第一周作业反馈

> 反馈主笔：王原龙
>
> 最后修改：2021.3.21

前注：本次及以后的作业反馈中均默认一个全集的存在而在集合定义以及推导过程中忽略之

再注：本课程尽量不和数理逻辑课抢活，所以逻辑相关的符号以大家理解为主，助教会尽量保持严格而大家以领会含义为主即可

习题参考解答与要点整理

Ch1 3

1. $\{0\}=\varnothing$

   错误，$\{0\}$是含有一个元素0的集合，而$\varnothing$不含有任何元素。

2. $\varnothing=0$

   错误，空集是集合而0是一个整数，（在我们学习的范围内）二者没有可比性。[1]

3. $\{\varnothing\}=\varnothing$

   错误，左边是一个含有空集作为元素的集族，而右边是一个不含任何元素的集合空集，二者没有可比性。或者说左边集合有元素而右边没有。

4. $\varnothing=\{x \mid x\neq x\}$

   正确，（如果将"$=$"视为相等，而这是我们所默认的）作为等价关系，“$=$”具有自反性，也就是说有关系式$\forall x(x=x)$成立，所以原命题成立。

5. $\varnothing=\{B \mid (B\subseteq A)\wedge(|B|=0)\}$ (注：这里的符号 $\wedge$ 代表命题合取，可以理解为逻辑与)

   错误，等号右边的集合其实是$\{\varnothing\}$，所以同3。

   - 此题有部分同学思考不谨慎认为右式为$\varnothing$

6. $\mathscr{P}(\varnothing)=\varnothing$

   错误，$\mathscr{P}$为幂集的符号，而空集以其自身为子集，所以其幂集为$\mathscr{P}(\varnothing)=\{\varnothing\}$，所以同3。

Ch1 4

1. **如果**$A \neq B$**，**$B \neq C$**，则**$A \neq C$**；**

   错误，令$A = C = \varnothing$，$B = \{0\}$，显然上面关系不成立。

2. **如果**$a \notin A$**，**$A \supseteq B$**，则**$a \notin B$**；**

   正确，反设$a \in B$，由于$B \subseteq A$，所以$\forall x(x \in B \to x \in A)$，于是$(a \in B \to a \in A)$，矛盾

3. $|\mathscr{P}(A)| > 1$**推出**$A \neq \varnothing$**.**

   正确，反设$A = \varnothing$则$\mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$，故$|\mathscr{P}(A)| = 1$，矛盾。

Ch1 5(3)

$A_1, A_2, \cdots, A_n$**为集合，证明**

$$\overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A_i}$$

证明：

1. $\overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A_i}$

   对于$\forall x \in \overline{\bigcap_i A_i}$，由交集的定义有$\exists j(x \notin A_j)$成立，又由补集的定义，可知$x \in \overline{A_j}$成立，所以$\exists j(x \in \overline{A_j})$成立，由并集的定义知道$x \in \bigcup_i \overline{A_i}$成立，所以由子集的定义，$\overline{\bigcap_i A_i} \subseteq \bigcup_i \overline{A_i}$成立。

   另一方面，对于$\forall x \in \bigcup_i \overline{A_i}$，由并集的定义知道成$\exists j(x \in \overline{A_j})$成立，所以$\exists j(x \notin A_j)$成立，由交集的定义$\forall x \in \overline{\bigcap_i A_i}$成立，所以由子集的定义知道$\overline{\bigcap_i A_i} \supseteq \bigcup_i \overline{A_i}$成立

   综上所述，原命题成立

2. $\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A_i}$

$$\begin{aligned}
\overline{\bigcup_i A_i} &= \{x \mid \neg(\exists j(x \in A_j))\} \\
&= \{x \mid \forall j(x \notin A_j)\} \\
&= \bigcap_i \{x \mid x \notin A_i\} \\
&= \bigcap_i \overline{A_i}
\end{aligned}$$

   其中符号$\neg$代表命题否定，可理解为逻辑非。

   另法是复用已经证明的结论：

$$\bigcap_i \overline{A_i} = \overline{\overline{\bigcap_i \overline{A_i}}} = \overline{\bigcup_i \overline{\overline{A_i}}} = \overline{\bigcup_i A_i}$$

