第13章　反常积分和含参变量的积分

段雅丽

中国科学技术大学数学科学学院

ylduan01@ustc.edu.cn

目录

- 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$的弧长为
$$l=4b\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t,$$

- $I(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$称为**第二类椭圆积分**，它不能用初等函数表示，这就是**一个含有参变量k的积分**.

- 含参变量积分也是**构造非初等函数**的一种方法.

- **含参变量积分理论与函数项级数理论**有许多相似之处.

$$\text{反常积分}\begin{cases}\text{无穷区间上函数的积分，即\textbf{无穷积分}}\\ \text{有限区间是无界函数的积分，即\textbf{瑕积分}}\end{cases}$$

§13.1.1 无穷积分的收敛性

设$f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 的任何闭子区间上Riemann 可积，则$f(x)$ 在无穷区间$[a,+\infty)$ 上**无穷积分**定义为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}F(b)$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\text{收敛}\Longleftrightarrow\lim_{b\to+\infty}F(b)\text{有有限极限}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\text{收敛}\Longleftrightarrow\lim_{n\to+\infty}S_n\text{有有限极限}$$

无穷积分收敛的判别法则

- **定理1：柯西($Cauchy$)收敛准则**

设$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，则无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛的**充分必要条件**是：对$\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ B=B(\varepsilon)>a$，使得当$b_1,\ b_2>B$时，有

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

若$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则称$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **绝对收敛**.

若$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，但$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 发散，则称$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **条件收敛**.

无穷积分收敛的判别法则

- **定理2：绝对收敛蕴含收敛**

  设$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且积分$\displaystyle\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$收敛，则无穷积分$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛.

注: 在对于常义积分(即有限区间上的积分)，这个结论并不成立，例如

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数;}\\ -1, & \text{当 } x \text{ 为无理数,}\end{cases}$$

该函数在$[0,1]$ 区间上绝对可积，但是本身不可积.

无穷积分收敛的判别法则

- **定理3：有界判别法**

  设$f(x)$是$[a,+\infty)$上的非负连续函数，则无穷积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛的**充分必要条件**是：$\exists\ M>0$,使得对$\forall\ b>a$，都有$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<M$.

无穷积分收敛的判别法则

- **定理4：比较判别法及其极限形式**

(1) 设$f(x)$和$g(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且对充分大的x满足不等式：$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，那么：

(i) 若$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$也收敛；

(ii) 若$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散，则$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$也发散.

(2) 设$f(x)$和$g(x)$是$[a,+\infty)$上的非负连续函数，且有极限关系

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = k，那么：$$

(i) 当$0<k<+\infty$时，积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$同敛散；

(ii) 当$k=0$，且积分$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$也收敛；

(iii) 当$k=+\infty$，且$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$发散时，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$也发散.

Example

考察积分$\int_1^{+\infty} x^a e^{-x}\mathrm{d}x$的敛散性，其中$a$为实常数.

解： 因为对于任意固定的实数a，有极限

$$\lim_{x\to+\infty} x^a e^{-x/2} = 0.$$

故对充分大的x，有不等式

$$x^a e^{-x} = x^a e^{-x/2} e^{-x/2} < e^{-x/2}.$$

而积分$\int_1^{+\infty} e^{-x/2}\mathrm{d}x$收敛，由比较判别法可知，积分$\int_1^{+\infty} x^a e^{-x}\mathrm{d}x$收敛.

Example

考察积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} \mathrm{d}x$ 的敛散性.

解： 因为当 $x \to +\infty$ 时, 有等价无穷小量关系

$$\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} \sim \frac{\pi}{2x^3}.$$

而积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^3} \mathrm{d}x$ 收敛, 由比较判别法的极限形式可知, 原积分收敛.

Lemma (第二积分中值定理)

设函数$f(x)$在有界闭区间$[a,\ b]$上可积.

(1) 如果$g(x)$在$[a,\ b]$上非负单调减, 那么存在$\xi \in [a,\ b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 如果$g(x)$在$[a,\ b]$上非负单调增, 那么存在$\xi \in [a,\ b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x;$$

(3) 如果$g(x)$在$[a,\ b]$上单调, 那么存在$\xi \in [a,\ b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

§13.1.2 无穷区间上积分收敛性的一般判别法

- **定理5：狄利克雷(*Dirichlet*)判别法**
  设函数$f(x)$和$g(x)$在无穷区间$[a,\ +\infty)$上连续，且满足：
  (1) 存在$M>0$，使得对任意对$b\in[a,\ +\infty)$，$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leq M$；
  (2) $g(x)$在$[a,\ +\infty)$上单调，且$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.
  那么积分$\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.
- **定理6：阿贝尔(*Abel*)判别法**
  设函数$f(x)$和$g(x)$在无穷区间$[a,\ +\infty)$上连续，且满足：
  (1) 积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛；
  (2) $g(x)$在$[a,\ +\infty)$上单调有界.
  那么积分$\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

Example

考察积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} \mathrm{d}x \quad 和 \quad \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} \mathrm{d}x$$

的收敛性与绝对收敛性，其中$a > 0$，$p > 0$.

解： 当$x \geq a > 0$时，有$\left|\dfrac{\sin x}{x^p}\right|$，$\left|\dfrac{\cos x}{x^p}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^p}$，那么$p > 1$时，原积分都是绝对收敛的.
当$0 < p \leq 1$时，对任意$b > a$，都有

$$\left|\int_a^b \sin x \mathrm{d}x\right| = |\cos a - \cos b|,\ \left|\int_a^b \cos x \mathrm{d}x\right| = |\sin a - \sin b| \leqslant 2.$$

由Dirchlet判别法可知，上面两个积分都收敛. 或者由分部积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x = -\frac{\cos x}{x^p}\Big|_a^{+\infty} - p\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}}\mathrm{d}x = \frac{\cos a}{a^p} - p\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}}\mathrm{d}x$$

$1 + p > 1$，上式右端绝对收敛，积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$收敛，
同理$\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$也收敛.

另一方面，利用三角函数的性质，
有$|\sin x| \geqslant \sin^2 x$和$\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2$，于是

$$\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p}\mathrm{d}x \geqslant \int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p}\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x^p}\mathrm{d}x.$$

当$0<p\leqslant 1$时，积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^p}\mathrm{d}x$收敛，而积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{2x^p}\mathrm{d}x$发散，所以积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p}\mathrm{d}x$发散.
再由比较判别法知，积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p}\mathrm{d}x$发散，从而积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$条件收敛. 类似可得，积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$条件收敛.

