形式化方法导引 Lab1

PB20111686 黄瑞轩

SAT/SMT

SAT 问题：给定一个表达式 ϕ，它是可满足的（satisfiable）吗？

SMT 问题：SAT 的拓展，允许出现**数字**和**不等式**。

求 NQueens 的一个可行解

使用 SMT

定义：$Q[1..n]$，$Q[i]=j$ 表示在第 i 行第 j 列放置了皇后

约束条件：

- 取值合法：$\forall i\in[1..n], Q[i]\in[1..n]$，即 `[And(1 <= Q[i], Q[i] <= n) for i in range(n)]`
- $Q[1..n]$ 各不相同，即 `[Distinct(Q)]`
- 对任意的两个皇后 $Q[i],Q[j]$，首先不能有 $i=j$；然后，如果它俩在一条主对角线上，说明 $i+Q[i]=j+Q[j]$；如果它俩在同一副对角线上，说明 $i+Q[j]=j+Q[i]$，即 `[If(i==j, True, And(i+Q[i]!=j+Q[j], i+Q[j]!=j+Q[i])) for i in range(n) for j in range(i)]`

使用 pureSAT

定义：$Q[1..n][1..n]$，每一个都是布尔变量，$Q[i][j]=\mathrm{True}$ 表示在第 i 行第 j 列放置了皇后。

约束条件：

- 每行有且仅有一个皇后 $\vee_{i=1}^{n}R_i$，其中

  $i\in[1..n], R_i=(Q_{i1}\wedge\neg Q_{i2}\wedge...\wedge\neg Q_{in})\vee(\neg Q_{i1}\wedge Q_{i2}\wedge...\wedge\neg Q_{in})\vee...\vee(\neg Q_{i1}\wedge\neg Q_{i2}\wedge...\wedge Q_{in})$
- 每列有且仅有一个皇后 $\vee_{i=1}^{n}C_i$，其中

  $i\in[1..n], C_i=(Q_{1i}\wedge\neg Q_{2i}\wedge...\wedge\neg Q_{ni})\vee(\neg Q_{1i}\wedge Q_{2i}\wedge...\wedge\neg Q_{ni})\vee...\vee(\neg Q_{1i}\wedge\neg Q_{2i}\wedge...\wedge Q_{ni})$
- 每个主副对角线上，最多有一个皇后

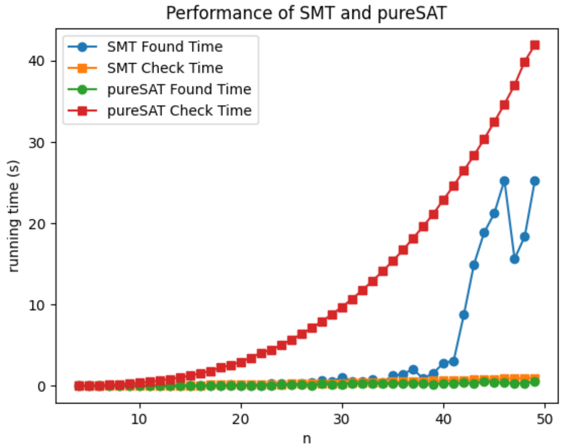
  以主对角线为例，$k\in[1..(2n-1)], A_k=\{Q_{ij}|i+j=k\}$，复用上面有且仅有一个的判断，记为 $\mathrm{Iff1}(A_k)$，则需要满足 $\wedge_{i=1}^{2n-1}\mathrm{Or}[\mathrm{Not}(\mathrm{Or}(A_k)),\mathrm{Iff1}(A_k)]$

给求解器 `sol = Solver()` 添加上面所有约束，即可求解，有解时解放在 `sol.model()` 中。

求解性能对比

指标：求出一组解所需要的时间（单位：秒）

求解规模范围；$n=[4..50]$，分为约束建立时间（Found Time）和求解时间（Check Time）



当 n 在此范围内增大时，pureSAT 方法所需的时间随之增加，比 SMT 方法所需时间增长得快。并且观察到，SMT 的耗时主要在约束建立上，pureSAT 的耗时主要在求解上。

如果使用 z3 的 `PbEq`，`AtMost` 等函数替换 pureSAT 中的约束，即

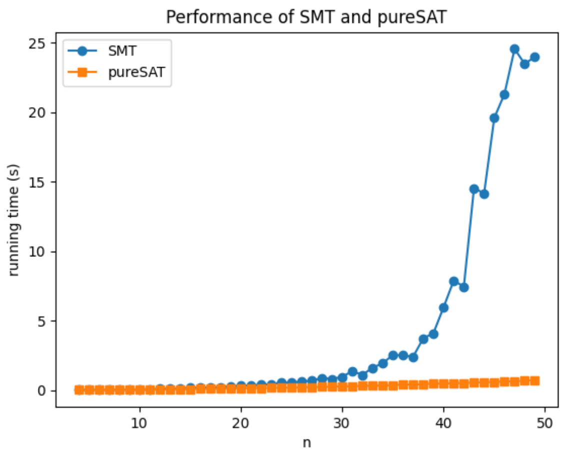
```
[PbEq([(Q[i][j], True) for j in range(n)], 1) for i in range(n)]
```

