# 第三部分　电流与电路

## 1　习题 3.1

（1）

由电流的微观形式

$$I = neSu \tag{1}$$

取一段线元 $\Delta l$，这段线元的体积为

$$V = S\Delta l \tag{2}$$

这段线元的摩尔数为

$$\nu = \frac{m}{M} = \frac{\rho V}{M} = 1\times10^5\Delta V(\mathrm{mol}) \tag{3}$$

这段线元单位体积所蕴含的自由电子数为

$$n = \frac{3\nu N_A}{\Delta V} = 1.81\times10^{29} \tag{4}$$

结合题给数据，得到

$$u = 1.72\times10^{-7}\mathrm{m/s} \tag{5}$$

（2）

由热运动的知识，方均根速率

$$\sqrt{\bar{v^2}} = \sqrt{\frac{3KT}{m}} = 1.17\times10^5\mathrm{m/s} \tag{6}$$

（3）

由于

$$\sigma = n\frac{e^2}{2m}\tau = \frac{1}{\rho} \tag{7}$$

得

$$\tau = 1.4\times10^{-14}\mathrm{s} \tag{8}$$

（4）

平均自由程

$$\lambda = \sqrt{\bar{v^2}}\tau = 1.6\times10^{-9}\mathrm{m} \tag{9}$$

（5）

由（1），电流密度

$$j = neu \tag{10}$$

又由欧姆定律的微分形式

$$j = \frac{E}{\rho_{\text{电}}} \tag{11}$$

联立得电场强度

$$E = 1.40\times10^{-4}\mathrm{V/m} \tag{12}$$

## 2 习题 3.4

根据 Drude 模型，电阻率

$$\rho = \frac{2m}{ne^2\tau} = 5.56\times10^{-8}\Omega\cdot\mathrm{m} \tag{13}$$

## 3 习题 3.7

设通过第 $i$ 只伏特表的电流为 $I_{Vi}$，设通过第 $i$ 只安培表的电流为 $I_{Ai}$，$1\leqslant i\leqslant 50$，设伏特表的电阻为 $R$，则根据已知条件得

$$I_{V1} = I_{A1} - I_{A2} \tag{14}$$

$$U_1 = I_{V1}R \tag{15}$$

并且可得递推关系

$$I_{A3} = I_{A2} - I_{V2} \tag{16}$$

$$I_{A4} = I_{A2} - I_{V2} - I_{V3} \tag{17}$$

一直到

$$I_{A50} = I_{A2} - I_{V2} - I_{V3} - ... - I_{V49} \tag{18}$$

由于

$$I_{A50} = I_{V50} \tag{19}$$

因此所求

$$\sum_{i=1}^{50} I_{Vi}R = U_1 + \sum_{i=2}^{49} I_{Vi}R + \left(I_{A2} - \sum_{i=2}^{49} I_{Vi}\right)R = 304\mathrm{V} \tag{20}$$

## 4 习题 3.11

设电动势 $\mathscr{E}_i$ 单独存在时，$r_j$ 所在的支路通过的电流为 $I_{ij}$，于是有

$$I_{11} = \frac{\mathscr{E}_1}{r_1 + \left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)^{-1}} = \frac{13}{15}\mathrm{A} \tag{21}$$

$$I_{12} = -\frac{I_{11}\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)^{-1}}{r_2} = -\frac{8}{15}\mathrm{A} \tag{22}$$

$$I_{13} = -\frac{I_{11}\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)^{-1}}{r_3} = -\frac{1}{3}\mathrm{A} \tag{23}$$

$$I_{22} = \frac{\mathscr{E}_2}{r_2 + \left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}\right)^{-1}} = \frac{13}{14}\mathrm{A} \tag{24}$$

$$I_{21} = -\frac{I_{22}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}\right)^{-1}}{r_1} = -\frac{4}{7}\mathrm{A} \tag{25}$$

$$I_{23} = -\frac{I_{22}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}\right)^{-1}}{r_3} = -\frac{5}{14}\mathrm{A} \tag{26}$$

$$I_{33} = \frac{\mathscr{E}_3}{r_3+\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)^{-1}} = \frac{6}{7}\mathrm{A} \tag{27}$$

$$I_{32} = -\frac{I_{33}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)^{-1}}{r_2} = -\frac{3}{7}\mathrm{A} \tag{28}$$

$$I_{31} = -\frac{I_{33}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)^{-1}}{r_1} = -\frac{3}{7}\mathrm{A} \tag{29}$$

根据电流叠加原理，三条路上的电流为

$$I_j = \sum_{i=1}^{3} I_{ij} \tag{30}$$

解得

$$I_1 = -0.133\mathrm{A}，I_2 = -0.033\mathrm{A}，I_3 = 0.167\mathrm{A} \tag{31}$$

端电压

$$U_i = \mathscr{E}_i - I_i r_i \tag{32}$$

解得

$$U_1 = 1.267\mathrm{V}，U_2 = 1.467\mathrm{V}，U_3 = 1.533\mathrm{V} \tag{33}$$

输出功率

$$P_i = I_i U_i \tag{34}$$

解得

$$P_1 = -0.17\mathrm{W}，P_2 = -0.05\mathrm{W}，P_3 = 0.26\mathrm{W} \tag{35}$$

## 5 习题 3.14

下面考虑 $\Delta$ 型电路。设电流从节点处流入，从节点 $i$ 处流入的电流记为 $I_i$，节点 $ij$ 之间的电压记为 $U_{ij}$，则

$$I_1 = \frac{U_{31}}{R_{31}} - \frac{U_{12}}{R_{12}} \tag{36}$$

$$I_2 = \frac{U_{12}}{R_{12}} - \frac{U_{23}}{R_{23}} \tag{37}$$

$$I_3 = \frac{U_{23}}{R_{23}} - \frac{U_{31}}{R_{31}} \tag{38}$$

注意：由于这里规定三个点电势依次降低，因此 $U_{ij}$ 是有正负的，这是上面三式子中符号的来源。

下面考虑 Y 型电路。

$$U_{12} = I_1R_1 - I_2R_2 \tag{39}$$

$$U_{23} = I_2R_2 - I_3R_3 \tag{40}$$

$$U_{31} = I_3R_3 - I_1R_1 \tag{41}$$

联立上面的式子，解得

$$R_1 = \frac{R_{31}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \tag{42}$$

