第二部分　静电场中的物质与电场能量

1　习题 2.2

在未放入导体块之前，电场强度为

$$E_0 = \frac{V}{6L} \tag{1}$$

由于间距线度远小于板尺寸，因此之间的电场可视为匀强电场，对左极板，取一柱体形高斯面，由高斯定理得

$$E_{left} \cdot 2S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{2}$$

故

$$E_{left} = \frac{Q}{2S\varepsilon_0} \tag{3}$$

同理

$$E_{right} = \frac{Q}{2S\varepsilon_0} \tag{4}$$

所以

$$E_0 = E_{left} + E_{right} = \frac{Q}{S\varepsilon_0} = \frac{V}{6L} \tag{5}$$

放入导体板后，间距变为 $5L$，设导体板左侧离左极板距离 kL，则右侧离右极板距离 $(5-k)L$，此时设左侧电场为 E_1，右侧电场为 E_2，对导体板使用高斯定理，有

$$E_1 S - E_2 S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{6}$$

因此

$$E_1 - E_2 = \frac{Q}{S\varepsilon_0} = \frac{V}{6L} \tag{7}$$

总的电势差满足

$$V = E_1 kL + E_2(5-k)L \tag{8}$$

解得

$$E_1 = \frac{V}{5L}\left(1 - \frac{k}{6}\right) + \frac{V}{6L},\ E_2 = \frac{V}{5L}\left(1 - \frac{k}{6}\right) \tag{9}$$

由于 E_1, E_2 方向相同，则总的电场力

$$F = (E_1 + E_2)\frac{Q}{2} \tag{10}$$

于是需要做功

$$W = \int_1^3 (-F) L \mathrm{d}k = \frac{13\varepsilon_0 S V^2}{180L} \tag{11}$$

【或者】利用能量关系，移动前两侧电容器的电容分别为

$$C_{1,left} = \frac{\varepsilon_0 S}{L}, C_{1,right} = \frac{\varepsilon_0 S}{4L} \tag{12}$$

移动后两侧电容器的电容分别为

$$C_{2,left} = \frac{\varepsilon_0 S}{3L}, C_{2,right} = \frac{\varepsilon_0 S}{2L} \tag{13}$$

相对应的电势

$$U_{1,left} = E_1 \cdot L|_{k=1} \tag{14}$$

$$U_{1,right} = E_2 \cdot 4L|_{k=1} \tag{15}$$

$$U_{2,left} = E_1 \cdot 3L|_{k=3} \tag{16}$$

$$U_{2,right} = E_2 \cdot 2L|_{k=3} \tag{17}$$

根据能量守恒

$$\frac{1}{2}C_{1,left}U_{1,left}^2 + \frac{1}{2}C_{1,right}U_{1,right}^2 + W = \frac{1}{2}C_{2,left}U_{2,left}^2 + \frac{1}{2}C_{2,right}U_{2,right}^2 \tag{18}$$

即可算出

$$W = \frac{13\varepsilon_0 SV^2}{180L} \tag{19}$$

2 习题 2.3

设各面电荷密度为 σ_i，则有

$$\sigma_A S + \sigma_B S = 5\text{C} \tag{20}$$

$$\sigma_C S + \sigma_D S = 1\text{C} \tag{21}$$

$$\sigma_E S + \sigma_F S = 1\text{C} \tag{22}$$

$$\sigma_G S + \sigma_H S = 2\text{C} \tag{23}$$

无限大平板产生的电场强度 $E = 2\pi k\sigma$，则由导体板内部电场强度为 0，得到

$$-2\pi k\sigma_A + 2\pi k\sigma_B + 2\pi k\sigma_C + 2\pi k\sigma_D + 2\pi k\sigma_E + 2\pi k\sigma_F + 2\pi k\sigma_G + 2\pi k\sigma_H = 0 \tag{24}$$

$$-2\pi k\sigma_A - 2\pi k\sigma_B - 2\pi k\sigma_C + 2\pi k\sigma_D + 2\pi k\sigma_E + 2\pi k\sigma_F + 2\pi k\sigma_G + 2\pi k\sigma_H = 0 \tag{25}$$

$$-2\pi k\sigma_A - 2\pi k\sigma_B - 2\pi k\sigma_C - 2\pi k\sigma_D - 2\pi k\sigma_E + 2\pi k\sigma_F + 2\pi k\sigma_G + 2\pi k\sigma_H = 0 \tag{26}$$

$$-2\pi k\sigma_A - 2\pi k\sigma_B - 2\pi k\sigma_C - 2\pi k\sigma_D - 2\pi k\sigma_E - 2\pi k\sigma_F - 2\pi k\sigma_G + 2\pi k\sigma_H = 0 \tag{27}$$