注记

1. 以上所得到的结论以及收敛性的各种判别法都可以类推到无穷积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$, 或者无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.
2. 无穷积分内容与无穷级数的相应部分是平行的, 很多定理几乎完全一样. 因为它们都是以有限逼近无限的极限过程, 只不过无穷积分是函数的极限, 而无穷级数是数列的极限罢了. 但是必须注意, 两者还是有差别的. 例如, 级数收敛的必要条件是当$n \to \infty$时通项趋于零; 而无穷积分收敛时, 当$x \to +\infty$时其被积函数可以不趋于零, 甚至可以是无界的, 如

$$\int_{a}^{+\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x \xlongequal{x^2=t} \frac{1}{2}\int_{a^2}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

条件收敛, 但$x \to +\infty$时, $\sin x^2$极限不存在.

§13.1.3 无界函数积分的收敛判别法

设函数$f(x)$在区间$(a,\ b]$上连续，且以a点为瑕点，即当$x\to a^+$时，$f(x)$无界. 瑕积分定义为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

在上式右端的积分中作变量代换$x = a + \dfrac{1}{y}$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\frac{1}{b-a}}^{1/\varepsilon} f(a+\frac{1}{y})\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(a+\frac{1}{y})\frac{\mathrm{d}y}{y^2}.$$

变量代换将瑕积分转化为无穷积分

这样，对无穷积分所建立的整个理论，可以完全平移到瑕积分上.

§13.1.3 无界函数积分的收敛判别法

- **定理1：柯西($Cauchy$)收敛准则**

  设$f(x)$在$(a,b]$上连续，a为$f(x)$的瑕点，则积分$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛的**充分必要条件**是：对$\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0$，只要$0<\delta'<\delta,\ 0<\delta''<\delta$，就有

  $$\left|\int_{a+\delta'}^{a+\delta''} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

- **定理2：绝对收敛蕴含收敛**

  设$f(x)$在$(a,b]$上连续，a为$f(x)$的瑕点（指积分的瑕点），且积分$\displaystyle\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$收敛，则积分$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛.

§13.1.3 无界函数积分的收敛判别法

- **定理3：比较判别法及其极限形式**

(1) 设$f(x)$和$g(x)$在$(a,b]$上连续，a为它们的瑕点，且对充分接近a的$x(x>a)$满足不等式：$0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,那么：

(i) 若$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$也收敛；

(ii) 若$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散，则$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$也发散.

(2) 设$f(x)$和$g(x)$是$(a,b]$上的非负连续函数，a为它们的瑕点，且有极限关系$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$，那么：

(i) 当$0<k<+\infty$时，积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$同敛散；

(ii) 当$k=0$，且积分$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$收敛时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$也收敛；

(iii) 当$k=+\infty$，且积分$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$发散时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$也发散.

Example

研究椭圆积分的敛散性

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (0<k<1).$$

解： 积分上限$x=1$为瑕点，由于

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \sim \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}\frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad (x\to 1^-)$$

且$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}\frac{1}{\sqrt{1-x}}$收敛，由比较判别法椭圆积分收敛.

几个常用积分的敛散性

(1) $p-$积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x(a>0)$，当$p>1$时收敛；当$p\leqslant 1$时发散.

(2) $p-$积分 $\displaystyle\int_a^{b}\frac{1}{(x-a)^p}\,\mathrm{d}x=\int_a^{b}\frac{1}{(b-x)^p}\,\mathrm{d}x \quad (a<b)$，
当$p<1$时收敛；当$p\geqslant 1$时发散.

(3) $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$和$\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x\ (a>0)$，当$0<p\leqslant 1$时条件收敛；当$p>1$时绝对收敛；当$p\leqslant 0$时发散.

Example

判断下列广义积分的敛散性.

(1) $$\int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x$$

(2) $$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \mathrm{d}x$$

(1) 因

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x(x-1)}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}=\infty,$$

故$x=1$为瑕点，并有

$$\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\int_1^{2}\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x+\int_2^{+\infty}\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$$

当$x\to 1^+$时，$\dfrac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\sim\dfrac{1}{2\sqrt{2(x-1)}}$，而$\displaystyle\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x-1}}$收敛，

故$\displaystyle\int_1^2\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$ 收敛.

又因
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0,$$
故当x充分大时有$\ln x<\sqrt{x}$, 以及
$$0\leqslant\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\leqslant\frac{x\sqrt{x}}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}.$$
而
$$\frac{x\sqrt{x}}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\sim\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\quad(x\to+\infty),$$
由$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$收敛, 知$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$收敛, 故原积分收敛.

(2) 由于

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{1-\alpha}(1+x)} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1-\alpha}(1+x)}.$$

当$x \to 0^+$时，$\dfrac{1}{x^{1-\alpha}(1+x)} \sim \dfrac{1}{x^{1-\alpha}}$，而$\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{1-\alpha}}$当且仅当$1-\alpha<1$，即$\alpha>0$时收敛，故积分$\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{1-\alpha}(1+x)}$当且仅当$\alpha>0$时收敛.

当$x \to +\infty$时，$\dfrac{1}{x^{1-\alpha}(1+x)} \sim \dfrac{1}{x^{2-\alpha}}$，而$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{2-\alpha}}$当且仅当$2-\alpha>1$，即$\alpha<1$时收敛，故积分$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1-\alpha}(1+x)}$当且仅当$\alpha<1$时收敛.

综上，当且仅当$0<\alpha<1$时原积分收敛.

Example

研究下列积分的条件收敛性与绝对收敛性.

(1) $$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}\mathrm{d}x$$

(2) $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

(1) $x=0$为瑕点，故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}\mathrm{d}x.$$

当$x\to0^+$时，

$$\left|\frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}\right|\leqslant\left|\frac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}\right|\sim\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

又$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$收敛，故$\displaystyle\int_0^1\frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}\mathrm{d}x$绝对收敛.

当$x\to+\infty$时，

$$\left|\frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}\right|\leqslant\left|\frac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}\right|\sim\frac{1}{x^{\frac{7}{6}}}.$$

又$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{7}{6}}}\mathrm{d}x$收敛，故$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}\mathrm{d}x$绝对收敛.

所以原积分绝对收敛.

(2) 令 $\frac{1}{x}=t$, 则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\int_0^{1}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

注意对于右边的积分, 0不是瑕点, $\int_0^1\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$是黎曼积分.

对$\forall A>1$, $\int_1^A\sin t\mathrm{d}t$ 有界, $\frac{1}{\sqrt{t}}$ 在 $[1,+\infty)$ 单调减且 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}=0$, 故由狄利克雷判别法, 积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$收敛. 但

$$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t>\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t-\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\right).$$

由$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$发散及$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$收敛, 知$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$发散,

所以$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$发散, 故原积分条件收敛.

