

# 数理逻辑作业 (Week 4)

黄瑞轩 PB20111686

## P42 2

3°

由下面的真值表

| $(x_1 \vee x_2)$ | $\rightarrow$ | $(\neg x_2 \rightarrow x_1)$ |
|------------------|---------------|------------------------------|
| 0 0 0            | 1             | 1 0 0 0                      |
| 0 1 1            | 1             | 0 1 1 0                      |
| 1 1 0            | 1             | 1 0 1 1                      |
| 1 1 1            | 1             | 0 1 1 1                      |

知 $\models (x_1 \vee x_2) \rightarrow (\neg x_2 \rightarrow x_1)$ , 再用代换定理便知原式为永真式。

4°

由下面的真值表

| $(x_1 \wedge \neg x_2)$ | $\vee$ | $((x_2 \wedge \neg x_3) \wedge (x_3 \wedge \neg x_1))$ |
|-------------------------|--------|--|
| 0 0 1 0                 | 0      | 0 0 1 0 0 0 0 1 0                                      |
| 0 0 1 0                 | 0      | 0 0 0 1 0 1 1 1 0                                      |
| 0 0 0 1                 | 0      | 1 1 1 0 0 0 0 1 0                                      |
| 0 0 0 1                 | 0      | 1 0 0 1 0 1 1 1 0                                      |
| 1 1 1 0                 | 1      | 0 0 1 0 0 0 0 0 1                                      |
| 1 1 1 0                 | 1      | 0 0 0 1 0 1 0 0 1                                      |
| 1 0 0 1                 | 0      | 1 1 1 0 0 0 0 0 1                                      |
| 1 0 0 1                 | 0      | 1 0 0 1 0 1 0 0 1                                      |

这说明原式不是永真式。

5°

由下面的真值表

| $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$ | $\rightarrow$ | $((p \wedge \neg q) \vee r)$ |
|-------------------------------------|---------------|------------------------------|
| 0 1 0 1 0                           | 0             | 0 0 1 0 0 0                  |
| 0 1 0 1 1                           | 1             | 0 0 1 0 1 1                  |
| 0 1 1 0 0                           | 0             | 0 0 0 1 0 0                  |
| 0 1 1 1 1                           | 1             | 0 0 0 1 1 1                  |
| 1 1 0 1 0                           | 1             | 1 1 1 0 1 0                  |
| 1 1 0 1 1                           | 1             | 1 1 1 0 1 1                  |
| 1 0 1 0 0                           | 1             | 1 0 0 1 0 0                  |
| 1 1 1 1 1                           | 1             | 1 0 0 1 1 1                  |

这说明原式不是永真式。

## P42 3

## 1°

**必要性:** 根据代换定理, 用 $\neg x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 分别代替 $x_i$ 可证。

**充分性:** 记 $v_i = \neg x_i$ , 由于 $x_i$ 属于命题变元, 则 $v_i$ 也可看成命题变元。根据代换定理, 用 $\neg v_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 分别代替 $v_i$ , 可得

$$\models p(v_1, v_2, \dots, v_n) \Rightarrow \models p(\neg v_1, \neg v_2, \dots, \neg v_n)$$

即

$$\models p(\neg x_1, \neg x_2, \dots, \neg x_n) \Rightarrow \models p(\neg \neg x_1, \neg \neg x_2, \dots, \neg \neg x_n)$$

由P34公式1, 真值函数

$$\neg \neg v = v$$

由此, 对照真值表, 知道

$$\models p(\neg \neg x_1, \neg \neg x_2, \dots, \neg \neg x_n) \Leftrightarrow \models p(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

故得证。

原命题是正确的。

## 2°

列出前一个命题的真值表如下

| $(p \rightarrow q)$ | $\leftrightarrow$ | $(p' \rightarrow q')$ |
|---------------------|-------------------|-----------------------|
| 0 1 0               | 1                 | 0 1 0                 |
| 0 1 0               | 1                 | 0 1 1                 |
| 0 1 0               | 0                 | 1 0 0                 |
| 0 1 0               | 1                 | 1 1 1                 |
| 0 1 1               | 1                 | 0 1 0                 |
| 0 1 1               | 1                 | 0 1 1                 |
| 0 1 1               | 0                 | 1 0 0                 |
| 0 1 1               | 1                 | 1 1 1                 |
| 1 0 0               | 0                 | 0 1 0                 |
| 1 0 0               | 0                 | 0 1 1                 |
| 1 0 0               | 1                 | 1 0 0                 |
| 1 0 0               | 0                 | 1 1 1                 |
| 1 1 1               | 1                 | 0 1 0                 |
| 1 1 1               | 1                 | 0 1 1                 |
| 1 1 1               | 0                 | 1 0 0                 |
| 1 1 1               | 1                 | 1 1 1                 |

若前一个命题是重言式, 则 $p, p', q, q'$ 的指派为 $(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1)$ 。显然, 当 $p, p', q, q'$ 取遍这些指派时, 不一定有 $p \leftrightarrow p'$ 的真值函数恒为1且 $q \leftrightarrow q'$ 的真值函数恒为真。

原命题是错误的。