联立上述八式，并利用 $Q_i = \sigma_i S$，解得

$$\boldsymbol{Q} = \left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)\text{C} \tag{28}$$

若将 CD、EF 两板接通，则有

$$\sigma_A S + \sigma_B S = 5\text{C} \tag{29}$$

$$\sigma_C S + \sigma_D S + \sigma_E S + \sigma_F S = 2\mathrm{C} \tag{30}$$

$$\sigma_G S + \sigma_H S = 2\mathrm{C} \tag{31}$$

D、E 电势相等，其间无电场，故有 5 个电场强度关系，分别如下：

$$-2\pi k\sigma_A + 2\pi k\sigma_B + 2\pi k\sigma_C + 2\pi k\sigma_D + 2\pi k\sigma_E + 2\pi k\sigma_F + 2\pi k\sigma_G + 2\pi k\sigma_H = 0 \tag{32}$$

$$-2\pi k\sigma_A - 2\pi k\sigma_B - 2\pi k\sigma_C + 2\pi k\sigma_D + 2\pi k\sigma_E + 2\pi k\sigma_F + 2\pi k\sigma_G + 2\pi k\sigma_H = 0 \tag{33}$$

$$-2\pi k\sigma_A - 2\pi k\sigma_B - 2\pi k\sigma_C - 2\pi k\sigma_D + 2\pi k\sigma_E + 2\pi k\sigma_F + 2\pi k\sigma_G + 2\pi k\sigma_H = 0 \tag{34}$$

$$-2\pi k\sigma_A - 2\pi k\sigma_B - 2\pi k\sigma_C - 2\pi k\sigma_D - 2\pi k\sigma_E + 2\pi k\sigma_F + 2\pi k\sigma_G + 2\pi k\sigma_H = 0 \tag{35}$$

$$-2\pi k\sigma_A - 2\pi k\sigma_B - 2\pi k\sigma_C - 2\pi k\sigma_D - 2\pi k\sigma_E - 2\pi k\sigma_F - 2\pi k\sigma_G + 2\pi k\sigma_H = 0 \tag{36}$$

联立上述八式，并利用 $Q_i = \sigma_i S$，解得

$$\boldsymbol{Q} = \left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)\mathrm{C} \tag{37}$$

3 习题 2.6

（1）

地球的电势

$$U_e = \frac{kq_e}{a} \tag{38}$$

地球的电容

$$C_e = \frac{q_e}{U_e} = \frac{a}{k} \tag{39}$$

同理，月球的电容

$$C_m = \frac{q_m}{U_m} = \frac{b}{k} \tag{40}$$

月、地组成的电容器为串联关系，有

$$C = \frac{C_m C_e}{C_m + C_e} = \frac{ab}{k(a+b)} \tag{41}$$

（2）

相连后变为并联关系

$$C = C_m + C_e = \frac{a+b}{k} \tag{42}$$

4 习题 2.8

电容器两极板电量应当相同，因此设内球壳带电 $-q_1$，中间壳内壁带电 $+q_1$，中间壳外壁带电 $-q_2$，外球壳带电 $+q_2$，因此电场分布容易写出。

