

# 第13章 反常积分和 含参变量的积分

段雅丽

中国科学技术大学数学科学学院

ylduan01@ustc.edu.cn

## 目录

§13.1 反常积分

§13.2 反常多重积分\*

§13.3 含参变量的常义积分

§13.4 含参变量的反常积分

§13.5 Euler积分

# 反常积分和含参变量的积分

- 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$  的弧长为

$$l = 4b \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt,$$

- $I(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt$  称为第二类椭圆积分, 它不能用初等函数表示, 这就是一个含有参变量  $k$  的积分.
- 含参变量积分也是构造非初等函数的一种方法.
- 含参变量积分理论与函数项级数理论有许多相似之处.

## §13.1 反常积分

反常积分  $\left\{ \begin{array}{l} \text{无穷区间上函数的积分, 即} \textbf{无穷积分} \\ \text{有限区间是无界函数的积分, 即} \textbf{瑕积分} \end{array} \right.$

### §13.1.1 无穷积分的收敛性

设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  的任何闭子区间上 Riemann 可积, 则  $f(x)$  在无穷区间  $[a, +\infty)$  上 **无穷积分** 定义为

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b)$$

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛} \iff \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) \text{ 有有限极限}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 收敛} \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \text{ 有有限极限}$$

### 无穷积分收敛的判别法则

#### ● 定理1: 柯西(Cauchy)收敛准则

无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛的充分必要条件是: 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists B = B(\varepsilon) > a$ , 使得当  $b_1, b_2 > B$  时, 有

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

若  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$  收敛, 则称  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  **绝对收敛**.

若  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛, 但  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$  发散, 则称  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  **条件收敛**.

### 无穷积分收敛的判别法则

#### ● 定理2: 绝对收敛蕴含收敛

设积分  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$  收敛, 则无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛.

**注:** 在对于常义积分(即有限区间上的积分), 这个结论并不成立, 例如

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数;} \\ -1, & \text{当 } x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

该函数在  $[0, 1]$  区间上绝对可积, 但是本身不可积.

### 无穷积分收敛的判别法则

#### ● 定理3: 有界判别法

设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上非负, 则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的充分必要条件是:  $\exists M > 0$ , 使得对  $\forall b > a$ , 都有 $\int_a^b f(x)dx < M$ .

### 无穷积分收敛的判别法则

#### ● 定理4: 比较判别法及其极限形式

(1) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 对充分大的 $x$ 满足不等式:  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ , 那么:

(i) 若  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  收敛, 则  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  也收敛;

(ii) 若  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  发散, 则  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  也发散.

(2) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上非负, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ , 那么:

(i) 当  $0 < k < +\infty$  时, 积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  和  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  同敛散;

(ii) 当  $k = 0$ , 且积分  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  收敛时,  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  也收敛;

(iii) 当  $k = +\infty$ , 且  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  发散时,  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  也发散.



## §13.1 反常积分

### Example

考察积分  $\int_1^{+\infty} x^a e^{-x} dx$  的敛散性, 其中  $a$  为实常数.

解: 因为对于任意固定的实数  $a$ , 有极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a e^{-x/2} = 0.$$

故对充分大的  $x$ , 有不等式

$$x^a e^{-x} = x^a e^{-x/2} e^{-x/2} < e^{-x/2}.$$

而积分  $\int_1^{+\infty} e^{-x/2} dx$  收敛, 由比较判别法可知, 积分  $\int_1^{+\infty} x^a e^{-x} dx$  收敛.

## §13.1 反常积分

### Example

考察积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} dx$  的敛散性.

解: 因为当  $x \rightarrow +\infty$  时, 有等价无穷小量关系

$$\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} \sim \frac{\pi}{2x^3}.$$

而积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^3} dx$  收敛, 由比较判别法的极限形式可知, 原积分收敛.

## §13.1 反常积分

### Lemma (第二积分中值定理)

设函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a, b]$ 上可积.

