$a + (b * c) = b * (a + c) \tag{5}$$

（11）每个分配格都是模格。

（12）若A是模格，当且仅当，对于A中的任意元素a, b, c，如果$a \le b$，且$a * c = b * c, a + c = b + c$时有$a = b$。

1.2 作为代数系统的格

1.2.1 格的定义

若对于集合A，二元运算*和+满足结合律、交换律、吸收律，则称A是格。

1.2.2 子格

A是格，B是A的非空子集，如果B对*和+也封闭，则称B是A的子格。子格本身也是格。

1.2.3 直接积

设$< A_1, *, + >, < A_2, \wedge, \vee >$是两个格，直接积定义为$< A_1 \times A_2, *', +' >$

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) *' (b_1, b_2) = (a_1 * b_1, a_2 \wedge b_2) \\ (a_1, a_2) +' (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 \vee b_2)\end{aligned} \tag{6}$$

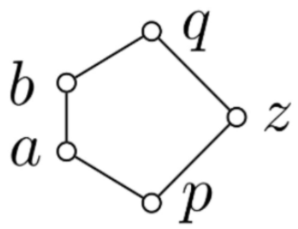
1.2.4 格的同态与同构

（1）基本定义与前面的一样。

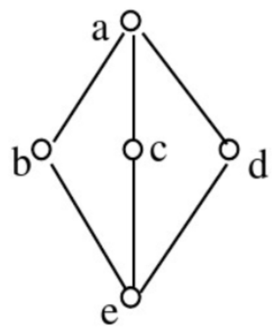
（2）格的同态映射是一种保序映射，反过来不一定成立。

（3）若$f : A_1 \to A_2$是双射，则f是同构映射当且仅当$a \leq_1 b \Leftrightarrow f(a) \leq_2 f(b)$

（4）格是模格当且仅当它不包含一个5元子格与下图同构。



（5）格是分配格当且仅当该格是模格并且不包含一个5元子格与下图同构。



1.3 布尔代数

1.3.1 布尔代数的定义

A是至少有两个元素的集合，*，+是定义在A上的二元运算，对于A中的任意元素a, b, c，如果

①交换律成立

②分配律成立

③有最大元、最小元

④有补元（内含补元唯一）

则称$< A, *, +, ', 0, 1 >$为布尔代数。

1.3.2 布尔代数性质

布尔代数相应的格是布尔格

1.3.3 子布尔代数

如果A是布尔代数，A'是A的子集，0,1∈A'，且A'关于*，+，' 运算封闭，称A'是A的子布尔代数。

1.3.4 布尔代数的同态和同构

1.3.5 布尔代数的原子表示

格A的最小元0的控制元素称为原子

在布尔格A中，任取非零元素b，原子a，或者$a \leq b$，或者$a \leq b'$。

1.3.6 布尔环

将+改造成$+' : a +' b = (a * b') + (a' * b)$，则$< A, *, +' >$是环。

1.3.7 布尔表达式

A是布尔代数，A上的布尔表达式定义为

① A中任何元素是布尔表达式

② 任何变元是布尔表达式

③ 如果a, b是布尔表达式，则$a', (a + b), (a * b)$是布尔表达式

有n个变元的布尔表达式叫做n元布尔表达式