当 $r < a$ 时，

$$E = 0 \tag{43}$$

当 $a < r < b$ 时，

$$E = \frac{kq_1}{r^2} \tag{44}$$

当 $b < r < d$ 时，

$$E = \frac{kq_2}{r^2} \tag{45}$$

当 $d < r$ 时，

$$E = 0 \tag{46}$$

以球心为原点，若设 $U(\infty) = 0$，则由上式，知 $U(d) = 0$，又因为 $U(a) = U(d)$，则 $U(a) = 0$。则对于 ab 间

$$U(b) - U(a) = \int_a^b E\mathrm{d}r \tag{47}$$

得

$$U(b) = kq_1\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \tag{48}$$

因此 ab 间电容为

$$C_{ab} = \frac{q_1}{U(b) - U(a)} = \frac{ab}{k(b-a)} \tag{49}$$

同理 bd 间电容为

$$C_{bd} = \frac{q_2}{U(d) - U(b)} = \frac{bd}{k(d-b)} \tag{50}$$

系统电容为并联关系，则

$$C = C_{ab} + C_{bd} = \frac{ab}{k(b-a)} + \frac{bd}{k(d-b)} \tag{51}$$

若在中间球壳上放入电荷 Q，则设中间内壁带电 q_1，外壁带电 q_2，因此有

$$\frac{q_1}{C_{ab}} = \frac{q_2}{C_{bd}} \tag{52}$$

结合

$$q_1 + q_2 = Q \tag{53}$$

解得

$$q_1 = \frac{a(d-b)}{b(d-a)}Q, q_2 = \frac{d(b-a)}{b(d-a)}Q \tag{54}$$

5 习题 2.9

由于 $h << d$，因此在 b 方向取一微元，可近似认为两板正对。设 $\tan\theta = \dfrac{h}{b}$，则

$$\mathrm{d}C = \frac{\varepsilon_0 a \mathrm{d}x}{d + x\tan\theta} \tag{55}$$

整个电容器等于每一微小电容器并联，因此

$$C = \int_0^b \mathrm{d}C = \frac{ab\varepsilon_0}{h}\ln\left(1 + \frac{h}{d}\right) \tag{56}$$

6 习题 2.11

设 C_1 左右电势分别为 φ_1, φ_3，左右带电量为 $+Q_3, -Q_3$；C_2 左右电势分别为 φ_1, φ_2，左右带电量为 $-Q_1, +Q_1$；C_3 左右电势分别为 φ_2, φ_3，左右带电量为 $-Q_2, +Q_2$。又观察到题中存在三个孤岛，则本题相当于解方程组

$$\begin{cases} Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1V_0 \\ C_1(\varphi_3 - \varphi_1) = Q_3 \\ C_2(\varphi_2 - \varphi_1) = Q_2 \\ C_3(\varphi_3 - \varphi_2) = Q_1 \\ Q_1 - Q_2 = 0 \\ Q_3 - Q_1 = C_1V_0 \\ -Q_3 + Q_2 = -C_1V_0 \end{cases}$$

其中最后两个方程是等价的，于是六个方程可解六个未知数，得到

$$\begin{cases} Q_1 = Q_2 = \dfrac{C_1C_2C_3V_0}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1} \\[2ex] Q_3 = \dfrac{C_1^2(C_2 + C_3)V_0}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1} \\[2ex] U_1 = \varphi_3 - \varphi_1 = \dfrac{C_1(C_2 + C_3)V_0}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1} \\[2ex] U_2 = \varphi_2 - \varphi_1 = \dfrac{C_1C_3V_0}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1} \\[2ex] U_3 = \varphi_3 - \varphi_2 = \dfrac{C_1C_2V_0}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1} \end{cases}$$

7 习题 2.13

（1）

设电极球上的电荷为 $+q$，则外壁感应电荷为 $-q$，由高斯定理得到两球之间的场强

$$E = \frac{kq}{r^2} \tag{57}$$

则电势差为

$$U_0 = -\int_{R_1}^{R_2} E\mathrm{d}r \tag{58}$$

解得

$$q = \frac{U_0 R_1 R_2}{k(R_2 - R_1)} \tag{59}$$

电极处的场强

$$E_1 = \frac{kq}{R_1^2} = \frac{U_0}{R_1(1 - \frac{R_1}{R_2})} \tag{60}$$

当 $R_2 \to \infty$ 时，该电场最小，最小值为

$$E_{\min} = \frac{U_0}{R_1} \tag{61}$$

（2）

由（1）知道此时

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{3}{4} \tag{62}$$

8 习题 2.15

（1）

水的密度 $\rho = 10^3 \mathrm{kg/m^3}$，则 1mol 水的体积为

$$V = \frac{\nu M}{\rho} = 1.8\times10^{-5}\mathrm{m}^3 \tag{63}$$

单位体积内的分子数为

$$n = \frac{\nu N_A}{V} = 3.35\times10^{28}\mathrm{m}^{-3} \tag{64}$$

由于水分子电矩都朝向同一方向，则极化强度

$$P = np = 0.02\mathrm{C/m}^2 \tag{65}$$

（2）

体积

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 5.23\times10^{-10}\mathrm{m}^3 \tag{66}$$

