1 物质中的磁场和磁性材料

1.1 习题5.4

（1）

$$N = 2nN_A = 2\frac{m}{M}N_A = 2\frac{\rho V}{M}N_A = 2\frac{\rho\pi r^2 l}{M}N_A = 1.59\times10^{24}$$

（2）

轨道磁矩$\mu_l = 9.27\times10^{-24}(\mathrm{A\cdot m^2})$，则

$$\mu = N\mu_l = 14.7(\mathrm{A\cdot m^2})$$

（3）

应满足

$$\mu = IS$$

得到

$$I = 1.87\times10^5\,\mathrm{A}$$

（4）

$$B = \mu_0 n I_a S_a = \mu_0\frac{N}{V}\frac{IS}{N} = \frac{\mu_0 I}{l} = 1.96\mathrm{T}$$

1.2 习题5.6

导体球的电势为U，应满足

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

于是可以得到面电荷密度

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{\varepsilon_0 U}{R}$$

旋转周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

对于一个半径为r的、高度为$R\mathrm{d}\theta$的环带，可得等效电流为

$$I=\frac{2\pi r\sigma R\mathrm{d}\theta}{T}=R\varepsilon_0 U\omega\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

则磁矩为

$$\mu=\int_0^\pi IS=\int_0^\pi \pi R^3\varepsilon_0 U\omega\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{4}{3}\pi R^3\varepsilon_0 U\omega$$

1.3 习题5.10

由B在界面上的折射定律，有

$$\frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}=\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1}$$

得到

$$\theta_1=\arctan(\frac{\mu_{r1}\tan\theta_2}{\mu_{r2}})=0.09^\circ$$

1.4 习题5.13

（1）

由电偶极子的规律可外推磁偶极子的规律，即在(r,ϕ)处产生的磁场强度

$$H_{//}=k\frac{2p\sin\phi}{r^3}$$

$$H_{\perp}=-k\frac{p\cos\phi}{r^3}(\text{取大小})$$

则

$$\tan\beta=\frac{H_{//}}{H_{\perp}}=2\tan\phi$$

（注：H和B是同向的，有关系$\vec{H}=\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}$）

（2）

由（1）

$$H_N=k\frac{2p}{r^3}$$

$$H_E=k\frac{p}{r^3}$$

则

$$H_N = 2H_E$$

1.5 习题5.14

（1）

取一段长为d的包含上板的通路L，由环路定理，有

$$\int_{(L)} H\mathrm{d}l = \sum_i I_i$$

即

$$\int_0^d H_{in}\mathrm{d}l + \int_0^d \frac{\frac{1}{2}\mu_0 i_0}{\mu_0}\mathrm{d}l = i_0 d$$

得到

$$H_{in} = \frac{1}{2}i_0$$

因此

$$B_{in,up} = \frac{1}{2}\mu_{r1}\mu_0 i_0$$

同理，对于下半部分，有

$$B_{in,down} = \frac{1}{2}\mu_{r2}\mu_0 i_0$$

（2）

上半部分磁化强度

$$M_1 = (\mu_{r1} - 1)H_{in} = \frac{1}{2}(\mu_{r1} - 1)i_0$$

下半部分磁化强度

$$M_2 = (\mu_{r2} - 1)H_{in} = \frac{1}{2}(\mu_{r2} - 1)i_0$$

于是在上界面

$$i_1 = M_1 = \frac{1}{2}(\mu_{r1} - 1)i_0$$

中间界面

$$i_2 = |M_1 - M_2| = \frac{1}{2}|\mu_{r1} - \mu_{r2}|i_0$$

下界面

$$i_3 = M_2 = \frac{1}{2}(\mu_{r2} - 1)i_0$$

1.6 习题5.16

电流密度为$j\mathrm{d}l$的薄平板，在一侧产生的磁感应强度为$\mathrm{d}B$，则

$$2\mathrm{d}Bl = \mu_0 l j\mathrm{d}l$$

故（以方向垂直纸面向外为正方向）

$$B = \int_{-\frac{b}{2}}^{x} \frac{\mu_0 j\mathrm{d}l}{2} + \int_{\frac{b}{2}}^{x} \frac{\mu_0 j\mathrm{d}l}{2} = \mu_0 jx$$

