1 物质中的磁场和磁性材料

1.1 习题5.4

(1)

$$N=2nN_{A}=2rac{m}{M}N_{A}=2rac{
ho V}{M}N_{A}=2rac{
ho\pi r^{2}l}{M}N_{A}=1.59 imes10^{24}$$

(2)

轨道磁矩 $\mu_l = 9.27 \times 10^{-24} (A \cdot m^2)$,则

$$\mu=N\mu_l=14.7(\mathrm{A}{\cdot}\mathrm{m}^2)$$

(3)

应满足

$$\mu = IS$$

得到

$$I=1.87 imes 10^5 \mathrm{A}$$

(4)

$$B=\mu_0 n I_a S_a=\mu_0 rac{N}{V} rac{IS}{N}=rac{\mu_0 I}{I}=1.96 \mathrm{T}$$

1.2 习题5.6

导体球的电势为U,应满足

$$U=rac{Q}{4\piarepsilon_0 R}$$

于是可以得到面电荷密度

$$\sigma = rac{Q}{4\pi R^2} = rac{arepsilon_0 U}{R}$$

旋转周期

$$T=rac{2\pi}{\omega}$$

对于一个半径为r的、高度为Rd θ 的环带,可得等效电流为

$$I=rac{2\pi r\sigma R\mathrm{d} heta}{T}=Rarepsilon_0 U\omega\sin heta\mathrm{d} heta$$

则磁矩为

$$\mu = \int_0^\pi IS = \int_0^\pi \pi R^3 arepsilon_0 U \omega \sin^3 heta \mathrm{d} heta = rac{4}{3} \pi R^3 arepsilon_0 U \omega$$

1.3 习题5.10

由B在界面上的折射定律,有

$$\frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}} = \frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1}$$

得到

$$heta_1 = rctan(rac{\mu_{r1} an heta_2}{\mu_{r2}}) = 0.09\degree$$

1.4 习题5.13

(1)

由电偶极子的规律可外推磁偶极子的规律,即在 (r,ϕ) 处产生的磁场强度

$$H_{//}=krac{2p\sin\phi}{r^3}$$

$$H_{\perp} = -krac{p\cos\phi}{r^3}$$
(取大小)

则

$$aneta = rac{H_{//}}{H_{\perp}} = 2 an\phi$$

(注: H和B是同向的,有关系 $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$)

(2)

由(1)

$$H_N=krac{2p}{r^3}$$

$$H_E=krac{p}{r^3}$$

$$H_N=2H_E$$

1.5 习题5.14

(1)

取一段长为d的包含上板的通路L,由环路定理,有

$$\int_{(L)} H \mathrm{d}l = \sum_i I_i$$

即

$$\int_0^d H_{in}\mathrm{d}l + \int_0^d rac{rac{1}{2}\mu_0 i_0}{\mu_0}\mathrm{d}l = i_0 d.$$

得到

$$H_{in}=rac{1}{2}i_0$$

因此

$$B_{in,up}=rac{1}{2}\mu_{r1}\mu_0i_0$$

同理,对于下半部分,有

$$B_{in,down}=rac{1}{2}\mu_{r2}\mu_0 i_0$$

(2)

上半部分磁化强度

$$M_1=(\mu_{r1}-1)H_{in}=rac{1}{2}(\mu_{r1}-1)i_0$$

下半部分磁化强度

$$M_2=(\mu_{r2}-1)H_{in}=rac{1}{2}(\mu_{r2}-1)i_0$$

于是在上界面

$$i_1=M_1=rac{1}{2}(\mu_{r1}-1)i_0$$

中间界面

$$i_2 = |M_1 - M_2| = rac{1}{2} |\mu_{r1} - \mu_{r2}| i_0$$

下界面

$$i_3=M_2=rac{1}{2}(\mu_{r2}-1)i_0$$

1.6 习题5.16

电流密度为jdl的薄平板,在一侧产生的磁感应强度为dB,则

$$2\mathrm{d}Bl = \mu_0 l j \mathrm{d}l$$

故(以方向垂直纸面向外为正方向)

$$B=\int_{-rac{b}{2}}^xrac{\mu_0 j\mathrm{d}l}{2}+\int_{rac{b}{2}}^xrac{\mu_0 j\mathrm{d}l}{2}=\mu_0 jx$$