分子数

$$N = \frac{\rho V N_A}{M} = 1.75\times10^{19} \tag{67}$$

总的电偶极矩

$$p_{总} = Np = 1.07\times10^{-11}\mathrm{C/m^2} \tag{68}$$

由极化的性质知道，外电场的方向与电偶极矩方向一致；由电偶极矩的性质知道，电场强度的大小为

$$E = \frac{2kp_{总}}{r^3} = 193\mathrm{V/m} \tag{69}$$

9 习题 2.17

由于内部为导体球，故当 $r < a$ 时电场为 0。

当 $a < r < b$ 时，由高斯定理

$$D_1 \cdot 4\pi r^2 = q \tag{70}$$

故

$$D_1 = \frac{q}{4\pi r^2} \tag{71}$$

又因为

$$D_1 = \varepsilon E_1 \tag{72}$$

故

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} \tag{73}$$

当 $b < r$ 时，由高斯定理

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{74}$$

设 $\varphi(\infty) = 0$，则

$$\varphi(\infty) - \varphi(b) = -\int_b^\infty E_2 \mathrm{d}r \tag{75}$$

解得

$$\varphi(b) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b} \tag{76}$$

故当 $r > b$ 时

$$\varphi(r) = -\int_b^r E_2 \mathrm{d}r + \varphi(b) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{77}$$

当 $a < r < b$ 时

$$\varphi(r) = \varphi(b) + \int_r^b E_1 \mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\varepsilon r}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) \tag{78}$$

当 $r < a$ 时

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q}{4\pi\varepsilon a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \tag{79}$$

10　习题 2.19

设墨滴的密度与水的密度相当，为 $\rho = 10^3 \mathrm{kg/m^3}$，则加速度为

$$a = \frac{qU}{md} = \frac{3qU}{4\pi r^3 \rho d} = 611 \mathrm{m/s^2} \tag{80}$$

时间为

$$t = \frac{L}{u_0} = 0.001 \mathrm{s} \tag{81}$$

故侧向偏移量为

$$y = \frac{1}{2} a t^2 = 0.31 \mathrm{mm} \tag{82}$$

速度为

$$v_y = at = 0.6 \mathrm{m/s} \tag{83}$$

故偏向角度

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{u_0} = 3.5° \tag{84}$$

11　习题 2.21

（1）

取一个同心球面作为高斯面（半径为 $r, a < r < b$），由高斯定理知道

$$D_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 + D_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 = Q \tag{85}$$

再一个同心球面作为高斯面（半径为 $R, R > b$），由高斯定理知道

$$E = 0 \tag{86}$$

若取 $\varphi(\infty) = 0$，则有 $\varphi(b) = 0$，又因为内球面上电势处处相等，因此

$$\int_a^b E_1 \mathrm{d}r = \int_a^b E_2 \mathrm{d}r \tag{87}$$

由对称性我们知道 E_1 和 E_2 应当遵守相同的规律，因此存在常数 λ 使

$$E_1 = \lambda E_2 \tag{88}$$

联立上述两式得到

$$E_1 = E_2 \tag{89}$$

解得

$$E = E_1 = E_2 = \frac{Q}{2\pi r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \tag{90}$$

（2）

板间电势

$$U = \int_a^b E\mathrm{d}r = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \tag{91}$$

因此电容

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)ab}{b-a} \tag{92}$$

12 习题 2.23

介质球的带电体密度为

$$\rho = \frac{q_0}{V_0} = \frac{3q_0}{28\pi R^3} \tag{93}$$

假设金属球上带电为 q，取一个同心球面作为高斯面（半径为 r, 其中$R < r < 2R$），由高斯定理知道

$$D_1 \cdot 4\pi r^2 = \rho V + q \tag{94}$$

得到

$$D_1 = \frac{q_0}{28\pi}\left(\frac{r}{R^3}-\frac{1}{r^2}\right) + \frac{q}{4\pi r^2} \tag{95}$$

