第十三次作业反馈

> 反馈主笔:王原龙
>
> 最后修改:2021.06.21

习题参考解答与要点整理

Ch8 14

首先由书129页例1知道$<\mathscr{P}(B), \subseteq>$是格，且格中的运算$*$等价于$\cap$，$\oplus$等价于$\cup$。

欲证明子格，只需要证明子集对于两运算封闭，即

$$\forall s_1, s_2 \in S, s_1 * s_2 = s_1 \cap s_2 \in S, s_1 \oplus s_2 = s_1 \cup s_2 \in S$$

成立，由于$\forall s \in S, \exists c \in \mathscr{P}(A), s.t.\ f(c) = s$成立，所以有

$$\forall s_1, s_2 \in S, \exists c_1, c_2 \in \mathscr{P}(A), f(c_1) = s_1, f(c_2) = s_2$$
$$s_1 \cup s_2 = f(c_1) \cup f(c_2) = f(c_1 \cup c_2) \in S$$

但是在交集的情形下，$s_1 \cap s_2 = f(c_1) \cap f(c_2) \supseteq f(c_1 \cap c_2)$，不能直接使用保持运算的性质得到。

然而其实我们可以很简单地令$c = \{a \in A \mid f(a) \in f(c_1) \cap f(c_2)\}$，则$f(c) = f(c_1) \cap f(c_2), f(c) \in \mathscr{P}(A)$成立

综上，$< S, \subseteq>$是$<\mathscr{P}(B), \subseteq>$的子格。

- 这个解答中对于c的构造比较暴(耍)力(赖)，但确实是一个合理的构造（尤其是我们课程范围内并不太限制集合构造方式的情况下）。一个不那么耍赖的方法是，由于$f(c_1) \cap f(c_2) \subseteq f(c_1)$，所以有$c \subseteq c_1$使得$f(c) = f(c_1) \cap f(c_2)$，只需要对于$f(c_1) \cap f(c_2)$中的每个元素找到其一个原像加入$c$中。
- 解答中使用的关于f映射保持并运算以及不保持交运算的性质我们之前的习题已经讨论过，见书53页第7题，考试的时候如果要用课后作业当中的结论建议大家还是简述证明比较好。然而很多同学依然想当然的认为$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$成立，甚至直接用"同理可证法"跳过了这一部分证明，~~使助教感情受到极大伤害~~。

Ch8 15

同态映射，依然是指保持运算的映射。$\forall x \in A$

$$f(x) = (x \oplus a) * b \leq b$$
$$(x \oplus a) \geq a,\ b \geq a\ \Rightarrow f(x) = (x \oplus a) * b \geq a$$

于是$f(x) \in B$。又$< A, \leq>$是分配格，所以对于$\forall x_1, x_2 \in A$

$$
\begin{aligned}
f(x_1) \oplus f(x_2) &= ((x_1 \oplus a) * b) \oplus ((x_2 \oplus a) * b) \\
&= ((x_1 \oplus a) \oplus (x_2 \oplus a)) * b \\
&= ((x_1 \oplus x_2) \oplus (a \oplus a)) * b \\
&= ((x_1 \oplus x_2) \oplus a) * b \\
&= f(x_1 \oplus x_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x_1) * f(x_2) &= ((x_1 \oplus a) * b) * ((x_2 \oplus a) * b) \\
&= ((x_1 \oplus a) * (x_2 \oplus a)) * (b * b) \\
&= ((x_1 * x_2) \oplus a) * b \\
&= f(x_1 * x_2)
\end{aligned}
$$

所以f是同态映射。

Ch8 22

由于有限布尔代数中元素个数必为2^n形式，所以$< \{1,2,3,4,6,12\}, | >$不是布尔代数

而$< \{1,2,3,4,6,8,12,24\}, | >$中，4没有补元，所以不是布尔代数。

知识点整理

- 格的代数定义方式
- 子格的判定与性质，格的直接积
- 格的同态与同构
- 布尔代数的定义，布尔代数与布尔格的关系，子布尔代数，布尔代数的同态与同构，布尔代数的原子表示，布尔环。