数理逻辑作业 Week10

PB20111686 黄瑞轩

P93 T3

3° $\forall x_1(\neg R_1^1(x_1) \to \neg R_1^1(c_1))$

只需证明 $\not\vDash p$，为此只需找一个解释域 M 与解释 $\phi \in \Phi_M$，使得 $|p|(\phi) = 0$。

取 $M: \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \overline{c_1} = 0, \overline{R_1^1}$: 是 0，取 $\phi: \phi(x_1) = 1$。

设 $p = \forall x_1 q$，则 $|q|(\phi) = 0$，由于 ϕ 也是 ϕ 的变通，所以 $|p|(\phi) = 0$。

所以 p 不是有效式。

4° $\forall x_1 R_1^2(x_1, x_1) \to \exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1, x_2)$

设 $p = r \to s, r = \forall x_1 r_0$。

设 $s = \neg s_0, s_0 = \forall x_2(\neg\forall x_1 R_1^2(x_1, x_2)), s_0 = \forall x_2(\neg s_1), s_1 = \forall x_1 R_1^2(x_1, x_2)$。

取 $M: \mathbb{N}, \overline{R_1^2}$: 相等，取 $\phi: \phi(x_1) = 1, \phi(x_2) = 2$。

对于 ϕ 的任意 x_1 变通 ϕ'，都有 $|r_0|(\phi') = 1$，因此 $|r|(\phi) = 1$。

因为存在 ϕ 的 x_1 变通使得 $|R_1^2(x_1, x_2)|(\phi'') = 0$，所以 $|s_1|(\phi) = 0$，所以 $|\neg s_1|(\phi) = 1$。

因为对于 ϕ 的任何 x_2 变通 ϕ'，都有 $|\neg s_1|(\phi') = 1$，所以 $|s_0|(\phi) = 1$，所以 $|s|(\phi) = 0$。

所以 $|p|(\phi) = |r|(\phi) \to |s|(\phi) = 0$，不是有效式。

P94 T4

(a)

对项 t 在 K 的项集 T 中层次 n 做归纳。

（1）当 $n = 0$ 时，$t \in X \cup C_K$，由于对任意 $x_i \in X$，$\phi^+(x_i) = \phi(x_i)$，故 $\phi(t) = \phi^+(t)$；

（2）设当 $n < k$ 时命题成立；

（3）当 $n = k$ 时，设 $t = f_i^k(t_1, \ldots, t_k)$，这里 $t \in T_k, t_1, \ldots, t_k \in \bigcup_{i=0}^{k-1} T_i$，故

$$\phi(t) = \phi\left(f_i^k(t_1, \ldots, t_k)\right) = \overline{f_i^n}(\phi(t_1), \ldots, \phi(t_k)) = \overline{f_i^n}\left(\phi^+(t_1), \ldots, \phi^+(t_k)\right) = \phi^+(t) \tag{1}$$

故结论成立。

(b)

对公式 p 在 K 的公式集 $K(Y)$ 中的层次 n 做归纳。

（1）当 $n=0$ 时，$p(x)$ 是原子公式，设 $p(x)=R_i^m(t_1(x),\dots,t_m(x))$，于是

$$\begin{aligned}|R_i^m(t_1(x),\dots,t_m(x))|(\phi^+)=1 &\Leftrightarrow(\phi^+(t_1(x)),\dots,\phi^+(t_m(x)))\in\overline{R_i^m}\\&\Leftrightarrow(\phi(t_1(x)),\dots,\phi(t_m(x)))\in\overline{R_i^m}\\&\Leftrightarrow|R_i^m(t_1(x),\dots,t_m(x))|(\phi)=1\end{aligned}$$

为假的情况同理，故 $|p|(\phi^+)=|p|(\phi)$。

（2）设当 $n<k$ 时命题成立；

（3）当 $n=k$ 时，分以下四种情况讨论。

- 若 $p(x)=\neg q(x)$，则 $|p|(\phi^+)=\neg|q|(\phi^+)=\neg|q|(\phi)=|p|(\phi)$；
- 若 $p(x)=q(x)\to r(x)$，则 $|p|(\phi^+)=|q|(\phi^+)\to|r|(\phi^+)=|q|(\phi)\to|r|(\phi)=|p|(\phi)$；
- 若 $p(x)=\forall yq(x)$，若 ϕ' 是 ϕ 的任意 y 变通， $\phi^{+\prime}$ 是 ϕ' 在 K^+ 的扩张，则 $\phi^{+\prime}$ 是 ϕ^+ 的 y 变通，则

$$\begin{aligned}|p|(\phi^+)=1 &\Leftrightarrow \text{对任意}\phi^+\text{的}y\text{变通}\phi^{+\prime}\text{，都有}|p|(\phi^{+\prime})=1\\&\Leftrightarrow\text{对任意}\phi\text{的}y\text{变通}\phi'\text{，都有}|q|(\phi')=1\\&\Leftrightarrow|p|(\phi)=1\end{aligned}$$

P98 T2

反证法，如果 $\vdash\exists x_2R_1^2(x_1,x_2)\to\exists x_2R_1^2(x_2,x_2)$ 成立，由可靠性定理，则 $\models\exists x_2R_1^2(x_1,x_2)\to\exists x_2R_1^2(x_2,x_2)$ 成立。

给一个解释域 $M:\mathbb{N},\overline{R_1^2}\text{是}<$，并且给 Φ_M 上的一个项解释 $\phi:\phi(x_1)=1,\phi(x_2)=2$，此时公式前件为真，后件为假，整个式子语义上是假的，故矛盾，所以原式不成立。