第12章 Fourier分析

段雅丽

中国科学技术大学数学科学学院

ylduan01@ustc.edu.cn

Fourier分析开创背景

1807年，法国数学家Fourier向巴黎科学院呈交《热的传播》论文，推导出著名的热传导方程，并在求解该方程时发现，其解函数可以由三角函数构成的级数形式表示，从而大胆地断言：任意一个函数都可以展成三角函数的无穷级数. 虽然他并没有明确给出这个断言成立的数学条件，以及严格的数学证明，但是Fourier级数、Fourier积分以及Fourier变换等理论均由此创始，开创了"**Fourier分析**"这一重要的数学分支，拓广了传统的函数概念.

引例：一维杆状物体的热流问题

在一个长度为l 的长杆上，两端保持零度，初始的温度分布为$f(x)$，随着时间的演化，k 是比热系数，求t 时刻的温度分布$T(x,t)$. 该问题的数学模型为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = k^2 \dfrac{\partial T}{\partial t}, \quad T = T(x,t) & (1) \\ T(0,t) = T(\ell,t) = 0, \quad (t > 0) \qquad \text{（边界条件）} & (2) \\ T(x,0) = f(x), \quad 0 < x < \ell \qquad \text{（初始条件）} & (3) \end{cases}$$

分离变量法: 设方程的解有如下形式:

$$T(x,t)=\varphi(x)\psi(t).$$

将此代入方程得

$$\varphi''(x)\psi(t)=k^2\varphi(x)\psi'(t) \qquad \text{或} \qquad \frac{\varphi''(x)}{k^2\varphi(x)}=\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}. \tag{4}$$

上式两端分别是x 与t 的函数, 所以

$$\frac{\varphi''(x)}{k^2\varphi(x)}=\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}=-\lambda,$$

其中λ 是常数. $k=1$ 时, 上式等价于下列方程

$$\varphi''(x)+\lambda\varphi(x)=0, \tag{5}$$

$$\psi'(t)+\lambda\psi(t)=0. \tag{6}$$

(5) 式的通解为 $\varphi(x)=b\sin(\sqrt{\lambda}x+c)$.
由边界条件(2) 知$\varphi(0)=\varphi(l)=0$, 则$c=0$, $\sqrt{\lambda}\ell=n\pi$, $(n=1,2,\cdots)$

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2. \tag{7}$$

将(7) 代入, 方程(5), (6) 有一组解:

$$\varphi_n(x) = b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x, \quad \psi_n(t) = \exp\left(-(\frac{n\pi}{\ell})^2 t\right).$$

这样得到一组满足条件的解

$$T_n(x,t) = b_n \exp\left(-(\frac{n\pi}{\ell})^2 t\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}x, \ n = 1, 2\cdots$$

这里b_n是任意常数. 因为原方程是线性的, 边界条件是齐次的, 所以不同解的线性组合还是解, 这样就得到满足边界条件的通解

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-(\frac{n\pi}{\ell})^2 t\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}x, \tag{8}$$

再根据初始条件(3)

$$f(x) = T(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x. \tag{9}$$

确定$\{b_n\}$ 即可.

问题: 函数$f(x)$ 是否一定可以表示为(9) 式右端的级数? 如果可以有这样的表示, 那么怎样求系数b_n ?

目录

§12.1.1 周期函数与三角函数的正交性

若$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上有定义, 且存在$T>0$ 使得

$$f(x+T)=f(x),\quad \forall\ x\in(-\infty,+\infty),$$

则称$f(x)$ 是一个**周期函数**, T 是$f(x)$ 的一个周期.

- **周期函数的基本性质:**

  (1) 若T 是$f(x)$ 的周期, 则nT $(n\in\mathbb{Z})$ 也是它的周期.

  (2) 若$f(x)$ 在有限区间上可积, T 是它的周期, 则

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

§12.1.1 周期函数与三角函数的正交性

- **周期函数的基本性质:**

(3) (**周期延拓**) 若$f(x)$ 在$(-\ell,\ell)$ 上有定义, 则

$$F(x)=\begin{cases} f(x-2n\ell), & (2n-1)\ell<x<(2n+1)\ell \\ \frac{f(\ell)+f(-\ell)}{2}, & x=(2n+1)\ell, \end{cases}$$

$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 是$(-\infty,+\infty)$ 上以2ℓ 为周期的函数.

(4) (**偶延拓**) 若$f(x)$ 在$[0,\ell)$ 上有定义, 则

$$f_e(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,\ell] \\ f(-x), & x\in[-\ell,0] \end{cases}$$

是$(-\ell,\ell)$ 上偶函数, 按(3) 中的方法可以将它延拓到$(-\infty,+\infty)$ 上, 成为以2ℓ 为周期的偶函数.

§12.1.1 周期函数与三角函数的正交性

- **周期函数的基本性质:**

  (5) (奇延拓) 若$f(x)$ 在$(0,\ell)$ 上有定义, 则

$$f_o(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\ell)\\ 0, & x=0\\ -f(-x), & x\in(-\ell,0)\end{cases}$$

是$(-\ell,\ell)$ 上奇函数, 按(3) 中的方法可以将它延拓到$(-\infty,+\infty)$ 上, 成为以2ℓ 为周期的奇函数.

§12.1.1 周期函数与三角函数的正交性

- **三角函数的正交性:**

  设$\mathbf{R}[-\pi,\pi]$ 是$[-\pi,\pi]$ 上Riemann 可积函数全体. 对于$f,g\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$, 定义

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,dx,$$

则$\langle f,g\rangle$ 是$\mathbf{R}[-\pi,\pi]$ 上一个**内积**: 即

1° (**正定性**) $\langle f,f\rangle\geq 0$, 且$\langle f,f\rangle=0\iff f\xlongequal{a.e.}0$

2° (**对称性**) $\langle f,g\rangle=\langle g,f\rangle$

3° (**线性性**) $\langle c_1f_1+c_2f_2,g\rangle=c_1\langle f_1,g\rangle+c_2\langle f_2,g\rangle$

若$\langle f,g\rangle=0$, 则称f 与g 是**正交**的.

§12.1.1 周期函数与三角函数的正交性

- **三角函数的正交性:**
  三角函数$1,\ \sin x,\ \cos x, \cdots, \sin nx,\ \cos nx, \cdots$称为三角函数系. 它们共同的周期是$2\pi$, 在其一个周期$[-\pi,\ \pi]$ 内, 满足:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\mathrm{d}x=\delta_{mn}=\begin{cases}1, & m=n\\ 0, & m\neq n.\end{cases}\ (m,n=1,2,\cdots)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\mathrm{d}x=\delta_{mn},\ (m,n=1,2,\cdots)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\mathrm{d}x=0\ (m,n=0,1,2,\cdots),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\mathrm{d}x=2\pi$$

三角函数系是正交函数系.

