概率论与数理统计（第六周）

PB20111686 黄瑞轩

Class Test 1

$N(t)\sim\mathcal{P}(\lambda t)\Rightarrow P(N(t)=n)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$，当 $N=1$ 时，$P(X_1-X_0>t)=P(N(t)=0)=e^{-\lambda t}$，故 $P(X_1-X_0\le t)=1-e^{-\lambda t}$，$X_1-X_0$ 的密度函数为 $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$，因此服从指数分布。
$P(X_N-X_{N-1}>t)=P(N(s+t)-N(s)=0,X_{N-1}=s)$，由于每一次事件的发生和之前事件发生无关，所以 $P(N(s+t)-N(s)=0,X_{N-1}=s)=P(N(t)=0)=e^{-\lambda t}$，因此 X_N-X_{N-1} 也服从 $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$。

Class Test 2

$$\begin{aligned}
P(a<X\le b)&=P(X\le b)-P(X\le a)\\
&=\int_{-\infty}^{b}f(x)dx-\int_{-\infty}^{a}f(x)dx\\
&=\int_{a}^{b}f(x)dx\\
&=\int_{a}^{b}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]dx\\
&=\int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\\
&=\phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

Chap 2 Prob. 50

$X\sim\mathcal{E}(\lambda)\Rightarrow f(t)=\lambda e^{-\lambda t}(t\ge0)$

记 A : 一次到银行的等待服务时间不超过10分钟

$P(A)=P(X<10)=\int_0^{10}f(t)dt=1-e^{-10\lambda}=1-e^{-2}$

记 B : 此人一个月内每次都接受服务

$P(B)=[P(A)]^5=(1-e^{-2})^5$

记 C : 此人一个月内至少有一次未接受服务

$P(C)=1-P(B)=1-(1-e^{-2})^5$

Chap 2 Prob. 63

$Y=\{-1,1\}$，$P(Y=-1)=P(X=0)+P(X=\pi)=\frac{1}{2}$，$P(Y=1)=P(X=\frac{\pi}{2})+P(X=\frac{3\pi}{2})=\frac{1}{2}$，故 Y 的分布律为

$$\begin{pmatrix}-1&1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$Z=\{\frac{\pi}{2},0,\pi\}$，$P(Z=\frac{\pi}{2})=P(X=0)+P(X=\pi)=\frac{1}{2}$，$P(Z=0)=P(X=\frac{\pi}{2})=\frac{1}{3}$，$P(Z=\pi)=P(X=\frac{3\pi}{2})=\frac{1}{6}$，故 Z 的分布律为

$$\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}&0&\pi\\\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$