目录

§13.3.1 含参变量常义积分及其性质

- **含参变量常义积分的定义**

  设二元函数$f(x,u)$ 在区间$[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 对于任给定的$u\in[\alpha,\beta]$, 函数$f(x,u)$ 对变量x 在$[a,b]$ 上Riemann 可积, 这时称积分

$$\int_a^b f(x,u)dx$$

  是含参变量u 的常义积分. 它定义了一个函数

$$u\longmapsto\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)dx.$$

本节主要讨论含参变量常义积分的连续性、可微性和可积性.

Theorem (连续性)

设二元函数$f(x,u)$在矩形区域$I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，则函数$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$在$[\alpha,\ \beta]$上连续，即对任意$u_0\in[\alpha,\ \beta]$，有

$$\lim_{u\to u_0}\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x,u_0)\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{u\to u_0} f(x,u)\mathrm{d}x,$$

即可交换极限运算与积分运算的顺序，或在积分号下求极限.

Example

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+(1+\frac{x}{n})^n}$.

解： 设$f(x,u)=\begin{cases}\frac{1}{(1+ux)^{\frac{1}{u}}}, & u\neq 0\\ 1+\frac{1}{e^x}, & u=0\end{cases}$, $I=[0,1]^2$,

则$f(x,u)\in C(I)$, 令$\varphi(u)=\displaystyle\int_0^1 f(x,u)\mathrm{d}x$, $u\in[0,1]$. 由含参变量常义积分的连续性, $\varphi(u)$在$[0,1]$上连续, 则在$u=0$处右连续, 即

$$\lim_{u\to 0^+}\varphi(u)=\varphi(0)=\int_0^1 f(x,0)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+e^x}$$

$$=\int_0^1\frac{e^x\mathrm{d}x}{e^x(1+e^x)}=\ln\frac{2e}{e+1}.$$

令$u=\dfrac{1}{n}$, $n\in\mathbf{Z}^+$, 则$n\to\infty$时, $u\to0^+$, 从而

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+(1+\frac{x}{n})^n}=\lim_{u\to0^+}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+ux)^{\frac{1}{u}}}\\&=\lim_{u\to0^+}\int_0^1 f(x,u)\mathrm{d}x=\lim_{u\to0^+}\varphi(u)=\ln\frac{2e}{e+1}.\end{aligned}$$

注记: 此题将数列极限转化为含参变量积分函数的极限, 利用其连续性求得极限.

Example

已知$F(\alpha)=\int_{-1}^{1} e^{\sqrt{x^2+\alpha^2}}\mathrm{d}x$, 求$\lim\limits_{\alpha\to 0} F(\alpha)$.

解： 由含参变量常义积分的连续性, 知$F(\alpha)$在$\alpha=0$连续, 故

$$\lim_{\alpha\to 0} F(\alpha)=F(0)=\int_{-1}^{1} e^{\sqrt{x^2}}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1} e^{x}\mathrm{d}x=2(e-1).$$

Example

设$f(x)$ 是区间$[0,1]$ 上的连续函数，讨论函数

$$F(t)=\int_0^1 \frac{tf(x)}{x^2+t^2}\mathrm{d}x$$

的连续性.

解： 对每一个固定的$t \in \mathbb{R}$, 二元函数

$$h(x,t) = \frac{tf(x)}{x^2+t^2}$$

都是x 连续函数, 因此, $F(t)$在整个实轴有定义. 设$0<\alpha<\beta$, 因$h(x,t)$ 在$[0,1]\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 所以$F(t)$ 在$[\alpha,\beta]$ 连续, 从而$F(t)$ 在$t\neq 0$ 处都是连续的. 对于$0<t<1$, 有

$$\int_0^1 \frac{tf(x)}{x^2+t^2}\,dx = \int_0^{t^{1/3}} \frac{tf(x)}{x^2+t^2}\,dx + \int_{t^{1/3}}^1 \frac{tf(x)}{x^2+t^2}\,dx.$$

因f 在$[0,1]$ 上连续, 可设$|f(x)|\le M$. 因而

$$\left|\int_{t^{1/3}}^1 \frac{tf(x)}{x^2+t^2}\,dx\right| \le \frac{t}{t^{2/3}+t^2}M = \frac{t^{1/3}}{1+t^{4/3}}M \to 0,\ (t\to 0^+).$$

根据第一积分中值定理的推广，存在$\xi \in (0, t^{1/3})$ 使得

$$\int_0^{t^{1/3}} \frac{tf(x)}{x^2+t^2}\,dx = f(\xi)\int_0^{t^{1/3}} \frac{t}{x^2+t^2}\,dx$$
$$= f(\xi)\arctan\frac{x}{t}\Big|_{x=0}^{x=t^{1/3}} = f(\xi)\arctan\frac{1}{t^{2/3}}.$$

因而

$$\lim_{t\to 0^+}\int_0^{t^{1/3}} \frac{tf(x)}{x^2+t^2}\,dx = \frac{\pi}{2}f(0).$$

于是

$$\lim_{t\to 0^+} F(t) = \frac{\pi}{2}f(0).$$

同理

$$\lim_{t\to 0^-} F(t) = -\frac{\pi}{2}f(0).$$

由此可知当$f(0)=0$ 时，$F(t)$ 在$t=0$ 连续，但当$f(0)\neq 0$ 时，$F(t)$ 在$t=0$ 不连续。

Theorem (可积性)

设二元函数$f(x,u)$在$I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 则函数$\varphi(u)$在$[\alpha,\ \beta]$上可积, 并且

$$\int_\alpha^\beta \Big[\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}u=\int_a^b \Big[\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\Big]\mathrm{d}x,$$

即可以交换两个积分运算的顺序.

Example

计算$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x,\ 0 < a < b.$

解： 注意到

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^u \mathrm{d}u,$$

且二元函数$f(x,u) = x^u$ 在$[0,1]\times[a,b]$ 连续，因而有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_a^b x^u du\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_0^1 x^u\, dx\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_a^b \frac{1}{u+1}x^{u+1}\Big|_0^1 \mathrm{d}u = \int_a^b \frac{1}{u+1}\mathrm{d}u = \ln\frac{b+1}{a+1}. \end{aligned}$$

Theorem (可微性)

如果函数$f(x,u)$在区域$I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，且对变量u有连续的偏导数，则函数$\varphi(u)$在 $[\alpha,\ \beta]$上可导，并且

$$\varphi'(u)=\int_a^b \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x,$$

即可以交换求导运算与积分运算的顺序，或在积分号下求导.