(1) 如果 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上非负单调减, 那么存在 $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)dx.$$

(2) 如果 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上非负单调增, 那么存在 $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b) \int_{\xi}^b f(x)dx;$$

(3) 如果 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调, 那么存在 $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x)dx.$$

## §13.1 反常积分

### §13.1.2 无穷区间上积分收敛性的一般判别法

#### ● 定理5: 狄利克雷(Dirichlet)判别法

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 定义在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上, 且满足:

- (1) 存在 $M > 0$ , 使得对任意 $b \in [a, +\infty)$ ,  $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M$ ;
- (2)  $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ .

那么积分  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$  收敛.

#### ● 定理6: 阿贝尔(Abel)判别法

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 定义在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上, 且满足:

- (1) 积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛;
- (2)  $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调有界.

那么积分  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$  收敛.

## §13.1 反常积分

### Example

考察积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad \text{和} \quad \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$$

的收敛性与绝对收敛性, 其中  $a > 0$ ,  $p > 0$ .

## §13.1 反常积分

解: 当  $x \geq a > 0$  时, 有  $\left| \frac{\sin x}{x^p} \right|, \left| \frac{\cos x}{x^p} \right| \leq \frac{1}{x^p}$ , 那么  $p > 1$  时, 原积分都是绝对收敛的.

当  $0 < p \leq 1$  时, 对任意  $b > a$ , 都有

$$\left| \int_a^b \sin x dx \right| = |\cos a - \cos b|, \quad \left| \int_a^b \cos x dx \right| = |\sin a - \sin b| \leq 2.$$

由Dirchlet判别法可知, 上面两个积分都收敛. 或者由分部积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx = -\frac{\cos x}{x^p} \Big|_a^{+\infty} - p \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}} dx = \frac{\cos a}{a^p} - p \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}} dx$$

$1 + p > 1$ , 上式右端绝对收敛, 积分  $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$  收敛,

同理  $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$  也收敛.

## §13.1 反常积分

另一方面, 利用三角函数的性质,

有  $|\sin x| \geq \sin^2 x$  和  $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ , 于是

$$\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx \geq \int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} dx = \int_a^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x^p} dx.$$

当  $0 < p \leq 1$  时, 积分  $\int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^p} dx$  收敛, 而积分  $\int_a^{+\infty} \frac{1}{2x^p} dx$  发散, 所以积分  $\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} dx$  发散.

再由比较判别法知, 积分  $\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx$  发散, 从而积

分  $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$  条件收敛. 类似可得, 积分  $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$  条件收敛.

### 注记

- ① 以上所得到的结论以及收敛性的各种判别法都可以类推到无穷积分  $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ , 或者无穷积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ .
- ② 无穷积分内容与无穷级数的相应部分是平行的, 很多定理几乎完全一样. 因为它们都是以有限逼近无限的极限过程, 只不过无穷积分是函数的极限, 而无穷级数是数列的极限罢了. 但是必须注意, 两者还是有差别的. 例如, 级数收敛的必要条件是当  $n \rightarrow \infty$  时通项趋于零; 而无穷积分收敛时, 当  $x \rightarrow +\infty$  时其被积函数可以不趋于零, 甚至可以是无界的, 如

$$\int_a^{+\infty} \sin x^2 dx \stackrel{x^2=t}{=} \frac{1}{2} \int_{a^2}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

条件收敛, 但  $x \rightarrow +\infty$  时,  $\sin x^2$  极限不存在.



## §13.1 反常积分

### §13.1.3 无界函数积分的收敛判别法

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上有定义, 且以 $a$ 点为瑕点, 即当 $x \rightarrow a^+$ 时,  $f(x)$ 无界. **瑕积分**定义为

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

在上式右端的积分中作变量代换 $x = a + \frac{1}{y}$ , 则有

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\frac{1}{b-a}}^{1/\varepsilon} f\left(a + \frac{1}{y}\right) \frac{dy}{y^2} = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(a + \frac{1}{y}\right) \frac{dy}{y^2}.$$

**变量代换将瑕积分转化为无穷积分**

这样, 对无穷积分所建立的整个理论, 可以完全平移到瑕积分上.

