复变函数 B 作业 W7

习题 13

(1) $\dfrac{e^z}{z^2+4}=\dfrac{e^z}{(z-2i)(z+2i)}=\dfrac{1}{4i}\left(\dfrac{e^z}{z-2i}-\dfrac{e^z}{z+2i}\right)$,此函数有两个奇点:$z=\pm 2i$,且均为 1 阶极点。
(2) 奇点为 $z=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi, n\in\mathbb{Z}$,因为这些奇点是 $1/f(z)=\cos z$ 的 1 级零点,所以是 $f(z)=1/\cos z$ 的 1 级极点。
(3) 奇点为 $z=1$,因为 $\lim\limits_{z\to 1}\sin\dfrac{1}{1-z}$ 不存在,所以是本性奇点。
(4) 奇点为 $z=2k\pi i, k\in\mathbb{Z}$,因为这些奇点是 $1/f(z)=1-e^z$ 的 1 级零点,所以是 $f(z)=(1-e^z)^{-1}$ 的 1 级极点。
(5) 奇点为 $z=0$,因为 $\lim\limits_{z\to 1}e^{-z}\cos\dfrac{1}{z}$ 不存在,所以是本性奇点。
(6) 奇点为 $z=2k\pi i, k\in\mathbb{Z}$ 和 $z=1$。$z=1$ 时极限不存在,为本性奇点;$z=0$ 时极限存在且有限,是可去奇点;$z=2k\pi i, k\in\mathbb{Z}\{0\}$ 时是 $1/f(z)$ 的 1 级零点,所以是 $f(z)$ 的 1 级极点。
(7) 奇点为 $z=3,0,-1$,其中 $z=3$ 是 $1/f(z)$ 的 2 级零点,所以是 $f(z)$ 的 2 级极点;$z=0$ 是 $1/f(z)$ 的 1 级零点,所以是 $f(z)$ 的 1 级极点;$z=$ 是 $1/f(z)$ 的 2 级零点,所以是 $f(z)$ 的 2 级极点。
(8) 奇点为 $z=a+2k_1\pi$ 和 $\pi-a+2k_2\pi$,其中 $k_1,k_2\in\mathbb{Z}$。因为 $(1/f(z))'=\cos z$,当 $z=a+2k_1\pi$ 或 $\pi-a+2k_2\pi$ 时 $(1/f(z))'=\pm\cos a$,当 $a=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 时这个导数为 0,二阶导不为 0,所以此时 $z=a+2k_1\pi$ 或 $\pi-a+2k_2\pi$ 都是原函数的 2 级极点;当 $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ 时一阶导不为 0,所以此时 $z=a+2k_1\pi$ 或 $\pi-a+2k_2\pi$ 都是原函数的 1 级极点。
(9) 奇点为 $z=0$,当 $n>2$ 时,$z=0$ 是 $1/f(z)$ 的 $n-2$ 级零点,所以是 $f(z)$ 的 $n-2$ 级极点;当 $n\leq 2$ 时,0 处的极限存在,所以是 $f(z)$ 的可去奇点。

习题 14

(2) 做代换 $\xi=1/z$,则 $f(\xi)=(\frac{1}{\xi^2}+4)\exp(-\frac{1}{\xi})$,$f(\xi)$ 在 $\xi=0$ 的洛朗展开为 $(\frac{1}{\xi^2}+4)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\frac{1}{\xi})^n$,换回 z,则原函数在无穷远点附近的洛朗展开为 $(z^2+4)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-z)^n$,正幂次有无穷项,所以是本性奇点。
(4) 做代换 $\xi=1/z$,则 $f(\xi)=(1-\cos\frac{1}{\xi})\xi^n$,当 $n>0$ 时,$\lim_{\xi\to 0}f(\xi)$ 不存在(考虑 ξ 沿着实轴和虚轴分别趋向 0),所以 $z=\infty$ 是原函数的本性奇点;当 $n\leq 0$ 时,$\lim_{\xi\to 0}f(\xi)$ 不存在,所以 $z=\infty$ 是原函数的本性奇点。
(6) 做代换 $\xi=1/z$,则 $f(\xi)=1/\cos\xi$,$\lim_{\xi\to 0}f(\xi)=1$,所以 $z=\infty$ 是原函数的可去奇点。