§12.1.2 周期函数的Fourier级数

若函数$f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$ 上可以展开成三角级数，即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),$$

则根据级数理论及三角函数的正交性，有

$$\langle f(x),\cos kx\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x=a_k,\quad k=0,1,\cdots$$

$$\langle f(x),\sin kx\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x=b_k,\quad k=1,2,\cdots$$

称为$f(x)$ 的**Fourier 系数**.

§12.1.2 周期函数的Fourier级数

设$f(x)\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$，或者在$[-\pi,\pi]$上**可积且绝对可积**，就可以计算出Fourier 系数a_n,b_n，然后构造一个三角级数

$$f(x)\longrightarrow\{a_n,\ b_n\}\longrightarrow\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).$$

称它为$f(x)$ 的**Fourier级数**. 记为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).$$

其中符号$\sim$仅表示一种对应关系. 不能写为等号.
因为一是没有证明Fourier级数是否收敛; 二是即使Fourier级数收敛，是否收敛函数$f(x)$本身，也是需要证明的.

§12.1.2 周期函数的Fourier级数

- **Dirchlet 收敛定理:**
  设周期函数$f(x)$的周期为2π.
  (1) 如果在任何有限区间上$f(x)$逐段光滑, 那么它的Fourier级数在整个数轴上都收敛, 且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

  (2) 如果函数处处连续, 且在任何有限区间上是逐段光滑的, 则其Fourier 级数就在整个数轴上绝对一致收敛于$f(x)$.

  注记: Dirchlet收敛定理中的**逐段光滑**是指, 函数除有限个点外, $f(x)$ 连续且有连续的微商$f'(x)$, 而这有限个点只能是$f(x)$ 或$f'(x)$ 的第一类间断点.

Example

求周期为2π 的函数$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x<\pi,\end{cases}$ 的Fourier 级数，并讨论其收敛性.

解: 首先计算$f(x)$ 的Fourier 系数

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

所以有$f(x)$ 的Fourier 级数

$$f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right]$$

显然$f(x)$满足$Dirichlet$定理的条件(1), 则其Fourier级数收敛, 并有

$$\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right]=\begin{cases} f(x), & x\neq(2k-1)\pi \\ \frac{\pi}{2}, & x=(2k-1)\pi \end{cases}$$

令$x=0$, 则有

$$\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=f(0)=0\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

当$x=\frac{\pi}{2}$时, 得

$$\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right]=\frac{\pi}{2},$$

因而n为奇数时, 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}=\frac{\pi}{4}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}.$$

所以利用Fourier级数可以求一些数项级数的和.

Example

设$f(x)$以2π为周期, $f(x)=x^2,\quad x\in[-\pi,\pi]$, 将$f(x)$展成以$2\pi$为周期的$Fourier$级数, 求其和函数$S(x)$,并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$,
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$.

解: 先计算Fourier系数

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \mathrm{d}x = (-1)^n \frac{4}{n^2}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx \mathrm{d}x = 0, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

$f(x)$满足$Dirichlet$收敛定理条件(2), 因此其Fourier级数一致收敛于$f(x)$, 即

$$S(x) = f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \quad x \in [-\pi, \pi] \qquad (*)$$

令$x=\pi$得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$; 令$x=0$得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$;

所以 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

对$(*)$求导，利用函数项级数的微分性，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=\frac{x}{2}$$

$x=\frac{\pi}{2}$时，得$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{\pi}{4}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

对$(*)$在$[0,x]$, $x\in[-\pi,\pi]$上积分，利用函数项级数的积分性，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^3}\sin nx=\frac{x^3}{12}-\frac{\pi^2x}{12}$, $x=\frac{\pi}{2}$时，得$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.

§12.1.2 周期函数的Fourier级数

- **奇偶函数的Fourier级数:**

若周期函数$f(x)$是奇函数，则$a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x = 0$,
故其Fourier级数中只含有正弦函数

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

称为**Fourier正弦级数**，其中

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x,\ n = 1, 2, 3, \cdots.$$

§12.1.2 周期函数的Fourier级数

- **奇偶函数的Fourier级数:**

若周期函数$f(x)$是偶函数，则$b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0.$
故其Fourier级数中只含有余弦函数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

称为**Fourier余弦级数**，其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\ n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Example

考察周期为2π的函数$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi \leqslant x < \pi, \\ -\pi, & x=\pi. \end{cases}$，写出其Fourier级数，并求和函数$S(x)$及级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

解： 因$f(x)$在$(-\pi,\pi)$上为奇函数, 其Fourier系数有

$$a_n=0,\ n=0,1,2\cdots, \qquad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2(-1)^{n+1}}{n},\quad n\geqslant 1.$$

由$Dirichlet$收敛定理, 当$x\neq(2k-1)\pi$时，其Fourier级数收敛于$f(x)$，即

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

当$x=(2k-1)\pi$时，其Fourier级数收敛于$\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\dfrac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=0$. 故其和函数$S(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq(2k-1)\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots;\\ 0, & x=(2k-1)\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots. \end{cases}$

当$x=\dfrac{\pi}{2}$时,

$$\frac{\pi}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n}{2}\pi=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{m+1}}{2m-1},$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}.$$

§12.1.2 周期函数的Fourier级数

- **任意周期的情形:**

若$f(x)$以$2l$为周期的函数, 作变换 $x=\dfrac{l}{\pi}t$,
则$f(x)=f(\frac{l}{\pi}t)=g(t)$.

$$f(x)=f(2l+x)=f(\frac{l}{\pi}(2\pi+\frac{\pi}{l}x))=f(\frac{l}{\pi}(2\pi+t))=g(2\pi+t)$$

所以$g(t)$以2π为周期, 其Fourier级数为

$$g(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

从而$f(x)=g(\frac{\pi}{l}x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$,

§12.1.2 周期函数的Fourier级数

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt\mathrm{d}t \xlongequal{x=\frac{l}{\pi}t} \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin nt\mathrm{d}t \xlongequal{x=\frac{l}{\pi}t} \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \cdots$$

若$f(x)$是偶函数，则它的Fourier级数就是**余弦级数**

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{l}x, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2,$$

若$f(x)$是奇函数，则它的Fourier级数就是**正弦级数**

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin\frac{n\pi}{l}x, \quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Example

设$f(x) = x - l, \quad x \in [0, 2l)$，以$2l$为周期的周期函数，求其Fourier级数，并说明收敛情况.

