复变函数 B 作业 W5

习题 1

(1) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$,$r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)^2} = 1$,$R = \dfrac{1}{r} = 1$；当 $|z| = 1$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

所以在收敛圆周 $|z| = 1$ 上此级数点点绝对收敛。

(2) $a_n = 1$,$r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$,$R = \dfrac{1}{r} = 1$；当 $|z| = 1$ 时，$|z|^n = 1$，一般项 z^n 不可能以 0 为极限，从而在收敛圆周 $|z| = 1$ 上此级数点点发散。

(3) $a_n = \dfrac{1}{n}$,$r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} = 1$,$R = \dfrac{1}{r} = 1$；当 $z = 1$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \to \infty$$

当 $z = -1$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

这是一个 Leibniz 级数，故收敛。所以在 $|z| = 1$ 上原级数既有收敛点又有发散点。

习题 2

(1) $\dfrac{1}{1-z} + e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n!}\right)z^n$

(2)

$$\begin{aligned}
(1-z+z^2)\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}(1-z+z^2) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{(n)!}z^n(1-z+z^2) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n}{2}}{n!}z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n!}z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n!}z^{n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n}{2}}{n!}z^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(n-1)\pi}{2}}{(n-1)!}z^n + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{(n-2)\pi}{2}}{(n-2)!}z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n}{2}}{n!}z^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin\frac{n\pi}{2}}{n!}z^n + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{-n(n-1)\cos\frac{n\pi}{2}}{n!}z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+n-n^2)\cos\frac{n\pi}{2} - n\sin\frac{n\pi}{2}}{n!}z^n
\end{aligned}$$

(3) $\sin^2 z = -\frac{1}{2}\cos 2z + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2z)^{2n} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(2z)^{2n}$

(4) $\frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$

(5) $\tan z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + ...$

(6) $\frac{z}{(1-z)^2} = z\cdot\frac{1}{(1-z)^2} = z\cdot\left(-\frac{1}{1-z}\right)' = z\left(-\sum_{n=0}^{+\infty}z^n\right)' = -\sum_{n=0}^{+\infty}nz^n$

(7) $\int_0^z e^{z^2}dz = \int_0^{z_+}\sum_{n=0}^{n}\frac{1}{n!}\left(z^2\right)^n dz = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\int_0^z z^{2n}dz = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{2n+1}z^{2n+1}$

(8) $\int_0^z \frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^z\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}dz = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^z z^{2n}dz = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{2n+1}z^{2n+1}$

习题 3

(1) $\frac{z-1}{z+1} = 1-\frac{2}{z+1} = 1-\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{2}\right)} = 1-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n$,
函数 $f(z)=\frac{z-1}{z+1}$ 的奇点是 $z_1=-1$，$|z_1-z_0|=2$，在其余点处解析，由 P78 定理 1 知在 $|z-1|=2$ 圆内收敛，奇点处发散，由 Abel 定理知在圆外发散（下略），所以 $R=2$。

(2)

$$\begin{aligned}\frac{z}{(z+1)(z+2)} &= \frac{2}{z+2}-\frac{1}{z+1} = \frac{2}{4+(z-2)}-\frac{1}{3+(z-2)}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{2-z}{4}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2-z}{3}}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2-z}{4}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2-z}{3}\right)^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right](z-2)^n\end{aligned}$$

函数 $f(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2)}$ 的奇点是 $z_1=-1$,$z_2=-2$, 在其余点处解析，奇点离 $z_0=2$ 的最小距离为 $|z_1-z_0|=3$，所以 $R=3$。

(3) $\frac{1}{z^2} = \frac{1}{[(z+1)-1]^2} = \left(\frac{1}{1-(z+1)}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(z+1)^n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)(z+1)^n$,
函数 $f(z)=\frac{1}{z^2}$ 的奇点是 $z_1=0$，在其余点处解析，$|z_1-z_0|=1$，所以 $R=1$。

(4) $\frac{1}{4-3z} = \frac{1}{1-3i}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{1-3i}(z-i-1)} = \frac{1}{1-3i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{1-3i}\right)^n(z-i-1)^n$，函数 $f(z)=\frac{1}{4-3z}$ 的奇点是 $z_1=\frac{4}{3}$，在其余点处解析，$|z_1-z_0|=\frac{\sqrt{10}}{3}$，所以 $R=\frac{\sqrt{10}}{3}$。

习题 4

$$(1-z-z^2)\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=1\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n-\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}z^n-\sum_{n=2}^{\infty}c_{n-2}z^n$$
$$=c_0+c_1z-c_0z+\sum_{n=2}^{\infty}(c_n-c_{n-1}-c_{n-2})z^n=1$$

对比系数得 $c_0=1$,$c_1-c_0=0$,$c_n-c_{n-1}-c_{n-2}=0(n\geq 2)$，于是对 $n\geq 0$ 有 $c_{n+2}=c_{n+1}+c_n$。
根据上述初始条件和递推式可以算出 $c_0=1$,$c_1=1$,$c_2=2$,$c_3=3$,$c_4=5$，所以前五项是 $1+z+2z^2+3z^3+5z^4$。
原函数的奇点是 $z_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,$z_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$，在其余点处解析，奇点离 $z_0=0$ 的最小距离是 $|z_1-z_0|=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，所以收敛半径 $R=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$。

习题 6

$$f(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a^ne^{in\theta}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{n(\ln a+i\theta)}=\frac{1}{1-a(\cos\theta+i\sin\theta)}=\frac{1-a(\cos\theta-i\sin\theta)}{1-2a\cos\theta+a^2}$$

（1）$RHS=\mathbf{Re}f=\dfrac{1-a\cos\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$，证毕。

（2）$RHS=\mathbf{Im}f=\dfrac{a\sin\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$，证毕。

（3）$\dfrac{\mathrm{d}LHS}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{2a\sin\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$，$RHS$ 是一个收敛的级数，可以逐项对 θ 求导，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}\cos n\theta\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}a^n\sin n\theta=LHS'_\theta$$

对这两个导数同时对 θ 积分，验证初始条件也相等，故证毕。

习题 7

$$e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^n,\quad e^z-1=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^n$$
$$|e^z-1|=\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^n\right|\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}|z|^n=e^{|z|}-1$$
$$e^{|z|}-1=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}|z|^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}|z|^{n+1}\leqslant|z|\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}|z|^n=|z|e^{|z|}$$

证毕。