代数结构第11次作业反馈

Ch7 P8

- 证明 $< E_H , + >$ 是 $< E\ ,\ + >$ 的子群
  - 显然 E_H 是 E 的非空子集
  - 封闭性：$\forall f, g \in E_H, (f+g)(x) = f(x) + g(x) = h_1 + h_2 = h_3 \in H$
  - 逆元：
    - E 中单位元 f_0 为 $f_0(x) = 0_G$,其中 0_G 为 G 的单位元(具体证明参考课本108页例3)
    - 对于任意给定 E_H 中映射 f ， 可以找到一个这样的映射 $f^{'}$，满足对任意 $x \in H, f^{'}(x) = 0_G - f(x)$
    - 因为 H 是群具有封闭性，因此 $\forall x \in H, f^{'}(x) \in H$, 进而推出 $f^{'} \in E_H$
    - 且这样定义的f'满足 $(f + f')(x) = f(x) + 0_G - f(x) = 0_G = f_0(x)$，因此 f' 是 f 的逆，且属于 E_H
- E_H 对 $\cdot$ 运算封闭
  - $\forall f, g \in E_H$，$\forall x \in H$，$(f \cdot g)(x) = f(g(x)) = f(h_1) \in H$
  - 由 x 的任意性可知，$(f \cdot g)(H) \subseteq H$
  - 因此 $f \cdot g \in E_H$
- E 关于 $\cdot$ 的单位元属于 E_H
  - E 关于 $\cdot$ 的单位元为恒等映射 $f_1(x) = x$，具体证明见课本108页例3
  - $\forall x \in H, f_1(x) = x \in H \Rightarrow f_1(H) \subseteq H$
  - $f_1 \in E_H$

综上，$< E_H , +\ ,\ \cdot >$ 是 $< E\ , +\ ,\ \cdot >$ 的子群

Ch7 P9

为了方便表示，不妨设环$< R\ , +\ ,\ \cdot >$ 有两个子环 H, K, 而集合 $I = H \bigcap K$

证明如下

- I 非空，因为它至少含有元素 0_R
- $< I,\ + >$ 是 $< R\ , + >$子群 (第5章习题中已经证过)
  - $\forall a, b \in I, a + b \in H, a + b \in K \Rightarrow a + b \in I$
  - $\forall a \in I, a' \in H, a' \in K \Rightarrow a' \in I$
- $1_R \in H, 1_R \in K \Rightarrow 1_R \in H \bigcap K = I$

综上，I 是 R 的子环

Ch7 P12

$I_1 \bigcap I_2$

对 $\forall x,y \in I_1 \bigcap I_2$，$\forall r \in R$

- 减法封闭性
  - $x,y \in I_1 \Rightarrow x-y \in I_1$
  - $x,y \in I_2 \Rightarrow x-y \in I_2$
  - 故$x-y \in I_1 \bigcap I_2$
- 乘法封闭性
  - $x \in I_1 \Rightarrow x \cdot r \in I_1 \bigwedge r \cdot x \in I_1$
  - $x \in I_2 \Rightarrow x \cdot r \in I_2 \bigwedge r \cdot x \in I_2$
  - $x \cdot r \in I_1 \bigcap I_2 \bigwedge r \cdot x \in I_1 \bigcap I_2$

$I_1 \cdot I_2$

对 $\forall x,y \in I_1 \cdot I_2$，$\forall z \in R$
不妨设

$$x = \sum_{k=1}^{n_1} r_{1k} r_{2k}$$

$$y = \sum_{i=1}^{n_2} r_{1i} r_{2i}$$

- 减法封闭性
  - $\forall x \in I,\ -x \in I$
  - $$x-y = \sum_{k=1}^{n_1} r_{1k} r_{2k} - \sum_{i=1}^{n_2} r_{1i} r_{2i}$$
    $$= \sum_{k=1}^{n_1} r_{1k} r_{2k} + \sum_{i=1}^{n_2} (-r_{1i}) \cdot r_{2i}$$
    $$= \sum_{j=1}^{n_1+n_2} r_{1j} r_{2j}$$
- 乘法封闭性

- $$x \cdot z = (\sum_{k=1}^{n_1} r_{1k}r_{2k}) \cdot z = \sum_{k=1}^{n_1} r_{1k}(r_{2k} \cdot z) = \sum_{k=1}^{n_1} r_{1k}\widetilde{r_{2k}}$$
- $$z \cdot x = z \cdot (\sum_{k=1}^{n_1} r_{1k}r_{2k}) = \sum_{k=1}^{n_1} (z \cdot r_{1k})r_{2k} = \sum_{k=1}^{n_1} \widetilde{r_{1k}}r_{2k}$$
- 上述 $\widetilde{r_{2k}} = r_{2k} \cdot z \in I_2$，$\widetilde{r_{1k}} = z \cdot r_{1k} \in I_1$，因此$x \cdot z \in I_1 \cdot I_2$，$z \cdot x \in I_1 \cdot I_2$