围绕左边取一个极小的通路L，长度为d，则

$$H_1 d + \frac{B_x}{\mu_0}d = j(x + \frac{b}{2})d$$

得到

$$H_1 = \frac{b}{2}j$$

于是

$$B_1 = \frac{\mu_0\mu_{r1}bj}{2}$$

同理，右侧为

$$B_2 = -\frac{\mu_0\mu_{r2}bj}{2}$$

1.7 习题5.20

设中间的磁通为Φ，则两条支路的磁通为$\Phi/2$，一条支路上的磁阻为

$$R_{m1} = \frac{L}{\mu_r\mu_0 S}$$

中间干路上的磁阻为

$$R_{m2} = \frac{l}{\mu_r \mu_0 S} + \frac{l_0}{\mu_0 S}$$

则并联部分的总磁阻为

$$R_m = \frac{R_{m1}}{2} = \frac{L}{2\mu_r \mu_0 S}$$

由磁路定理

$$NI = \Phi(R_{m2} + R_m)$$

即

$$\Phi = \frac{NI}{\frac{l}{\mu_r \mu_0 S} + \frac{l_0}{\mu_0 S} + \frac{L}{2\mu_r \mu_0 S}}$$

气隙部分的磁通

$$\Phi = BS$$

故

$$B = \frac{NI}{\frac{l}{\mu_r \mu_0} + \frac{l_0}{\mu_0} + \frac{L}{2\mu_r \mu_0}}$$

代入题给数据得到

$$NI = 1.2 \times 10^6 \mathrm{A}$$

1.8 习题5.21

研究左侧，由环路定理得

$$H \approx nI$$

则

$$M = (\mu_r - 1)H$$

这个磁化强度产生的极化面磁荷为

$$\sigma = \mu_0 M$$

衔铁感应出等量负号面磁荷，由于两平面非常接近，可近似看作无限大平面，因此磁场强度

$$H' = \frac{\sigma}{2\mu_0} \times 2 = M$$

另一侧同理，于是产生的磁力

$$F = 2H'\sigma S = 3979\mathrm{N}$$

2 电磁感应与电场的能量

2.1 习题6.3

（1）

由安培环路定理，距离中心导线为r的磁场大小为

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

于是

$$B = \frac{\mu_0 I_0 \sin\omega t}{2\pi r}$$

磁通量

$$\Phi = \int_a^b Bl\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I_0 l \sin\omega t}{2\pi}\ln(\frac{b}{a})$$

因此感应电动势

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 I_0 l\omega \ln(\frac{b}{a})}{2\pi}\cos\omega t$$

（2）

线圈在t时刻的位移为

$$\Delta x = vt$$

因此磁通量为

$$\Phi = \int_{a+\Delta x}^{b+\Delta x} Bl\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I_0 l \sin\omega t}{2\pi}\ln(\frac{b+vt}{a+vt})$$

因此感应电动势

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi}\left[\omega\cos\omega t\ln\left(\frac{b+vt}{a+vt}\right) + \sin\omega t \cdot \frac{v(a-b)}{(a+vt)(b+vt)}\right]$$

（3）

记（2）中电动势为E，则电流为

$$I = \frac{E}{R}$$

两处与直导线平行的线框受到安培力，所加的力与其等大反向，这两处磁场为

$$B_l = \frac{\mu_0 I_0 \sin \omega t}{2\pi(a+vt)}$$

$$B_r = \frac{\mu_0 I_0 \sin \omega t}{2\pi(b+vt)}$$

故

$$F = (B_l - B_r)Il = \frac{\mu_0^2 I_0^2 l^2 \sin \omega t}{4\pi^2 R}\left[\omega \cos \omega t \ln\left(\frac{b+vt}{a+vt}\right) + \sin \omega t \cdot \frac{v(a-b)}{(a+vt)(b+vt)}\right]\left[\frac{b-a}{(a+vt)(b+vt)}\right]$$