解: 计算Fourier系数

$$a_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l}(x-l)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l}(x-l)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x = -\frac{2l}{n\pi}$$

$f(x)$以$2l$为周期逐段光滑，则其Fourier级数收敛.
当$x=2kl \quad (k\in\mathbb{Z})$ 为第一类间断点，其Fourier级数收敛于$\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=0$;
当$x\neq 2kl$ 时，$f(x)=-\dfrac{2l}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{l}x.$

Example

设$f(x)=e^{ax},\quad x\in(-1,1]$，以2为周期的周期函数，求其Fourier级数，并说明收敛情况.

解：计算Fourier系数 $a_0=\int_{-1}^{1}e^{ax}\mathrm{d}x=\dfrac{e^a-e^{-a}}{a}=\dfrac{2}{a}\sinh a,$

$$a_n=\int_{-1}^{1}e^{ax}\cos n\pi x\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n a(e^a-e^{-a})}{a^2+\pi^2n^2}=\frac{(-1)^n 2a\sinh a}{a^2+\pi^2n^2},$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}e^{ax}\sin n\pi x\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n \pi(e^{-a}-e^{a})}{a^2+\pi^2n^2}=\frac{(-1)^{n+1} 2n\pi\sinh a}{a^2+\pi^2n^2},$$

$f(x)$以2为周期逐段光滑函数，则其Fourier级数收敛

$$f(x)\sim\frac{\sinh a}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2\sinh a}{a^2+\pi^2n^2}(a\cos n\pi x-n\pi\sin n\pi x)$$
$$=\begin{cases} f(x), & x\neq 2k-1,\\ \frac{e^a+e^{-a}}{2}, & x=2k-1.\end{cases}$$

§12.1.3 有限区间上函数的Fourier级数

(1) 若$f(x)$ 在$[-\ell,\ell)$ 上有定义, 则以2ℓ为周期**周期延拓**到$(-\infty,+\infty)$ 上, 那么$f(x)$ 的Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\Big),$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx,\quad (n=0,1,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx,\quad (n=1,\cdots).$$

§12.1.3 有限区间上函数的Fourier级数

有限区间上函数的Dirchlet 收敛定理: 设函数$f(x)$是定义在有限区间$[-l,l]$上的逐段光滑，那么它的Fourier级数收敛，且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$
$$=\begin{cases}\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & x\in(-l,l),\\ \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}, & x=\pm l.\end{cases}$$

如果函数在$[-l,l]$逐段光滑且连续，并满足$f(-l)=f(l)$，则其Fourier 级数就在$[-l,l]$上一致收敛于$f(x)$.

注记: 这里条件$f(-l)=f(l)$是为了保证周期延拓后的周期函数也是连续的.

§12.1.3 有限区间上函数的Fourier级数

若$f(x)$ 定义在$[a,b]$上，则以$2l=b-a$ 为周期**周期延拓**到$(-\infty,+\infty)$ 上，那么$f(x)$ 的Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{b-a}x+b_n\sin\frac{2n\pi}{b-a}x\right),$$

其中

$$a_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi}{b-a}x\mathrm{d}x,\quad (n=0,1,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi}{b-a}x\mathrm{d}x,\quad (n=1,2,\cdots).$$

§12.1.3 有限区间上函数的Fourier级数

(2) 若$f(x)$ 在$[0,\ell)$ 上有定义，则先**偶延拓**到$[-\ell,\ell)$，再以2ℓ 为周期**周期延拓**到$(-\infty,+\infty)$ 上，那么$f(x)$ 的Fourier 级数为一个余弦级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x,$$

其中

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx, \quad (n=0,1,\cdots).$$

§12.1.3 有限区间上函数的Fourier级数

(3) 若$f(x)$ 在$(0,\ell)$ 上有定义，则先**奇延拓**到$[-\ell,\ell)$，再以2ℓ 为周期**周期延拓**到$(-\infty,+\infty)$ 上，则$f(x)$ 的Fourier 级数为一个正弦级数

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x,$$

其中

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx, \quad (n=1,2,\cdots).$$

Example

设$f(x) = x^2, \quad x \in [0, \pi]$

(1) 将$f(x)$展成以π为周期的$Fourier$级数;

(2) 将$f(x)$展成以2π为周期的余弦级数;

(3) 将$f(x)$展成以2π为周期的正弦级数. 并说明它们的收敛情况.

解: (1) $f(x)$在$[0,\pi]$连续, $f(0)\neq f(\pi)$, 故$f(x)$以π为周期开拓后所成的函数在$x=0,\pi$不连续, 其$Fourier$系数为

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2,$$
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos 2nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n^2},\quad n=1,2,\cdots,$$
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin 2nx\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{n},\quad n=1,2,\cdots,$$

于是, 由$Dirichlet$收敛定理,

$$f(x)\sim\frac{1}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos 2nx-\frac{\pi}{n}\sin 2nx\right)=\begin{cases}x^2, & x\in(0,\pi),\\ \dfrac{\pi^2}{2}, & x=0,\ x=\pi.\end{cases}$$

(2) 将$f(x)$偶延拓, 使其在$[-\pi,\pi]$上为偶函数, 这时$f(x)$的$Fourier$级数为余弦级数, 且

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi^2, \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx \mathrm{d}x = \frac{4(-1)^n}{n^2}, \quad n = 1, 2, \cdots .
\end{aligned}
$$

于是, 由$Dirichlet$收敛定理, $f(x)$的$Fourier$级数在$[0,\pi]$上一致收敛到自身, 即

$$
x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi).
$$

(3) 将$f(x)$奇延拓，使其在$[-\pi,\pi]$上为奇函数，这时$f(x)$的$Fourier$级数为正弦级数，且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{n}(-1)^{n-1}+\frac{4}{\pi n^3}[(-1)^n-1],\quad n=1,2,\cdots.$$

于是，由$Dirichlet$收敛定理，

$$x^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2\pi}{n}(-1)^{n-1}+\frac{4}{\pi n^3}[(-1)^n-1]\right\}\sin nx,\qquad (0\leqslant x<\pi).$$

当$x=\pi$时，其正弦级数收敛于0.

注记: 由此题可知，由于要求不同，所得$f(x)$的$Fourier$展开式各不相同，但由于满足 $Dirichlet$收敛定理的条件，在开区间$(0,\pi)$上它们都收敛于$f(x)$.

Example

函数$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<\frac{1}{2}, \\ 2-2x, & \frac{1}{2}\leqslant x<1, \end{cases}$
$S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$, $-\infty<x<+\infty$, 其中$a_n=2\displaystyle\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x$, $n=0,1,2,\cdots$, 求$S(-\frac{5}{2})$, $S(3)$, $S(\frac{9}{4})$.

