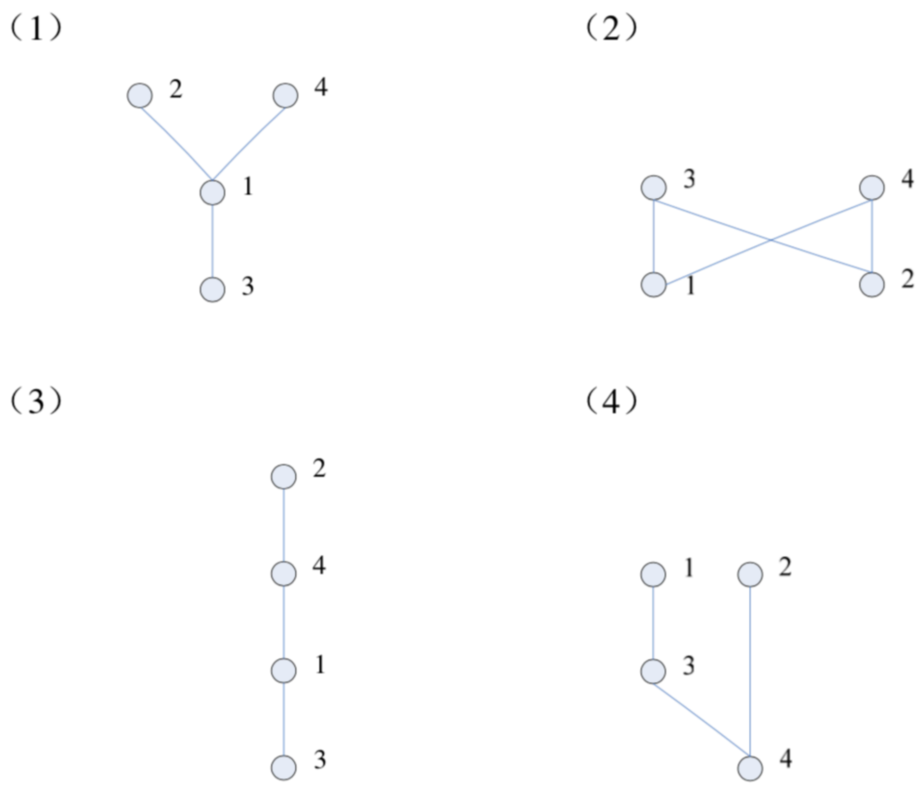
第8次作业

4.10

- B为X上的部分序，则B在X上有自反性，反对称性，传递性
- 自反性：A是X的子集，对任意$x \in A$,有$x \in X$,并且有$(x,x) \in (A \times A)$,考虑到B的自反性，$(x,x) \in B$,所以$(x,x) \in B \cap (A \times A)$
- 反对称性：对任意的（$x,y),(y,x) \in B \cap (A \times A)$,都有（$x,y),(y,x) \in B$,由B的反对称性得x=y，即交集的反对称性得证。
- 传递性：对任意的$x,y,z \in A,(x,y),(y,z) \in B \cap (A \times A)$,考虑B的传递性，有$(x,z) \in B$,又（$x,z$） $\in (A \times A)$,交集的传递性得证

4.13



4.15

这道题的证明和第10题的证明一样，也是证明部分序集，证明部分很简单。

关键是后续的最大最小元与极大极小元，显然最大元与极大元是不存在的。考虑关系存在约束$m*n>0$,所以正整数与负整数部分各存在一个极小元，即-1与1。而两个极小元说明没有最小元。

5.1

(1)

$<S,*>$ 不是群。它不满足封闭性。

(2)

$S=\{a+b\sqrt{2}|a,b\in\mathbf{Q}\}$,* 是普通的加法
直接验证：是群，是交换群，单位元是 $0+0\sqrt{2}$(或者 0),$(a+b\sqrt{2})'=-a-b\sqrt{2}$

(3)

是群，是交换群，单位元 I，逆元是逆矩阵

(4)

$<S,*>$ 是群，且是交换群。
单位元是 γ 。

$\alpha'=\delta$

$\beta'=\beta$

$\gamma'=\gamma$

$\delta'=\alpha$

(5)

是群，但不是交换群，单位元是1。当x > 0时，$x'=1$,当x < 0时, $x'=x$

(6)

$<S,*>$ 是群，且是交换群。
单位元是 1。
a 的逆元是 $a\cdot a'\equiv 1(\bmod p)$ 的解。

5.2

(1)证明$<S,*>$是群

封闭性：

$$a*b=a+b+ab=(a+1)(b+1)-1\neq -1\in S$$

结合律：

$$(a*b)*c=a+b+c+ab+bc+ac+abc=a*(b*c)$$

单位元:0

逆元：

$$a^{-1}=-\frac{a}{1+a}$$

(2)解方程$2*x*3=7$

$$\begin{aligned} 2*x*3 &= 12x+11=7 \\ \Longrightarrow\quad x= &-\frac{1}{3} \end{aligned}$$

5.5

(1)

- 若g是有限阶的

  设g的阶为k_1, g'的阶为k_2

  $g^{k_1}=e$, $(g')^{k_2}=e$, $g*g'=e$,

  同取k_1次幂，$g^{k_1}*(g')^{k_1}=e*(g')^{k_1}=e$, 故$k_2|k_1$.