Example

计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\mathrm{d}x, \quad a>0,\ b>0$$

解： 记

$$F(u)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2 x+u^2\cos^2 x)\mathrm{d}x.$$

由于$f(x,u)=\ln(a^2\sin^2 x+u^2\cos^2 x)$及其关于$u$的偏导数

$$\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}=\frac{2u\cos^2 x}{a^2\sin^2 x+u^2\cos^2 x}$$

都在区域

$$D:\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\ \ u>0$$

上连续，由含参变量常义积分的求导性质，当$u>0$时有

$$
\begin{aligned}
F'(u) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2u\cos^2 x}{a^2\sin^2 x + u^2\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{t=\tan x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2u}{a^2\tan^2 x + u^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2u}{(a^2t^2+u^2)(1+t^2)}\mathrm{d}t \\
&= \frac{2u}{u^2-a^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{a^2}{a^2t^2+u^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{u+a}.
\end{aligned}
$$

故

$$
F(b)-F(a) = \int_a^b F'(u)\mathrm{d}u = \pi\int_a^b \frac{1}{u+a}\mathrm{d}u = \pi\ln(b+a)-\pi\ln(2a).
$$

又$F(a)=\pi\ln a$, 故所求的积分为$F(b)=\pi\ln\dfrac{a+b}{2}$.

Example

计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x \quad |\alpha|<1$$

解： 记

$$F(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x,\quad (-1<\alpha<1).$$

因

$$\frac{\ln(1+\alpha\cos x)}{\cos x}-\frac{\ln(1-\alpha\cos x)}{\cos x}=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{1+y\cos x},$$

且对$\forall\alpha\in(-1,1)$函数$\dfrac{1}{1+y\cos x}$在$[0,\frac{\pi}{2}]\times[-\alpha,\alpha]$上连续，所以交换积分次序得

$$F(\alpha)=\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+y\cos x}=\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-y\cos x}{1-y^2\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-y^2\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{u=\tan x}2\int_0^{\alpha}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+(1-y^2)}$$

$$=\pi\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\pi\arcsin\alpha.$$

其中用到$\varphi(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{y\cos x}{1-y^2\cos^2 x}\mathrm{d}x$是关于$y$的奇函数，积分$\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi(y)\mathrm{d}y$为0.

注记： 若直接求$\varphi(u)=\displaystyle\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$有困难，常采用以下两种方法：

(1) 先求$\varphi'(u)$，由含参变量常义积分的微分性质即先求$\displaystyle\int_a^b f'_u(x,u)\mathrm{d}x$，然后再对$u$积分，即利用$\varphi(u)=\varphi(u_0)+\displaystyle\int_{u_0}^u \varphi'(t)\mathrm{d}t$，求出$\varphi(u)$.

(2) 把$f(x,u)$表示为积分形式，从而把$\varphi(u)$表示为累次积分，由含参变量常义积分的积分性质再交换积分次序求$\varphi(u)$.

§13.3.2 积分限依赖于参变量的积分及其性质

在实际应用中，经常要遇到这样的情形，不仅被积函数含有参变量，积分限也含有参变量，这时积分可写成

$$\psi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)dx.$$

Theorem (连续性)

设二元函数$f(x,u)$在矩形区域$I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，函数$a(u)$和$b(u)$ 在$[\alpha,\ \beta]$上连续，并且$a\leqslant a(u)\leqslant b,\quad a\leqslant b(u)\leqslant b$，则函数$\psi(u)=\displaystyle\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\mathrm{d}x$在$[\alpha,\ \beta]$上连续，即对任意$u_0\in[\alpha,\ \beta]$，有

$$\lim_{u\to u_0}\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\mathrm{d}x=\int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x,u_0)\mathrm{d}x.$$

u_0在区间端点时，极限为单侧极限.

Example

已知$G(u)=\int_{\sin u}^{\cos u}\frac{1}{1+(1+u)x^2}\mathrm{d}x$，求$\lim\limits_{u\to 0}G(u)$.

解： 由含参变量常义积分的连续性，知$G(u)$在$u=0$连续，故

$$\lim_{u\to 0}G(u)=G(0)=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

Theorem (可微性)

如果函数$f(x,u)$在区域$I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，且在I上对变量u有连续的偏导数，函数 $a(u)$和 $b(u)$在$[\alpha,\ \beta]$上都可导，并且$a\leqslant a(u)\leqslant b,\quad a\leqslant b(u)\leqslant b$，则函数$\psi(u)$在$[\alpha,\ \beta]$上可导，并且

$$\psi'(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x+f(b(u),u)b'(u)-f(a(u),u)a'(u).$$

Example

设$I(u)=\int_{\sin u}^{\cos u} e^{(x^2+xu)}\mathrm{d}x$，求$I'(0)$.

解： 由于$e^{(x^2+xu)}$对任意的x和u都连续，且对u有连续的偏导数，则

$$I'(u)=\int_{\sin u}^{\cos u} xe^{(x^2+xu)}\mathrm{d}x-\sin u e^{(\cos^2 u+u\cos u)}-\cos u e^{(\sin^2 u+u\sin u)},$$

故

$$I'(0)=\int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{d}x-1=\frac{e-3}{2}.$$

小结

1. 利用含参变量常义积分的连续性求极限.
2. 利用含参变量常义积分的可微性求导.
3. 利用含参变量常义积分的微分性质或积分性质求含参变量常义积分.

目录

§13.4 含参变量的反常积分

设函数$f(x,u)$ 在$I=[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续，若对任意给定的$u\in[\alpha,\beta]$，广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$$

都收敛，称为**含参变量u 的反常积分**．这种积分确定了区间$[\alpha,\beta]$上的一个函数

$$u\in[\alpha,\beta]\longmapsto\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)dx.$$

注记： (1) 这里的$[\alpha,\beta]$ 可换成开区间或无穷区间，后面统一用I.
(2) 含参变量的无穷区间上的积分，类比于函数项级数．

本节的目的就是要研究这类函数的连续性、可微性和可积性．

§13.4.1 含参变量反常积分的一致收敛性

- **含参变量反常积分的收敛**

所谓积分$\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 收敛，是指对于每个固定的u，有

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x,u)dx=\int_a^{+\infty} f(x,u)dx,$$

即对任意给定的正数ε，存在数$X\ (>a)$，当$b>X$ 时有

$$\left|\int_a^b f(x,u)dx-\int_a^{+\infty} f(x,u)dx\right|=\left|\int_b^{+\infty} f(x,u)dx\right|<\varepsilon.$$

一般说来，数X 不仅依赖于ε，而且还依赖于参变量u.