围绕左边取一个极小的通路L,长度为d,则

$$H_1d+rac{B_x}{\mu_0}d=j(x+rac{b}{2})d$$

得到

$$H_1=rac{b}{2}j$$

于是

$$B_1=rac{\mu_0\mu_{r1}bj}{2}$$

同理,右侧为

$$B_2=-rac{\mu_0\mu_{r2}bj}{2}$$

1.7 习题5.20

设中间的磁通为 Φ ,则两条支路的磁通为 $\Phi/2$,一条支路上的磁阻为

$$R_{m1}=rac{L}{\mu_r\mu_0S}$$

中间干路上的磁阻为

$$R_{m2}=rac{l}{\mu_r\mu_0S}+rac{l_0}{\mu_0S}$$

则并联部分的总磁阻为

$$R_m=rac{R_{m1}}{2}=rac{L}{2\mu_r\mu_0 S}$$

由磁路定理

$$NI = \Phi(R_{m2} + R_m)$$

即

$$\Phi=rac{NI}{rac{l}{\mu_r\mu_0S}+rac{l_0}{\mu_0S}+rac{L}{2\mu_r\mu_0S}}$$

气隙部分的磁通

$$\Phi = BS$$

故

$$B = rac{NI}{rac{l}{\mu_r \mu_0} + rac{l_0}{\mu_0} + rac{L}{2\mu_r \mu_0}}$$

代入题给数据得到

$$NI=1.2 imes10^6\mathrm{A}$$

1.8 习题5.21

研究左侧, 由环路定理得

$$H \approx nI$$

则

$$M = (\mu_r - 1)H$$

这个磁化强度产生的极化面磁荷为

$$\sigma=\mu_0 M$$

衔铁感应出等量负号面磁荷,由于两平面非常接近,可近似看作无限大平面,因此磁场强 度

$$H'=rac{\sigma}{2\mu_0} imes 2=M$$

另一侧同理,于是产生的磁力

$$F = 2H'\sigma S = 3979N$$

2 电磁感应与电场的能量

2.1 习题6.3

(1)

由安培环路定理, 距离中心导线为r的磁场大小为

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

于是

$$B = rac{\mu_0 I_0 \sin \omega t}{2\pi r}$$

磁通量

$$\Phi = \int_a^b B l \mathrm{d}r = rac{\mu_0 I_0 l \sin \omega t}{2\pi} \mathrm{ln}(rac{b}{a}).$$

因此感应电动势

$$arepsilon = -rac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -rac{\mu_0 I_0 l \omega \ln(rac{b}{a})}{2\pi} \mathrm{cos}\, \omega t$$

(2)

线圈在t时刻的位移为

$$\Delta x = vt$$

因此磁通量为

$$\Phi = \int_{a+\Delta x}^{b+\Delta x} B l \mathrm{d}r = rac{\mu_0 I_0 l \sin \omega t}{2\pi} \mathrm{ln}(rac{b+vt}{a+vt})$$

因此感应电动势

$$arepsilon = -rac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -rac{\mu_0 I_0 l}{2\pi} igg[\omega\cos\omega t \lnigg(rac{b+vt}{a+vt}igg) + \sin\omega t \cdot rac{v(a-b)}{(a+vt)(b+vt)}igg]$$

记(2)中电动势为E,则电流为

$$I = \frac{E}{R}$$

两处与直导线平行的线框受到安培力, 所加的力与其等大反向, 这两处磁场为

$$B_l = rac{\mu_0 I_0 \sin \omega t}{2\pi (a+vt)}$$

$$B_r = rac{\mu_0 I_0 \sin \omega t}{2\pi (b+vt)}$$

故

$$F = (B_l - B_r)Il = rac{\mu_0^2 I_0^2 l^2 \sin \omega t}{4\pi^2 R} \left[\omega \cos \omega t \ln \left(rac{b+vt}{a+vt}
ight) + \sin \omega t \cdot rac{v(a-b)}{(a+vt)(b+vt)}
ight] \left[rac{b-a}{(a+vt)(b+vt)}
ight]$$

2.2 习题6.4

利用磁荷的观点,该磁体产生的磁场强度为

$$ec{H}=-rac{\overrightarrow{p_m}}{4\pi\mu_0r^3}+rac{3\overrightarrow{p_m}\cdot ec{r}}{4\pi\mu_0r^5}ec{r}$$

其中

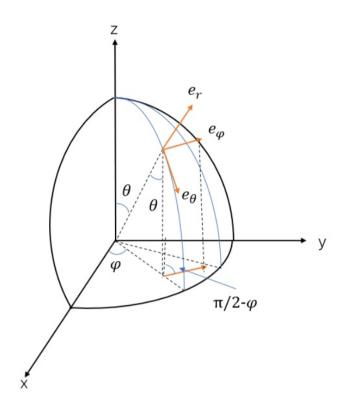
$$ec{H}=rac{ec{B}}{\mu_0}, \overrightarrow{p_m}=\mu_0ec{\mu}$$

