第十次作业反馈

参考解答与错误分析

Ch6 15

由线性代数知识知：$\forall A, B \in G, |AB| = |A||B|$,即$\forall f(AB) = f(A)f(B)$,故$f$为同态映射.

$$f(G) = \mathbb{Q}^*$$

$$Ker\ f = \{A \in G|\ |A| = 1\} = SL_n(\mathbb{Q})$$

Ch6 17

"$\Leftarrow$":

若$\exists \varphi : G \to G'$是同态映射且$\varphi(a) = b^k$,则

$$b^{nk} = (\varphi(a))^n = \varphi(a^n) = \varphi(e_G) = e_{G'}$$

而m为循环群$G' = \langle b \rangle$的阶,故$m|nk$

"$\Rightarrow$":

若$m|nk$,则取$\varphi : G \to G', \varphi(a^i) = b^{ik},\ i = 0, 1, ..., n-1$,由于

$$\forall a^i, a^j \in G, \varphi(a^i * a^j) = \varphi(a^{i+j}) = b^{(i+j)k} = b^{ik} * b^{jk} = \varphi(a^i) * \varphi(a^j)$$

故φ即为所求同态映射.

Ch6 18

考虑同态映射$f : G \to G/H, f(g) = Hg(\forall g \in G)$,
由于$|G/H| = [G : H] = m$,故$\forall x \in G, Hx$作为G/H中的元素,其阶整除m,
故$(Hx)^m = H$,即$Hx^m = H$,进而$x^m \in H$.

Ch6 20

(1)由于有限个换位元乘积的乘积仍为有限个换位元的乘积,故G'关于G中运算具有封闭性，且$\forall a' * b' * a * b \in G'$,有

$$(a' * b' * a * b)' = b' * a' * b * a \in G'$$

故$G' \leq G$.
又由于$\forall g \in G, a' * b' * a * b \in G'$,都有

$$g' * (a' * b' * a * b) * g = (g' * a * g)' * (g' * b * g)' * (g' * a * g) * (g' * b * g) \in G'$$

故$G' \lhd G$.

(2)即需证明$\forall g, h \in G, gG' \cdot hG' = hG' \cdot gG'$,即只需证明$g * h \in (h * g)G'$.事实上,由于$g' * h' * g * h \in G'$且$g * h = (h * g) * (g' * h' * g * h)$,上式成立.

(3)由于G'由换位元生成，只需证明符合条件的N包含G的所有的换位元：因为G/N为交换群，所以$\forall a,b\in G,(a*b)N=(b*a)N$,故$a'*b'*a*b=(b*a)'*(a*b)\in N$,证毕.

Ch7 3

因为$\langle R,+\rangle$是循环群,可设生成元为a,从而R中元素都可表示为"ia"形式,
故$\forall ia,ja\in R,(ia)\cdot(ja)=(a+...+a)(a+...+a)$(第一个括号$i$个，第二个括号$j$个)$=a^2+...+a^2(ij$个)$=(ja)\cdot(ia)$,即$\langle R,+,\cdot\rangle$为交换环.

Ch7 5

(1)不是整环(故也不是域),因为$(0,1)\cdot(1,0)=(0,0)=0_R$
(2)是整环,不是域(容易验证没有零因子:假设$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=0$,则$ad=-bc$(使得$\sqrt{2}$的系数为0),故$a^2-3b^2=0$,显然没有整数解,即零因子不存在,故是整环,而"$0+1\sqrt{2}$"没有逆元,故不是域)
(3)是域(故自然是整环)：
由于任意非零元素$a+b\sqrt{3}$有逆元$\frac{1}{a^2-3b^2}(a-b\sqrt{3})$ (由于$a,b\in\mathbb{Q}$,我们有$a^2-3b^2\neq 0$), 故为域.