2.2 习题6.4

利用磁荷的观点，该磁体产生的磁场强度为

$$\vec{H} = -\frac{\overrightarrow{p_m}}{4\pi\mu_0 r^3} + \frac{3\overrightarrow{p_m}\cdot\vec{r}}{4\pi\mu_0 r^5}\vec{r}$$

其中

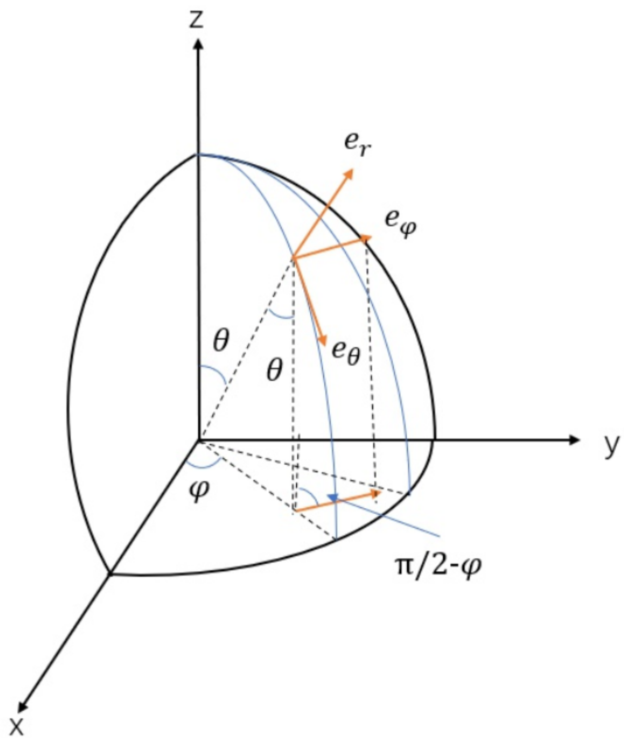
$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}, \overrightarrow{p_m} = \mu_0 \vec{\mu}$$

则磁场强度为

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0\vec{\mu}}{4\pi r^3} + \frac{3\mu_0\vec{\mu}\cdot\vec{r}}{4\pi r^5}\vec{r}$$

其中

$$\vec{\mu} = \mu\mathbf{e_z} = \mu(\mathbf{e_r}\cos\theta - \mathbf{e}_\theta \sin\theta)$$



采用球坐标，则

$$\vec{B}=\frac{\mu_0\mu(\mathbf{e}_\theta\sin\theta+2\mathbf{e_r}\cos\theta)}{4\pi r^3}$$

圆环上点P为考察对象，坐标为$(R,\theta,\omega t)$，其速度为

$$\mathbf{v}=\omega R\sin\theta\mathbf{e}_\varphi$$

这点线元

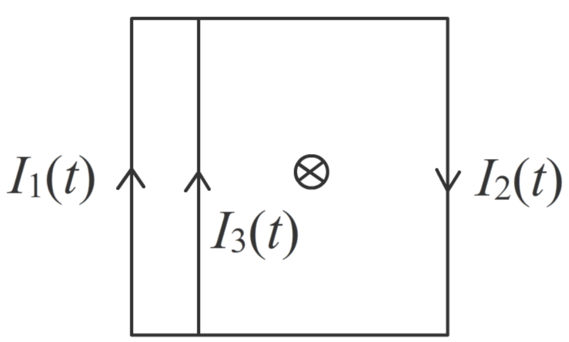
$$\mathbf{dl}=R\mathrm{d}\theta\mathbf{e}_\theta$$

于是电动势

$$\varepsilon=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{dl}=\frac{\mu_0\mu\omega}{4\pi R}$$

2.3 习题6.8

设磁场以$B=B(t)$方式于$t=t_0$时刻减小为0，且电流关系如下：



则对于左边回路，感应电动势为

$$\varepsilon_1 = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{a^2}{4}B'(t) = I_1(t)\rho\frac{\frac{3}{2}a}{S} - I_3(t)\rho\frac{a}{S}$$

