1 电磁现象的基本规律与电磁波

1.1 习题8.4

为了使得接地板电势为0，可以设置正负交替、间距为$2x$的带相同电量Q的一系列像电荷，不妨设原来左侧电荷为正，则其所在处的电势为

$$U_1 = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(-1)^k Q}{2kx} \tag{1}$$

右侧电荷所在处的电势为

$$U_2 = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(-1)^k(-Q)}{2kx} \tag{2}$$

故原来的相互作用能为

$$W_e = \frac{1}{2}(QU_1 - QU_2 + q_sU_s) \tag{3}$$

这里q_s为感应电荷，因为导体接地，故$U_s = 0$，因此有

$$W_e = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(-1)^k Q^2}{2kx} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k} = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 x}\ln 2 \tag{4}$$

后来相距无穷远，所以相互作用能为0，由功能原理

$$A = W_e' - W_e = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 x}\ln 2 \tag{5}$$

1.2 习题8.6

（1）

由对称性，像电荷应在Oq连线上，设其到球心距离为d'，电荷量为q'。建立极坐标系，空间一点$P(r,\theta)$，其电势为

$$U = k\left(\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2+d'^2-2rd'\cos\theta}}\right) \tag{6}$$

球面电势为0，即

$$U|_{r=R} = 0 \tag{7}$$

解得

$$d' = \frac{R^2}{d}, q' = -\frac{qR}{d} \tag{8}$$

因此U的表达式改写为

$$U = k\left[\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}} - \frac{qR/d}{\sqrt{r^2+(R^2/d)^2-2r(R^2/d)\cos\theta}}\right] \tag{9}$$

因此

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla U \\ &= kq\left[\frac{r-d\cos\theta}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}} + \frac{R(dR^2\cos\theta-rd^2)}{(r^2d^2+R^4-2rdR^2\cos\theta)^{3/2}}\right]\mathbf{e_r} \\ &\quad + kq\left[\frac{rd\sin\theta}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}} - \frac{drR^3\sin\theta}{(r^2d^2+R^4-2rdR^2\cos\theta)^{3/2}}\right]\mathbf{e}_\theta\end{aligned}$$

（2）

由对称性，像电荷应在Oq连线上，设其到球心距离为d'，电荷量为q'。建立极坐标系，空间一点$P(r,\theta)$，其电势为

$$U' = U + \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{10}$$

后一项是因为导体产生了感应电荷（未接地），内表面为$-q$，外表面为$Q+q$，导体上的电荷对球内的贡献叠加于原来的U上，由于导体是等势体，故

$$U|_{r=R} = \text{Const} \tag{11}$$

上式对任意的θ都成立，因此解条件与（1）中相同，解（q', d'）相同。

故

$$\vec{E}' = -\nabla U' = -\nabla(U+C) = -\nabla U = \vec{E} \tag{12}$$

1.3 习题8.8

电像为与平面对称的、带电量相等，符号相反的一根导线，则所要求的电容等效于这两根导线之间的电容。

由高斯定理，一根导线单独存在时，距离为r时的电场强度大小为

$$E = \frac{a^2\lambda_e}{2r\varepsilon_0} \tag{13}$$

设空间中r_0处的电势为0，因此r处电势为

$$\phi(r)=\phi(r_0)-\int_{r_0}^{r}E\mathrm{d}r=\frac{a^2\lambda_e}{2\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r} \tag{14}$$

一根导线在自己身上产生的电势为

$$\phi_1=\frac{a^2\lambda_e}{2\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{a} \tag{15}$$

另一根导线在这根导线上产生的电势为

$$\phi_2=-\frac{a^2\lambda_e}{2\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{2b-a} \tag{16}$$

由电势叠加原理，这根导线的电势为

$$\phi=\phi_1+\phi_2=\frac{a^2\lambda_e}{2\varepsilon_0}\ln\frac{2b-a}{a} \tag{17}$$

则

$$C/\Delta x=\frac{Q/\Delta x}{\phi}=\frac{\pi a^2\lambda_e}{\frac{a^2\lambda_e}{2\varepsilon_0}\ln\frac{2b-a}{a}}=\frac{2\varepsilon_0}{\ln\frac{2b-a}{a}}=\frac{2\varepsilon_0}{\ln\frac{2b}{a}}(b>>a) \tag{18}$$