再一个同心球面作为高斯面（半径为 $r, r > 2R$），由高斯定理知道

$$D_2 = \frac{q_0+q}{4\pi r^2} \tag{96}$$

因为

$$D_{1,2} = \varepsilon_0\varepsilon_r E_{1,2} \tag{97}$$

因此

$$\begin{cases} E_1 = \dfrac{q_0}{28\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\dfrac{r}{R^3}-\dfrac{1}{r^2}\right) + \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} \\ E_2 = \dfrac{q_0+q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} \end{cases} \tag{98}$$

从无穷远处到金属球表面，电势变化

$$\Delta U = \int_\infty^2 R E_2 \mathrm{d}r + \int_{2R}^R E_1 \mathrm{d}r = 0 \tag{99}$$

因此金属球确实带电，其电量解得为

$$q = -\frac{16}{21}q_0 \tag{100}$$

结合 $\varepsilon_r = 2$，金属球表面电势

$$\varphi(2R) = \int_R^{2R} E_1 \mathrm{d}r + \varphi(R) = \frac{5q_0}{168\pi\varepsilon_0 R} \tag{101}$$

13 习题 2.26

设该电容器外径为 $R_1=5\text{cm}$，内径为 R_2，电介质的绝对介电常数为 ε，所带电荷为 q。则取同心球为高斯面，由高斯定理有

$$D\cdot 4\pi r^2=q \tag{102}$$

又 $D=\varepsilon E$，所以场强

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} \tag{103}$$

由上式知道，内球壳处的场强为最大，只要此处场强小于等于击穿场强即可，即

$$E(R_2)=\frac{q}{4\pi\varepsilon R_2^2}\leqslant E_{\max} \tag{104}$$

变形得到

$$E(r^2)r^2\leqslant E(R_2)R_2^2\leqslant E_{\max}R_2^2 \tag{105}$$

则两板之间的电压

$$U=-\int_{R_2}^{R_1}E\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)=E(r)\cdot r^2\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\leqslant E_{\max}\left(R_2-\frac{R_2^2}{R_1}\right) \tag{106}$$

当

$$R_2=\frac{R_1}{2} \tag{107}$$

时电势差取得最大值，最大值为

$$U_{\max}=\frac{R_1E_{\max}}{4}=2.5{\times}10^5\text{V} \tag{108}$$

14 习题 2.28

运用高斯定理可得空间中电场的分布律。

当 $r<a$ 时，电场

$$\overrightarrow{E}=\frac{qr}{4\pi a^3\varepsilon_0\varepsilon_r}\overrightarrow{e_r} \tag{109}$$

电位移

$$\overrightarrow{D}=\frac{qr}{4\pi a^3}\overrightarrow{e_r} \tag{110}$$

当 $r>a$ 时，电场

$$\overrightarrow{E}=\frac{q}{4\pi r^2\varepsilon_0}\overrightarrow{e_r} \tag{111}$$

电位移

$$\overrightarrow{D}=\frac{q}{4\pi r^2}\overrightarrow{e_r} \tag{112}$$

储能

$$W_e=\frac{1}{2}\left(\int_0^a\overrightarrow{D}\cdot\overrightarrow{E}\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r+\int_a^\infty\overrightarrow{D}\cdot\overrightarrow{E}\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r\right)=\frac{q^2}{8\pi a\varepsilon_0}\left(\frac{1}{5\varepsilon_r}+1\right) \tag{113}$$

15 习题 2.30

总的能量

$$W_e = \frac{1}{2}\left(k\frac{q_1q_2}{r} + k\frac{q_1q_3}{2r} + k\frac{q_2q_1}{r} + k\frac{q_2q_3}{r} + k\frac{q_1q_3}{2r} + k\frac{q_2q_3}{r}\right) = \frac{4kq^2}{r} \tag{114}$$