对于右边回路，感应电动势为

$$\varepsilon_2 = -\frac{3a^2}{4}B'(t) = I_3(t)\rho\frac{a}{S} + I_2(t)\rho\frac{\frac{5}{2}a}{S}$$

而

$$I_2(t) = I_3(t) + I_1(t)$$

因此

$$I_3(t) = -\frac{2aSB'(t)}{31\rho}$$

安培力

$$F = B(t)I_3(t)a = -\frac{a^2S[B^2(t)]'}{31\rho}$$

冲量定理

$$I = \int_0^{t_0} F\mathrm{d}t = -\int_0^{t_0}\frac{a^2S}{31\rho}\mathrm{d}[B^2(t)] = \frac{a^2SB_0^2}{31\rho} = mv$$

故

$$v = \frac{a^2SB_0^2}{31m\rho}$$

2.4 习题6.9

（1）

达到收尾速度时，安培力与重力平衡，此时速度为v_T，则感应电动势

$$\varepsilon = Blv_T$$

安培力为

$$F = BIl = \frac{B^2l^2v_T}{R} = mg$$

故

$$v_T = \frac{mgR}{B^2 l^2}$$

（2）

作变换

$$B \to B\sin\theta$$

故

$$v_T = \frac{mgR}{B^2 l^2 \sin^2\theta}$$

2.5 习题6.11

（1）

磁通量

$$\Phi = NBS\sin\omega t = \pi a^2 NB\sin\omega t$$

则

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\pi a^2 NB\omega\cos\omega t$$

由RL电路的电路方程，有

$$\varepsilon = IR + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

这是一个一阶微分方程，其解为

$$I = -\frac{\pi a^2 NB\omega}{L^2\omega^2 + R^2}(R\cos\omega t + L\omega\sin\omega t) + C\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

由于自感的存在，当$t = 0$时，$I = 0$，则

$$C = \frac{R\pi a^2 NB\omega}{L^2\omega^2 + R^2}$$

即

$$I = \frac{\pi a^2 NB\omega}{L^2\omega^2 + R^2}(R\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} - R\cos\omega t - L\omega\sin\omega t)$$

（2）

力矩

$$\vec{L}=\vec{\mu}\times\vec{B}=IS\vec{n}\times B\overrightarrow{e_x}=ISB\sin<\vec{n},\overrightarrow{e_x}>=ISB\cos\omega t$$

2.6 习题6.12

航天飞机，满足

$$mg=m\frac{v^2}{R}$$

电动势

$$\varepsilon=Blv=288\mathrm{V}$$

2.7 习题6.14

在内部，感应电场强度满足

$$E_1\cdot 2\pi r=-k\cdot\pi r^2$$

则

$$E_1=-\frac{kr}{2}$$

在外部，感应电场强度满足

$$E_2\cdot 2\pi r=-k\cdot\pi R^2$$

则

$$E_2=-\frac{kR^2}{2r}$$

故对ac段，有

$$U_{ac}=\int_0^R E_1\cos\theta\mathrm{d}l=\int_0^R(-\frac{1}{2}k)r\cos\theta\mathrm{d}l=-\frac{k}{2}hl=-\frac{\sqrt{3}kR^2}{4}$$

对cb段，有

$$U_{cb}=\int_0^R E_2\cos\theta\mathrm{d}l=-\frac{kR^2}{2}\int_0^R\frac{h}{h^2+(l+\frac{R}{2})^2}\mathrm{d}l=-\frac{k\pi R^2}{12}$$

所以

$$U_{ab}=U_{ac}+U_{cb}=-kR^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{12}\right)$$

2.8 习题6.17

电路方程

$$Blx' = IR + I'L = I'L$$

运动方程

$$F - BIl = mx''$$

联立得到二阶微分方程

$$mx'' + \frac{B^2l^2}{L}x = F$$

解得

$$x = C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t + \frac{FL}{B^2l^2}$$