1.4 习题8.10

（1）

未分裂导线：

设线电荷密度为λ，两导线（1，2）所带电荷相反，则

$$E_1=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{19}$$

1导线在离其r_1处点P产生的电势为

$$U_1=\int_{r_1}^{R_0}E_1\mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_0}{r_1} \tag{20}$$

同理，2导线在P处的电势为

$$U_2=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_0}{r_2} \tag{21}$$

两根导线在P处产生的电势为

$$U(P)=U_1+U_2 \tag{22}$$

于是在A、B两点处产生的电势为

$$U_A = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-r_0}{r_0} \sim \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{r_0} \tag{23}$$

$$U_B = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{r_0} \tag{24}$$

输送电压为

$$U = U_A - U_B = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{r_0} \Rightarrow \lambda = \frac{\pi\varepsilon_0 U}{\ln\frac{d}{r_0}} \tag{25}$$

导线表面的电场强度最大

$$E_{1max} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_0} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d-r_0)} \sim \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{U}{2r_0\ln\frac{d}{r_0}} \tag{26}$$

两分裂导线：

近似条件：$d >> c >> r_0$，因此

$$U(P) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2 r_2'}{r_1 r_1'} \tag{27}$$

在A、B导线表面的电势为

$$U_A = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d(d-c)}{cr_0} \sim \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d^2}{cr_0} = -U_B \tag{28}$$

输送电压

$$U = U_A - U_B = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d^2}{cr_0} \Rightarrow \lambda = \frac{\pi\varepsilon_0 U}{\ln\frac{d^2}{cr_0}} \tag{29}$$

故表面电场强度

$$E_{2max} = \frac{U}{2r_0\ln\frac{d^2}{cr_0}} \tag{30}$$

所以

$$\frac{E_{2max}}{E_{1max}} = \frac{\ln(d/r_0)}{\ln(d^2/cr_0)} = \frac{\ln(d/r_0)}{\ln(d/r_0)+\ln(d/c)} < 1 \tag{31}$$

（2）

代入数据可得

$$\frac{E_{2max}}{E_{1max}} = \frac{\ln(d/r_0)}{\ln(d^2/cr_0)} = 61.57\% \tag{92}$$

1.5 习题8.11

一根导线，距离其为r处的电场记为$E(r)$。

电位移线在垂直穿过界面时不发生偏转，则高斯定理

$$D_1 \cdot \pi rl + D_2 \cdot \pi rl = \lambda l \tag{33}$$

环路定理

$$E_1 \cdot \pi r - E_2 \cdot \pi r = 0 \tag{34}$$

则

$$E_1 = \frac{\lambda}{(\varepsilon_r + 1)\varepsilon_0 \pi r} \tag{35}$$

故电势为

$$\phi = \phi_0 - \int_{r_0}^{r} E_1 \mathrm{d}r = \frac{\lambda}{(\varepsilon_r + 1)\varepsilon_0 \pi} \ln \frac{r_0}{r} \tag{36}$$

上式取$\varepsilon_r = 1$即得无介质时的情况，由

$$C'/\Delta x = \frac{Q/\Delta x}{\phi} \tag{37}$$

得

$$C'/C = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} \tag{38}$$

即

$$C' = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} C \tag{39}$$

1.6 习题8.13

离轴线为r处产生感应电场E_k，满足

$$\int_L \overrightarrow{E_k} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = E_k \cdot 2\pi r = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{40}$$

当$r < a$时，螺线管内部磁通量为

$$\Phi = \mu_0 nI \cdot \pi r^2 = \mu_0 nI_0 \pi r^2 \sin \omega t \tag{41}$$

故

$$E_k = -\frac{1}{2\pi r}\mu_0 n I_0 \pi r^2 \omega \cos\omega t \tag{42}$$

则位移电流密度

$$j_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_k}{\partial t} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mu_0 n I_0 r \omega^2 \sin\omega t \tag{43}$$