能量转化

$$W_e = E_{k1} + E_{k2} + E_{k3} \tag{115}$$

初始时，以向右为正方向，设三个粒子所受电场力为 $F_i(i = 1, 2, 3)$，则受力

$$F_1 = -\left[\frac{kq}{r^2} + \frac{2kq}{(2r)^2}\right] q = -\frac{3kq^2}{2r^2} \tag{116}$$

$$F_2 = \left(\frac{kq}{r^2} - \frac{2kq}{r^2}\right) q = -\frac{kq^2}{r^2} \tag{117}$$

$$F_3 = \left[\frac{kq}{(2r)^2} + \frac{kq}{r^2}\right] 2q = \frac{5kq^2}{2r^2} \tag{118}$$

设此时三个粒子的瞬时加速度为 $a_i(i = 1, 2, 3)$，则

$$a_1 = \frac{F_1}{m_1} = -\frac{3kq^2}{2mr^2} \tag{119}$$

$$a_2 = \frac{F_2}{m_2} = -\frac{kq^2}{2mr^2} \tag{120}$$

$$a_3 = \frac{F_3}{m_3} = \frac{kq^2}{2r^2} \tag{121}$$

从初始时开始取一个微元 $\Delta t \to 0$，由上面的形式知道 F 是关于 Δr 的二阶小量，而位移变化 Δr 是关于 Δt 的二阶小量，因此在这一时间微元内可认为外力不变，因此此时位移的变化之比等于加速度之比、速度的变化之比等于加速度之比。设 Δt 结束时的位置为 $r_i'(i = 1, 2, 3)$，速度为 $v_i'(i = 1, 2, 3)$，则

$$r_1 - r_1' : r_2 - r_2' : r_3 - r_3' = -3 : -1 : 1 \tag{122}$$

$$v_1' : v_2' : v_3' = -3 : -1 : 1 \tag{123}$$

而

$$[(r_1 - r_1') - (r_2 - r_2')] : [(r_2 - r_2') - (r_3 - r_3')] = 1 : 1 \tag{124}$$

即 Δt 结束时，1、2 球与 2、3 球之间的间隔仍然相等。由于此时速度之比仍然等于加速度之比，在下一个 Δt 时速度变化之比仍将等于加速度之比。因此可知在接下来的每一时刻，三者速度之比都将等于初始时的加速度之比。设三者末速度为 $v_i(i = 1, 2, 3)$，则有

$$v_1 : v_2 : v_3 = -3 : -1 : 1 \tag{125}$$

因此可得最终三者动能为

$$\overrightarrow{E_k} = (E_{k1}, E_{k2}, E_{k3}) = \left(\frac{9kq^2}{4r}, \frac{kq^2}{2r}, \frac{5kq^2}{4r}\right) \tag{126}$$

16 习题 2.32

设内球壳的带电量为 $+q_1$，则由高斯定理可以写出空间中电场的分布规律。
当 $r > R_2$ 时

$$E = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{127}$$

当 $R_1 < r < R_2$ 时

$$E = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{128}$$

当 $r < R_1$ 时

$$E = 0 \tag{129}$$

电势有如下关系

$$V = \int_{R_1}^{R_2} E\mathrm{d}r + \int_{R_2}^{\infty} E\mathrm{d}r \tag{130}$$

解得

$$q_1 = \frac{R_1 V}{k} - \frac{R_1}{R_2} q_2 \tag{131}$$

或者由电势叠加原理得

$$V = \frac{kq_2}{R_2} + \frac{kq_1}{R_1} \tag{132}$$

解得

$$q_1 = \frac{R_1 V}{k} - \frac{R_1}{R_2} q_2 \tag{133}$$

相互作用能

$$W_{\text{互}} = \frac{1}{2}\left(\frac{kq_2}{R_2} q_1 + \frac{kq_1}{R_1} q_2\right) \tag{134}$$

自能

$$W_{\text{自}} = \frac{1}{2}\left(\frac{kq_2}{R_2} q_2 + \frac{kq_1}{R_1} q_1\right) \tag{135}$$

总的能量

$$W_e = W_{\text{互}} + W_{\text{自}} = \frac{1}{2}\left[kq_1q_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{kq_2^2}{R_2} + \frac{kq_1^2}{R_1}\right] = \frac{1}{2}\left(q_2 V - \frac{R_1}{R_2} V q_2 + \frac{R_1 V^2}{k}\right) \tag{136}$$