称含参变量广义积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$在区间$I$上**逐点收敛**或在$I$上**收敛**.

§13.4.1 含参变量反常积分的一致收敛性

- **含参变量反常积分的一致收敛**

(1) 如果对任给的$\varepsilon>0$, 存在一个$B=B(\varepsilon)>a$, 使得当$b>B$时, 不等式

$$\left|\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x-\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_b^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

对所有的$u\in I$都成立, 则称含参变量广义积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$在区间$I$上**一致收敛**.

(2) 如果$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$在区间$I$的任何有界闭子区间上一致收敛, 则称它在$I$中**内闭一致收敛**.

Theorem (一致收敛定义的另一种表达)

无穷区间上含参变量的广义积分$\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 一致收敛的**充分必要条件**是

$$\lim_{b\to+\infty}\beta(b)=0$$

其中

$$\beta(b)=\sup_{u\in[\alpha,\beta]}\left|\int_b^{+\infty} f(x,u)dx\right|$$

含参变量反常积分的一致收敛的判别法

- **定理1：柯西($Cauchy$)收敛准则**

含参变量广义积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$在$I$上一致收敛的**充分必要条件**为：对任给的 $\varepsilon>0$，存在一个仅与ε有关的实数$B=B(\varepsilon)>a$，使得当$b_1,b_2>B$时，不等式
$\displaystyle\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$对所有的$u\in I$都成立.

含参变量反常积分的一致收敛的判别法

- **定理2：魏尔斯特拉斯($Weierstrass$)判别法**

设函数$f(x,u)$在区域$D=[a,\ +\infty)\times I$上连续，如果存在一个 $[a,+\infty)$上的连续函数$p(x)$，使得对充分大的x以及所有的$u\in I$，都有
$$|f(x,u)|\leqslant p(x),$$
且积分$\displaystyle\int_a^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x$收敛，则含参变量广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$在$I$上一致收敛.

含参变量反常积分的一致收敛的判别法

- **定理3：狄利克雷($Dirichlet$)判别法**

设函数$f(x,u)$和$g(x,u)$在区域$D=[a,\ +\infty)\times I$上连续，且满足以下两条：

(1) 积分$\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$关于$b$和$u$一致有界，即存在一个与$b$和$u$均无关的常数$K$，使得$\left|\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x\right|\leqslant K$对任意$b>a$和所有$u\in I$成立；

(2) 函数$g(x,u)$对于每个$u\in I$关于x是单调的，并且当$x\to+\infty$时，$g(x,u)$关于u在I上一致趋于零；

则含参变量广义积分$\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$在$I$上一致收敛.

含参变量反常积分的一致收敛的判别法

- **定理4：阿贝尔($Abel$)判别法**

设函数$f(x,u)$和$g(x,u)$在区域$D=[a,\ +\infty)\times I$上连续，且满足以下两条:

(1) 积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$在$I$上一致收敛;

(2) 函数$g(x,u)$对于每个$u\in I$关于x是单调的，并且$g(x,u)$关于u在I上一致有界;

则含参变量广义积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$在$I$上一致收敛.

Example

研究含参变量广义积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin ux}{x^2}\mathrm{d}x$在区间$(-\infty,\ +\infty)$上的一致收敛性。

解： 对任意$u\in(-\infty,\ +\infty)$, 有估计

$$\left|\frac{\sin ux}{x^2}\right|\leqslant\frac{1}{x^2},$$

而积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$收敛, 故由Weierstrass判别法知, 原积分在区间$(-\infty,\ +\infty)$上一致收敛.

Example

当$\alpha, \beta > 0$时，研究含参变量广义积分$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} \mathrm{d}x$在区间$[\beta_0, +\infty)$上的一致收敛性，其中$\beta_0 > 0$为固定常数.

解： 由于对任意正数b，有估计

$$\left| \int_0^b \sin \beta x \mathrm{d}x \right| \leqslant \left| \frac{1 - \cos \beta b}{\beta} \right| \leqslant \frac{2}{\beta_0},$$

即积分$\displaystyle\int_0^b \sin \beta x \mathrm{d}x$区间$[\beta_0, +\infty)$上的一致有界；而函数$\dfrac{x}{\alpha^2 + x^2}$与参变量$\beta$ 无关，且当$x \to +\infty$ 时，单调减趋于零. 由Dirchlet判别法知，积分$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} \mathrm{d}x$ 在区间$[\beta_0, +\infty)$ 上的一致收敛.

Example

研究含参变量广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} ue^{-ux}\mathrm{d}x$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的一致收敛性.

解： 对任意$u \in [0,\ +\infty)$, 积分$\displaystyle\int_0^{+\infty} ue^{-ux}\mathrm{d}x$收敛. 为考察其一致收敛性, 对$b > 0$, 估计积分

$$\int_b^{+\infty} ue^{-ux}\mathrm{d}x = e^{-bu}.$$

如果取$u = \dfrac{1}{b}$, 则有$\left|\displaystyle\int_b^{+\infty} ue^{-ux}\mathrm{d}x\right| = e^{-1}$. 因此,

取$\varepsilon_0 \in (0,\ e^{-1})$, 对任意$B > 0$, 存在$b_0 > B$及$u_0 = \dfrac{1}{b_0}$, 有

$$\left|\int_{b_0}^{+\infty} ue^{-u_0x}\mathrm{d}x\right| = e^{-1} > \varepsilon_0,$$

即含参变量广义积分$\displaystyle\int_0^{+\infty} ue^{-ux}\mathrm{d}x$在区间$[0,\ +\infty)$上不一致收敛.

但$\int_0^{+\infty} ue^{-ux}\mathrm{d}x$在$0 < a \leqslant u \leqslant b$上一致收敛.

因$ue^{-ux} \leqslant be^{-ax}$, 而$\int_0^{+\infty} be^{-ax}\mathrm{d}x$收敛, 故由$Weierstrass$判别法

$$\int_0^{+\infty} ue^{-ux}\mathrm{d}x \text{ 在 } 0 < a \leqslant u \leqslant b \text{ 上一致收敛.}$$

也就是含参变量广义积分$\int_0^{+\infty} ue^{-ux}\mathrm{d}x$在区间$[0, +\infty)$上内闭一致收敛.

Example

研究积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x^3}{1+x^p}\mathrm{d}x$在区间$0\leqslant p<+\infty$上的一致收敛性.

