最后一次作业解答

微积分 I 助教：黄瑞轩

习题 5.2

5.（1） $y'\sin x = y\ln y, y(x=\frac{\pi}{2})=1$

提示：对于 x,y 不耦合的情况，可以将 x,y 分离（导数写成微商的形式），即变形为 $\frac{dy}{dx}\sin x = y\ln y \Rightarrow \frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{\sin x}$。

5.（2） $y-xy'=6(1+x^2y'), y(x=1)=1$

提示：这个方程导数最多是一阶，因此可以化为一阶线性方程：$y'-\frac{1}{x+6x^2}y=-\frac{6}{x+6x^2}$。

5.（3） $y'=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}, y(1)=1$

提示：设 $y/x=k$，这里 k 也是关于 x 的函数。则 $dy/dx=k+xk'$，原方程化为 $k+xk'=k\ln k$，即 $\frac{dk}{dx}=\frac{k\ln k-k}{x}$，到这里是明显的分离变量法。

5.（4） $y'+y/x=\sin x/x, y(\pi)=1$

提示：一阶线性方程形式 $y'+p(x)y=f(x)$。

5.（5） $y'+y\cos x=\sin x\cos x, y(0)=1$

提示：一阶线性方程形式 $y'+p(x)y=f(x)$。

5.（6） $(y+\sqrt{x^2+y^2})dx=xdy, y(1)=0$

提示：设 $y/x=k$。则 $k+\sqrt{1+k^2}=k+xk'$，到这里是明显的分离变量法。

总结：

- 在做除法之前，需要判断分母为 0 的解是否是方程的特解！！！
- 求解初始问题有书上固定的模型（牢记），出现 $\ln(\cdot), \sqrt{\cdot}$ 这样不在模型中的函数，可以尝试分离变量法
- 可以通过观察方程是否齐次来设 $y/x=k$，有助于方程的化简

6. 提示：两边求一次导：$\int_1^x f(t)dt+xf(x)=\int_1^x tf(t)dt+(x+1)xf(x)$，化简即 $\int_1^x(1-t)f(t)dt=x^2f(x)$，再求一次导：$(1-x)f(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$。

习题 5.3

1.（1）提示：令 $y'=k$，则化为一阶方程 $xk'=k$；

1.（2）提示：同上；

1.（3）提示：同上（习题 5.2.5(3)）；

1.（4）提示：令 $p(y)=dy(x)/dx$，则 $y''(x)=\frac{dp(y)}{dx}=dp(y)/dy\cdot dy/dx=pdp(y)/dy$，化为 $1+p^2=2ypdp(y)/dy$，可以分离变量；

1.（5）提示：同上；

1.（6）提示：同上；

1.（7）提示：令 $y'=k$，则化为一阶方程 $k'=k+x$；

1.（8）提示：令 $p(y)=dy(x)/dx$；

1.（9）提示：令 $y'=k$；

1. （10）提示：同上；

1. （11）提示：同上；

1. （12）提示：令 $p(y)=dy(x)/dx$；

2. （1）提示：令 $y'=k$；

2. （1）提示：令 $p(y)=dy(x)/dx$；

2. （1）提示：令 $y'=k$；

2. （1）提示：令 $p(y)=dy(x)/dx$；

2. （1）提示：令 $p(y)=dy(x)/dx$；

> 总结：
>
> - 做了变换之后，要记得解的目的是 $y(x)$，不要忘记变换回 y 或 x 的形式
> - 可降阶的二阶方程有两种：$F(x,y',y'')=0$ 或 $F(y,y',y'')=0$，处理方法分别是令 $y'=k$ 和 令 $p(y)=dy(x)/dx$

习题 5.4

4. 解题依据为书 P328 例 5.4.4；

10. 解题依据为书 P330 定理 5.4.5；

习题 5.5

1. 解题依据：

> $y''+py'+qy=0$（二阶，常系数，线性，齐次）
>
> - 要求解这个方程，可以先求出它的两个线性无关的特解，再由**解的叠加原理**得到通解
> - 设解的形式为 $y=e^{rx}$（**线性无关**的有关结论）代入方程即得到 $\left(r^2+pr+q\right)e^{rx}=0 \Rightarrow r^2+pr+q=0$，这个等式称为微分方程的**特征方程**
>
> （1）特征方程有两个不等实根 $r_1\neq r_2$，则两个特解为 $y_1=e^{r_1x},y_2=e^{r_2x}$ ，而 $\frac{y_1}{y_2}\neq C$ ，故通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
>
> （2）特征方程有一对共轭复根 $r_1=a+bi,r_2=a-bi,b\neq 0$，则两个特解为 $y_1=e^{ax+bxi},y_2=e^{ax-bxi}$ ，由欧拉公式有 $y_1=e^{ax}[\cos(bx)+i\sin(bx)],y_2=e^{ax}[\cos(bx)-i\sin(bx)]$。特解含有复数部分，运用解的叠加原理，可以凑出新的两个特解 $y_{11}=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=e^{ax}\cos(bx),y_{12}=\frac{1}{2}(y_1-y_2)=e^{ax}\sin(bx)$，它们也线性无关，因此通解为 $y=e^{ax}\left[C_1\cos(bx)+C_2\sin(bx)\right]$
>
> （3）特征方程具有两个相等实根 $r_1=r_2$，只能得到一个特解 $y_1=e^{r_1x}$。设 $\frac{y_2}{y_1}=u(x)\Rightarrow y_2=y_1u(x)$，代入原微分方程可得到 $u''=0$，不妨取 $u=x$ 作为第二个特解，则通解为 $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{r_1x}$

2. 解题依据：

- 非齐次方程特解 y_p
- 齐次方程通解 y_h
- 叠加原理，非齐次方程通解 $y=y_h+y_p$

8. 解题依据：书 P340 页 5.5.3 节

总结

微分方程这一章节脉络比较清晰，各定理的目的性也比较强，这部分的考试内容也基本不会跳出书上的模型之外（因为这些模型本来就是在物理等学科研究中经常碰到的方程），属于送分题的范畴。