第二次答疑课

助教：黄瑞轩

---

1. 数列极限的定义

   给定数列 $\{a_n\}$ 和实数 a, 若对 $\forall\varepsilon>0$, 总是存在 $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, 使得 $n>N$ 时, $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立, 则记 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$；

   1、$[x]\le x<[x]+1,\ x-1<[x]\le x$

   2、(三角形不等式) $|a|-|b|\le|a\pm b|\le|a|+|b|$

   3、(平均值不等式) $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}\le\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}\le\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}\le\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}{n}}$

   4、(伯努利不等式) 设 $x>-1,x\neq0$ ，则当

   1° $\alpha>1\|\alpha<0$ 时有 $(1+x)^\alpha>1+\alpha x$

   2° $0<\alpha<1$ 时有 $(1+x)^\alpha<1+\alpha x$

   5、(Cauchy-Schwarz 不等式) 若 $a_1,a_2,,,,a_n$ 和 $b_1,b_2,,,b_n$ 是任意实数，则有

   $$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot b_k\right)^2\le\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)$$

   此外, 如果有某个 $a_i\neq0$, 则上式中的等号当且仅当存在一个实数 X 使得对于每一个 $k=1,2,\ldots,n$ 都有 $a_kX+b_k=0$ 成立。

2. 极限的四则运算和一些可以直接用的推论

   数列 $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ 分别收敛到 a,b ，则

   (1) 数列 $\{a_n\pm b_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n=a\pm b$

   (2) 数列 $\{a_nb_n\}$ 收敛，且有

   $$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n=ab$$

   (3) 若 $b\neq0$ ，则数列 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 收敛，且有

   $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim a_n}{\lim b_n}=\frac{a}{b}$$

   【特别强调】无限项的和不能使用四则运算规则!!! 例子：$\lim\sum\frac{1}{n}$

   【推论 1】若 a_n 收敛到 a ，则对任意 m 次多项式 $p(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_mx^m$ 有

   $$\lim_{n\to\infty}p(a_n)=p(a)$$

   【推论 2】对于常见的函数可用。事实上这部分学了函数的连续性之后就不用管了。

   【性质】（收敛数列有界）如果 $\{a_n\}$ 是收敛的，则 $\{a_n\}$ 一定是有界数列。即 $\exists M>0$ ，使得 $|a_n|<M,\forall n$。

3. 无穷大量和无穷小量

定义：请参阅教科书。

主要要说的是 Stoltz 定理（如无特殊要求可以直接使用）。

(1) 数列 $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ 的极限均为 0 $\{y_n\}$ 严格单调，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=l$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l$$

(2) 数列 $\{y_n\}$ 的极限均为 ∞ $\{y_n\}$ 严格单调，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=l$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l$$

【推论】设 $x_n>0$ ，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=r$ ，则 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=r$

4. 应用及习题

(1) 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限, 其中 $a_0=1, a_n=1+\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1}$ 。

解: (单调有界定理) 显然 $a_n\ge 1$, $n>1$ 时 $a_n=2-\frac{1}{1+a_{n-1}}$, 所以 $1\leqslant a_n<2$. 又 $a_n=1+\frac{1}{1+\frac{1}{a_{n-1}}}$, 计算 $a_1=\frac{3}{2}, a_2=\frac{8}{5}>a_1$, 由数学归纳法易证 $a_{n+1}>a_n$.

(数学归纳法: 假设 $a_n>a_{n-1}$, 则 $2-\frac{1}{1+a_n}>2-\frac{1}{1+a_{n-1}}$, 即 $a_{n+1}>a_n$.)

由上可知 $\{a_n\}$ 单调递增有上界, 故由单调有界定理知 $\{a_n\}$ 收敛.

设 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, 对已知递推式两边求极限，解得 $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, 因 $1\leqslant a_n<2$ ，所以

$$a=\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(2) 若 $a_n>0$, 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}>1$, 求证 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 。

(3) 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均为正数列, 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}, n=1,2,\ldots$, 求证: 若 $\{b_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 收敛。

(4) 若 $a_n>0$, 且 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, 求证 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}=a$ 。

(5) 若 $a_n>0$, 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=a$, 求证 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$ 。

(6) 求证数列 $\{a_n\}$ 收敛, 其中 $a_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$ 。

(7) 证明若 $\lim_{n\to\infty}a_n=a>0$，则 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{a}$。

(8) 求 $\{a_n\}$ 的极限： 1° $a_n=\sqrt[n]{\cos 1+\cos^2 2+\ldots+\cos^2 n}$ $\quad 2^\circ$ $a_n=n\left(1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}}\right)$