第二周作业反馈

(注：这门课涉及代数学中一些很基础的东西，有些要证明的结论可能看上去很显然，但大家在做题时仍应注意逻辑的严谨以及书写的规范，尽量用数学语言进行表达，避免使用过多文字描述。)

一、习题分析与参考解答

Ch1 7

(1) 令$A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，十进制无符号整数集$E$定义如下：

1.如果$a\in A$，则$a\in E$；

2.如果$x\in E$，且$a\in A$，则a与x的连接$ax\in E$；

3.集合E只包含有限次使用 1,2 所得到的元素。

(2) 令$A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，带有限小数部分的无符号实数集$E$定义如下：

1.如果$a\in A$，则$a.\in E$；

2.如果$x\in E$，且$a\in A$，则a与x的连接$ax, xa\in E$；

3.集合E只包含有限次使用 1,2 所得到的元素。

(3) 令$A=\{0,1\}$，不以 0 打头的二进制偶整数集E定义如下：

1.$0,10\in E$；

2.如果$1x0\in E$，且$a\in A$，则将a插在x后的$1xa0\in E$；

3.集合E只包含有限次使用 1,2 所得到的元素。

（注：从各小题题干给出的集合元素举例，即“它应该包括……等”中可以看出，本题更希望同学们用字符串的方式构造集合，而不是借助这些数之间的代数关系。所以，如果定义的过程中用到加法、乘法等运算是不合适的）

Ch2 1

(1) 由于$a|a$且$a|b$，故$a|(a,b)$，又$(a,b)|a$，**结合$\boldsymbol{a>0}$，$\boldsymbol{(a,b)>0}$**，知$(a,b)=a$。

(2) 将(a,b)作为(1)中的a即得结论。

Ch2 2

(1) 假设$(n,n+1)=d$，则$d|n$且$d|(n+1)$，故$d|[(n+1)-n]$=1，即$d=1$。

(2) 由于$(n,n+k)=(n,k)>0$，因此对于固定的n，(n,k)的可能取值为n的所有正因子。（本题的意思是对于固定的n，求当k取遍所有整数时，(n,k)所有可能的取值集合）

Ch2 4

由于$n^3-n=(n-1)n(n+1)$为三个连续整除的乘积，故其中必有某一个被 2 整除，有某一个被 3 整除，因此n^3-n为 2 和 3 的公倍数，进而$6=[2,3]|(n^3-n)$

Ch2 6

$2345=5\times 7\times 67$
$3456=2^7\times 3^3$

Ch2 9

注意到本题三个小题中x,y的系数都互素，因此：

(1) 特解$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$，故所有整数解为$\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\end{cases}$

(2) 特解$\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$，故所有整数解为$\begin{cases}x=1+t\\y=-2t\end{cases}$

(3) 特解$\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$，故所有整数解为$\begin{cases}x=-1+16t\\y=2-15t\end{cases}$

(以上的 t 取遍所有整数，解题时应注意说明！)

Ch2 11

设使用x张 5 分，y张 1 角，$30-x-y$张 2 角 5 分，

原问题转化为$5x+10y+25(30-x-y)=500$，满足$\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ 30-x-y\geq 0 \end{cases}$

即$4x+3y=50$，

共有 4 组符合条件的解：

$\begin{cases} x=2 \\ y=14 \end{cases}$ $\begin{cases} x=5 \\ y=10 \end{cases}$ $\begin{cases} x=8 \\ y=6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=11 \\ y=2 \end{cases}$

二、知识点回顾

- **集合的归纳定义**

集合归纳定义由三条语句组成：基础语句、归纳语句和终结语句。

一个好的归纳定义应使得：基础语句中添加的元素尽可能少，归纳语句中的构造方法尽可能简单。同时又要保证不遗漏。（这次作业做错的同学，大部分问题是遗漏了某些本应该在集合中的元素）

- **整除**

这部分小定理小结论太多了，就不一一列举了，可以沿着这些概念回顾这部分知识点：

整除、因子、最大公因子（常见求法：求两整数可线性表示的最小正整数，辗转相除法）、最小公倍数、素因子分解唯一性定理

- **线性不定方程**

1.解之前注意验证方程有解的条件：$ax+by=n$有解当且仅当$(a,b)|n$

2.找特解x_0,y_0

3.公式求得通解：$x=x_0+\frac{b}{(a,b)}t$，$y=y_0+\frac{a}{(a,b)}t$

· **一些补充说明**

1.关于用$a|b$，$b|a$推出$a=b$（a,b为正整数）:

同学们以前可能接触过用$a\le b$，$b\le a$推出$a=b$，本质上这两种方法体现了同一种思想，即利用序关系的反对称性（"$\le$"是定义在实数上的一种序关系，"|"是定义在正整数上的序关系）。序关系还蕴含自反性和传递性，对于整除来说，自反性体现在"$\forall a\neq 0$,满足 $a|a$"，传递性体现在"若$a|b$，$b|c$，则$a|c$"。(注意当a,b不一定为正时，$a|b$，$b|a$只能推出$a=\pm b$)

相关知识点在书本 4.3 节，有兴趣的同学可以先去简单了解一下。

2.关于线性不定方程$ax+by=n$的解法解释:

事实上，书本上的解法将解方程拆成了两个问题:

$ax+by=n$ ①

$ax+by=0$ ②

先找到①的一个特解，再计算②的通解集合，将集合中每个元素与①的特解相加，从而得到①的通解。这是线性代数中的一种思想，在求解一些线性代数、微分方程问题时也很常用。这个方法能实现的前提是，方程左边关于变量是线性的（例如，若把x换成x^2则这个方法失效）

我们一般称类似①的方程为非齐次方程，而称②为相应的齐次方程。齐次方程的解集对加法和数乘封闭，可以将求出来的解集称为一个解空间（由于整数集合不构成数域，所以不定方程的解并不构成线性空间，但原理类似）。而后加上非齐次方程的特解的过程，可以认为是对这个解空间进行了一个平移，使之称为齐次方程的解集。

对于方程$ax+by=n$而言，$x=\frac{b}{(a,b)}t$，$y=\frac{a}{(a,b)}t$ 是齐次方程②的通解，加上非齐次方程①的特解(x_0,y_0)之后就构成①的通解。

值得注意的是，我们求出的通解与非齐次方程的特解选取是无关的。若$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$为①的两个不同的特解，则$\begin{cases}ax_1+by_1=n\\ax_2+by_2=n\end{cases}$，两式相减得:

$$a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2)=0$$

即$\pm(x_1-x_2,y_1-y_2)$为②的解，加上特解后会变成①的解，因此，不论选取哪一个作为特解，最终的解集一定会包含另一个。因此我们所求得的解集与特解选取无关。这对于一般的线性方程组问题也是成立的。