第九次答疑课

助教：黄瑞轩

---

1. 洛必达法则

   以 0/0 未定式形式的极限为例，使用洛必达法则前需要进行以下检查：

   （1）检查是否是 0/0 型，即 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$（思考：$f(x_0)=g(x_0)=0$ 是不是无关紧要的?）

   （2）检查导函数在去心邻域内是否可导，并且检查 $g'(x)\neq 0$（思考：是不是意味着 $g'(x)$ 不能存在零点?）

   （3）检查导数商的极限是否存在，即 $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}=l$(有限或无穷)（思考：一般而言无穷也表示极限不存在，那么这里的极限不存在指的是什么情况?）

   （4）上述三条都成立，则 $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}=l$

   注记

   （1）0/0 和 ∞/∞ 两种形式是使用洛必达法则的基本型，其它形式的未定式需要转化为这两种形式才可以用洛必达法则

   （2）∞/∞ 形式的洛必达法则可以推广至 $*/\infty$

   例题

   （1）求 $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x})$（$\infty-\infty$ 形式）

   （2）求 $\lim\limits_{x\to\infty} x(a^{1/x}-b^{1/x})$（$0\cdot\infty$ 形式）

   （3）求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$（$0^0$ 形式）

   （4）求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$（$\infty^0$ 形式）

2. 泰勒展开

   求 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处泰勒公式的方法

   （1）直接法：求各阶导数

   （2）间接法：利用已知的基本初等函数的泰勒公式求

   初等函数的麦克劳林公式，一定要记住

   （1）$y=e^x$；（2）$y=\sin x, y=\cos x$；（3）$y=(1+x)^a$；（4）$y=\ln(x+1)$；（5）$y=\frac{1}{1+x}$

期中考试复习题

本套复习题与期中考试试题无关（包括题型）!!!

仅供复习有余力者检验自己的水平!!!

一、判断题

（T，F）（1）假设 $\exists\delta>0$ 使得 $\forall x\in B(x_0,\delta), |g(x)|<2$，又 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=0$.

（T，F）（2）$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\lim\limits_{t\to\infty}[\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)]^t=1$.

（T，F）（3）若 $f(x),g(x)$ 可导，且 $f(x)>g(x)$，则 $f'(x)>g'(x)$.

（T，F）（4）若 $f'(x)$ 在某点 x_0 的左右极限存在且都为 a，则 $f(x)$ 在该点可导，该点的导数值为 a.

二、计算下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin x+e^{3x})-3x}{\ln(\tan x+e^{5x})-5x}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[n]{1+\tan x}-1)(\sqrt{1+x}-1)}{2x\sin x}$

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{a^{1/x}}{2}+\dfrac{b^{1/x}}{2})^x$

（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{x^2}$

（5）设 $f(x)=(\cos x)^{x^2}$，求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

三、计算题

（1）求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^{2018}x-x^{2018}}{x^{2020}}$.

（2）设 $f(x)=e^{2x}(e^{-x}\sin x+x^2)$，求 $f^{(10)}(x)$.

四、问答题

（1）设 α 为实数，函数 $f(x)=\begin{cases} x^\alpha\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，求 α 的取值范围，使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导、$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

（2）设 $0<x_1<3, x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$，求证 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限.

（3）设 $y=f(x)$ 由 $x=t+\sin t+2, y=t+\cos t$ 确定，求 $\frac{dy}{dx}|_{x=2}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

五、证明题

（1）设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 闭区间连续、开区间可导，且 $f(0)=0$，证明:

$$\exists\xi\in(0,\pi), 2f'(\xi)=\tan\frac{\xi}{2}f(\xi)$$

（2）设 $f(x),g(x)$ 可导，$f(0)=g(0)$，证明：若当 $x>0$ 时有 $f'(x)>g'(x)$，则 $x>0$ 时有 $f(x)>g(x)$.

参考答案

一、(1) T，无穷小量乘以有界量；(2) F，相同的变量是同时趋于无穷的；(3) F，无关，可以举反例；(4) F，$f(x)$ 在 x_0 甚至可以不连续。

二、(1) 1，考察无穷小量代换，学习指导 P33；(2) $1/4n$，考察无穷小量代换，教材 P76；(3) $\sqrt{ab}$，考察使用洛必达法则前的变形；(4) e^2，考察利用重要极限求极限，教材 P65；(5) $(2x\ln\cos x - x^2\tan x)f(x)$，考察导数的定义和计算。

三、(1) $-\frac{1009}{3}$，考察泰勒展开的应用；(2) $32e^x[16e^x(2x^2+20x+45)+\cos x]$，考察莱布尼兹公式求高阶导数。

四、(1) $\alpha > 2$，考察导数的定义；(2) $3/2$，考察数列极限求法；(3) $1/2, \frac{\sin t - \cos t - 1}{(1+\cos t)^3}$，考察参数方程导数求法。

五、(1) 令 $F(x) = \sin\frac{x}{2}$，用罗尔定理；(2) 令 $h(x) = f(x) - g(x)$，用单调性证明。