（8）$f(z)=\tan z$ 不存在 R 使得 $f(z)$ 在 $R<|z|<\infty$ 解析，所以 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的非孤立奇点。

习题 15

题目条件即，$f(z)$,$g(z)$ 分别可在 $z=a$ 处写成 $f(z)=p(z)/(z-a)^m$,$g(z)=r(z)/(z-a)^n$，其中 $p(z)$,$r(z)$ 在 $z=a$ 处解析且值不为 0。
（1）不妨设 $m>n$，$f(z)\pm g(z)$ 可在 $z=a$ 处写成 $f(z)\pm g(z)=[p(z)+r(z)(z-a)^{m-n}]/(z-a)^m$，$p(z)+r(z)(z-a)^{m-n}$ 在 $z=a$ 解析且值不为 0，所以是 m 级极点，原问题应该是 $\max(m,n)$ 级极点。
（2）$f(z)g(z)$ 可在 $z=a$ 处写成 $f(z)g(z)=p(z)r(z)/(z-a)^{m+n}$，$p(z)r(z)$ 在 $z=a$ 解析且值不为 0，所以是 $m+n$ 级极点。
（3）$f(z)/g(z)$ 可在 $z=a$ 处写成 $f(z)/g(z)=[p(z)/r(z)]/(z-a)^{m-n}$，若 $m\le n$ 则为可去奇点，若 $m>n$ 则为 $m-n$ 级极点。

习题 1

（1）极点：$z=i$，1 级。$\mathrm{Res}[f(z),i]=\lim_{z\to i}\cos z=\cos i$。
（2）极点：$z=e^{(2k+1)i\pi/n}$,$k=0,1,...,2n-1$，均是 1 级极点。$\mathrm{Res}[f(z),e^{(2k+1)i\pi/n}]=\lim_{z\to e^{(2k+1)i\pi/n}}[\frac{z^{2n}(z-e^{(2k+1)i\pi/n})}{1+z^{2n}}]=e^{(2k+1)i\pi/n}/2n$。
(3) 极点：$z=2k\pi i,k\in\mathbb{Z}$，均为 1 级极点；$\mathrm{Res}[f(z),2k\pi i]=\lim\limits_{z\to 2k\pi i}(z-2k\pi i)/(e^z-1)=1$。
（4）极点：$z=0$，为 4 级极点，$\mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{1}{3!}\lim_{z\to0}(1-e^{2z})^{(3)}=-4/3$。
（5）极点：$z=\pm i$，均为 3 级极点，$\mathrm{Res}[f(z),i]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}[\frac{1}{(z+i)^3}]''=-3/16i$；$\mathrm{Res}[f(z),-i]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -i}[\frac{1}{(z-i)^3}]''=3/16i$。
(6)极点:$z=1$,为 n 级极点,$\mathrm{Res}[f(z),1]=\dfrac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to1}(z^{2n})^{(n-1)}=\dfrac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$。
（7）极点：$z=z_1,z_2$，前者为 m 而后者为 n 级极点，
$\mathrm{Res}[f(z),z_1]=\dfrac{1}{(m-1)!}\dfrac{(-1)^{m-1}[n(n+1)...(n+m-2)]}{(z_1-z_2)^{n+m-1}}$，
$\mathrm{Res}[f(z),z_2]=\dfrac{1}{(n-1)!}\dfrac{(-1)^{n-1}[m(m+1)...(m+n-2)]}{(z_1-z_2)^{m+n-1}}$。
（8）$f(z)=\frac{1}{z^2}(1-\frac{1}{(z+1)^n})$，极点：$z=0$ 为 2 级，$z=-1$ 为 n 级。
$\mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to0}[1-\frac{1}{(z+1)^n}]'=n$,
$\mathrm{Res}[f(z),-1]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to-1}[\frac{(z+1)^n-1}{z^2}]^{(n-1)}=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to-1}[z^{n-2}+...+\lambda z+\mu+\frac{n}{z}]^{(n-1)}=-n$。