证毕。

- 此题展示了两种比较标准的做法，第一种**利用集合包含关系的反对称性**，是证明集合相等的常用做法，第二种是相当于利用集合中关于元素命题的等价变换，相较第一种方式比较简便，但通常来说书写难度大于第一种（当然本题来说没有什么大的区别）。另外由于本章没有关于对偶性的描述所以不建议使用。

- 需要注意的是本题解答过程中默认了关于n个集合进行交并运算的定义，一些基本的命题运算的方法（全称特称命题的否定等），以及集合运算与命题运算的等价性。如下所示。不用这个定义也是可以的，使用数学归纳法也可证明本题（但注意**①二元情形按理来说也需要证明，②归纳奠基步骤应从n=2开始**），过程就忽略了。同时为了过程简便，有关指标变量的范围在答案中也忽略了。

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \forall i((i \in \{1, \cdots, n\}) \rightarrow (x \in A_i))\}$$
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \exists i((i \in \{1, \cdots, n\}) \wedge (x \in A_i))\}$$

若$A = \{x \mid p(x)\}$，则$x \in A \leftrightarrow p(x)$，即$x \in A$与$p(x)$命题等价，$\overline{A} = \{x \mid \overline{p}(x)\}$

Ch1 6(3)

证明：A和B是有限集合，那么$|A \cup B| \leq |A| + |B|$，等号成立当且仅当$A \cap B = \varnothing$

证明：

由定义可以知道（注：符号$\vee$表示命题析取，可以简单理解为逻辑或）

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid (x \in A)\} \\ &= \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\} \cup \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \{x \mid (x \in B)\} \\ &= \{x \mid (x \in B) \wedge (x \notin A)\} \cup \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\} \cup \{x \mid (x \notin A) \wedge (x \in B)\} \cup \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\} \\ &= (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) \end{aligned}$$

且这三个并的部分两两不交，而又因为势是集合的元素个数，对于不交的集合，它们并集的势为它们势之和，所以

$$\begin{aligned} |A| &= |A - B| + |A \cap B| \\ |B| &= |B - A| + |A \cap B| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)| \\ &= |(A - B)| + |(B - A)| + |(A \cap B)| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &\leq |A| + |B| \end{aligned}$$

等号成立当且仅当$|A \cap B| = 0$即$A \cap B = \varnothing$.

- 由于我们并没有讲太多关于集合的势的性质，书上也没有正式地定义，只是朴素地给出了有限集合的势定义为其元素个数，所以这题并不会很严格，但还是不推荐直接使用容斥原理的式子，因为个人感觉本题主要想考的就是容斥原理的简单情形的一个小证明吧，直接用容斥原理的话好像过于简单。另外还有一种用集合的特征函数的思路，也比较好。
- 注意Venn图**不能**作为证明的依据。
- 严格来说，很多同学按照$A \cap B$是否为空来分类讨论证明，当$A \cap B = \varnothing$时导出了$|A \cup B| = |A| + |B|$，这样只证明了取等条件的一个方向，还需要证明$|A \cup B| = |A| + |B|$时有$A \cap B = \varnothing$成立才对。

知识点整理

- 集合，集合的相等，集合相等关系的性质：下设A, B, C为任意集合

$$\begin{aligned} A=B &\iff \forall x((x\in A)\to(x\in B))\wedge\forall x((x\in B)\to(x\in A))\\ A&=A\\ A=B&\iff B=A\\ (A=B)\wedge(B=C)&\implies(A=C)\end{aligned}$$

- 子集，真子集，集合的包含，包含关系的性质：下设A,B,C为任意集合

$$\begin{aligned} A\subseteq B&\iff\forall x((x\in A)\to(x\in B))\\ A\subsetneq B&\iff\forall x((x\in A)\to(x\in B))\wedge\exists x((x\in B)\wedge(x\notin A))\\ A&\subseteq A\\ (A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)&\implies A=B\\ (A\subseteq B)\wedge(B\subseteq C)&\implies A\subseteq C\\ \varnothing&\subseteq A\end{aligned}$$