解: 由题意知, a_n是$f(x)$进行偶延拓，再开拓后的周期为2的周期函数的Fourier系数，$S(x)$为其相应的Fourier级数的和函数，限定在$[0,1)$上就是函数$f(x)$, 所以

$$f_e(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<\frac{1}{2}, \\ 2-2x, & \frac{1}{2}\leqslant x<1, \\ -x, & -\frac{1}{2}\leqslant x<0, \\ 2+2x, & -1<x<-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$S(-\frac{5}{2})=S(-\frac{5}{2}+2)=S(-\frac{1}{2})=S(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})$$
$$=\frac{f(\frac{1}{2}+0)+f(\frac{1}{2}-0)}{2}=\frac{3}{4},$$

$$S(3)=S(1)=\frac{f_e(1-0)+f_e(-1+0)}{2}=0,\ S(\frac{9}{4})=S(\frac{1}{4})=f(\frac{1}{4})=\frac{1}{4}.$$

Example

证明等式$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{\pi}{8}\cos x,\quad x\in(0,\pi).$

分析: 观察所证等式, 左边是一个三角级数, 右边是初等函数$\dfrac{\pi}{8}\cos x$. 若从等式左边证到右边, 看作是函数项级数求和问题, 很难求解. 但反过来, 从等式右端出发去证明, 就是函数的Fourier级数展开问题, 且是偶函数$f(x)=\cos x$在$(0,\pi)$上展开的正弦级数.

证明: 问题可看作函数$f(x)=\cos x,\quad x\in(0,\pi)$作奇延拓到区间$(-\pi,\pi)$上,再以$2\pi$周期开拓, 其Fourier系数为

$$
\begin{aligned}
a_n &= 0, \qquad n=0,1,2,\cdots, \\
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(n+1)x+\sin(n-1)x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2n[(-1)^n+1]}{(n^2-1)\pi}, \quad n=1,2,\cdots.
\end{aligned}
$$

故函数$\cos x$在$(0,\pi)$上展开的正弦级数为

$$
\cos x=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{(2n)^2-1},\ \text{即}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{\pi}{8}\cos x,\ x\in(0,\pi)
$$

§12.1.4 Fourier 级数的复数形式

根据Euler 公式有

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \qquad e^{-ix} = \cos x - i\sin x,$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

由这些公式就可以将Fourier 级数表示为复数形式.
设$f(x)$ 在$[-\ell, \ell]$ 上的Fourier 级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x\big), \quad \left(\omega = \frac{\pi}{\ell}\right)$$

$$\cos n\omega x = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2}, \quad \sin n\omega x = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i},$$

§12.1.4 Fourier 级数的复数形式

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - b_n i}{2} e^{in\omega x} + \frac{a_n + b_n i}{2} e^{-in\omega x}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{n\omega x},$$

$$\text{其中} \qquad F_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx$$

$$F_{\pm n} = \frac{a_n \mp b_n i}{2} = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\big(\cos n\omega x \mp i \sin n\omega x\big)dx$$

$$= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{\mp in\omega x}\,dx, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

小结

- 熟记Fourier级数及其系数公式，并准确写出$f(x)$的Fourier级数;
- 根据Dirchlet收敛定理准确写出其和函数;
- 利用Fourier展开式求某些数项级数的和.

此节是本章的重点.

目录

§12.2.1 基本概念

(1) 设$L^2[a,b]$表示$[a,b]$中可积且平方可积函数的全体, 即

$$L^2[a,b]=\left\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\,\middle|\,\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\ \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\ \text{存在且有限}\right\}.$$

可积并且平方可积包含了黎曼积分和广义积分.

(2) 在$L^2[a,b]$ 中引入内积$\langle f(x),\ g(x)\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$, 它诱导了$L^2[a,b]$上的度量(或距离)

$$\begin{aligned}\|f(x)-g(x)\|&=\sqrt{\langle f(x)-g(x),\ f(x)-g(x)\rangle}\\&=\sqrt{\int_a^b[f(x)-g(x)]^2\mathrm{d}x}.\end{aligned}$$

这个度量称为L^2度量.

§12.2.1 基本概念

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\cdots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\cdots$$

是$L^2[-\pi,\ \pi]$上的标准正交系.

(3) 对$L^2[a,b]$中给定的函数$f(x)$, 如果存在$L^2[a,b]$中的函数列$\{f_n(x), n=1,2,\cdots\}$使得

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n(x)-f(x)\|=\lim_{n\to\infty}\int_a^b[f_n(x)-f(x)]^2\mathrm{d}x=0.$$

那么称$\{f_n(x)\}$平方平均收敛于$f(x)$.

§12.2.2 Bessel不等式

对任何一组实数$\alpha_0, \alpha_k, \beta_k, k = 1, 2, \cdots$, 称

$$g_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

为n次三角多项式.

研究目标: 设$f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$, 下面确定常数α_k, β_k, 使得$f(x)$与$g_n(x)$的平方平均偏差$\Delta_n = \int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - g_n(x)]^2 \mathrm{d}x$为最小.

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g_n(x))^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g_n(x)\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} g_n^2(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g_n(x)\mathrm{d}x = \frac{\alpha_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x + \beta_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)$$

$$= \pi\left(\frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k + \beta_k b_k)\right),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_n^2(x) = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx + \beta_k\sin kx)\right)^2\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\alpha_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2\cos^2 kx + \beta_k^2\sin^2 kx)\right)\mathrm{d}x$$

$$= \pi\left(\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)\right).$$

所以

$$
\begin{aligned}
\Delta_n = & \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x + \\
& \pi\left(-\alpha_0 a_0 - 2\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k + \beta_k b_k) + \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)\right) \\
= & \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right) \\
& + \pi\left(\frac{1}{2}(\alpha_0 - a_0)^2 + \sum_{k=1}^{n}\left((\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2\right)\right).
\end{aligned}
$$

在上式中，当$\alpha_0 = a_0, \alpha_k = a_k, \beta_k = b_k\,(1 \leqslant k \leqslant n)$时，即这些系数为对应的Fourier系数时，$\Delta_n$取最小值.

Theorem (Fourier系数的最优性)

设$f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$，则在所有的n次三角多项式中，唯以$f(x)$的Fourier系数构成的三角多项式

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

与$f(x)$的距离最小，即与$f(x)$的平方平均偏差Δ_n最小，且最小值为

$$\Delta_n = \|f - S_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right).$$

因为$\Delta_n \geqslant 0$，则

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Corollary (推论1)

【Bessel不等式】 设$f(x) \in L^2[-\pi,\pi]$, 则它的*Fourier*系数构成的正项级数

$\dfrac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ 收敛, 且满足不等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x.$$

称为**Bessel不等式**.

Corollary (推论2)

设$f(x)\in L^2[-\pi,\pi]$，则其*Fourier*系数a_n和b_n满足：

(1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|a_n|+|b_n|}{n}$收敛；

(2) $$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0.$$

证明： 由Bessel不等式知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$均收敛，从而(2)成立. 再由不等式

$$\frac{|a_n|}{n}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+a_n^2\right),\qquad \frac{|b_n|}{n}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+b_n^2\right),$$

由比较判别法知(1)成立.

