高 等 数 学 研 究
STUDIES IN COLLEGE MATHEMATICS

Vol. 15, No. 6
Nov., 2012

极坐标系下旋转体体积和表面积的计算

陈珍培

(浙江树人大学 基础部,浙江 杭州 310015)

摘　要　介绍极坐标系下曲边扇形区域绕极轴旋转所得旋转体的体积计算公式,进而导出曲边扇形区域绕任意过极点直线旋转所得旋转体的体积计算公式,以及平面曲线段绕任意过极点直线旋转所得旋转曲面的面积计算公式,并借助实例加以说明。

关键词　旋转体;旋转曲面;极坐标;定积分

中图分类号　O172.2　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1008-1399(2012)06-0009-03

在定积分的几何应用中,有关旋转体体积和表面积的计算问题,一般都是在直角坐标系下进行讨论的,而极坐标系下曲边扇形区域绕极轴(或经过极点的直线)旋转所得的旋转体体积及平面曲线段绕极轴(或经过极点的直线)旋转所得的旋转曲面面积的计算问题,则很少提及. 文[1-2]给出了曲边扇形区域绕极轴旋转所得旋转体的体积计算公式,至今还没有文献对曲边扇形区域绕经过极点的任意直线旋转所得旋转体体积及旋转曲面面积的计算问题进行论述. 本文对上述问题进行了详细分析,运用定积分的有关知识,求得极坐标系下旋转体体积和旋转曲面面积的计算公式,并用例题进行了说明.

1　绕极轴的旋转体体积

文[-2]给出了极坐标系下曲边扇形区域绕极轴旋转所得旋转体体积的计算方法,为保持文章的完整性,先引用其结论.

公式 1　设 $\rho=\rho(\theta)\geqslant 0$ 连续,且曲边扇形区域

$$T=\{(\rho,\theta):0\leqslant\rho\leqslant\rho(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\}$$

在极轴的同一侧,则 T 绕极轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_{\alpha}^{\beta}\rho^3(\theta)\mid\sin\theta\mid \mathrm{d}\theta. \tag{1}$$

说明　文[1-2]只考虑了 $0<\alpha,\beta<\pi$ 的情形,得到旋转体体积公式

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_{\alpha}^{\beta}\rho^3(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta,$$

事实上当 $\pi<\alpha,\beta<2\pi$ 时,体积公式为

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_{\alpha}^{\beta}\rho^3(\theta)(-\sin\theta)\mathrm{d}\theta,$$

综合可得式(1).

例 1　计算心形线[3]

$$\rho=a(1+\cos\theta)$$

绕极轴旋转所得旋转体的体积 V.

解　根据式(1)可得

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi}a^3(1+\cos\theta)^3\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=$$
$$-\frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi}a^3(1+\cos\theta)^3\,\mathrm{d}\cos\theta=$$
$$-\frac{1}{6}\pi a^3(1+\cos\theta)^4\Big|_0^{\pi}=\frac{8}{3}\pi a^3.$$

2　绕 $\theta=\theta_0$ 的旋转体体积

公式 2　设 $\rho=\rho(\theta)\geqslant 0$ 连续,曲边扇形区域

$$T=\{(\rho,\theta):0\leqslant\rho\leqslant\rho(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\}$$

位于 $\theta=\theta_0$ 的同侧,则 T 绕 $\theta=\theta_0$ 旋转所得旋转体的体积为

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_{\alpha}^{\beta}\rho^3(\theta)\mid\sin(\theta-\theta_0)\mid\mathrm{d}\theta. \tag{2}$$

证明　不妨设 $\theta_0<\alpha,\beta<\pi+\theta_0$,先将区域 T 顺时针旋转 θ_0 角度,则区域 T 转化为区域

$$T'=\{(\rho,\theta):0\leqslant\rho\leqslant\rho(\theta+\theta_0),$$
$$\alpha-\theta_0\leqslant\theta\leqslant\beta-\theta_0\},$$

显然 T 绕 $\theta=\theta_0$ 旋转所得旋转体和 T' 绕极轴旋转所得旋转体的体积相等。经替换 $t=\theta-\theta_0$ 可得

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_{\alpha-\theta_0}^{\beta-\theta_0}[\rho(\theta+\theta_0)]^3\mid\sin\theta\mid\mathrm{d}\theta=$$
$$\frac{2}{3}\pi\int_{\alpha}^{\beta}[\rho(t)]^3\mid\sin(t-\theta_0)\mid\mathrm{d}t=$$
$$\frac{2}{3}\pi\int_{\alpha}^{\beta}\rho^3(\theta)\mid\sin(\theta-\theta_0)\mid\mathrm{d}\theta.$$

例 2　计算由心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 及 $\theta=0$, $\theta=\frac{\pi}{2}$ 围成区域绕 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 旋转所得立体体积 V.