### §13.1.3 无界函数积分的收敛判别法

- **定理1: 柯西(Cauchy)收敛准则**

设 $a$ 为 $f(x)$ 的瑕点, 则积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛的充分必要条件是: 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , 只要  $0 < \delta' < \delta, 0 < \delta'' < \delta$ , 就有

$$\left| \int_{a+\delta'}^{a+\delta''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

- **定理2: 绝对收敛蕴含收敛**

设 $a$ 为 $f(x)$ 的瑕点, 且积分 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛, 则积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.

## §13.1.3 无界函数积分的收敛判别法

### ● 定理3: 比较判别法及其极限形式

(1) 设 $a$ 为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的瑕点, 且对充分接近 $a$ 的 $x(x > a)$ 满足不等式:  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ , 那么:

(i) 若  $\int_a^b g(x)dx$  收敛, 则  $\int_a^b f(x)dx$  也收敛;

(ii) 若  $\int_a^b f(x)dx$  发散, 则  $\int_a^b g(x)dx$  也发散.

(2) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(a, b]$ 上非负,  $a$ 为它们的瑕点, 且有  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ , 那么:

(i) 当  $0 < k < +\infty$  时, 积分  $\int_a^b f(x)dx$  和  $\int_a^b g(x)dx$  同敛散;

(ii) 当  $k = 0$ , 且积分  $\int_a^b g(x)dx$  收敛时,  $\int_a^b f(x)dx$  也收敛;

(iii) 当  $k = +\infty$ , 且积分  $\int_a^b g(x)dx$  发散时,  $\int_a^b f(x)dx$  也发散.

### Example

研究椭圆积分的敛散性

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (0 < k < 1).$$

解：积分上限  $x = 1$  为瑕点，由于

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \sim \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}} \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad (x \rightarrow 1^-)$$

且  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$  收敛，由比较判别法椭圆积分收敛。

### 几个常用积分的敛散性

(1)  $p$ -积分  $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx (a > 0)$ , 当  $p > 1$  时收敛; 当  $p \leq 1$  时发散.

(2)  $p$ -积分  $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx = \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx \quad (a < b)$ ,  
当  $p < 1$  时收敛; 当  $p \geq 1$  时发散.

(3)  $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$  和  $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \quad (a > 0)$ , 当  $0 < p \leq 1$  时条件收敛; 当  $p > 1$  时绝对收敛; 当  $p \leq 0$  时发散.

### Example

判断下列广义积分的敛散性.

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$$

(1) 因

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} = \infty,$$

故  $x = 1$  为瑕点, 并有

$$\int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} dx = \int_1^2 \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} dx + \int_2^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

当  $x \rightarrow 1^+$  时,  $\frac{x \ln x}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \sim \frac{1}{2\sqrt{2}(x-1)}$ , 而  $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}$  收敛,

故  $\int_1^2 \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} dx$  收敛.

又因

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0,$$

故当 $x$ 充分大时有 $\ln x < \sqrt{x}$ , 以及

$$0 \leqslant \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{x\sqrt{x}}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

而

$$\frac{x\sqrt{x}}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \quad (x \rightarrow +\infty),$$

由 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ 收敛, 知 $\int_2^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} dx$ 收敛, 故原积分收敛.



(2) 由于

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\alpha}(1+x)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1-\alpha}(1+x)}.$$

当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $\frac{1}{x^{1-\alpha}(1+x)} \sim \frac{1}{x^{1-\alpha}}$ , 而  $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\alpha}}$  当且仅

当  $1-\alpha < 1$ , 即  $\alpha > 0$  时收敛, 故积分  $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\alpha}(1+x)}$  当且仅

当  $\alpha > 0$  时收敛.

当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $\frac{1}{x^{1-\alpha}(1+x)} \sim \frac{1}{x^{2-\alpha}}$ , 而  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2-\alpha}}$  当且仅

当  $2-\alpha > 1$ , 即  $\alpha < 1$  时收敛, 故积分  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1-\alpha}(1+x)}$  当且仅

当  $\alpha < 1$  时收敛.