  同取k_2次幂，同理 $k_1|k_2$.

  故$k_1=k_2$

- 若g是无限阶的

  即不存在n，使得$g^n=e$

  反证：假设存在$(g')^n=e$, 则$(g'*g)^n=e=(g')^n*g^n=e*g^n$

  则$g^n=e$，矛盾

  则g'是无限阶的

(2)

$g^k*(g')^k=g^{k-1}*(g*g')*(g')^{k-1}=e$

同理，$(g')^k*g^k=e$，故$(g^k)'=(g')^k$.

5.7

a 为二阶元，$a^2=e\Rightarrow a=a'$。

反证法：

假设存在$x\in G$，使$a*x\neq x*a$。

则$x'*a*x\neq a$。

而$(x'*a*x)^2=x'*a*x*x'*a*x=e$，

则$x'*a*x$也是二阶元，矛盾。

$\therefore$原命题成立。

5.8

$\because$ G是有限群，故$\forall x\in G$, x的阶数有限

$\forall x\in G$且$x\neq e$, 设x的阶数为n，$n\geq 2$

当$n>2$时，$x\neq x'$，否则有$x*x'=x^2=e$，阶为2，与阶大于2矛盾

由5(1)知，x与x'同阶，故阶数大于2的元素总是成对出现，阶数大于2的元素个数为偶数

因为一阶元只有e一个，故一定存在一个二阶元

5.9

充分性：

$\forall\ a,b\in H$， $a*b'\in H$

则

$a\in H\Rightarrow a*a'=e\in H$

$e,a\in H\Rightarrow e*a'=a'\in H$

$a,b\in H\Rightarrow a,b'\in H\Rightarrow a*(b')'=a*b\in H$

$\therefore <H,*>$ 是 $<G,*>$ 的子群。

必要性：

$<H,*>$ 是 $<G,*>$ 的子群

则

$\forall\ a,b\in H\Rightarrow a,b'\in H\Rightarrow a*b'\in H$ 。

5.11

$H\le G,K\le G$

$e\in H,e\in K\Rightarrow e\in H\cap K$

$a\in H\cap K\Rightarrow a\in H,a\in K\Rightarrow a'\in H,a'\in K\Rightarrow a'\in H\cap K$

$a,b\in H\cap K\Rightarrow a*b\in H,a*b\in K\Rightarrow a*b\in H\cap K$

$\therefore H\cap K$ 是 G 的子群。

$H\cup K$ 不一定是 G 的子群。

当 $H\subseteq K$ 或 $H\supseteq K$ 时， $H\cup K$ 为 K 或 H，是 G 的子群。

否则，不一定，例如取 a，b 使 $a\in H,a\notin K,b\notin H,b\in K$

不能确定 $a*b\in H\cup K$ 是否成立。

5.13

定义 5.5 $\langle G,*\rangle$ **是群，**H **是** G **的非空子集．如果**

1° $\forall a,b\in H$，$a*b\in H$，

2° $\forall a\in H$，$a'\in H$，

则称 $\langle H,*\rangle$ **是** $\langle G,*\rangle$ **的子群，并记为** $H\leqslant G$。

- $\forall f_1,f_2\in H, f_1\circ f_2=x+b_1+b_2\in H$
- 设G的单位元为e， $f\circ e=ae+b=ax+b$, 故$x=e$

设$\forall f\in H$, $f=x+b$的逆元为f', $f\circ f'=f'+b=e=x$, 故$f'=x-b\in H$

$f' \circ f = x + b - b = x = e$, 故$f'$为逆元，$f' \in H$

故H是G的子群。

5.18

- 存在性

  设g为G的生成元，g^n=e,由于d为n的因子，a= $g^{\frac{n}{d}}$ 为G中的d阶元，由定理5.10，G存在一个由a=$g^{\frac{n}{d}}$ 生成的一个d阶循环子群H。

- 唯一性

  假设G中存在另一个d阶子群H'，生成元为b=g^r，则b^d=e,即g^{rd}=e,n|rd,可得$r = m * \frac{n}{d}$,则该循环群中的任意元素b^i=g^{ri}=$g^{m*i*n/d}$均为H中的元素。又H'与H均为d阶子群，则H=H'。