收稿日期:2011-12-12;修改日期:2012-10-11

作者简介:陈珍培(1964－),男,浙江温岭人,副教授,从事高等数学的教学与研究。Email: czpzfx@sina.com

解 由式(2)可得

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi}a^3(1+\cos\theta)^3\left|\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right|d\theta=$$

$$\frac{2}{3}\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)^3\cos\theta d\theta=$$

$$\frac{2}{3}\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+3\cos^2\theta+2\cos^3\theta+\cos^4\theta)d\theta=$$

$$\frac{2}{3}\pi a^3\left[4\sin\theta+\frac{15}{8}\theta+\sin 2\theta-\sin^3\theta+\frac{\sin 4\theta}{32}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}=$$

$$\left(\frac{15}{16}\pi-\frac{4+7\sqrt{2}}{6}\right)\pi a^3.$$

3 绕极轴的旋转曲面面积

公式 3 设 $\rho=\rho(\theta)\geqslant 0$ 有连续导数,而曲线段

$$C:\quad \rho=\rho(\theta)\ (\alpha<\theta<\beta)$$

位于极轴的同侧,则 C 绕极轴旋转一周所得旋转曲面的面积为

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta\rho(\theta)\sqrt{[\rho(\theta)]+[\rho'(\theta)]^2}\,|\sin\theta|\,d\theta.\quad(3)$$

证明 不妨设 $0<\alpha,\beta<\pi$,设曲线段 C 在直角坐标系下的方程为

$$y=y(x)\geqslant 0\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

其中

$$a=\rho(\alpha)\cos\alpha,\quad b=\rho(\beta)\sin\beta.$$

不妨设 $a<b$,则 C 绕极轴旋转所得曲面面积为[4]

$$S=2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx=$$

$$2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{(dx)^2+(dy)^2},$$

将 $x=\rho(\theta)\cos\theta, y=\rho(\theta)\sin\theta$ 代入上式,可得

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta\rho(\theta)\sqrt{[\rho(\theta)]^2+[\rho'(\theta)]^2}\sin\theta\,d\theta.$$

同理当 $\pi<\alpha,\beta<2\pi$ 时,可得

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta\rho(\theta)\sqrt{[\rho(\theta)]^2+[\rho'(\theta)]^2}(-\sin\theta)d\theta.$$

综合可得式(3).

例 3 计算伯努利双纽线[3]

$$\rho^2=a^2\cos 2\theta\ \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$$

绕极轴旋转所得旋转曲面的面积 S.

解 因为

$$\rho(\theta)=a\sqrt{\cos 2\theta},$$

$$\rho'(\theta)=\frac{-2a\sin 2\theta}{2\sqrt{\cos 2\theta}},$$

$$\sqrt{[\rho(\theta)]^2+[\rho'(\theta)]^2}=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}},$$

故由式(3)可得

$$S=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\sin\theta\,d\theta=(2-\sqrt{2})\pi a^2.$$

4 绕 $\theta=\theta_0$ 的旋转曲面面积

公式 4 设 $\rho=\rho(\theta)\geqslant 0$ 有连续导数,而曲线段

$$C:\quad \rho=\rho(\theta)\ (\alpha<\theta<\beta)$$

位于 $\theta=\theta_0$ 的同侧,则 C 绕 $\theta=\theta_0$ 旋转一周所得旋转曲面的面积为

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta\rho(\theta)\Theta(\theta)\,|\sin(\theta-\theta_0)|\,d\theta,\quad(4)$$

其中

$$\Theta(\theta)=\sqrt{[\rho(\theta)]^2+[\rho'(\theta)]^2}$$

证明 不妨设

$$\theta_0<\alpha<\theta<\beta<\pi+\theta_0.$$

将曲线段 C 顺时针旋转角度 θ_0 后转化为曲线段

$$C':\quad \rho=\rho(\theta+\theta_0)\ (\alpha-\theta_0<\theta<\beta-\theta_0),$$

显然 C 绕 $\theta=\theta_0$ 旋转和 C' 绕极轴旋转所得的旋转曲面面积相同.通过替换 $t=\theta+\theta_0$ 可得

$$S=2\pi\int_{\alpha-\theta_0}^{\beta-\theta_0}\rho(\theta+\theta_0)\Theta(\theta+\theta_0)\,|\sin(\theta)|\,d\theta=$$

$$2\pi\int_\alpha^\beta\rho(t)\Theta(t)\,|\sin(t-\theta_0)|\,dt=$$

$$2\pi\int_\alpha^\beta\rho(\theta)\Theta(\theta)\,|\sin(\theta-\theta_0)|\,d\theta.$$

例 4 求对数螺线[3]

$$\rho=e^\theta\quad\left(\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi\right)$$

绕 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 旋转所得的旋转曲面的面积 S.