综上, 当且仅当  $0 < \alpha < 1$  时原积分收敛.

## §13.1 反常积分

### Example

研究下列积分的条件收敛性与绝对收敛性.

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2+1}} dx$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x\sqrt{x}} dx$$

## §13.1 反常积分

(1)  $x = 0$  为瑕点, 故

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2+1}} dx = \int_0^1 \frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2+1}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2+1}} dx.$$

当  $x \rightarrow 0^+$  时,

$$\left| \frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2+1}} \right| \leq \left| \frac{1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2+1}} \right| \sim \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

又  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  收敛, 故  $\int_0^1 \frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2+1}} dx$  绝对收敛.

当  $x \rightarrow +\infty$  时,

$$\left| \frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2+1}} \right| \leq \left| \frac{1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2+1}} \right| \sim \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}}.$$

又  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}} dx$  收敛, 故  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2+1}} dx$  绝对收敛.

所以原积分绝对收敛.

## §13.1 反常积分

(2) 令  $\frac{1}{x} = t$ , 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x\sqrt{x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

注意对于右边的积分, 0不是瑕点,  $\int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$  是黎曼积分.

对  $\forall A > 1$ ,  $\int_1^A \sin t dt$  有界,  $\frac{1}{\sqrt{t}}$  在  $[1, +\infty)$  单调减且

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} = 0$ , 故由狄利克雷判别法, 积分  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$  收敛. 但

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}} dt > \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \left( \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt - \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{\sqrt{t}} dt \right).$$

由  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$  发散及  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{\sqrt{t}} dt$  收敛, 知  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{t}} dt$  发散,

所以  $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}} dt$  发散, 故原积分条件收敛.

## 目录

§13.1 反常积分

§13.2 反常多重积分\*

§13.3 含参变量的常义积分

§13.4 含参变量的反常积分

§13.5 Euler积分

## §13.3 含参变量的常义积分

### §13.3.1 含参变量常义积分及其性质

#### ● 含参变量常义积分的定义

设二元函数  $f(x, u)$  在区间  $[a, b] \times [\alpha, \beta]$  上连续, 对于任给定的  $u \in [\alpha, \beta]$ , 函数  $f(x, u)$  对变量  $x$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积, 这时称积分

$$\int_a^b f(x, u) dx$$

是含参变量  $u$  的常义积分. 它定义了一个函数

$$u \mapsto \varphi(u) = \int_a^b f(x, u) dx.$$

本节主要讨论含参变量常义积分的连续性、可微性和可积性.

## §13.3 含参变量的常义积分

### Theorem (连续性)

设二元函数  $f(x, u)$  在矩形区域  $I = [a, b] \times [\alpha, \beta]$  上连续, 则函数  $\varphi(u) = \int_a^b f(x, u)dx$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续, 即对任意  $u_0 \in [\alpha, \beta]$ , 有

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \int_a^b f(x, u)dx = \int_a^b f(x, u_0)dx = \int_a^b \lim_{u \rightarrow u_0} f(x, u)dx,$$

即可交换极限运算与积分运算的顺序, 或在积分号下求极限.

## §13.3 含参变量的常义积分

### Example

求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + (1 + \frac{x}{n})^n}$ .

解: 设  $f(x, u) = \begin{cases} \frac{1}{(1+ux)^{\frac{1}{u}}}, & u \neq 0 \\ \frac{1}{1+e^x}, & u = 0 \end{cases}, I = [0, 1]^2,$

则  $f(x, u) \in C(I)$ , 令  $\varphi(u) = \int_0^1 f(x, u) dx, u \in [0, 1]$ . 由含参变量常义积分的连续性,  $\varphi(u)$  在  $[0, 1]$  上连续, 则在  $u = 0$  处右连续, 即

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0^+} \varphi(u) &= \varphi(0) = \int_0^1 f(x, 0) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1 + e^x} \\ &= \int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x(1 + e^x)} = \ln \frac{2e}{e + 1}. \end{aligned}$$