则磁场强度为

$$ec{B} = -rac{\mu_0ec{\mu}}{4\pi r^3} + rac{3\mu_0ec{\mu}\cdotec{r}}{4\pi r^5}ec{r}$$

其中

$$\vec{\mu} = \mu \mathbf{e_z} = \mu (\mathbf{e_r} \cos \theta - \mathbf{e_{\theta}} \sin \theta)$$



采用球坐标,则

$$ec{B} = rac{\mu_0 \mu (\mathbf{e}_ heta \sin heta + 2 \mathbf{e_r} \cos heta)}{4 \pi r^3}$$

圆环上点P为考察对象, 坐标为 $(R,\theta,\omega t)$, 其速度为

$$\mathbf{v} = \omega R \sin heta \mathbf{e}_{arphi}$$

这点线元

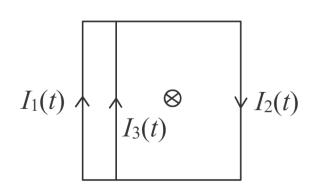
$$d\mathbf{l} = Rd\theta \mathbf{e}_{\theta}$$

于是电动势

$$arepsilon = \int_0^{rac{\pi}{2}} (\mathbf{v} imes \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = rac{\mu_0 \mu \omega}{4\pi R}$$

2.3 习题6.8

设磁场以B = B(t)方式于 $t = t_0$ 时刻减小为0,且电流关系如下:



则对于左边回路, 感应电动势为

$$arepsilon_1 = -rac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -rac{a^2}{4}B'(t) = I_1(t)
horac{rac{3}{2}a}{S} - I_3(t)
horac{a}{S}$$

对于右边回路, 感应电动势为

$$arepsilon_2 = -rac{3a^2}{4}B'(t) = I_3(t)
horac{a}{S} + I_2(t)
horac{rac{5}{2}a}{S}$$

而

$$I_2(t) = I_3(t) + I_1(t)$$

因此

$$I_3(t)=-rac{2aSB'(t)}{31
ho}$$

安培力

$$F = B(t)I_3(t)a = -rac{a^2S[B^2(t)]'}{31
ho}$$

冲量定理

$$I = \int_0^{t_0} F \mathrm{d}t = -\int_0^{t_0} rac{a^2 S}{31
ho} \mathrm{d}[B^2(t)] = rac{a^2 S B_0^2}{31
ho} = m v$$

故

$$v=rac{a^2SB_0^2}{31m
ho}$$

2.4 习题6.9

(1)

达到收尾速度时,安培力与重力平衡,此时速度为 v_T ,则感应电动势

$$arepsilon = Blv_T$$

安培力为

$$F=BIl=rac{B^2l^2v_T}{R}=mg$$

故

$$v_T = rac{mgR}{B^2 l^2}$$

(2)

作变换

$$B o B \sin heta$$

故

$$v_T = rac{mgR}{B^2 l^2 \sin^2 heta}$$

2.5 习题6.11

(1)

磁通量

$$\Phi = NBS\sin\omega t = \pi a^2 NB\sin\omega t$$

则

$$arepsilon = -rac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\pi a^2 NB\omega\cos\omega t$$

由RL电路的电路方程,有

$$arepsilon = IR + Lrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

这是一个一阶微分方程, 其解为

$$I = -rac{\pi a^2 N B \omega}{L^2 \omega^2 + R^2} (R\cos \omega t + L \omega \sin \omega t) + C \mathrm{e}^{-rac{R}{L}t}$$

由于自感的存在,当t=0时,I=0,则

$$C=rac{R\pi a^2NB\omega}{L^2\omega^2+R^2}$$

即

$$I = rac{\pi a^2 N B \omega}{L^2 \omega^2 + R^2} (R \mathrm{e}^{-rac{R}{L}t} - R \cos \omega t - L \omega \sin \omega t)$$

(2)

力矩

$$ec{L} = ec{\mu} imes ec{B} = ISec{n} imes B\overrightarrow{e_x} = ISB\sin < ec{n}, \overrightarrow{e_x} > = ISB\cos \omega t$$

2.6 习题6.12

航天飞机,满足

$$mg=mrac{v^2}{R}$$

电动势

$$\varepsilon = Blv = 288 \mathrm{V}$$

2.7 习题6.14

在内部,感应电场强度满足

$$E_1 \cdot 2\pi r = -k \cdot \pi r^2$$

则

$$E_1=-rac{kr}{2}$$

在外部,感应电场强度满足

$$E_2 \cdot 2\pi r = -k \cdot \pi R^2$$

则

$$E_2=-rac{kR^2}{2r}$$

故对ac段,有

$$U_{ac}=\int_0^R E_1\cos heta \mathrm{d}l=\int_0^R (-rac{1}{2}k)r\cos heta \mathrm{d}l=-rac{k}{2}hl=-rac{\sqrt{3}kR^2}{4}$$