解 因为

$$\Theta(\theta)=\sqrt{2}e^\theta,$$

故由式(4)可得

$$S=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^\theta\cdot\sqrt{2}e^\theta\cdot\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)d\theta=$$

$$2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{2\theta}(\sin\theta-\cos\theta)d\theta=$$

$$\frac{2}{5}\pi\left[e^{2\theta}(\sin\theta-2\cos\theta)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{2}{5}\pi(3e^{2\pi}-e^{\pi}).$$

参考文献

[1] 邸双亮.曲边扇形绕极轴旋转体体积的新算法[J].高等数学研究,1995(1):27-29.

[2] 燕列雅,赵彦晖.极坐标系下旋转体体积元素的直接构造法[J].高等数学研究,2007,10(6):17-18.

[3] 同济大学应用数学系.高等数学:上册[M].6 版.北京:高等教育出版社,2007:360-361.

[4] 华东师范大学数学系.数学分析:上册[M].北京:人民教育出版社,1980:315-318.

利用中值定理证明积分不等式

李康弟
（上海电力学院 数理学院，上海 200090）

摘　要　利用微分学中的中值定理，给出定积分中一些不等式的证明.

关键词　中值定理；定积分；不等式

中图分类号　O172.2　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1008-1399(2012)06-0011-04

在实际问题的定积分计算中，有些原函数不能用初等函数的有限形式表达，因此无法应用 Newton-Leibniz 公式进行计算，必须要采用其它方法对积分值进行估计或近似计算. 另一方面，当被积函数没有给出明确的形式，只知道它们的结构或某些性质，要求对积分值给出某种估计. 因此，对积分给出一些不等式的证明是一件非常重要的工作. 定积分中的不等式证明可利用 Darboux 和、函数变形来估计积分值. 用微分学的方法和利用被积函数的不等式，以及二重积分的方法来证明积分不等式[1-2]. 本文重点结合数学竞赛试题，利用微分学中的中值定理，研究积分值的估计和一些积分不等式的证明.

例 1　已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上三阶可导，且

$$f(0)=-1,\quad f(1)=0,$$
$$f'(0)=0,\quad |f'''(x)|\leqslant 1,$$

证明不等式

$$-\frac{7}{10}<\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x<-\frac{5}{8}.$$

收稿日期：2012-02-10；修改日期：2012-10-21
基金项目：上海电力学院教学改革重点项目(20121513)
作者简介：李康弟(1965—)，男，上海人，博士，教授，主要从事非线性规划研究. Email：likangdi@shiep.edu.cn

分析　以 $f(x)$ 给定的值，构造二次多项式 $P(x)$. 构造辅助函数，反复利用 Rolle 定理，建立函数 $f(x)$ 与其三阶导数的关系.

证明　根据已知条件，构造二次多项式 $P(x)$ 满足

$$P(0)=f(0)=-1,$$
$$P(1)=f(1)=0,$$
$$P'(0)=f'(0)=0,$$

易知

$$P(x)=-1+x^2.$$

另记

$$f(x)-P(x)=\frac{x^2(x-1)}{3!}R(x),$$

其中 $R(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ 待定. 构造辅助函数

$$F(t)=f(t)-P(t)-\frac{t^2(t-1)}{3!}R(x),$$

因为

$$F(0)=F(x)=F(1)=0,$$

根据 Rolle 定理，存在 $\xi_1\in(0,x)$，$\xi_2\in(x,1)$，使得

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0.$$

又因为 $F'(0)=0$，先后两次应用 Rolle 定理，可知存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$F'''(\xi)=0.$$

Volume and Area of Revolution under Polar Coordinate System

CHEN Zhenpei
(Basic Courses Department, Zhejiang Shuren University, Hangzhou 310015, PRC)

Abstract:　This paper discusses formulas for the volume and surface area of the solid generated by rotating curvilinear sector about the polar axis or any ray in polar coordinate system. Some examples are provided to demonstrate the application of these formulas.

Keywords:　revolution solid, revolution surface, polar coordinate system, definite integration