## §13.3 含参变量的常义积分

令  $u = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbf{Z}^+$ , 则  $n \rightarrow \infty$  时,  $u \rightarrow 0^+$ , 从而

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + (1 + \frac{x}{n})^n} &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{dx}{(1 + ux)^{\frac{1}{u}}} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \int_0^1 f(x, u) dx = \lim_{u \rightarrow 0^+} \varphi(u) = \ln \frac{2e}{e+1}.\end{aligned}$$

**注记:** 此题将数列极限转化为含参变量积分函数的极限, 利用其连续性求得极限.

## §13.3 含参变量的常义积分

### Example

已知  $F(\alpha) = \int_{-1}^1 e^{\sqrt{x^2+\alpha^2}} dx$ , 求  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} F(\alpha)$ .

解: 由含参变量常义积分的连续性, 知  $F(\alpha)$  在  $\alpha = 0$  连续, 故

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} F(\alpha) = F(0) = \int_{-1}^1 e^{\sqrt{x^2}} dx = 2 \int_0^1 e^x dx = 2(e - 1).$$

## §13.3 含参变量的常义积分

### Example

设  $f(x)$  是区间  $[0, 1]$  上的连续函数, 讨论函数

$$F(t) = \int_0^1 \frac{tf(x)}{x^2 + t^2} dx$$

的连续性.

## §13.3 含参变量的常义积分

解：对每一个固定的  $t \in \mathbb{R}$ , 二元函数

$$h(x, t) = \frac{tf(x)}{x^2 + t^2}$$

都是  $x$  连续函数, 因此,  $F(t)$  在整个实轴有定义. 设  $0 < \alpha < \beta$ , 因  $h(x, t)$  在  $[0, 1] \times [\alpha, \beta]$  上连续, 所以  $F(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  连续, 从而  $F(t)$  在  $t \neq 0$  处都是连续的. 对于  $0 < t < 1$ , 有

$$\int_0^1 \frac{tf(x)}{x^2 + t^2} dx = \int_0^{t^{1/3}} \frac{tf(x)}{x^2 + t^2} dx + \int_{t^{1/3}}^1 \frac{tf(x)}{x^2 + t^2} dx.$$

因  $f$  在  $[0, 1]$  上连续, 可设  $|f(x)| \leq M$ . 因而

$$\left| \int_{t^{1/3}}^1 \frac{tf(x)}{x^2 + t^2} dx \right| \leq \frac{t}{t^{2/3} + t^2} M = \frac{t^{1/3}}{1 + t^{4/3}} M \rightarrow 0, \quad (t \rightarrow 0^+).$$

## §13.3 含参变量的常义积分

根据第一积分中值定理的推广, 存在  $\xi \in (0, t^{1/3})$  使得

$$\begin{aligned}\int_0^{t^{1/3}} \frac{tf(x)}{x^2+t^2} dx &= f(\xi) \int_0^{t^{1/3}} \frac{t}{x^2+t^2} dx \\ &= f(\xi) \arctan \frac{x}{t} \Big|_{x=0}^{x=t^{1/3}} = f(\xi) \arctan \frac{1}{t^{2/3}}.\end{aligned}$$

因而

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^{t^{1/3}} \frac{tf(x)}{x^2+t^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

于是

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{tf(x)}{x^2+t^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} F(t) = \lim_{u \rightarrow 0^+} F(-u) = - \lim_{u \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{uf(x)}{x^2+u^2} dx = -\frac{\pi}{2} f(0).$$

由此可知当  $f(0) = 0$  时,  $F(t)$  在  $t = 0$  连续, 但当  $f(0) \neq 0$  时,  $F(t)$  在  $t = 0$  不连续.

## §13.3 含参变量的常义积分

### Theorem (可积性)

设二元函数  $f(x, u)$  在  $I = [a, b] \times [\alpha, \beta]$  上连续, 则函数  $\varphi(u)$  在  $[\alpha, \beta]$  上可积, 并且

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left[ \int_a^b f(x, u) dx \right] du = \int_a^b \left[ \int_{\alpha}^{\beta} f(x, u) du \right] dx,$$

即可以交换两个积分运算的顺序.

