微积分 I

第 15 周习题课

助教：黄瑞轩

December 9, 2022

定积分相关知识回顾

1. 线性性
2. 积分区间可加性
3. 积分不等式
- 保序性不等式
- 估值公式
- 绝对可积，及其估值公式
- 积分中值定理
- 柯西施瓦尔兹不等式
4. 牛顿-莱布尼兹公式
5. 变上限积分
6. 原函数存在定理（连续）
7. 定积分的计算
8. 定积分的应用：求体积、面积、曲线长度
9. 广义积分、瑕积分（无界区间、无界函数值）
10. 柯西主值积分

习题解答

习题 4.3，T5

这道题被积函数比较简单，只需要利用 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ 即可（牛顿-莱布尼兹公式）。

习题 4.3，T6

完成本题需要理解 *Riemann* 和的定义及其与定积分定义的关系。

（1）先做变换

$$S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$$

将 S_n 视为被积函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 把区间 $[0,1]$ 分成 n 等份后所作的积分和, 其中 $\Delta x=\frac{1}{n}$, $f(\xi_i)=\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$. 因为 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 所以 $\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$ 存在. 所以由定积分的定义, 得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

（2）和（1）类似，略。

（3）先做变换

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^p+\left(\frac{2}{n}\right)^p+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^p\right](p>0)$$

令 $S_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p(i=1,2,\cdots,n)$, 将 S_n 视为被积函数 $f(x)=x^p$ 把区间 $[0,1]$ 分成 n 等份后所作的积分和, 其中 $\Delta x=\frac{1}{n}, f(\xi_i)=\left(\frac{i}{n}\right)^p$. 因为 $f(x)=x^p$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 所以 $\int_0^1 x^p\mathrm{d}x$ 存在. 由定积分的定义, 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x$$

（4）设 $g(n)=\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}$ ，则

$$\ln g(n)=\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$$

记 $f(x)=\ln(1+x)$ ，则

$$\lim_{n\to\infty}\ln g(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right]=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x$$

（5）和（1）类似，$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。

习题 4.4，T1

利用定积分的保序性：$f(x)\le g(x)\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$，注意要在同一区间上，并且不能反过来推。

习题 4.4，T3

（1）估计 $f(x)=\frac{x}{x^3+16}$ 在 $[0,10]$ 上的值，然后利用积分的保序性。

（2）与（1）类似，注意 $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\phi)$。

（3）与（1）类似，可通过求导来确定 $f(x)=x^m(1-x)^n$ 的极值点。

习题 4.4，T8

本题涉及变上下限积分的求导，公式如下

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\int_{\phi(x)}^{b} f(t)dt = -f(\phi(x))\cdot\phi'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) - f(\phi(x))\cdot\phi'(x)$$

习题 4.4，T9

本题只是在之前的参数方程求导中引入了对变上下限积分的求导，还可以计算 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

习题 4.4，T11

证明由于 $f(x)>0$ 且连续, 故 $\varphi(x)$ 可导, 且

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \left[xf(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - f(x)\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right] / \left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2 \\ &= f(x)\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t / \left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2.\end{aligned}$$

而 $t\in(0,x)$ 时, $x-t>0, f(x)>0$, 故 $\varphi'(x)>0$, 从而说明 $\varphi(x)$ 单调上升。

习题 4.4，T14

注意到题中极限是 *0/0* 型和 ∞/∞ 型，所以使用洛必达法则即可，也是对变上下限积分求导的应用。

习题 4.4，T16

关键是对函数、导函数值的估计，使用 *Lagrange* 中值定理或者 *Taylor* 展开。

对任意 $x\in[a,b], f(x)$ 在 $[a,x]$ 上满足拉格朗日中值定理条件, 故 $f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)$, 其中 $\xi\in(a,x)$。
因为 $f'(x)\leqslant M$，所以 $f(x)=f'(\xi)(x-a)\leqslant M(x-a)$。故

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M(x-a)\mathrm{d}x = \frac{M}{2}(b-a)^2$$

习题 4.4，T17

我们希望能够估计 $f'(x)$ 的值，为此需要从 $\int_0^1 f(x)dx$ 中得到 $\int_0^1 f'(x)$ 的信息，可以使用分部积分法则。

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = f(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)\bigg|_0^1 - \int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x$$

所以有

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M\int_0^1 \left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4}M$$

习题 4.2，T2，奇数题号

（1）令 $2x-3=t$；

（3）令 $\frac{1}{x}=t$，注意到 $\frac{1}{x^2}dx=-dt$；

（5）令 $2x+\frac{\pi}{4}=t$，事实上只要是线性的（$t=ax+b$）都最好直接替换，因为 $dt=adx$ 是比较简单的。

（7）令 $\sqrt{x}=t$，因为注意到 $dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$；

（9）令 $t=\arctan x$，因为注意到 $dt=\frac{1}{1+x^2}dx$；

（11）令 $t=\ln x$，再令 $u=\ln t$，因为注意到 $\frac{1}{x}dx=dt$；

（13）先分母有理化，然后拆开变成两个积分，分别令 $t=\sqrt{x+1}, u=\sqrt{x-1}$ 即可。

习题 4.2，T2，偶数题号

（2）令 $x=\frac{2\pi t}{T}+\phi_0$；

（4）令 $t=\sin x$，注意到 $dt=\cos x dx$；

（6）令 $\sqrt{x}=t$，因为注意到 $dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$；

（8）令 $t=\cos x$，因为注意到 $d\cos x=-\sin x dx$；

（10）令 $u=1-x^2$，因为注意到 $du=-2xdx$；

（12）令 $x=1+3\tan\phi$。因为注意到 $dx=\frac{3}{\cos^2\phi}d\phi$；

习题 4.2，T3，奇数题号

（1）三角换元；

（3）令 $u=x^4$；

（5）令 $t=\sin x$，把上面二倍角写开，转化为类似（3）的积分；

（7）令 $t=\tan x$；

（9）令 $t=\arcsin x$；

(11) 令 $t=\sin\frac{x}{a-b}$;
(13) 首先把被积函数写成 xe^{2x^2}，再令 $t=x^2$;
(15) 令 $x=\tan t$;
(17) 三角换元;
(19) 令 $u=x^3$，因为 $x^5dx=x^3*x^2dx=audu$;
(21) 三角换元;

习题 4.2，T3，偶数题号

(2) 令 $u=x^3$;
(4) 令 $t=\sqrt{3x^2-5x+6}$，因为注意到 $dt^2=(6x-5)dx$;
(6) 令 $t=\cos x$;
(8) 令 $t=\arcsin\frac{x}{2}$;
(10) 令 $t=\arctan\sqrt{x}$;
(12) 令 $t=e^x$;
(14) 令 $t=e^x$;
(16) 三角换元;
(18) 三角换元，或者双曲函数换元;
(20) 三角换元，或者双曲函数换元;
(22) 利用 arcsin 进行换元（注意到是 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 类似的形式）;

习题 4.1，T2

在两个区间内分别积分，得到分段的、含有两个不同常数 C_1,C_2 的原函数，然后利用在分界点的连续性，得到 C_1,C_2 之间的关系，从而写成一个常数 C。