- 幂集，积集（集合的笛卡尔积）：下设$A,B,A_i(i=1,2,\cdots,n)$为任意集合

$$\mathscr{P}(A)=\{B\mid B\subseteq A\}$$
$$|A|<+\infty\iff|\mathscr{P}(A)|=2^{|A|}$$
$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}$$
$$(|A|<+\infty)\wedge(|B|<+\infty)\implies|A\times B|=|A|\cdot|B|$$

- 集合的运算：下设A,B为任意集合，U为全集

$$A\cap B=\{x\mid(x\in A)\wedge(x\in B)\}$$
$$A\cap B=\{x\mid(x\in A)\vee(x\in B)\}$$
$$A-B=\{x\mid(x\in A)\wedge(x\notin B)\}$$
$$\overline{A}=\{x\mid x\notin A\}$$

- 集合运算的性质：下设A,B,C为任意集合，U为全集

$$A\cap B=B\cap A,A\cup B=B\cup A$$
$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C,A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$A\cap U=A,A\cup\varnothing=A$$
$$A\cap\overline{A}=\varnothing,A\cup\overline{A}=U$$

  - 注：这五条性质实际上说明集合代数$<\mathscr{P}(U),\cap,\cup,\text{-},\varnothing,U>$为一个布尔代数（第8章），正如线性空间的8条公理一样。
  - 五条性质的可以记为：交换性，结合性，相互分配性，单位元性，补元性。
- 集合运算与子集：下设A,B为任意集合

$$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow A\cap B=A$$

其它问题整理

- 本章是关于集合论的，所以相关的性质如集合的De·Morgan律等书上没有给出的并不太建议未经证明直接使用（尤其是题目需要你去证明它的时候），但是以后用到的时候基本上没有这些要求了，大家不必担心。
- 部分同学的证明过程中很多步骤**过于简略，跳步过多**，整个证明看起来就像是把题变着法抄了两遍就证明出来了

  节选一部分典型，如欲证明$\overline{\bigcap\limits_i A_i}\supseteq\bigcup\limits_i\overline{A_i}$：

$$\forall x\in\bigcup_i\overline{A_i}\text{都有}x\notin\bigcap_i A_i$$
$$\text{下用反证法，假设}x\notin\overline{\bigcap_i A_i}\text{则}x\in\bigcap_i A_i\text{，矛盾}$$

可以看到的是这段证明用第一行把要证的命题重新说了一遍，然后第二行做出反证的假设之后与经过转述的原命题“矛盾”（这是显然的，本来反证假设就是原命题不成立）。于是这一段证明相当于车轱辘话来回说，什么也没证明。

彩蛋

随便分享一点有意思的内容......结果篇幅已经要赶上正文了，大家如果有兴趣就看看，没兴趣的话写好作业也就行了233......

参考资料：戴牧民《公理集合论导引》

公理集合论

之所以写这个彩蛋，就是因为我们在判断$0 \neq \varnothing$时候，想当然的认为“集合”与“元素”是不能比较的，然而真的是这样吗？

基本定义

公理化是19世纪后期兴起的一种思潮，由Peano提出的自然数公理系统，命题演算以及谓词演算的公理化系统（大家将在数理逻辑课程上进一步了解）等引导，旨在用一个完整的，最小化的精简公理集作为基础，使用严格的推导获得所有结论，从而整合各式各样的数学对象，并尽可能地避免悖论。

为了解决朴素集合论不够严谨的叙述导致的一系列问题，我们提出了所谓公理集合论。公理集合论以“集合”作为全体研究对象，也就是说研究范围内只有“集合“这一种对象。而后面我们可以看到，只使用集合这一对象，就可以构筑出很多我们所熟知的数学对象。

为了严谨，公理集合论的基础就是符号以及公理，集合的概念也是由公理而刻画出来。此处有点像我们所讲的归纳定义，也就是通过最简单的情形以及一系列构造规则规定了合法的集合。而集合的公理化包含：

1. 论域，论域统辖的对象均被称为”集“，常用大写或小写的拉丁字母表示。
2. 符号，包括逻辑等号$=$；逻辑连接词$\wedge, \vee, \neg$（表示逻辑非），$\rightarrow, \leftrightarrow$；量词$\forall, \exists$；小，中，大等括号，一个非逻辑符号$\in$。其他符号皆以这些符号作为基础进行定义。尤其注意这里的$\in$符号只是一个普通的符号而已，尽管我们感性上可以理解其”属于“的含义，但是这里并未定义所谓”属于“的意义
3. 公理，包括
   - 存在公理或空集公理，表述为

     $$\begin{aligned}\text{存在公理}\quad &\exists x(x=x)\\ \text{空集公理}\quad &\exists y\forall x(x\notin y)\end{aligned}$$