解： 令$x^3=t$, 然后由Dirchlet判别法知, 与p无关的积分

$$\int_0^{+\infty}x\sin x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt[3]{t}}\mathrm{d}t$$

是收敛的. 又$\dfrac{1}{1+x^p}$关于x单调, 且当$x\geqslant 0$时关于$p\geqslant 0$一致有界$\left(0<\dfrac{1}{1+x^p}\leqslant 1\right)$, 所以由含参变量广义积分一致收敛的$Abel$判别法知, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x^3}{1+x^p}\mathrm{d}x$在$[0,+\infty)$上一致收敛.

Example

研究含参变量广义积分$\int_0^{+\infty} e^{-ux}\frac{\sin 2x}{x+u}\mathrm{d}x$在区间$[b,\ B]$ $0<b<B$上的一致收敛性.

解： 对$\forall A>0$, $\left|\int_0^A \sin 2x\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{2}|1-\cos 2A|$ 一致有界.

$\forall u\in[b,\ B]$, 函数$\frac{1}{x+u}$关于x单调减,

且$\left|\frac{1}{x+u}\right| < \frac{1}{x} \to 0, (x\to+\infty)$, 故由Dirchlet判别法, 积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x+u}\mathrm{d}x$在区间$[b,\ B]$上一致收敛. 又$e^{-ux}$对$x$单调,

且$e^{-ux}\le 1$, 由$Abel$判别法, 积分在区间$[b,\ B]$上的一致收敛.

§13.4.2 一致收敛含参变量反常积分的性质

- **定理：(连续性)**

设函数$f(x,u)$在区域$D=[a,\ +\infty)\times I$上**连续**，且含参变量广义积分$\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$在区间$I$上**内闭一致收敛**，则函数 $\varphi(u)$在I上连续，即对任意$u_0\in I$，有极限关系

$$\lim_{u\to u_0}\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\lim_{u\to u_0} f(x,u)\mathrm{d}x.$$

即可以交换极限运算与积分运算的顺序.

§13.4.2 一致收敛含参变量反常积分的性质

- **定理：(可积性)**

  (1) 设函数$f(x,u)$在区域$D=[a,\ +\infty)\times[\alpha,\ \beta]$上**连续**，且含参变量广义积分$\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$在有界闭区间$[\alpha,\ \beta]$上**一致收敛**，则函数$\varphi(u)$在$[\alpha,\ \beta]$上可积，并有

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \varphi(u)\mathrm{d}u &= \int_\alpha^\beta \Big[\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}u\\ &= \int_a^{+\infty}\Big[\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\Big]\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

  即可以交换两个积分运算的顺序.

§13.4.2 一致收敛含参变量广义积分的性质

- **定理：(可积性)**

(2) 如果函数$f(x,u)$满足下列条件:

1° 函数$f(x,u)$在区域$D=[a,\ +\infty)\times[\alpha,\ +\infty)$上连续;

2° 积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$和$\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u$分别关于$u$在$[\alpha,\ +\infty)$上，关于$x$在$[a,\ +\infty)$上内闭一致收敛;

3° 下列两个积分之中至少有一个存在

$$\int_a^{+\infty}\Big(\int_\alpha^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}u\Big)\mathrm{d}x,\quad \int_\alpha^{+\infty}\Big(\int_a^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}u$$

那么下列两个积分都存在，而且相等，即

$$\int_a^{+\infty}\Big(\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\Big)\mathrm{d}x=\int_\alpha^{+\infty}\Big(\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}u,$$

§13.4.2 一致收敛含参变量广义积分的性质

- **定理：(可微性)**

设函数$f(x,u)$满足下列条件:

1° 函数$f(x,u)$和$\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}$在区域$D=[a,\ +\infty)\times I$上连续;

2° 含参变量积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$在$I$上**收敛**;

3° 含参变量积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x$在$I$上**内闭一致收敛**.

那么函数$\varphi(u)$在I上可导，并且

$$\varphi'(u)=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x,\quad (u\in I)$$

即可以交换求导运算与积分运算的顺序.

Example

计算下列含参变量积分: $I(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x,\quad \alpha>0.$

解法1： 因为

$$\frac{\arctan \alpha x}{x} = \int_0^\alpha \frac{1}{1+x^2u^2}\mathrm{d}u,$$

故

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \int_0^\alpha \frac{1}{(1+x^2u^2)(1+x^2)}\mathrm{d}u.$$

又 $\dfrac{1}{(1+x^2u^2)(1+x^2)}$ 在$0 \leqslant x < +\infty$，$0 \leqslant u \leqslant \alpha$连续，且由比较判别法，积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2u^2)(1+x^2)}\mathrm{d}x$$

关于u 在$[0, \alpha]$上一致收敛.

故由含参变量广义积分的积分性质，交换积分次序得

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_0^{\alpha} \mathrm{d}u \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2u^2)(1+x^2)} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\alpha} \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+x^2u^2} \mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\alpha} \frac{1-u}{1-u^2} \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} \ln(1+\alpha). \end{aligned}$$

解法2： 记$f(x,\alpha)=\dfrac{\arctan\alpha x}{x(1+x^2)}$，因为$f(x,\alpha)$

及$f'_\alpha(x,\alpha)=\dfrac{1}{(1+\alpha^2x^2)(1+x^2)}$在$[0,+\infty)^2$ 上连续，

且$I(\alpha)$在$[0,+\infty)$上收敛，$I(0)=0$，又对$\alpha\geqslant 0$有

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+\alpha^2x^2)(1+x^2)}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{1-\alpha^2}\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\frac{\alpha^2}{1+x^2\alpha^2}\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+\alpha},\end{aligned}$$

且$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2\alpha^2)(1+x^2)}\mathrm{d}x$在$[0,+\infty)$上一致收敛.

由含参变量广义积分的求导性质，得

$$I'(\alpha)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_0^{+\infty} f(x,\alpha)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+\alpha^2x^2)(1+x^2)}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+\alpha}.$$

故

$$I(\alpha)=\int_0^{\alpha} I'(\alpha)\mathrm{d}\alpha+I(0)=\int_0^{\alpha}\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+\alpha}\mathrm{d}\alpha+I(0)=\frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha).$$

注记:

若直接求$I(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$有困难, 常采用以下两种方法:

(1) 把$f(x,u)$表示为积分形式, 从而把$I(u)$视为累次积分, 由含参变量广义积分的积分性质, 再交换积分次序求积分.

(2) 先求$I'(u)$, 由含参变量广义积分的微分性质, 即先求 $\int_a^{+\infty} f'_u(x,u)\mathrm{d}x$, 然后再对$u$积分,

由$I(u)=\int_{u_0}^{u} I'(u)\mathrm{d}u+I(u_0)$ 求出$I(u)$.