## §13.3 含参变量的常义积分

### Example

计算  $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ ,  $0 < a < b$ .

解：注意到

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^u du,$$

且二元函数  $f(x, u) = x^u$  在  $[0, 1] \times [a, b]$  连续, 因而有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left( \int_a^b x^u du \right) dx = \int_a^b \left( \int_0^1 x^u dx \right) du \\ &= \int_a^b \frac{1}{u+1} x^{u+1} \Big|_0^1 du = \int_a^b \frac{1}{u+1} du = \ln \frac{b+1}{a+1}. \end{aligned}$$

## §13.3 含参变量的常义积分

### Theorem (可微性)

如果函数  $f(x, u)$  在区域  $I = [a, b] \times [\alpha, \beta]$  上连续, 且对变量  $u$  有连续的偏导数, 则函数  $\varphi(u)$  在  $[\alpha, \beta]$  上可导, 并且

$$\varphi'(u) = \int_a^b \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx,$$

即可以交换求导运算与积分运算的顺序, 或在积分号下求导.



## §13.3 含参变量的常义积分

### Example

计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx, \quad a > 0, b > 0$$

## §13.3 含参变量的常义积分

解： 记

$$F(u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + u^2 \cos^2 x) dx.$$

由于  $f(x, u) = \ln(a^2 \sin^2 x + u^2 \cos^2 x)$  及其关于  $u$  的偏导数

$$\frac{\partial f(x, u)}{\partial u} = \frac{2u \cos^2 x}{a^2 \sin^2 x + u^2 \cos^2 x}$$

都在区域

$$D: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, a \leq u \leq b \quad (\text{不妨设 } a < b)$$

上连续, 由含参变量常义积分的求导性质, 当  $a \leq u \leq b$  时有

### §13.3 含参变量的常义积分

$$\begin{aligned} F'(u) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2u \cos^2 x}{a^2 \sin^2 x + u^2 \cos^2 x} dx \\ &\stackrel{t=\tan x}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2u}{a^2 \tan^2 x + u^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2u}{(a^2 t^2 + u^2)(1+t^2)} dt \\ &= \frac{2u}{u^2 - a^2} \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{1+t^2} - \frac{a^2}{a^2 t^2 + u^2} \right) dt = \frac{\pi}{u+a}. \end{aligned}$$

故

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(u) du = \pi \int_a^b \frac{1}{u+a} du = \pi \ln(b+a) - \pi \ln(2a).$$

又  $F(a) = \pi \ln a$ , 故所求的积分为  $F(b) = \pi \ln \frac{a+b}{2}$ .

## §13.3 含参变量的常义积分

### Example

计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1 + \alpha \cos x}{1 - \alpha \cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} dx \quad |\alpha| < 1$$

**解法1:** 利用含参变量常义积分的微分性质求解.

## §13.3 含参变量的常义积分

解法2: 记

$$F(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1 + \alpha \cos x}{1 - \alpha \cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} dx, \quad (-1 < \alpha < 1).$$

因

$$\frac{\ln(1 + \alpha \cos x)}{\cos x} - \frac{\ln(1 - \alpha \cos x)}{\cos x} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{dy}{1 + y \cos x},$$

且对  $\forall \alpha \in (-1, 1)$  函数  $\frac{1}{1 + y \cos x}$  在  $[0, \frac{\pi}{2}] \times [-\alpha, \alpha]$  上连续, 所以交换积分次序得

## §13.3 含参变量的常义积分

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \int_{-\alpha}^{\alpha} dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+y \cos x} = \int_{-\alpha}^{\alpha} dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-y \cos x}{1-y^2 \cos^2 x} dx \\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha} dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-y^2 \cos^2 x} dx \\ &\stackrel{u=\tan x}{=} 2 \int_0^{\alpha} dy \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2 + (1-y^2)} \\ &= \pi \int_0^{\alpha} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pi \arcsin \alpha. \end{aligned}$$

其中用到  $\varphi(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y \cos x}{1-y^2 \cos^2 x} dx$  是关于  $y$  的奇函数, 积分  $\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(y) dy$  为 0.

