复变函数 B 作业 W1

习题 1

(2) $(x-i\sqrt{y})(-x-2i\sqrt{y})=-x^2+ix\sqrt{y}-2ix\sqrt{y}-2y=-x^2-2y-ix\sqrt{y}$

(4) $\dfrac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}=\dfrac{5i(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)}=-\sqrt{3}+\sqrt{2}i$

习题 2

(2) 三角：$z=\sqrt{3}i\sin(\frac{3\pi}{2})$，指数：$z=\sqrt{3}e^{i\cdot\frac{3\pi}{2}}$，辐角：$\mathrm{Arg}z=\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,...)$

(4) 三角：$z=2\sin^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\sin\frac{\theta}{2}(\sin\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2})=2\sin\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\pi-\theta}{2}+i\sin\frac{\pi-\theta}{2})$，指数：$z=2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\pi-\theta}{2}}$，辐角：$\mathrm{Arg}z=\frac{\pi-\theta}{2}+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,...)$

习题 4

(2) 设 $z=\rho e^{i\phi}$,ρ,$\phi\in\mathbb{R}$,则 $z^3=\rho^3e^{3i\phi}=-i=e^{i(-\frac{\pi}{2})}$,于是 $\rho^3=1$,$3\phi=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$,解得 $\rho=1$,$\phi=-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi(k=0,\pm1,...)$，即 $z=e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi)}(k=0,\pm1,\pm2,...)$

习题 7

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}e^{ik\theta}=\frac{e^{i\theta(1-e^{in\theta})}}{1-e^{i\theta}}=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)(1-\cos n\theta-i\sin n\theta)}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$
$=\dfrac{(\cos\theta+i\sin\theta)(1-\cos n\theta-i\sin n\theta)(1-\cos\theta+i\sin\theta)}{(1-\cos\theta-i\sin\theta)(1-\cos\theta+i\sin\theta)}$,取展开结果的虚部,结果是 $\dfrac{\sin\theta-\sin\theta\cos n\theta-\sin n\theta\cos\theta+\sin n\theta}{2(1-\cos\theta)}=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}-\dfrac{\sin\theta\cos n\theta-\sin n\theta(1-\cos\theta)}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$
$=\dfrac{1}{2}\mathrm{ctg}\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}\cos n\theta-\sin n\theta\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}=$ 原式，证毕。

习题 14

设 $z_j=x_j+iy_j(j=1,2)$,x_j,$y_j\in\mathbb{R}$，由题可知 $x_2y_1+x_1y_2=0$,$y_1+y_2=0$，即 $(x_2-x_1)y_1=0$，所以要么 $y_1=0=y_2$（都是实数），要么 $x_1=x_2$ 且 $y_1=-y_2$（互为共轭复数）。

习题 16

(1) $z_n = (\frac{3+4i}{6})^n = (\frac{5}{6})^n e^{in\phi}, \phi \in \mathbb{R}$，因为 $\lim_{n\to\infty} |z_n - 0| = \lim_{n\to\infty} (\frac{5}{6})^n = 0$，所以极限存在且为 0.

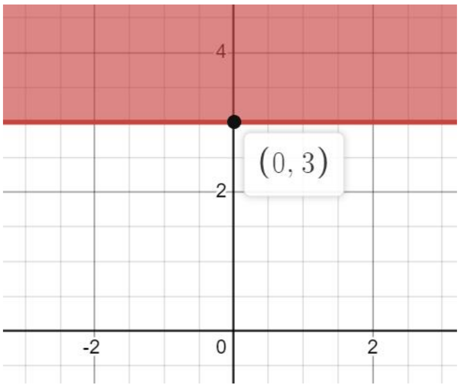
(2) $z_n = \frac{i^{n-1}}{n}$，因为 $\lim_{n\to\infty} |z_n - 0| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$，所以极限存在且为 0.

(3) $z_n = x_n + iy_n, x_n = 1,0,-1,0,\ldots$，这个序列没有极限，所以 z_n 没有极限。

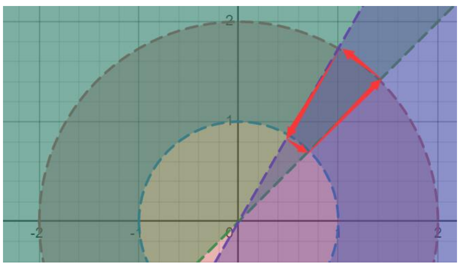
习题 19

下面均设 $z = x + yi, x.y \in \mathbb{R}$。

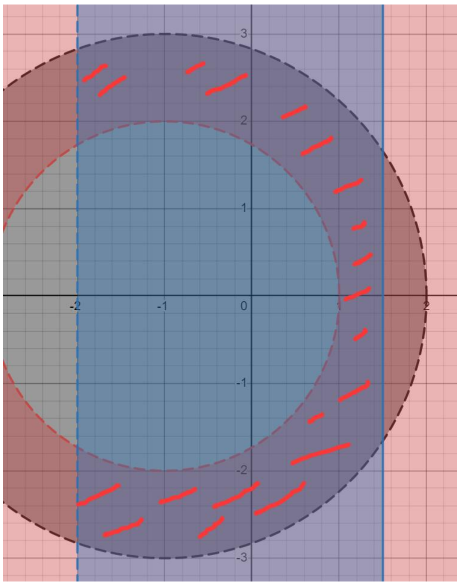
(2) $\mathrm{Im}z \geq 3$ 即 $y \geq 3$，不是开集，边界是 $y = 3$。



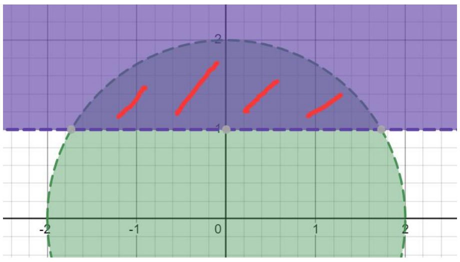
(4) 是区域（图中红色箭头围成的），没有边界。



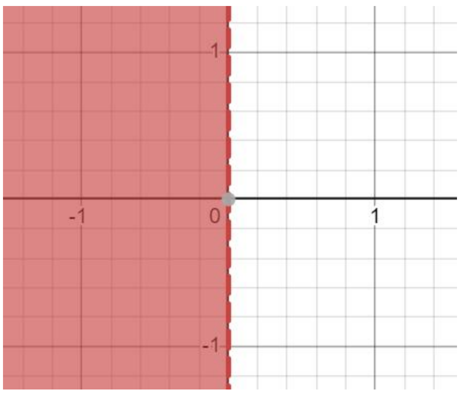
(6) 不是区域，边界是 $x = \frac{3}{2}$ 且 $|y| < \frac{\sqrt{11}}{2}$。点集图形在下方用红色斜线示意。



(8) 是区域，没有边界。点集图形在下方用红色斜线示意。



(10) 是区域，没有边界。简单证明如下：$\left|\dfrac{[(x-1)+yi][(x+1)-yi]}{(x+1)^2+y^2}\right|>1$ 即 $\left(\dfrac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}\right)^2+\left(\dfrac{(2y)^2}{(x^2+1)^2+y^2}\right)^2>1$，即 $x((x+1)^2+y^2)<0$，即 $x<0$。



习题 22

设 $z=x+yi$，$x^2+y^2=z\bar{z}$,$2x=z+\bar{z}$，所以原方程的复数形式为 $z\bar{z}+z+\bar{z}=1$.