§12.2.3 Parseval等式

定理: 设$f(x) \in L^2[-\pi,\pi]$，则$f(x)$的Fourier级数部分和$S_n(x)$构成的三角多项式列平方平均收敛于$f(x)$，

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 \mathrm{d}x = 0.$$

等价于Bessel不等式中的等号成立，即

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \mathrm{d}x.$$

称为Parseval 等式.

§12.2.3 Parseval等式

注记: Parseval 等式说明向量组

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \cdots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\cdots$$

是区间$L^2[-\pi,\ \pi]$中的一组**标准正交基**.

而$L^2[-\pi,\pi]$中任何一个向量$f(x)$的模长的平方等于其在标准正交基下各坐标的平方和, 这是有限维空间中的**勾股定理的推广**.

Corollary (推论3)

对于$[-\pi,\pi]$上的连续函数$f(x)$，如果与三角函数系

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}, m=1,2,\cdots\right\}$$

中的每个都正交，则$f(x)\equiv 0$；若两个连续函数f和g的Fourier系数都相等，则$f(x)\equiv g(x)$.

Corollary (推论4)

【推广形式的Parseval 等式】 设$f(x), g(x) \in L^2[-\pi,\ \pi]$, $\{a_n\}, \{b_n\}$ 和$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$分别是$f(x)$和$g(x)$的*Fourier*系数，则

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n).$$

即**两个平方可积函数的内积等于其在标准正交基下对应坐标乘积之和.**

证明： 考虑函数$f \pm g$的Parseval 等式，然后两者相减，再除以4即得.

Theorem (Fourier级数的逐项积分)

设$f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$, 其Fourier级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

则对区间$[-\pi, \pi]$中的任意a, b, 有如下逐项积分公式

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{a_0}{2}\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\mathrm{d}t \tag{2}$$

特别地, 对于$x \in [-\pi, \pi]$, 有

$$\int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nx + \frac{a_n}{n}\sin nx\right) \tag{3}$$

证明: 首先, 将推广形式的Parseval 等式写成

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\mathrm{d}x.$$

再令函数

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,\ b], \\ 0, & x \in [-\pi,\ a) \cup (b,\ \pi], \end{cases}$$

代入推广形式的Parseval 等式，即得

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{a_0}{2}\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b (a_n\cos nt + b_n\sin nt)\mathrm{d}t.$$

特别地，取$a=0$，对于$x\in[-\pi,\ \pi]$， 可得

$$\int_0^x\left[f(t)-\frac{a_0}{2}\right]\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx\right),$$

由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|a_n|+|b_n|}{n}$收敛，上式右端的级数还是一致收敛的.

注记: 由于没有假设$f(x)$连续，$f(x)$的Fourier级数不一定逐点收敛于$f(x)$，即(1)不一定是等式. 但是逐项积分后却得到了等式(2)和(3). 仔细观察Fourier级数的逐项积分公式，发现求一次积分之后，Fourier系数相当于乘以因子$\dfrac{1}{n}$， 因此，逐项积分之后的Fourier级数具有更好的收敛性.

Example

试将函数 $f(x)=\begin{cases}0, & 1\leqslant x<2,\\ x-2, & 2\leqslant x<3,\end{cases}$ 展开为以 2 为周期的$Fourier$级数; 并求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的和.

解: (1) 将$f(x)$以 2 为周期开拓至全x轴上，开拓之后的新函数不妨记为$F(x)$.

$a_0=\int_{-1}^{1}F(t)\mathrm{d}t=\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t=\int_2^3(t-2)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}$,

$a_n=\int_1^3 f(t)\cos n\pi t\mathrm{d}t=\int_2^3(t-2)\cos n\pi t\mathrm{d}t=\dfrac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}$,

$b_n=\int_1^3 f(t)\sin n\pi t\mathrm{d}t=\int_2^3(t-2)\sin n\pi t\mathrm{d}t=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\pi}$,

其中，$n=1,2,\cdots$.

由$Fourier$级数的$Dirichlet$收敛定理，当 $1<x<3$时，

$$f(x)=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x+\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\sin n\pi x\right];$$

当 x是奇数时，$f(x)$的$Fourier$级数收敛

到 $\dfrac{1}{2}[f(1-0)+f(1+0)]=\dfrac{1}{2}(1+0)=\dfrac{1}{2}$.

(2) 在$f(x)$的$Fourier$级数展式中，令 $x=2$，计算得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

因而

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}S\ ,$$

即得 $$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\ .$$

(3) 由$Parseval$等式得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)^4\pi^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}$$

$$=\int_1^3 f^2(x)\mathrm{d}x=\int_2^3(x-2)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ ,$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{4}\cdot\frac{1}{24}=\frac{\pi^4}{96}\ .$$

故

$$S'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}+\frac{1}{16}S',$$

即

$$S'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{16}{15}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{16}{15}\cdot\frac{\pi^4}{96}=\frac{\pi^4}{90}.$$

Example

设$f(x)$是以2π为周期的连续函数，a_0，a_n，b_n，$n=1$，2 $\cdots$为其Fourier系数，求卷积函数

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$$

的Fourier系数A_0，A_n，B_n，$n=1$，2 $\cdots$. 利用所得结果，证明关于连续周期函数的$Parseval$等式.

证明: 易见$F(x)$也是以2π为周期的连续函数,

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t,$$

由于 $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(x+t)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\mathrm{d}u = a_0,$$

故 $$A_0 = \frac{a_0}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = a_0^2.$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\right]\cos nx\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos nx\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t,$$

由于 $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(x+t)\cos nx\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos n(u-t)\mathrm{d}u$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)(\cos nu\cdot\cos nt+\sin nu\cdot\sin nt)\mathrm{d}u$$
$$= a_n\cos nt + b_n\sin nt,$$

故 $$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\mathrm{d}t = a_n^2+b_n^2.$$
$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\right]\sin nx\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sin nx\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t,$$

类似地，可得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin n(u-t)\mathrm{d}u$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)(\sin nu\cdot\cos nt - \cos nu\cdot\sin nt)\mathrm{d}u$$
$$= b_n\cos nt - a_n\sin nt.$$

故

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(b_n\cos nt - a_n\sin nt)\mathrm{d}t = b_n a_n - a_n b_n = 0.$$

于是，由$Fejér$定理，

$$F(x) \sim \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx = F(x), \qquad (-\pi < x < \pi).$$

令$x=0$，有 $F(0) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = \dfrac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$

这正是$Parseval$等式.

Example

设$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi-1}{2}x, & 0\le x\le 1\\ \frac{\pi-x}{2}, & 1<x\le\pi\end{cases}.$

(1) 证明$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}\sin nx\quad(0\le x\le\pi)$;

(2) 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$的和，并证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$;

(3) 求数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}$的和.