$I_1 + I_2$

对 $\forall x, y \in I_1 + I_2$，$\forall z \in R$
不妨设

$$x = a + b \ \ (a \in I_1 \ , \ b \in I_2)$$
$$y = c + d \ \ (c \in I_1 \ , \ d \in I_2)$$

- 减法封闭性
  - $x - y = (a + b) - (c + d) = (a - c) + (b - d)$
  - $(a + b) \in I_1 \ , (c + d) \in I_2$
  - 由上可知 $x - y \in I_1 + I_2$
- 乘法封闭性
  - $x \cdot z = (a + b) \cdot z = az + bz$
  - $z \cdot x = z \cdot (a + b) = za + zb$
  - 因为 I_1 ，I_2 都是理想，所以 $az, za \in I_1$，$bz, zb \in I_2$ ，进而推出 $x \cdot z \in I_1 + I_2 \bigwedge z \cdot x \in I_1 + I_2$

$I_1 \cdot I_2 \subseteq I_1 \bigcap I_2$

对 $\forall r_1 \in I_1, \forall r_2 \in I_2$
因为 I_1, I_2 均为理想，所以 $r_1 \cdot r_2 \in I_1$ ，$r_1 \cdot r_2 \in I_2$

$$\Rightarrow r_1 \cdot r_2 \in I_1 \bigcap I_2$$

而对 $\forall x \in I_1 \cdot I_2$，设 $x = \sum_{k=1}^{n} r_{1k}r_{2k}$

由上可知 $r_{1k} \cdot r_{2k} \in I_1 \bigcap I_2$

而 $< I_1 \bigcap I_2, + >$ 为群，由封闭性知 $x \in I_1 \bigcap I_2$

故 $I_1 \cdot I_2 \subseteq I_1 \bigcap I_2$

Ch7 P15

证明如下

- 任意$\begin{pmatrix} 2m_1 & 2n_1 \\ 2k_1 & 2l_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2m_2 & 2n_2 \\ 2k_2 & 2l_2 \end{pmatrix} \in I$

$$\begin{pmatrix} 2m_1 & 2n_1 \\ 2k_1 & 2l_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2m_2 & 2n_2 \\ 2k_2 & 2l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(m_1-m_2) & 2(n_1-n_2) \\ 2(k_1-k_2) & 2(l_1-l_2) \end{pmatrix} \in I$$

- 任意$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in R$, $\begin{pmatrix} 2m_1 & 2n_1 \\ 2k_1 & 2l_1 \end{pmatrix} \in I$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2m_1 & 2n_1 \\ 2k_1 & 2l_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(m_1a_1+k_1b_1) & 2(n_1a_1+l_1b_1) \\ 2(m_1c_1+k_1d_1) & 2(n_1c_1+l_1d_1) \end{pmatrix} \in I$$
$$\begin{pmatrix} 2m_1 & 2n_1 \\ 2k_1 & 2l_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(m_1a_1+n_1c_1) & 2(m_1b_1+n_1d_1) \\ 2(k_1a_1+l_1c_1) & 2(k_1b_1+l_1d_1) \end{pmatrix} \in I$$

商环 $R/I = \{I,\ M_1+I, M_2+I, \dots, M_{15}+I\}$

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$
$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$
$M_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$
$M_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ch7 P21

Z_2 到 Z 的同态映射 f 应该满足

$f([0]) = f([0]+[0]) = f([0]) + f([0]) \Rightarrow f(0) = 0$

进而

$f([0]) = f([1]+[1]) = f([1]) + f([1]) = 0 \Rightarrow f([1]) = 0$

因此满足条件的同态映射只有1个:

$$f : Z_2 \to Z$$
$$f([1]) = f([0]) = 0$$

Ch7 P23

参考课本113页例4

根据同余式性质

$$a \equiv b(mod\, n), c \equiv d(mod\, n) \Rightarrow a + c \equiv b + d(mod\, n), ac \equiv bd(mod\, n)$$

可以推出

- $f(\bar{a} + \bar{b}) = f(\overline{a+b}) = [a+b] = [a] + [b]$
- $f(\bar{a} \cdot \bar{b}) = f(\overline{a \cdot b}) = [a \cdot b] = [a] \cdot [b]$

再加上

- $f(1_{Z_m}) = f(\bar{1}) = [1] = 1_{Z_r}$

可知 f 是环同态映射

设 $m = kr$, 则 $Ker\ f = \{\ \overline{nr} \mid 0 \le n \le k-1\}$

而 $Z_r = \{[0], \ldots, [r-1]\}$ ，不难发现 Z_m 部分元素 $\bar{0}, \ldots, \overline{r-1}$ 的像构成的集合已经等于 Z_r ， 故 f 为满射

根据环同态基本定理，$Z_m/Ker\ f$ 与 Z_r 同构