§13.4.3 几个重要的广义积分

(1) **概率积分**

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(2) **狄利克雷(*Dirichlet*)积分**

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

进一步有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \beta>0,\\ 0, & \beta=0,\\ -\frac{\pi}{2}. & \beta<0.\end{cases}$$

问题： 能否用含参变量积分表示非初等函数符号函数$sgnx$?

§13.4.3 几个重要的广义积分

(3) **拉普拉斯($Laplace$)积分**

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta} \quad (\alpha > 0,\ \beta \geqslant 0),$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta} \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$$

(4) **菲涅耳($Fresnel$)积分**

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \cos x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Example

利用 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{d}x&=-\frac{\sin^4 x}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{4\sin^3 x\cos x}{x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}\frac{(1-\cos 2x)\sin 2x}{x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\frac{\sin 4x}{2x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

小结

1. 研究含参变量广义积分在指定区间上的一致收敛性.
2. 利用含参变量广义积分的微分性质或积分性质求含参变量广义积分.
3. 利用概率积分或Dirichlet积分计算一些广义积分.

目录

Euler在求解微分方程时，引出如下两个含参变量积分：

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t,\quad \mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t.$$

分别称为**Γ(伽马)函数**和**B(贝塔)函数**. Γ函数和B函数统称为**欧拉积分**或**欧拉函数**，其中B函数也称为第一类Euler 积分，Γ 函数称为第二类Euler 积分.

Γ函数和B函数在数学、物理以及工程计算中有着广泛的应用，有不少重要的定积分值可以用Γ函数和B函数表示出来.

本节讨论Γ函数和B函数的性质，如连续性、递推公式，以及Γ函数和B函数之间的关系式等.

§13.5.1 Γ函数的性质

- **连续性**

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

的定义域是$(0,\ +\infty)$, 而且是$(0,\ +\infty)$ 上连续函数.

- **可微性**

Γ 函数有任意阶导数, 且导数为

$$\Gamma^{(k)}(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^k\mathrm{d}t.$$

§13.5.1 Γ函数的性质

- **Γ 函数递推公式**

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\ \ x>0.$$

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\mathrm{d}t=1,\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma(n+1)=n(n-1)\cdots 1\cdot\Gamma(1)=n!,\quad n\in\mathbf{Z}^+$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

- **余元公式** 当$x\in(0,1)$ 时，有

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Example

已知 $\int_0^{+\infty} x^{u-1}\sin x\mathrm{d}x = \Gamma(u)\sin\frac{\pi u}{2}$, $\int_0^{+\infty} x^{u-1}\cos x\mathrm{d}x = \Gamma(u)\cos\frac{\pi u}{2}$, $0<u<1$. 求函数 $f(x)=x^{-a}$ $(x>0)$ 的$Fourier$正弦变换以及正弦反演公式, 进而证明余元公式. 其中常数 a 满足 $0<a<1$.

分析: 例题中的函数$f(x)=x^{-a}$不满足傅里叶积分表示收敛定理中的条件, 但是仍然求出了它的傅里叶变换. 这是因为收敛定理中的条件是充分条件, 不是必要的. 事实上, 收敛定理的条件可放宽为:

(1°) 函数$f(x)$在任何有限区间上绝对可积(允许在瑕积分意义下);

(2°) 存在$M>0$, 当$|x|\geqslant M$时, $f(x)$单调减, 且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

可以验证, 函数$f(x)=x^{-a}$满足上面两个条件.

解： 函数 $f(x)=x^{-a}$ (x, $\lambda>0$) 的 $Fourier$正弦变换为

$$F(\lambda)=2\int_0^{+\infty}x^{-a}\sin\lambda x\mathrm{d}x=2\Gamma(1-a)\cos\frac{\pi a}{2}\cdot\lambda^{a-1}\ ,$$

其正弦反演公式为 ($x>0$)

$$\begin{aligned}x^{-a}=f(x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}F(\lambda)\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda\\&=\frac{1}{\pi}\cdot2\Gamma(1-a)\cos\frac{\pi a}{2}\int_0^{+\infty}\lambda^{a-1}\cdot\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda\\&=\frac{1}{\pi}\cdot2\Gamma(1-a)\cos\frac{\pi a}{2}\cdot\Gamma(a)\sin\frac{\pi a}{2}\cdot x^{-a}\ .\end{aligned}$$

由上述反演公式, 立得Γ**函数的余元公式**

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi},\quad 0<a<1\ .$$

§13.5.2 B函数的性质

- **连续性**

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$$

在$I=(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上连续.

- **B 函数无穷积分表示**

对任意的$x>0, y>0$, 有

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{z^{y-1}}{(1+z)^{x+y}}\mathrm{d}z.$$

§13.5.2 B函数的性质

- Γ函数与B函数的关系

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\quad (x,y>0).$$

特别地，有B函数的对称性

$$\mathrm{B}(x,y)=\mathrm{B}(y,x)\quad (x,y>0).$$

$$\mathrm{B}(n,m)=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}\quad (m,n\in\mathbb{N}).$$

§13.5.2 B函数的性质

- **递推公式**

$$\mathrm{B}(x+1,y)=\frac{x}{x+y}\mathrm{B}(x,y);\quad \mathrm{B}(x,y+1)=\frac{y}{x+y}\mathrm{B}(x,y);$$

$$\mathrm{B}(x+1,y+1)=\frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\mathrm{B}(x,y).$$

- **Legendre加倍公式**

$$\Gamma(2x)=\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)\quad (x>0).$$

证明： $\mathrm{B}(x,x)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}\mathrm{d}t$, 分段积分并换元得

$$\mathrm{B}(x,x)=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{x-1}\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{x-1}\mathrm{d}t$$

中作变量代换$t-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\tau}$, 则有

$$\mathrm{B}(x,x)=\frac{1}{2^{2x-1}}\int_0^1\tau^{-\frac{1}{2}}(1-\tau)^{x-1}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2^{2x-1}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},x\right).$$

将上式中的B函数用Γ函数表达, 则有

$$\frac{\Gamma^2(x)}{\Gamma(2x)}=\frac{1}{2^{2x-1}}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(x)}{\Gamma(x+\frac{1}{2})},$$

将$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$代入, 即得$\Gamma(2x)=\dfrac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\dfrac{1}{2}\right).$

Example

计算积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x \mathrm{d}x$，其中$n$和$m$都是自然数.