解： (1) 将$f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上展开成正弦级数. 对$f(x)$的奇延拓

$$f_o(x)=\begin{cases}-\frac{\pi+x}{2}, & -\pi<x\le -1\\ \frac{\pi-1}{2}x, & -1<x\le 1\\ \frac{\pi-x}{2}, & 1<x\le\pi,\end{cases}$$

那么$a_n=0, n=0,1,\cdots$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\pi-1}{2}x\sin nx\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_1^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi-1}{\pi}\int_0^1 x\sin nx\mathrm{d}x+\int_1^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x-\frac{1}{\pi}\int_1^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x\\&=\frac{\sin n}{n^2}.\end{aligned}$$

所以$f(x)$的正弦级数为

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} \sin nx.$$

由Dirchlet收敛定理, $f(x)$在$[0,\pi]$上分段光滑且连续, 则其正弦级数收敛于自身, 即

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} \sin nx \quad (0 \le x \le \pi).$$

(2) $x=1$时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}=\frac{\pi-1}{2}$.

$f_o'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}\cos nx \quad (-1\le x\le 1)$,

$$f_o'(0)=\frac{\pi-1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$$

(3) 在$[-\pi,\pi]$上用Parseval等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^1\frac{(\pi-1)^2}{4}x^2\mathrm{d}x+\int_1^{\pi}\frac{(\pi-x)^2}{4}\mathrm{d}x\right)=\frac{(\pi-1)^2}{6}$$

§12.2.4 广义Fourier级数

定义: 设$\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n,\cdots\}$ 是$L^2[a,b]$ 中一组标准正交系，即

$$\langle\varphi_m(x),\varphi_n(x)\rangle=\int_a^b\varphi_m(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\delta_{mn}$$

那么对任意$f(x)\in L^2[a,b]$,

称$a_n=\langle f(x),\varphi_n(x)\rangle=\displaystyle\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x$ 为$f(x)$ 的**广义Fourier系数**. 称$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$ 为$f(x)$ 的**广义Fourier 级数**, 记为

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x).$$

§12.2.4 广义Fourier级数

设$T_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k$ 为n 次$\varphi-$多项式. 在所有n 次$\varphi-$多项式中,

广义Fourier 级数的前n 项和$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\varphi_k$ 到f 的距离最短.

$$
\begin{aligned}
\Delta_n=\|f-T_n\|^2&=\left\langle\sum_{k=1}^{n}f-\alpha_k\varphi_k,\sum_{k=1}^{n}f-\alpha_k\varphi_k\right\rangle\\
&=\|f\|^2-2\sum_{k=1}^{n}a_k\alpha_k+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\\
&=\|f\|^2+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-a_k)^2-\sum_{k=1}^{n}a_k^2\geq\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}a_k^2=\|f-S_n\|^2,
\end{aligned}
$$

等号成立当且仅当$\alpha_k=a_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ 时成立.

Theorem

设$f(x)\in L^2[a,b]$, $\{\varphi_n\}$ 是$L^2[a,b]$ 中一组标准正交系, 则对任意的n次$\varphi-$多项式$T_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k$, 有

$$\|f-S_n\|\le\|f-T_n\|,\quad \|f-S_n\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}a_k^2,\quad \sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\le\|f\|^2$$

这称为广义Fourier级数的Bessel不等式. 从而级数$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2$收敛.

Definition

设$\{\varphi_n\}$ 是$L^2[a,b]$ 中一组标准正交系，如果**Parseval**等式
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \|f\|^2$成立，那么称$\{\varphi_n\}$ 是$L^2[a,b]$ 中完备的标准正交系.

Theorem

设$\{\varphi_n\}$ 是$L^2[a,b]$ 中完备的标准正交系，那么f的广义*Fourier*级数部分和$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k$平方平均收敛于$f$，
即$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\| = 0$.

$L^2[-\pi,\pi]$中的三角函数系满足Parseval等式，因此三角函数系是完备的.

Theorem

设$\{\varphi_n\}$ 是$L^2[a,b]$ 中完备的标准正交系，则

1° 如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，那么$f(x)=0 \iff f(x)$的广义Fourier系数$a_n=0, n=1,2,\cdots$.

2° 如果从$\{\varphi_n\}$中删去任何一个函数，那么剩余的函数所构成的函数系就不再是完备的.

3° 设$\displaystyle\int_a^b \varphi_0^2(x)\mathrm{d}x=1$，如果把$\varphi_0(x)$添加到$\{\varphi_n\}$中，那么新构成的函数系不再是标准的正交系.

本节的重点是利用Fourier展开式及Parseval等式求某些数项级数的和.

目录

§12.4.1 Fourier积分

为展开定义在整个数轴上的非周期函数$f(x)$的Fourier级数，利用“**有限逼近无限**”的思想.

(1) 对任意正数l，截取函数$f(x)$在有限区间$(-l,\ l)$上的取值;

(2) 作周期为$2l$的周期开拓，得到一个周期为$2l$的周期函数$f_l(x)$;

(3) 将周期函数$f_l(x)$展开为Fourier级数，即得函数$f(x)$在区间$(-l,\ l)$上的Fourier级数展开;

(4) 取极限$l \to +\infty$.

下面通过形式上的计算，来说明这个极限过程将导致一种积分表示，即**Fourier积分表示**.

设函数$f(x)$在整个数轴上绝对可积，在任何有限区间上逐段光滑，且开拓后的周期函数$f_l(x)$可以展开成Fourier级数，于是

$$f_l(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x),\quad -l<x<l,$$

其中$\omega=\dfrac{\pi}{l}$,$a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(t)\cos n\omega t\mathrm{d}t$,$b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(t)\sin n\omega t\mathrm{d}t$,

即 $$f_l(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos n\omega(x-t)\mathrm{d}t.$$

由于函数$f(x)$在整个数轴上绝对可积，所以当$l\to+\infty$时，

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\mathrm{d}t\to 0.$$

为考察$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos n\omega(x-t)\mathrm{d}t$的极限，

令$\lambda_n=n\omega=\frac{n\pi}{l}$，$\Delta\lambda_n=\lambda_n-\lambda_{n-1}=\frac{\pi}{l}=\omega$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos n\omega(x-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\lambda_n\int_{-l}^{l}f(t)\cos\lambda_n(x-t)\mathrm{d}t,$$

右端和式为被积函数为$g_l(\lambda)=\int_{-l}^{l}f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t$的广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty}g_l(\lambda)\mathrm{d}\lambda$的黎曼和形式. 而当$l\to+\infty$时，$\Delta\lambda_n\to0$，以及$g_l(\lambda)\to\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t$，于是有当$l\to+\infty$时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos n\omega(x-t)\mathrm{d}t\to\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}\lambda.$$

综上, 可得函数$f(x)$的积分表示

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_0^{+\infty}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\mathrm{d}\lambda, \end{aligned}$$

其中

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t,\ \ B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t$$

称为**Fourier积分**.