第 i 行有且仅有1个元素为True

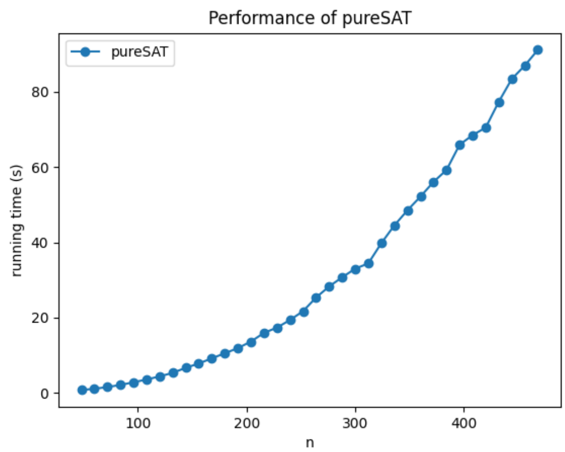
```
one_queen_per_diag1 = [AtMost(*[Q[i][j] for i in range(n) for j in range(n) if i+j==k],1) for k in range(2*n-1)]
one_queen_per_diag2 = [AtMost(*[Q[i][j] for i in range(n) for j in range(n) if i-j==k],1) for k in range(n)]
one_queen_per_diag3 = [AtMost(*[Q[i][j] for i in range(n) for j in range(n) if j-i==k],1) for k in range(n)]
```

k 的值可以唯一标识一条主（副）对角线

则所需时间大幅减少，比 SMT 速度还要快：



而且使用 z3 的 `PbEq`，`AtMost` 等函数替换 pureSAT 中的约束后的 SAT 看起来可以在能够接受的时间内解决更大规模的问题，测试如下：



代码使用文档

求解这个问题的代码是以性能测试的方式保存的，主函数将生成 `求解性能对比` 一节中第一幅图。

函数 `NQueens_SMT(n)` 是用 SMT 求解 n 皇后问题的代码，如果问题是 sat 的，则将打印解；函数 `NQueens_pureSAT(n)` 是用 pureSAT 求解 n 皇后问题的代码，与 SMT 方法格式类似。

使用 pureSAT 求解 $d = a - b$

解决 $a + b$ 问题

在 $a + b$ 问题中，我的解决思路如下：

1. 将 a, b 转化成二进制字符串（利用 `bin(a)[2:]`），然后利用 `zfill` 填充高位 0 至两数对齐，额外加一位 0 方便计算进位，记此时的位数为 n，然后反转 a, b 的字符串以方便使用自然顺序处理问题
2. 新建 $a = \mathrm{Bool}[1..n]$，如果 $\text{a\_str}[i] == 1$，则添加约束 $a[i]$，否则添加 $\neg a[i]$，b 也类似处理
3. 新建 $c = \mathrm{Bool}[1..n]$，添加约束 $\neg c[1]$，然后对 $i \in [2..n]$，添加约束 $c_i \leftrightarrow ((a_{i-1} \wedge b_{i-1}) \vee (a_{i-1} \wedge c_{i-1}) \vee (b_{i-1} \wedge c_{i-1}))$
4. 新建 $d = \mathrm{Bool}[1..n]$，对 $i \in [1..n]$，添加约束 $d_i \leftrightarrow (a_i \leftrightarrow (b_i \leftrightarrow c_i))$
5. 开始求解，并显示结果

转化 $a - b$ 问题

求解 $d = a - b$ 问题可以转化为 $a = d + b$ 问题（暂时重命名为 $d' = a' + b$ 问题，这样可以避免修改之前写的复杂的约束式子），这里 d' 和 b 是已知的，只需要求解 a'。这只需要稍微修改一下约束条件就可以。与上面不同的步骤思路如下：

2. 新建 $a = \mathrm{Bool}[1..n]$，暂时不做约束，b 要约束，和上面（$a + b$ 问题）相同处理
3. 新建 $d = \mathrm{Bool}[1..n]$，对 $i \in [1..n]$，添加约束 $d_i \leftrightarrow (a_i \leftrightarrow (b_i \leftrightarrow c_i))$；并且，如果 $\text{a\_str}[i] == 1$，则添加约束 $d[i]$，否则添加 $\neg d[i]$

只需修改上面两个步骤，即可获得正确解答。

代码使用文档

求解这个问题的代码支持在命令行测试，文件名为 `lab_1_2.py`，支持如下两种命令：

```
$ python3 lab_1_2.py plus 888 777  # 将调用 calculate_a_plus_b(888, 777)
$ python3 lab_1_2.py minus 888 777 # 将调用 calculate_a_minus_b(888, 777)
```

每条指令倒数两个数是操作数 a, b，减法需要保证 $a \geq b$，执行后将在命令行打印结果：

```
$ python3 main.py plus 888 777
The sum of 888 and 777 is 1665
$ python3 main.py minus 888 777
The difference between 888 and 777 is 111
```