     此公理描述了集合的基础
   - 外延公理，注意$\leftrightarrow$在逻辑上优先级最低

     $$\forall x\forall y(x=y)\leftrightarrow\forall t[(t\in x)\leftrightarrow(t\in y)]$$

     此公理说明集合被其元素所完全定义（我们沿用朴素集合论里的术语）
   - 配对公理 $\forall x\forall y\exists z[(t\in z)\leftrightarrow(t=x)\vee(t=y)]$，给出将元素打包成集合的方法，用$z=\{x,y\}$记。
   - 并公理 $\forall x\exists y\forall t[(t\in y)\leftrightarrow\exists z((z\in x)\wedge(t\in z))]$，将集合x中的所有元素的元素放入y中，即y是x所有元素的”并集“（虽然此处我们未给出并集的定义），用符号$y=\cup x$记。
   - 幂集公理 $\forall x\exists y[\forall z((z\in y)\leftrightarrow\forall t[(t\in z)\rightarrow(t\in x)])]$，将x的”子集”z全部放入y中，用$y=\mathscr{P}(x)$记。
   - 子集公理模式

     首先定义命题：

1. 对论域中的x, y，$x = y, x \in y$ 是命题
2. 若φ, ψ是命题，则$\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi, \forall x\varphi, \exists x\varphi$是命题
3. 除通过前两条规则有限次构造出的对象外，其余皆不是命题

设$\varphi(x)$为关于x的命题，x在其中有不受量词约束的出现，y不在其中，则有子集公理模式

$$\forall z \exists y \forall x[(x \in y) \leftrightarrow (x \in z \wedge \varphi(x))]$$

即y是z中有性质φ的元素构成，用$y = \{x \mid \varphi(x)\}$记

- 无限公理 $\exists A[(\varnothing \in A) \wedge ((x \in A) \rightarrow (x^+ \in A))]$，其中$x^+ = x \cup \{x\}$（使用配对公理以及并公理，这里为了简便先用了并的记号等），这一公理保证了无限集合的存在性，并且为归纳法奠定了基础，而满足$(\varnothing \in A) \wedge ((x \in A) \rightarrow (x^+ \in A))$的集合称为归纳集。
- 后面还有三条（或是不算选择公理的话两条）与接下来的话题关系不大，不再赘述，有兴趣的同学可以自己查找相关资料

首先可以看到由外延公理，由配对公理，并公理，幂集公理以及子集公理模式定义出的集合是唯一的。但是归纳集不是唯一的。

集合的关系与运算

有了这些公理，我们可以定义一些集合的关系与代数运算如下：

- 子集，真子集：对任意集A, B

$$(A \subseteq B) \leftrightarrow \forall x[(x \in A) \rightarrow (x \in B)]$$
$$(A \subset B) \leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (A \neq B)]$$

- 两个集合的并

  对任意集A, B，由配对公理，存在$z = \{A, B\}$，由并公理，存在集$C = \cup z$，且z, C，由外延公理可知是唯一的，所以定义$A \cup B =^{def} C$，有

$$(x \in A \cup B) \leftrightarrow [(x \in A) \vee (x \in B)]$$

- 两个集合的交

  对任意集A, B，取$\varphi(x) = (x \in B)$，由子集公理，

$$\forall z \exists C \forall x[(x \in C) \leftrightarrow (x \in z \wedge \varphi(x))]$$
$$\Rightarrow \exists C \forall x[(x \in C) \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)]$$

  且由外延公理，C集是唯一的，于是定义$A \cap B =^{def} C$，有

$$(x \in A \cap B) \leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \in B)]$$

- 两个集合的差

  对任意集A, B，取$\varphi(x) = (x \notin B)$，由子集公理，

$$\forall z \exists C \forall x[(x \in C) \leftrightarrow (x \in z \wedge \varphi(x))]$$
$$\Rightarrow \exists C \forall x[(x \in C) \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)]$$