§12.4.1 Fourier积分

【Fourier积分的收敛定理】 设函数$f(x)$在整个数轴上绝对可积，在任何有界闭区间上逐段光滑，则对任意实数x，函数$f(x)$所对应的$Fourier$积分必收敛于它在该点左右极限的平均值，即对任意 $-\infty < x < +\infty$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

当$f(x)$连续时，有

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t = f(x).$$

Example

利用Fourier积分公式, 证明:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\frac{\lambda\pi}{2}}{1-\lambda^2}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda=\begin{cases}\cos x, & |x|<\pi/2,\\ 0, & |x|>\pi/2.\end{cases}$$

证明： 令$f(x)$表示所需证明的等式右端的函数，它在整个数轴上绝对可积、处处连续，在任何有限区间上逐段光滑，因此，它的Fourier积分表示点点收敛到其自身.下面计算其Fourier积分表示，由于$f(x)$是偶函数，故$B(\lambda)=0$. 直接计算，可得

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\cos\lambda x\mathrm{d}x=\frac{2\cos\frac{\lambda\pi}{2}}{\pi(1-\lambda^2)}.$$

代入Fourier积分表示，即得所要证明的等式.

Example

求出函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

的Fourier积分; 并说明其收敛性.

解： 由于函数$f(x)$为偶函数，因

此$B(\lambda)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t=0$. 直接计算，可得

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos\lambda t\mathrm{d}t=\frac{2\sin\lambda}{\pi\lambda}.$$

综上，函数$f(x)$的Fourier积分表示为$\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\dfrac{\sin\lambda\cos\lambda x}{\lambda}\mathrm{d}\lambda$. 由于除去$x=\pm1$之外，函数$f(x)$处处连续；而在$x=\pm1$处，函数$f(x)$的左、右极限的平均值$\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\dfrac{1}{2}$. 因此，函数$f(x)$的Fourier积分表示

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\lambda\cos\lambda x}{\lambda}\mathrm{d}\lambda=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=\pm1\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

$x=0$时，即得Dirichlet积分.

§12.4.1 Fourier积分

Fourier积分的复数形式

由Euler公式$e^{ix}=\cos x+i\sin x\Longrightarrow\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$，从而

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\lambda(x-t)}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda(x-t)}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\lambda(x-t)}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

§12.4.1 Fourier积分

于是，函数$f(x)$的Fourier积分表示化为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t\\ =&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

这是**Fourier积分的复数形式**.

§12.4.1 Fourier积分

【Fourier积分复数形式的收敛定理】 设函数$f(x)$在整个数轴上绝对可积，在任何有界闭区间上逐段光滑，则对任意$x \in (-\infty, +\infty)$，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

当$f(x)$连续时，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\mathrm{d}t = f(x).$$

§12.4.2 Fourier变换

- **定义:**

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\mathrm{d}t$$

称为函数$f(x)$ 的**Fourier变换** 或 **像函数**, 记为$F=\mathcal{F}[f]$; 而函数

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)e^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda$$

称为函数$F(\lambda)$的**Fourier逆变换**或**本函数**,记为$f=\mathcal{F}^{-1}[F]$.

§12.4.2 Fourier变换

- **余弦变换与正弦变换:**

(1) 若函数$f(x)$是偶函数, 则$f(x)$的Fourier变换为

$$F(\lambda)=2\int_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t,$$

称它为$f(x)$的**Fourier余弦变换**; 其逆变换公式为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} F(\lambda)\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda.$$

§12.4.2 Fourier变换

- **余弦变换与正弦变换:**

(2) 若函数$f(x)$是奇函数，则$f(x)$的Fourier变换为

$$F(\lambda) = -2i \int_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t \mathrm{d}t,$$

为避免出现复数因子i，定义函数

$$G(\lambda) = iF(\lambda) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t \mathrm{d}t,$$

称它为$f(x)$的**Fourier正弦变换**; 其逆变换公式为

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} G(\lambda) \sin \lambda x \mathrm{d}\lambda.$$

Example

p 是一个正常数，并设函数 $f_p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2p}, & |x| \leqslant p, \\ 0, & |x| > p. \end{cases}$ 试求 $f_p(x)$ 的$Fourier$变换以及$Fourier$反演公式.

解： $f_p(x)$是一个偶函数，其$Fourier$变换及逆变换皆是余弦变换(仅系数不同)，且满足Fourier积分表示的收敛定理的条件，即

$$\begin{aligned} F_p(\lambda) &= 2\int_0^{+\infty} f_p(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{p} \frac{1}{2p}\cos\lambda x\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\sin p\lambda}{p\lambda}, & \lambda \neq 0, \\ 1, & \lambda = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} F_p(\lambda)\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin p\lambda}{p\lambda}\cdot\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2p}, & |x| < p, \\ \dfrac{1}{4p}, & |x| = p, \\ 0, & |x| > p. \end{cases} \end{aligned}$$

Example

求函数$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$的Fourier正弦变换和Fourier余弦变换.

解： 把函数$f(x)$先作奇延拓，即当$x<0$时，补充定义

$$f(x)=-f(-x)=-\frac{1}{\sqrt{-x}}.$$

再作Fourier变换可得函数$f(x)$的Fourier正弦变换，或者直接计算，得函数$f(x)$的Fourier正弦变换为

$$G(\lambda)=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\sin\lambda t\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u=\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}},$$

其中利用了Fresnel积分(13章)的结果

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\frac{\cos u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

类似计算，得$f(x)$的Fourier余弦变换

$$F(\lambda)=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\cos\lambda t\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{+\infty}\frac{\cos u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u=\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}.$$

注记： 例题中的函数$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$不满足**Fourier积分表示收敛定理中的条件**，但是仍然求出了它的Fourier变换. 这是因为收敛定理中的条件**是充分条件，不是必要的**. 事实上，收敛定理的条件可放宽为：

(1°) 函数$f(x)$在任何有限区间上绝对可积;

(2°) 存在$M>0$，当$|x|\geqslant M$时，$f(x)$单调减，且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

可以验证，函数$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$满足上面两个条件.

Example

已知积分方程$\int_0^{+\infty} g(t)\cos xt\mathrm{d}t = \begin{cases} \cos x, & |x| \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$，求$g(x)$.

分析：方程中的广义积分与余弦变换及逆变换公式相差个系数，当凑成余弦变换，则$g(x)$便是像原函数；当凑成余弦逆变换公式时，则$g(x)$为已知函数的$Fourier$变换，即像函数.