对cb段,有

$$U_{cb} = \int_0^R E_2 \cos heta \mathrm{d} l = -rac{kR^2}{2} \int_0^R rac{h}{h^2 + (l + rac{R}{2})^2} \mathrm{d} l = -rac{k\pi R^2}{12}$$

所以

$$U_{ab}=U_{ac}+U_{cb}=-kR^2\left(rac{\sqrt{3}}{4}+rac{\pi}{12}
ight)$$

2.8 习题6.17

电路方程

$$Blx' = IR + I'L = I'L$$

运动方程

$$F - BIl = mx''$$

联立得到二阶微分方程

$$mx''+rac{B^2l^2}{L}x=F$$

解得

$$x=C_1\coseta t+C_2\sineta t+rac{FL}{B^2l^2}$$

初始条件

$$x(0) = 0, v(0) = x'(0) = 0$$

解得

$$C_1 = -rac{FL}{B^2 l^2}, C_2 = 0$$

结果

$$x(t) = rac{FL}{B^2 l^2} (1 - \cos rac{Bl}{\sqrt{mL}} t)$$

能量转换过程:外力先对棒做正功,电感产生反电动势,机械能转化为电能;之后电能转 化为机械能。如此周期循环,使得棒做周期运动。

2.9 习题6.19

离导线距离为r处的磁场大小为

$$B = rac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

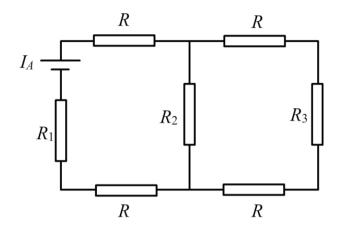
方向垂直纸面向里(导线右侧)。

感应电动势

$$arepsilon = \int_{b}^{b+L} (\mathbf{v} imes \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_{b}^{b+L} \omega(l-b) \cdot rac{\mu_0 I}{2\pi l} \mathrm{d}l = rac{\mu_0 \omega I}{2\pi} (L-b \ln rac{b+L}{b})$$

2.10 习题6.24

将变压器看成磁路,假设从A处通电流 I_A ,则等效磁路图为



磁动势

$$arepsilon = N_A I_A$$

各磁阻

$$egin{aligned} R_1 &= rac{h}{\mu_0 \mu_r S_A} = 1591.5 \mathrm{H}^{-1} := r \ R_2 &= rac{h}{\mu_0 \mu_r S_B} = 5 r \ R_3 &= rac{h}{\mu_0 \mu_r S_C} = 10 r \ R &= rac{w}{\mu_0 \mu_r S_w} = 5 r \end{aligned}$$

 $R_2 + R_3 + 2R$ 部分的磁阻为

$$R_4 = \left(rac{1}{R_2} + rac{1}{R_3 + 2R}
ight)^{-1} = 4r$$

故流经 R_1 的磁通量为

$$\Phi_1 = rac{N_A I_A}{R_1 + 2R + R_4} = rac{N_A I_A}{15r}$$

又有

因此

$$\Phi_2=rac{4}{5}\Phi_1 \ \Phi_3=rac{1}{5}\Phi_1$$

由互感的定义

$$M_{AC} = rac{\Psi_3}{I_A} = rac{N_C \Phi_3}{I_A} = rac{N_A N_C}{75 r} = 2.1 {
m H}$$
 $M_{AB} = rac{\Psi_2}{I_A} = rac{N_B \Phi_2}{I_A} = rac{4 N_A N_B}{75 r} = 16.8 {
m H}$

2.11 习题6.31

$$egin{aligned} L_{ ext{IIII}} &= L_1 + L_2 + 2M \ L_{ ext{IIII}} &= L_1 + L_2 - 2M \ L_{ ext{IIII}} &= rac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \ L_{ ext{IIII}} &= rac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} \end{aligned}$$

结果是显然的。

2.12 习题6.34

感应电动势

$$arepsilon = -rac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

电路方程

$$\varepsilon = IR + I'L = I'L$$

故

$$-\Phi' = I'L \Rightarrow \Phi + IL = \text{Const}$$

(1)

$$(\Phi + IL)_1 = (\Phi + IL)_2 \Rightarrow B\pi R^2 = IL$$

故

$$I = rac{B\pi R^2}{L}$$

$$A = rac{1}{2}LI^2 = rac{B^2\pi^2R^4}{2L}$$