  且由外延公理，C集是唯一的，于是定义$A - B =^{def} C$，有

$$(x \in A - B) \leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \notin B)]$$

- 集族的任意并和任意交（取交时要求$\mathscr{A}$非空）

$$\cup \mathscr{A} = \{x \mid \exists A \in \mathscr{A}, x \in A\}$$
$$\cap \mathscr{A} = \{x \mid \forall A \in \mathscr{A}, x \in A\}$$

- 取余集：当讨论的问题集中于某个集合的所有子集时，可称此集合X为全集，定义$\overline{A} = A' = X - A$
- 取幂集：由幂集公理直接得到A的幂集$\mathscr{P}(A)$，且有$(B \subseteq A) \leftrightarrow (B \in \mathscr{P}(A))$

于是也可以得到我们所学的运算律了。

序对

集合论中仍有一个重要的对象——序对，从序对的基础上可以得到笛卡尔积，关系，映射等诸多重要概念，那么我们的集合语言能否描述序对呢？

对于序对$< x, y >$，一个自然的尝试是通过集合的层次来区分这两个对象，如定义$< x, y >=^{def} \{x, \{y\}\}$，但是这样的定义是行不通的，比如

$$< \{\varnothing\}, \{\varnothing\} >= \{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\} = \{\{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}\} =< \{\{\varnothing\}\}, \varnothing >$$

这显然与我们想象中的序对定义不同，因为序对的相等必须在对应位置分别相等。

所以一种可行的定义是对于任意x, y，令$< x, y >=^{def} \{\{x\}, \{x, y\}\}$，由配对公理保证其存在性，由外延公理保证其唯一性。这种定义的合理性感兴趣的同学可以尝试证明。

自然数

进一步的问题是，仅仅用集合能否定义出我们从前了解到的初等数学的内容包括自然数等？答案是可以的，但是定义自然数之前，我们首先要知道什么是自然数？意大利数学家Peano在1889年提出自然数公理化系统：

> 设N是一个集，e是N中一个特别指定的元，S是N到N的映射（同学们之后会学习到相关概念），若$(N$,e,$S)$系统满足
>
> 1. $e \notin ran(S)$，即不存在x使得$S(x) = e$;
> 2. S为单射
> 3. $\forall E \subset N, \{(e \in E) \wedge ((n \in E) \rightarrow (S(n) \in E))\} \rightarrow (E = N)$
>
> 则$(N$,e,$S)$为一个自然数系统

明显看到我们司空见惯的自然数是符合上述三条公理的，令$e = 1, S(n) = n + 1$即可，可以看到上面定义中的第三条就是数学归纳原理，也就是说自然数必须满足归纳性。

那么用我们的集合语言如何构造出满足上述公理的系统呢？我们取$e = \varnothing, S(x) =^{def} x^+ =^{def} x \cup \{x\}$即可，而由于不使用无限公理的话任意有限次使用其它公理只能产生有限集合，所以提出无限公理保证一个无限集合的存在，而这个无限集合包含一个从空集开始无限次迭代应用后继函数x^+产生的所有集合组成的集合。

然而事情没有这么简单，无限公理只保证归纳集的存在，但是归纳集实际并不是唯一的，比如一个归纳集中可以包含两个从基本元由后继构造出的无限链条，这样的归纳集并不能满足自然数的第三条公理。所以我们要做一些操作来找到“最小化的归纳集”作为自然数集。

使用无限公理与子集公理，无限公理说明了归纳集A的存在，然后我们从其中这样选取元素，令$\varphi(x) = \forall E[E是归纳集 \rightarrow x \in E]$，然后使用子集公理，$\exists\omega\forall x[(x \in \omega) \leftrightarrow (x \in A \wedge \varphi(x))]$，即选出所有归纳集所共有的元素，由于归纳集定义了其中必须有空集，所以所有归纳集都有从空集开始无限次迭代应用后继函数x^+产生的所有集合。这个集合ω，有外延公理保证了唯一性，便定义为自然数集，并且为方便使用，简记为$0 = \varnothing, 1 = 0^+ = \varnothing^+ = \{\varnothing\}, \ldots$

至此我们简单了解了公理集合论的基础，说了这么多，我只是想表达$0 = \varnothing$这种事并不是不可能的嘛^_^