第四次答疑课

助教 黄瑞轩 10.28

一、导数的存在性

1. 可导必定连续，连续不一定可导

- 连续性是“点”的性质，只要保证 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 就可以
- 导数定义：若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，记为 $f'(x_0)$，可见一个点的可导性还和这个点的邻域内的值有关。
- 可导必定连续，连续不一定可导

Pro. ①若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$，

即对 $\forall\varepsilon\in(0,1)$，$\exists\delta>0$，对 $|x-x_0|<\delta$，有 $|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-l|<\varepsilon$.

则有 $|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}|<\varepsilon+|l|$.

则 $|f(x)-f(x_0)|<(\varepsilon+|l|)|x-x_0|$.

让 $(\varepsilon+|l|)|x-x_0|<\varepsilon'$，则 $|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon'}{1+|l|}$，

取 $\delta'=\dfrac{\varepsilon'}{1+|l|}$，就有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon'$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。

②或 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 x_0 附近有界：$\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|<M\left|x-x_0\right|$。

③或 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\left[\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]\left[\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)\right]=O(1)\cdot o(1)=0$

2. 左右导数存在，且相等

- 如果是闭区间端点，可以考虑一侧导数，但是严谨地来讲不能说存在导数

3. 闭区间上导数的存在性

- 闭区间 $[a,b]$ 上可导 = 在开区间 (a,b) 上每一点可导 + 在区间端点有一侧导数

二、导数怎么计算

计算导数一定要搞清楚对**谁**求导，比如 $\frac{dy}{dx}$ 中，下方的 x 是自变量，一般也会用 y_x 或者 y'_x 这样的记号来写。

- 利用导数的定义 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，适用于分段函数
- 利用导数的四则运算
  - 复杂函数的求导，最终归结为四则运算，如 $y=\frac{x+\sqrt{x}}{x\arctan x}$
- 利用基本初等函数求导表

$$
\begin{array}{ll}
(c)'=0,\ c\text{是常数}; & (x^\mu)'=\mu x^{\mu-1};\\
(a^x)'=a^x\ln a\quad (0<a\neq 1); & (e^x)'=e^x;\\
(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}; & (\log_a|x|)'=\dfrac{1}{x\ln a}\quad (0<a\neq 1);\\
(\sin x)'=\cos x; & (\cos x)'=-\sin x;\\
(\tan x)'=\sec^2 x; & (\cot x)'=-\csc^2 x;\\
(\sec x)'=\sec x\tan x; & (\csc x)'=-\csc x\cot x;\\
(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}; & (\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};\\
(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}; & (\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2};\\
(\sinh x)'=\cosh x; & (\cosh x)'=\sinh x.
\end{array}
$$

$$(\sinh^{-1}x)'=[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(\cosh^{-1}x)'=[\ln(x+\sqrt{x^2-1})]'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\tanh^{-1}x)'=(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x})'=\frac{1}{1-x^2}$$

- 利用导函数的复合求导法则
  - $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$，令 $u(x)=\sqrt{x+1}$
  - $\frac{df}{dx}=\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

- 利用反函数的求导法则
  - $f(x)$ 假设有反函数 $f^{-1}(y) \coloneqq g(y)$，则 $\frac{dg}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$
  - 几何直观解释
- 利用对数求导法
  - 可解决 $f(x) = u(x)^{v(x)}$ 类问题，用到了复合函数求导法则
  - 注意定义域
- 曲线参数化
  - 设 $y = \varphi(t), x = \psi(t)$ 都在 I 上可导，则 $y = y(x)$ 可导，$y'(x) = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$
  - 注意：$y''(x) \neq \frac{\varphi''(t)}{\psi''(t)}$
- 隐函数的求导
  - $F(x, y) \coloneqq F\big(x, y(x)\big) = 0$，两边对 x 求导，把 y' 解出来
- 高阶导数
  - 莱布尼兹公式 $[v(x) \cdot u(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k [u(x)]^{(n-k)} [v(x)]^{(k)}$
  - （预告）泰勒展开
  - 常见的高阶函数表（了解即可）

$$1^\circ \quad (x^m)^{(n)} = \begin{cases} m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}, & n < m \\ m!, & n = m; \\ 0, & n > m \end{cases}$$

$$2^\circ \quad (x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n};$$

$$3^\circ \quad [\sin(ax+b)]^{(n)} = a^n \sin(ax+b+\tfrac{n\pi}{2});$$

$$4^\circ \quad [\cos(ax+b)]^{(n)} = a^n \cos(ax+b+\tfrac{n\pi}{2});$$

$$5^\circ \quad (e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}, \qquad (e^x)^{(n)} = e^x;$$

$$6^\circ \quad (a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x;$$

$$7^\circ \quad \left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+a)^{n+1}};$$

$$8^\circ \quad [\ln(x+a)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n}.$$

- 其他要说的
  - 分段函数求导：在分段点要求左右导数，而不是先求导后再取左右极限
  - 奇函数求导为偶函数，偶函数求导为奇函数
  - 周期函数求导后为周期函数，周期相同