解：作变量代换$t=\sin^2 x$，则得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}}(1-t)^{\frac{m-1}{2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2},\frac{m+1}{2}\right),$$

或用Γ函数表达

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+n}{2}+1)}.$$

注记：类似地，$\alpha>0,\beta>0$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x \cos^\beta x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})\Gamma(\frac{\beta+1}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+\beta}{2}+1)}.$$

Example

计算广义积分 $\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\alpha t} \mathrm{d}t \quad (\alpha > 0).$

解： 令$\alpha t = x$, 则有

$$\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\alpha t} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} \mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

注记： 计算一些广义积分，可通过对广义积分作变量代换化为Euler积分，再利用Euler积分的递推公式或其它公式，求得广义积分值.

Example

计算广义积分 $\int_0^1 (\ln x)^n \mathrm{d}x \quad (n \in \mathbf{N})$.

解： 令 $\ln x = -t$, 则有

$$\int_0^1 (\ln x)^n \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} (-1)^n t^n e^{-t} \mathrm{d}t = (-1)^n \Gamma(n+1) = (-1)^n n!.$$

Example

计算广义积分 $\int_a^b (x-a)^2\left(\frac{b-x}{x-a}\right)^p \mathrm{d}x \quad (0<p<1).$

解： 利用变量代换$t=\frac{x-a}{b-a}$, 使$[a,b]\to[0,1]$, 故有

$$
\begin{aligned}
\int_a^b (x-a)^2\left(\frac{b-x}{x-a}\right)^p \mathrm{d}x &= (b-a)^3\int_0^1 t^{2-p}(1-t)^p\mathrm{d}t \\
&= (b-a)^3\mathrm{B}(3-p,1+p) \\
&= (b-a)^3\frac{\Gamma(3-p)\Gamma(1+p)}{\Gamma(4)} \\
&= \frac{p(2-p)(1-p)(b-a)^3}{6}\Gamma(1-p)\Gamma(p) \\
&= \frac{p(2-p)(1-p)(b-a)^3}{6}\frac{\pi}{\sin p\pi}.
\end{aligned}
$$

Example

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^n}{1+x^{2n}}\mathrm{d}x.$

解：令$x^{2n}=t$, 则有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^n}{1+x^{2n}}\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\frac{1+\sqrt{t}}{1+t}\frac{1}{2n}t^{\frac{1}{2n}-1}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2n}\left(\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{1}{2n}-1}}{1+t}\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{1}{2n}-\frac{1}{2}}}{1+t}\mathrm{d}t\right)\\&=\frac{1}{2n}\left[\mathrm{B}\left(\frac{1}{2n},1-\frac{1}{2n}\right)+\mathrm{B}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)\right]\\&=\frac{1}{2n}\left[\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2n}}+\frac{\pi}{\sin\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}\right)\pi}\right]=\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}+\frac{\frac{\pi}{2n}}{\cos\frac{\pi}{2n}}.\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^n}{1+x^{2n}}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}+\frac{\frac{\pi}{2n}}{\cos\frac{\pi}{2n}}\right)=1.$$

§13.5 欧拉($Euler$)积分

Example

试求曲线$x^n+y^n=a^n$当$x>0,y>0,n>0$时所围成平面图形的面积.

解： 所围成平面图形的面积为

$$S=\int_0^a y(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 (a^n-x^n)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x=a^2\int_0^a [1-(\frac{x}{a})^n]^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}(\frac{x}{a})$$

$$\xlongequal{\frac{x}{a}=t}\frac{a^2}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}t=\frac{a^2}{n}\mathrm{B}(\frac{1}{n},\frac{1}{n}+1)=\frac{a^2}{2n}\frac{\Gamma^2(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{2}{n})}.$$

Example

设曲线L的极坐标方程为$r^m = a^m \cos m\theta$, 其中$a, m > 0$.

(1) 求其一支所围区域的面积S;

(2) 求这一支的弧长ℓ.

解： 当θ从$-\frac{\pi}{2m}$变到$\frac{\pi}{2m}$，形成L的一支曲线. $\cos m\theta$是θ的偶函数，故极轴上下区域对称，且面积相等

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2m}}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2m}}a^2(\cos m\theta)^{\frac{2}{m}}\mathrm{d}\theta$$

$$\xlongequal{m\theta=\varphi}\frac{a^2}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2}{m}}\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{a^2}{2m}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{m}+\frac{1}{2}\right)=\frac{a^2\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{m}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{m})}.$$

$$\ell=2\int_0^{\frac{\pi}{2m}}\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta=2a\int_0^{\frac{\pi}{2m}}(\cos m\theta)^{\frac{1}{m}-1}\mathrm{d}\theta$$

$$\xlongequal{m\theta=\varphi}\frac{2a}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{1}{m}-1}\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{a}{m}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2m}\right)=\frac{a\sqrt{\pi}}{m}\frac{\Gamma(\frac{1}{2m})}{\Gamma(\frac{1}{2m}+\frac{1}{2})}.$$

Example

确定参数α, β, γ, 使得积分

$$I = \iiint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1 + x^\alpha + y^\beta + z^\gamma} < +\infty.$$

并求积分I的值, 其中$D = \{(x, y, z) \mid x, y, z \geqslant 0\}$为第一卦限.

解： 首先应该有α, β, $\gamma > 0$, 作变量代换
$x = u^{2/\alpha}$, $y = v^{2/\beta}$, $z = w^{2/\gamma}$, 则积分变为

$$I = \frac{8}{\alpha\beta\gamma} \iiint_\Omega \frac{u^{\frac{2}{\alpha}-1} v^{\frac{2}{\beta}-1} w^{\frac{2}{\gamma}-1}}{1+u^2+v^2+w^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w,$$

其中$\Omega = \{(u,v,w) \mid u,v,w \geqslant 0\}$, 再选取球坐标

$$u = \rho\sin\varphi\cos\theta,\ v = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ w = \rho\cos\varphi,$$
$$\rho \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},$$

于是积分变为

$$I = \frac{8}{\alpha\beta\gamma} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{\alpha}-1}\theta \sin^{\frac{2}{\beta}-1}\theta \mathrm{d}\theta$$
$$\cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})-1}\varphi \cos^{\frac{2}{\gamma}-1}\varphi \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{2(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma})-1}}{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho.$$

可见当且仅当$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}<1$时，最后一个积分收敛，并且利用$\Gamma$函数和$B$函数，可以将上述积分写为

$$I=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}B\Big(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}\Big)B\Big(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}\Big)B\Big(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma},1-(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma})\Big),$$

或

$$I=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\Gamma\Big(\frac{1}{\alpha}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{\beta}\Big)\Gamma\Big(1-(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma})\Big).$$

小结

本节重点是利用欧拉积分计算一些广义积分或极限.

具体做法： 一般是把广义积分进行**分部积分**或**变量代换**化为Euler积分的形式，利用Euler积分的递推公式或其它相关公式，求得广义积分值或极限.