初始条件

$$x(0) = 0, v(0) = x'(0) = 0$$

解得

$$C_1 = -\frac{FL}{B^2l^2}, C_2 = 0$$

结果

$$x(t) = \frac{FL}{B^2l^2}(1 - \cos\frac{Bl}{\sqrt{mL}}t)$$

能量转换过程：外力先对棒做正功，电感产生反电动势，机械能转化为电能；之后电能转化为机械能。如此周期循环，使得棒做周期运动。

2.9 习题6.19

离导线距离为r处的磁场大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

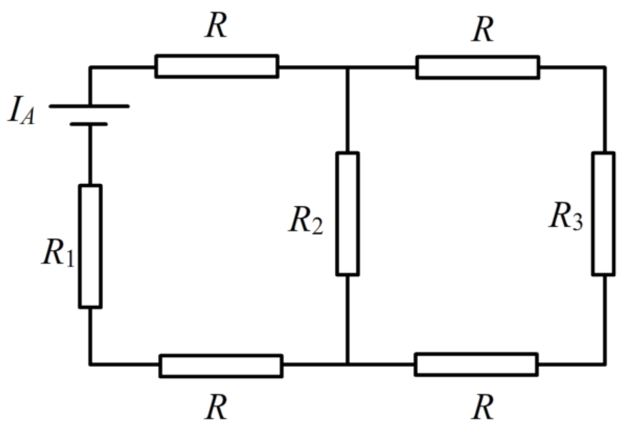
方向垂直纸面向里（导线右侧）。

感应电动势

$$\varepsilon=\int_b^{b+L}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=\int_b^{b+L}\omega(l-b)\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi l}\mathrm{d}l=\frac{\mu_0\omega I}{2\pi}(L-b\ln\frac{b+L}{b})$$

2.10 习题6.24

将变压器看成磁路，假设从A处通电流I_A，则等效磁路图为



磁动势

$$\varepsilon=N_A I_A$$

各磁阻

$$\begin{aligned}
R_1&=\frac{h}{\mu_0\mu_r S_A}=1591.5\mathrm{H}^{-1}:=r\\
R_2&=\frac{h}{\mu_0\mu_r S_B}=5r\\
R_3&=\frac{h}{\mu_0\mu_r S_C}=10r\\
R&=\frac{w}{\mu_0\mu_r S_w}=5r
\end{aligned}$$

R_2+R_3+2R部分的磁阻为

$$R_4=\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3+2R}\right)^{-1}=4r$$

故流经R_1的磁通量为

$$\Phi_1=\frac{N_A I_A}{R_1+2R+R_4}=\frac{N_A I_A}{15r}$$

又有

$$\Phi_1=\Phi_2+\Phi_3$$

$$\Phi_2 R_2=\Phi_3(2R+R_3)$$

因此

$$\Phi_2 = \frac{4}{5}\Phi_1$$
$$\Phi_3 = \frac{1}{5}\Phi_1$$

由互感的定义

$$M_{AC} = \frac{\Psi_3}{I_A} = \frac{N_C\Phi_3}{I_A} = \frac{N_A N_C}{75r} = 2.1\mathrm{H}$$
$$M_{AB} = \frac{\Psi_2}{I_A} = \frac{N_B\Phi_2}{I_A} = \frac{4N_A N_B}{75r} = 16.8\mathrm{H}$$

2.11 习题6.31

$$L_{\text{顺串}} = L_1 + L_2 + 2M$$
$$L_{\text{反串}} = L_1 + L_2 - 2M$$
$$L_{\text{顺并}} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$
$$L_{\text{反并}} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

结果是显然的。

2.12 习题6.34

感应电动势

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

电路方程

$$\varepsilon = IR + I'L = I'L$$

故

$$-\Phi' = I'L \Rightarrow \Phi + IL = \mathrm{Const}$$

（1）

$$(\Phi + IL)_1 = (\Phi + IL)_2 \Rightarrow B\pi R^2 = IL$$

故

$$I = \frac{B\pi R^2}{L}$$

（2）

$$A = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{B^2\pi^2R^4}{2L}$$