当$r \geq a$时，螺线管内部磁通量为

$$\Phi = \mu_0 n I \cdot \pi a^2 = \mu_0 n I_0 \pi a^2 \sin\omega t \tag{44}$$

故

$$E_k = -\frac{1}{2\pi r}\mu_0 n I_0 \pi a^2 \omega \cos\omega t \tag{45}$$

则位移电流密度

$$j_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_k}{\partial t} = \frac{1}{2r}\varepsilon_0 \mu_0 n I_0 a^2 \omega^2 \sin\omega t \tag{46}$$

1.7 习题8.15

取

$$\vec{E} = kx\overrightarrow{e_x} \tag{47}$$

满足题设所有要求，下面证明该电场的存在性。

由于不存在时变，则磁场

$$B = 0 \tag{48}$$

麦克斯韦方程1

$$\nabla \cdot \vec{E} = k\text{（有源）} \tag{49}$$

麦克斯韦方程2

$$\nabla \times \vec{E} = 0\text{（无旋）} \tag{50}$$

麦克斯韦方程3

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{51}$$

麦克斯韦方程4

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \tag{52}$$

根据唯一性定理，这样的电场一定存在。

1.8 习题8.17

根据分压公式，开关断开时电容器上分压为

$$U = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_0 \tag{53}$$

（1）

断开开关后，电容器与R_1组成回路，RC电路方程为

$$R_1 \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = 0 \tag{54}$$

解得

$$q = q_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{R_1 C}} \tag{55}$$

其中

$$q_0 = CU = \frac{\pi b^2}{4\pi k d} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_0 = \frac{\pi b^2 \varepsilon_0}{d} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_0 \tag{56}$$

$$C = \frac{\pi b^2 \varepsilon_0}{d} \tag{57}$$

所以

$$q = \frac{\pi b^2 \varepsilon_0 R_1 U_0}{d(R_1 + R_2)} \mathrm{e}^{-\frac{dt}{R_1 \pi b^2 \varepsilon_0}} \tag{58}$$

对电容器，在数值上

$$\begin{aligned} I_d = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} &= CU \cdot (-\frac{1}{R_1 C}) \mathrm{e}^{-\frac{dt}{R_1 \pi b^2 \varepsilon_0}} \\ &= -\frac{U_0}{R_1 + R_2} \mathrm{e}^{-\frac{dt}{R_1 \pi b^2 \varepsilon_0}} \end{aligned}$$

（2）

由对称性，知道电容器磁场是环形分布，根据环路定理

$$2\pi r \cdot B = \mu_0 I_d \cdot \frac{r^2}{b^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_d r}{2\pi b^2} = -\frac{\mu_0 r}{2\pi b^2} \frac{U_0}{R_1 + R_2} \mathrm{e}^{-\frac{dt}{R_1 \pi b^2 \varepsilon_0}} \tag{59}$$

负号与方向有关。

（3）

能量密度

$$w=\frac{1}{2}(\vec{D}\cdot\vec{E}+\vec{B}\cdot\vec{H})=\frac{1}{2}(\varepsilon_0E^2+\frac{B^2}{\mu_0}) \tag{60}$$

$$E=\frac{I_dR_1}{d}=\frac{U_0R_1}{(R_1+R_2)d}\mathrm{e}^{-\frac{dt}{R_1\pi b^2\varepsilon_0}} \tag{61}$$

鉴于答案不是要求算这个我就不代入了哈。

能流密度

$$|\vec{S}|=|\vec{E}\times\vec{H}| \tag{62}$$

在这电磁场中，$\vec{E}$与$\vec{H}$是互相正交的，因此

$$|\vec{S}|=|\vec{E}||\vec{H}|=\frac{U_0R_1}{(R_1+R_2)d}\mathrm{e}^{-\frac{dt}{R_1\pi b^2\varepsilon_0}}\cdot\frac{r}{2\pi b^2}\frac{U_0}{R_1+R_2}\mathrm{e}^{-\frac{dt}{R_1\pi b^2\varepsilon_0}} \tag{63}$$

1.9 习题8.19

（1）

由麦克斯韦第二方程

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{64}$$

$$\nabla\times\vec{E}=\frac{\partial E}{\partial z}(\mathbf{e_z}\times\mathbf{e_x})=-E_0\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sin(\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}z-\omega t)\mathbf{e_y} \tag{65}$$