$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \tag{43}$$

$$R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \tag{44}$$

反解

$$R_{12} = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_3} \tag{45}$$

$$R_{23} = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_1} \tag{46}$$

$$R_{31} = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_2} \tag{47}$$

## 6 习题 3.17

（1）

观察可知，中间那个方格的四个顶点均为无交叉电流通过的点，因此可先将网格拆分成两个“$r-L-r$”并联的形式，这里 $L$ 是由三个方格叠成的 $L$ 型结构，这个结构的通电点为 $L$ 的左上、右下两个节点。进一步地，$L$ 结构中间的节点为无交叉电流通过的点，因此又可将该结构分为 $4r$ 并 $r-\square-r$ 结构，这里 $\square$ 的通电节点为两个对角线。综上可以得到等效电阻为

$$R = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{4r}+\frac{1}{2r+\frac{1}{2}\cdot 2r}\right)^{-1}+2r\right] = \frac{13}{7}r \tag{48}$$

（2）

观察可知，与通电点直接相连的三个节点均为等势点，因此直接与节点相连的三个电阻并联，中间六个电阻并联，这三个结构之间为串联关系，则等效电阻

$$R = \frac{1}{3}r + \frac{1}{6}r + \frac{1}{3}r = \frac{5}{6}r \tag{49}$$

（3）

观察可知，这个球最上面的顶点与最下面的顶点是等势点，将这两点相连，因此从这两个顶点向四周出发的四个电阻两两之间可看作并联关系，即电阻 $r \to \dfrac{1}{2}r$，于是这个电阻可等效成 $\boxtimes$ 的结构，最外边的四边电阻为 $r$，中间四个电阻为 $0.5r$，因此等效电阻

$$R = \left(\frac{1}{r}+\frac{1}{0.5r\times 2}+\frac{1}{2r+\frac{1}{2}r}\right)^{-1} = \frac{5}{12}r \tag{50}$$

## 7 习题 3.23

设三个支路的电流从上到下分别为 $I_1, I_2, I_3$（方向蕴含在下述方程中），则根据基尔霍夫第一方程，有

$$I_1 + I_2 = I_3 \tag{51}$$

根据基尔霍夫第二方程，两个回路分别列出

$$\mathscr{E}_3 - I_1R_3 + I_2R_2 - I_1R_4 = 0 \tag{52}$$

$$\mathscr{E}_2 - I_3R_1 - \mathscr{E}_1 - I_2R_2 = 0 \tag{53}$$

解得

$$I_1 = \frac{2}{7}\mathrm{A} \tag{54}$$

$$I_2 = -\frac{8}{7}\mathrm{A} \tag{55}$$

即 $R_4$ 上的电压

$$U_4 = I_1R_4 = \frac{12}{7}\mathrm{V} \tag{56}$$

通过 $R_2$ 的电流

$$|I_2| = \frac{8}{7}\mathrm{A} \tag{57}$$

## 8 习题 3.28

假设电流计中无电流通过，则两端等势，则意味着两个电容器两端的电压是相等的。设平均充电电流分别为 $I_1, I_2$，则两条路一定同时完成充电和放电，若不然，假设 $C_1$ 先充满电，$C_2$ 未充满电，则 $C_1$ 也应当给 $C_2$ 充电，矛盾，故得证。因此

$$Q_{1,2} = I_{1,2}t \tag{58}$$

又因为电容器两端电压相等，设为 $U$，因此

$$C_{1,2} = \frac{Q_{1,2}}{U} = \frac{I_{1,2}t}{U} \tag{59}$$

又因为

$$I_{1,2} = \frac{U'}{R_{1,2}} \tag{60}$$

则

$$C_{1,2} = \frac{U't}{UR_{1,2}} \tag{61}$$

即可得到

$$C_1R_1 = C_2R_2 \tag{62}$$

证毕。

## 9 习题 3.29

设某一时刻电流为 $I=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$，于是整个回路有

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}R+\frac{Q}{C}=\mathscr{E} \tag{63}$$

这个微分方程的解是

$$Q=C\mathscr{E}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}) \tag{64}$$

充电电流

$$I=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathscr{E}}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \tag{65}$$

当 $t=1\mathrm{s}$ 时

（1）电荷的增加速率

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}|_{t=1\mathrm{s}}=\frac{\mathscr{E}}{R}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}}=9.55\times10^{-7}\mathrm{A} \tag{66}$$

（2）储存能量 $W_e=\frac{Q^2}{2C}$，因此其变化率

$$\frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}t}=\frac{Q}{C}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathscr{E}^2}{R}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \tag{67}$$

$$\frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}t}|_{t=1\mathrm{s}}=1.08\times10^{-6}\mathrm{W} \tag{68}$$

（3）电阻上的热功率 $P=I^2R$，因此

$$P|_{t=1\mathrm{s}}=2.74\times10^{-6}\mathrm{W} \tag{69}$$

（4）电源的输出功率 $P_{out}=P+\frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}t}$，因此

$$P_{out}|_{t=1\mathrm{s}}=3.82\times10^{-6}\mathrm{W} \tag{70}$$