17 习题 2.35

B 板上下面电势相等，设上面带电量为 q_1，下面带电量为 q_2。上下两个电容器的电容分别为

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1}, C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_2} \tag{137}$$

因此

$$U = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} \tag{138}$$

解得

$$q_1 d_1 = q_2 d_2 \tag{139}$$

（1）

设该液滴为第 n 滴，则 B 板总的带电量 $Q = q_1 + q_2 = (n-1)q$，则得

$$q_1 = \frac{(n-1)qd_2}{d_1 + d_2} \tag{140}$$

上面电场强度

$$E_1 = \frac{U}{d_1} = \frac{q_1}{C_1 d_1} = \frac{(n-1)qd_2}{(d_1+d_2)\varepsilon_0 S} \tag{141}$$

受力平衡

$$mg = qE_1 \tag{142}$$

解得

$$n = \frac{mg\varepsilon_0 S(d_1+d_2)}{q^2 d_2} + 1 \tag{143}$$

（2）

此时 B 板带电 $Q' = (N-1)q$，上面电场强度为

$$E_1' = \frac{U'}{d_1} = \frac{q_1'}{C_1 d_1} = \frac{(N-1)qd_2}{(d_1+d_2)\varepsilon_0 S} \tag{144}$$

由能量转化关系

$$mg(h+H) = qE_1' H \tag{145}$$

解得

$$H = \frac{mgh}{\frac{(N-1)q^2 d_2}{(d_1+d_2)\varepsilon_0 S} - mg} \tag{146}$$

18 习题 2.39

由题可知，从一侧环的中心点到这一侧环的无穷远处，电势差满足

$$qU = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{147}$$

因此从右侧起始点到右侧环的中央时，速度为最小

$$\frac{1}{2}mv_{\min}^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - qU \tag{148}$$

即

$$v_{\min} = \sqrt{v_1^2 - v_0^2} \tag{149}$$

当粒子处于两环的中间位置时，电势为 0，受力为 0，速度为最大，由于对称，从 1 环中央到中间位置与从中间位置到 2 环的电势差应当相等，根据能量转化关系则有

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + qU \tag{150}$$

解得

$$v_{\min} = \sqrt{v_1^2 + v_0^2} \tag{151}$$

则

$$\frac{v_{\max}}{v_{\min}} = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_0^2}{v_1^2 - v_0^2}} \tag{152}$$

19 习题 2.41

（1）

假设左边为正电荷。

发生隧穿前两边的电势为

$$V_{AB} = \frac{Q}{C} \tag{153}$$

储能为

$$W_1 = \frac{1}{2} C V_{AB}^2 \tag{154}$$

发生隧穿后两边的电势为

$$V'_{AB} = \frac{Q + e}{C} \tag{155}$$

储能为

$$W_2 = \frac{1}{2} C V'^2_{AB} \tag{156}$$

由题可知

$$W_2 > W_1 \tag{157}$$

解得

$$V_{AB} > -\frac{e}{2C} \tag{158}$$

若左边为负电荷，类似可得

$$V_{AB} < \frac{e}{2C} \tag{159}$$

综上有

$$-\frac{e}{2C} < V_{AB} < \frac{e}{2C} \tag{160}$$

（2）

代入（1）中结果可得

$$C = 8.01 \times 10^{-16} \mathrm{F} \tag{161}$$

（3）

设单电子岛左侧带电 q_1，右侧带电 q_2，则

$$q_1 + q_2 = -ne \tag{162}$$

两侧电势差为

$$U_1 = \frac{q_1}{C_S} \tag{163}$$

$$U_2 = \frac{q_2}{C_D} \tag{164}$$

总的能量

$$W_e = \frac{1}{2}C_S U_1^2 + \frac{1}{2}C_D U_2^2 \tag{165}$$

两侧电势差之间有关系

$$U_1 + U_2 = V \tag{166}$$

因此

$$W_e = \frac{1}{2}(C_S^{-1} + C_D^{-1})^{-1}V^2 + \frac{(-ne)^2}{2(C_S + C_D)} \tag{167}$$

由于 V 是常量，因此单电子岛上的静电能为上式第二项，即

$$W_{e_{island}} = \frac{(-ne)^2}{2(C_S + C_D)} \tag{168}$$