故

$$\vec{B}=\int(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t})\mathrm{d}t=E_0\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\cos(\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}z-\omega t)\mathbf{e_y} \tag{66}$$

故磁场

$$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}=|\vec{E}|\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\mathbf{e_y} \tag{67}$$

（2）

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=|\vec{E}||\vec{H}|\mathbf{e_z}=|\vec{E}|^2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\mathbf{e_z} \tag{68}$$

$$\overrightarrow{S_a} = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \vec{S}\mathrm{dt} = \frac{1}{2}E_0^2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\mathbf{e_z} \tag{69}$$

1.10 习题8.21

（1）

电场

$$E = \frac{u}{d} = \frac{U_m \cos\omega t}{d} \tag{70}$$

$$\vec{E} = E\mathbf{e_z} \tag{71}$$

电位移通量

$$\Phi_D = \varepsilon E \cdot \pi R^2 \tag{72}$$

位移电流

$$I_d = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{dt}} = -\frac{\omega U_m \varepsilon \pi R^2}{d}\sin\omega t \tag{73}$$

传导电流

$$I_0 = \frac{u}{r} = \frac{U_m \cos\omega t}{\frac{1}{\sigma}\frac{d}{\pi R^2}} = \frac{\sigma\pi R^2 U_m \cos\omega t}{d} \tag{74}$$

安培环路定理

$$H \cdot 2\pi r = (I_d + I_0)\cdot\frac{r^2}{R^2} \tag{75}$$

$$\vec{H} = \frac{r}{2\pi R^2}\cdot(\frac{\sigma\pi R^2 U_m\cos\omega t}{d} - \frac{\omega U_m\varepsilon\pi R^2}{d}\sin\omega t) = \frac{rU_m}{2d}(\sigma\cos\omega t - \omega\varepsilon\sin\omega t) \tag{76}$$

则瞬时坡印廷矢量

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \frac{rU_m^2\cos\omega t}{2d^2}(\sigma\cos\omega t - \omega\varepsilon\sin\omega t)\mathbf{e_r} \tag{77}$$

平均坡印廷矢量

$$\overrightarrow{S_a} = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\vec{S}\mathrm{dt} = \frac{\sigma r U_m^2}{4d^2}\mathbf{e_r} \tag{78}$$

（2）

进入电容器的平均功率（A为电容器柱面的侧面）

$$P_{in,a}=\iint_A \overrightarrow{S_a}\Big|_{r=R}\cdot \mathrm{d}\vec{A}=\frac{\sigma R U_m^2}{4d^2}\cdot 2\pi R\cdot d=\frac{\sigma\pi R^2 U_m^2}{2d} \tag{79}$$

（3）

消耗的功率

$$P_{损}=\frac{u^2}{r}=\frac{\sigma\pi R^2 U_m^2\cos^2\omega t}{d} \tag{80}$$

平均损耗功率

$$\overline{P_{损}}=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}P_{损}\mathrm{d}t=\frac{\sigma\pi R^2U_m^2}{2d} \tag{81}$$

1.11 习题8.25

在t时间内射到人造卫星表面的能量

$$W=S\cdot\pi r^2\cdot t \tag{82}$$

动量为

$$p=mc=\frac{W}{c^2}c=\frac{S\pi r^2 t}{c} \tag{83}$$

根据冲量定理

$$I=\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}[p-(-p)]=\frac{3}{2}p \tag{84}$$

则压力为

$$F=\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\frac{3S\pi r^2}{2c}=2.12\times10^{-5}\mathrm{N} \tag{85}$$

附加加速度为

$$a=\frac{F}{m}=2.12\times10^{-7}\mathrm{m/s^2} \tag{86}$$

1.12 习题8.28

在t时间内射入的能量

$$W=Pt \tag{87}$$

动量

$$p = mc = \frac{W}{c^2}c = \frac{Pt}{c} \tag{88}$$

冲量定理

$$I = p \tag{89}$$

则压力为

$$F = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{P}{c} = 1.43 \times 10^{-11}\mathrm{N} \tag{90}$$

压强为

$$\mathscr{P} = \frac{F}{\pi r^2} = \frac{P}{\pi c r^2} = 3.17 \times 10^{-12}\mathrm{Pa} \tag{91}$$