解法1： 由已知令

$$F(x)=2\int_0^{+\infty}g(t)\cos xt\mathrm{d}t=\begin{cases}2\cos x, & |x|\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0, & |x|>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

则$F(x)$为$g(t)$的余弦变换，$g(t)$便是像原函数，故

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}F(\lambda)\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\lambda\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda=\frac{2\cos\frac{\pi}{2}x}{\pi(1-x^2)}.$$

解法:2：由已知令

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}g(t)\cos xt\mathrm{d}t=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\cos x, & |x|\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0, & |x|>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

则$g(t)$为$f(x)$的余弦变换，故

$$g(\lambda)=2\int_0^{+\infty}f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos\lambda x\mathrm{d}x=\frac{2\cos\frac{\pi}{2}\lambda}{\pi(1-\lambda^2)}.$$

即
$$g(x)=\frac{2\cos\frac{\pi}{2}x}{\pi(1-x^2)}.$$

§12.4.3 Fourier变换的性质

记$f(x)$ 的Fourier 变换为

$$\mathcal{F}[f]=F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi.$$

以

$$\mathcal{F}^{-1}[F]=f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda$$

表示函数$F(\lambda)$ 的Fourier 逆变换.

§12.4.3 Fourier变换的性质

1° 共轭性:

$$\mathcal{F}^{-1}[f] = \frac{1}{2\pi} \cdot \overline{\mathcal{F}[f]}\,, \qquad \mathcal{F}[f(-x)] = \overline{\mathcal{F}[f(x)]}\,.$$

2° 线性性:

若函数$f(x)$和$g(x)$存在Fourier变换, 则有

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathcal{F}[f] + \beta\mathcal{F}[g].$$

3° 频移特性和时移特性:

$$\mathcal{F}[f(x)e^{-i\lambda_0 x}] = \mathcal{F}[f](\lambda + \lambda_0).$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\lambda)e^{ix_0\lambda}] = f(x + x_0).$$

§12.4.3 Fourier变换的性质

4° 导函数的Fourier变换:

若$f(\pm\infty)=0$, 且其导数$f'(x)$ 的Fourier 变换存在, 则有

$$\mathcal{F}[f'(x)](\lambda)=i\lambda\mathcal{F}[f(x)](\lambda).$$

一般地, 若$f(\pm\infty)=f'(\pm\infty)=\cdots=f^{(k-1)}(\pm\infty)=0$, 且其$k$阶导数$f^{(k)}(x)$的Fourier变换存在, 则有

$$\mathcal{F}[f^{(k)}(x)](\lambda)=(i\lambda)^k\mathcal{F}[f(x)](\lambda).$$

5° 像函数的导数:

若函数$f(x)$和$xf(x)$的傅里叶变换都存在, 则$f(x)$ 的Fourier 变换是可微的, 并且有

$$F'(\lambda)=\mathcal{F}[-ixf(x)](\lambda).$$

§12.4.3 Fourier变换的性质

卷积定义： 设函数$f(x)$ 和$g(x)$ 都在$(-\infty,+\infty)$ 上可积且绝对可积. 称含参变量积分

$$f*g(x):=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt$$

为f 与g 的**卷积**. 易知, 卷积有如下性质:

1) 设函数$f(x)$ 和$g(x)$ 都在$(-\infty,+\infty)$ 上可积且绝对可积, 则$f*g(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积.

2) 卷积满足通常乘积的三个性质:

$$\begin{aligned} &f*g=g*f && (\text{交换律})\\ &(f*g)*h=f*(g*h) && (\text{结合律})\\ &(f+g)*h=f*h+g*h && (\text{分配律}) \end{aligned}$$

§12.4.3 Fourier变换的性质

6° 卷积的Fourier变换:

设函数$f(x)$和$g(x)$在整个实数轴上绝对可积，则卷积$f*g$也在整个实数轴上绝对可积，并且有

$$\mathcal{F}[f*g]=\mathcal{F}[f]\cdot\mathcal{F}[g]$$

其中卷积$f*g(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)g(t)\mathrm{d}t.$

7° Parseval等式:

设函数$f(x)$在整个实数轴上可积且平方可积, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\lambda)|^2\mathrm{d}\lambda,$$

其中$F(\lambda)$是$f(x)$的Fourier变换.

Example

计算Gauss函数$f(x) = e^{-ax^2}$ $(a > 0)$ 的Fourier 变换.

解： 因$f'(x) = -2axf(x)$, 故$f(x)$ 和$f'(x)$ 都在$(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积, 且当$|x| \to +\infty$ 时, $f(x), f'(x)$ 都趋于0. 因此, 由Fourier 变换的性质, 得

$$\begin{aligned} i\lambda F(\lambda) &= \mathcal{F}[f'(x)](\lambda) = \mathcal{F}[-2axf(x)](\lambda) \\ &= -2ai\mathcal{F}[-ixf(x)](\lambda) = -2aiF'(\lambda), \end{aligned}$$

即,

$$F'(\lambda) = -\frac{\lambda}{2a}F(\lambda).$$

解此微分方程，得

$$F(\lambda) = Ce^{-\frac{\lambda^2}{4a}}.$$

这里$C = F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\xi^2}\, d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. 于是

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}.$$

Example (微分方程的求解)

考虑以下热传方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \ -\infty < x < +\infty, \\ u(x,\ 0) = \varphi(x), -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

其中初始条件$\varphi(x)$在整个实数轴上可积且平方可积.

解： 对未知函数$u(x,t)$和初始条件$\varphi(x)$作关于x的Fourier变换, 记$\hat{u}(\lambda,t)=\mathcal{F}[u(x,t)]$, $\hat{\varphi}(\lambda)=\mathcal{F}[\varphi(x)]$, 则由Fourier变换的性质, 有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -a^2\lambda^2\hat{u}, \quad t>0, \\ \hat{u}(\lambda,\ 0) = \hat{\varphi}(\lambda). \end{cases}$$

这是一个一阶常微分方程的初值问题, 解之可得

$$\hat{u}(\lambda,t)=\hat{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}.$$

再作Fourier逆变换, 由卷积定理可得

$$u(x,t)=\varphi(x)*\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-a^2\lambda^2 t}\right]=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}\,\mathrm{d}y.$$

注记： 由上面例题可以看出, Fourier变换将一个偏微分方程转化为一个常微分方程, 从而简化了计算.

小结

- 把定义在$(-\infty,+\infty)$上或$(0,+\infty)$上的函数$f(x)$表示成Fourier积分，或求Fourier变换、正弦变换与余弦变换;
- 利用Fourier变换求某些不易求的积分值;
- 利用Fourier变换求某些积分、微分方程的解.

本节的重点是求Fourier变换，熟记Fourier变换公式，其它内容了解即可.