习题 3

（1）积分路径为以 (1,1) 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆，被积函数的极点为 $z=1,-i,i$，分别是 2,1,1 级极点，其中 $z=1,i$ 在圆内，所以 $\int_C f(z)dz = 2\pi i(Res[f(z),1]+Res[f(z),i]) = -\frac{\pi i}{2}$。

（2）$f(z)=1/(z^4+1)$，极点为 $z=\exp(\frac{(2k+1)i\pi}{4})$,$k=0,1,2,3$，均为 1 级极点。积分路径 C：(1,0) 为圆心，1 为半径的圆

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i & z_1 &= e^{\frac{3i\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z_2 &= e^{\frac{5i\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i & z_3 &= e^{\frac{7i\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$

只有 z_0,z_3 在 C 内部，则

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left[f(z), z_0\right] &= \lim_{z\to z_0} \frac{1}{\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)\left(z-z_3\right)} \\ &= \frac{1}{\left(z_0-z_1\right)\left(z_0-z_2\right)\left(z_0-z_3\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(\sqrt{2}i)} \\ \operatorname{Res}\left[f(z), z_3\right] &= \frac{1}{\left(z_3-z_0\right)\left(z_3-z_1\right)\left(z_3-z_2\right)} = \frac{1}{-\sqrt{2}i\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)\cdot\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= 2\pi i\left[\operatorname{Res}\left[f(z), z_3\right]+\operatorname{Res}\left[f(z), z_0\right]\right] \\ &= 2\pi i\left(\frac{1-i}{2i\sqrt{2}\cdot 2}-\frac{1+i}{2i\sqrt{2}\cdot 2}\right) = \pi\left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

（3）$f(z)=\frac{1}{(z^2-1)(z^3+1)}$，极点：$z_0=-1$（2 级），$z_1=1$，$z_2$,$z_3=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$（1 级）
积分路径 C：原点为圆心，r 为半径的圆
若 $r<1$，则 $f(z)$ 在 C 及其内部解析，积分为 0
若 $r>1$，所有极点均在 C 内部，则

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(z),-1] &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to-1}\left[(z+1)^2\frac{1}{\left(z^2-1\right)\left(z^3+1\right)}\right]' \\ &= \lim_{z\to-1}\left[\frac{1}{(z-1)\left(z-z_2\right)\left(z-z_3\right)}\right]' = \lim_{z\to-1} -\frac{\sum_{0c}\left(z-z_1\right)\left(z-z_j\right)}{(z-1)^2\left(z-z_2\right)^2\left(z-z_3\right)^2} \\ &= -\frac{\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+(-2)\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{4\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(z),1] &= \lim_{z\to 1}\frac{1}{\left(z^3+1\right)(z+1)} = \frac{1}{4} \\ \operatorname{Res}\left[f(z), z_2\right] &= \lim_{z\to z_2}\frac{1}{\left(z^2-1\right)(z+1)\left(z-z_3\right)} = \frac{1}{\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\sqrt{3}i)} = \frac{1}{3\sqrt{3}i} \\ \operatorname{Res}\left[f(z), z_3\right] &= \lim_{z\to z_3}\frac{1}{\left(z^2-1\right)(z+1)\left(z-z_2\right)} = \frac{1}{\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-\sqrt{3}i)} = -\frac{1}{3\sqrt{3}i} \\ \int_c f(z)dz &= 2\pi i\sum_i \operatorname{Res}\left[f(z), z_i\right] = 0. \end{aligned}$$

