1 二元关系

1.1 基本概念

（1）R是一个积集，集合A到集合B的关系R，$a \in A, b \in B$且$(a,b) \in R$，则a，b有关系R，如果没有$(a,b) \notin R$，则a,b无关系R。

（2）若$A = B$，R称为A上的二元关系。

（3）R是A上的关系。

1°（自反性）对于A的每个元素x均有$(x,x) \in R$即xRx;

【否定】R不是自反的，存在x，$(x,x) \notin R$

2°（不自反性）对于A的每个元素x均有$(x,x) \notin R$即$x\not R x$;

【否定】R不是不自反的，存在x，$(x,x) \in R$

3°（对称性）对于A的每个元素x, y，xRy时一定有yRx;

【逆否】对于A的每个元素x, y，$y\not R x$时一定有$x\not R y$

4°（反对称性）对于A的每个元素x, y，xRy且yRx时一定有$x = y$;

【逆否】对于A的每个元素x, y，若$x \neq y$则$x\not R y$或$y\not R x$

5°（传递性）对于A的每个元素x, y, z，若xRy, yRz一定有xRz;

【逆否】对于A的每个元素x, y, z，若$x\not R z$，则一定有$x\not R y$或$y\not R z$

1.2 两个特殊关系

（1）万有关系$A \times A$

是自反的，不是不自反的，是对称的，不是反对称的，是传递的

（2）空关系$\emptyset$

不是自反的，是不自反的，是对称的（用逆否），是反对称的，是传递的

1.3 关系的表示

1° 关系矩阵：$\mathbf{M} = (m_{ij})$，若$a_i \not R b_j, m_{ij} = 0$，若$a_i R b_j, m_{ij} = 1$。

2° 哈斯图

◯如果a_iRa_j，那么从a_i出发画一个弧指向a_j。

◯如果R是自反的，则每个节点都有一个自封闭的圈；

◯如果R是不自反的，则每个节点都没有圈；

◯如果R是对称的，$a_i \neq a_j$，若左边到右边有弧，则右边到左边也一定有弧；

◯如果R是反对称的，$a_i \neq a_j$，若左边到右边有弧，则右边到左边一定没有弧；

◯如果R是传递的，$a_i \neq a_j$，若左边到右边有一条间接路，则左边到右边一定有一条直接路。

1.4 关系的运算

1.4.1 包含关系

作为$A \times B$的子集，如果$\rho_1 \subseteq \rho_2$，则作为关系而言$\rho_1 \leq \rho_2$；如果还有$\rho_1 \neq \rho_2$，则$\rho_1 < \rho_2$

1.4.2 关系的交并补

1.4.3 关系的合成

ρ_1是A到B的关系，ρ_2是B到C的关系，则A到C的关系$\rho_2 \circ \rho_1$为

$$x(\rho_2 \circ \rho_1)y \leftrightarrow \text{存在} z \in B,\ \text{使得} x\rho_1 z, z\rho_2 y \tag{1}$$

tips: 类比关系矩阵乘法；合成关系满足结合律

1.4.4 关系的闭包

R的某个性质闭包就是包含R且具有该性质的最小关系。

（1）传递闭包

$xR^+y \Leftrightarrow$ 存在$n > 0$，xR^ny

> 从关系图的角度来说，如果原关系图上有i到j的**路径**，则其传递闭包的关系图上就应有从i到j的**边**。

（2）自反闭包

$R' = I_A \cup R$

（3）对称闭包

$\tilde{R} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$，则对称闭包$R'' = R \cup \tilde{R}$

1.5 等价关系

（1）A上的【自反、对称、传递】关系叫做A上的等价关系

（2）等价类：$[a]=\{x|x\in A, aRx\}$（A中所有与元素a等价的元素集合）

（3）任意x, y∈A，要么[x]=[y]，要么[x]∩[y]=∅

（4）$\cup_{a\in A}[a]=A$

（5）一个与自然数集合等势的集族$\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\ldots,A_k,\ldots\}$，这里$A_i\subseteq A$，若满足类似（3）（4）的关系，则称$\mathscr{A}$是A的一个划分

（6）A的R等价类构成的集族是A的一个划分，称为A对于关系R的商集

1.6 序关系

1.6.1 部分序

（1）A上的【自反、反对称、传递】关系叫做A上的部分序关系

（2）A和A上的一个部分序ρ构成部分序集，记作<A, ρ>

（3）若R是A上的部分序，x, y∈A，若xRy，则称x和y是可比较的

> R具有自反性，x和x可比较
>
> R具有反对称性，若x,y可比较且y,x可比较，则x=y
>
> R具有传递性，若x,y可比较，y,z可比较，则x,z可比较

1.6.2 线性序

若R是A上的部分序，如果A中任意两个元素都是可比较的，即aRb, bRa<u>至少有一个成立</u>，称R是线性序或完全序，<A, ρ>称为线性序集。

> $a\tilde{\rho}b\Leftrightarrow a\rho b, a\neq b$
>
> 【字典序】A^n上的序关系ρ'，按顺序以分量比较（$\tilde{\rho}$）

1.6.3 极大元与极小元

（1）在部分序集<A,ρ>上，若$x\tilde{\rho}y$且不存在z使得$x\tilde{\rho}z, z\tilde{\rho}y$，则称y控制x，x被y控制，记作$x\mathring{\rho}y$

（2）在部分序集<A,ρ>上（A为有限集合），$a\in A$，若存在$b\in A$使得$a\tilde{\rho}b$，则A中一定有a的控制元素

（3）在部分序集<A,ρ>上（A为有限集合），$a \in A$，或者没有$b \in A$使得$b\tilde{\rho}a$，或者a控制某个元素

（4）在部分序集<A,ρ>上，$a \in A$，若不存在$b \in A$使得$a\tilde{\rho}b$，则称a为该部分序集的极大元

（5）Hasse图：每个元素向上连接其所有控制元素，向下连接其所有被控制元素

1.6.4 最大元与最小元

（1）在部分序集<A,ρ>上，$a \in A$，若所有$b \in A$，都有$b\rho a$，则称a是该部分序集的最大元（隐含a与所有元素都可比较）

（2）部分序集<A,ρ>的最大元必是极大元（反证法）

（3）最大元至多有一个

（4）A为有限集合，部分序集<A,ρ>有最大元**当且仅当**<A,ρ>仅有一个极大元

1.6.5 上界与下界

1.7 集合的势

（1）若存在A到B的双射，则称A与B等势，记为A～B

（2）E是万有集合，$\mathscr{P}(E)$是所有集合构成的集族，等势关系是$\mathscr{P}(E)$的等价关系，可以分为若干个等价类，一个等价类中的集合彼此等势。

（3）与一个自然数集合的断片|0, n|={0,1, ..., n}等势的集合是有限集合，不是有限集合的集合是无限集合

（4）与自然数集合等势的集合叫做可数无限集合

（5）自然数集合的势记为$\aleph_0$

（6）(0,1)与**R**等势，都是不可数集合，势记为$\aleph_1$

（7）若A与B的一个子集等势，称B支配A，记为$A \precsim B$，或者A的势≤B的势

（8）$A \prec \mathscr{P}(A)$

（9）集合间的支配关系是部分序关系

（10）一个无限集合必然含有一个可数无限子集

（11）一个无限集合必然与它的一个真子集等势（无限集合的等价定义）