(4) $f(z)=[(z-1)(z-2)(z-3)]^{-1}$, 极点 $z=1,2,3$ 均为 1 级, 积分路径 C: $|z|=4$, 所有极点均在 C 内，则

$\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\frac{1}{(z-2)(z-3)}=\frac{1}{2}$
$\mathrm{Res}[f(z),2]=\lim_{z\to 2}\frac{1}{(z-1)(z-3)}=-1$
$\mathrm{Res}[f(z),3]=\lim_{z\to 3}\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{2}$
$\int_C f(z)dz=2\pi i\sum\mathrm{Res}\left[f(z),z_i\right]=0$

(5) $f(z)=[(z+1)(z-1)(z-3)]^{-2}$，极点 $z=\pm1,3$ 均为 2 级，积分区域 C: $x^{2/3}+y^{2/3}=2^{2/3}$，只有 $z=\pm1$ 在 C 内部，则

$\mathrm{Res}[f(z),1]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\left[\frac{1}{(z+1)^2(z-3)^2}\right]'=\lim_{z\to 1}-\frac{2(z+1)(z-3)^2+(z+1)^2\cdot 2(z-3)}{(z+1)^4(z-3)^4}=0$
$\mathrm{Res}[f(z),-1]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to -1}\left[\frac{1}{(z-1)^2(z-3)^2}\right]'=\lim_{z\to -1}-\frac{2(z-1)(z-3)^2+(z-1)^2 2(z-3)}{(z-1)^4(z-3)^4}=\frac{3}{128}$

$$\int_C f(z)dz=2\pi i[\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),-1]]=\frac{3}{64}\pi i$$

习题 4

(1) 令 $z=e^{i\theta},\quad d\theta=\frac{dz}{iz},\quad \cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}=\int_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(a+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2z}\right)}=\int_{|z|=1}\frac{2dz}{i\left(2az+z^2+1\right)}=\int_{|z|=1}\frac{2}{i}\cdot\frac{1}{\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)}dz$$

极点 $z_1=-a+\sqrt{a^2-1},\quad z_2=-a-\sqrt{a^2-1}$，均为 1 级。
当 $a>1$ 时仅 z_1 在 $|z|=1$ 内部，则

$$\mathrm{Res}\left[f(z),z_1\right]=\lim_{z\to z_1}\frac{2}{i}\cdot\frac{1}{\left(z-z_2\right)}=\frac{2}{i}\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}=\frac{1}{i\sqrt{a^2-1}}$$
$$\int_{|z|=1}\frac{2}{i}\cdot\frac{1}{\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)}dz=2\pi i\cdot\frac{1}{i\sqrt{a^2-1}}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

(3) 积分变形

$$\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{a^2+\sin^2\theta}=\int_0^{\pi/2}\frac{d2\theta}{2a^2+1-\cos 2\theta}=\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{b-\cos\theta},\quad b=2a^2+1$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{b-\cos\theta}=\frac{1}{2}\int_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(b-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)}=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{2bz-z^2-1}=i\int_{|z|=1}\frac{dz}{\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)}$$

极点 $z_1=b+\sqrt{b^2-1},\quad z_2=b-\sqrt{b^2-1}$，均为 1 级，$b>1$ 时仅 z_2 在 $|z|=1$ 内部，则

$$\mathrm{Res}\left[f(z),z_2\right]=\lim_{z\to z_2}\frac{1}{z-z_1}=\frac{1}{-2\sqrt{b^2-1}}$$
$$\int_{|z|=1}f(z)dz=2\pi i\cdot\frac{i}{-2\sqrt{b^2-1}}=\frac{\pi}{\sqrt{b^2-1}}=\frac{\pi}{\sqrt{4a^4+4a^2}}=\frac{\pi}{2a\sqrt{a^2+1}}$$