## §13.3 含参变量的常义积分

**注记：** 若直接求  $\varphi(u) = \int_a^b f(x, u)dx$  有困难，常采用以下两种方法：

(1) 先求  $\varphi'(u)$ ，由含参变量常义积分的微分性质即先求

$\int_a^b f'_u(x, u)dx$ ，然后再对  $u$  积分，即利用

$\varphi(u) = \varphi(u_0) + \int_{u_0}^u \varphi'(t)dt$ ，求出  $\varphi(u)$ 。

(2) 把  $f(x, u)$  表示为积分形式，从而把  $\varphi(u)$  表示为累次积分，由含参变量常义积分的积分性质再交换积分次序求  $\varphi(u)$ 。

有时计算定积分常规方法不易求时，将其化为含参变量积分，利用含参变量积分的性质计算。

## §13.3 含参变量的常义积分

### §13.3.2 积分限依赖于参变量的积分及其性质

在实际应用中,经常要遇到这样的情形,不仅被积函数含有参变量,积分限也含有参变量,这时积分可写成

$$\psi(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} f(x, u) dx.$$



## §13.3 含参变量的常义积分

### Theorem (连续性)

设二元函数  $f(x, u)$  在矩形区域  $I = [a, b] \times [\alpha, \beta]$  上连续, 函数  $a(u)$  和  $b(u)$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续, 并且  $a \leq a(u) \leq b$ ,  $a \leq b(u) \leq b$ , 则函数  $\psi(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} f(x, u) dx$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续, 即对任意  $u_0 \in [\alpha, \beta]$ , 有

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \int_{a(u)}^{b(u)} f(x, u) dx = \int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x, u_0) dx.$$

$u_0$  在区间端点时, 极限为单侧极限.

## §13.3 含参变量的常义积分

### Example

已知  $G(u) = \int_{\sin u}^{\cos u} \frac{1}{1 + (1 + u)x^2} dx$ , 求  $\lim_{u \rightarrow 0} G(u)$ .

解: 由含参变量常义积分的连续性, 知  $G(u)$  在  $u = 0$  连续, 故

$$\lim_{u \rightarrow 0} G(u) = G(0) = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

## §13.3 含参变量的常义积分

### Theorem (可微性)

如果函数  $f(x, u)$  在区域  $I = [a, b] \times [\alpha, \beta]$  上连续, 且在  $I$  上对变量  $u$  有连续的偏导数, 函数  $a(u)$  和  $b(u)$  在  $[\alpha, \beta]$  上都可导, 并且  $a \leq a(u) \leq b$ ,  $a \leq b(u) \leq b$ , 则函数  $\psi(u)$  在  $[\alpha, \beta]$  上可导, 并且

$$\psi'(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx + f(b(u), u)b'(u) - f(a(u), u)a'(u).$$

## §13.3 含参变量的常义积分

### Example

设  $I(u) = \int_{\sin u}^{\cos u} e^{(x^2+xu)} dx$ , 求  $I'(0)$ .

**解:** 由于  $e^{(x^2+xu)}$  对任意的  $x$  和  $u$  都连续, 且对  $u$  有连续的偏导数, 则

$$I'(u) = \int_{\sin u}^{\cos u} x e^{(x^2+xu)} dx - \sin u e^{(\cos^2 u + u \cos u)} - \cos u e^{(\sin^2 u + u \sin u)},$$

故

$$I'(0) = \int_0^1 x e^{x^2} dx - 1 = \frac{e-3}{2}.$$

## §13.3 含参变量的常义积分

### 小结

- ① 利用含参变量常义积分的连续性求极限.
- ② 利用含参变量常义积分的可微性求导.
- ③ 利用含参变量常义积分的微分性质或积分性质求含参变量常义积分.

## 目录

§13.1 反常积分

§13.2 反常多重积分\*

§13.3 含参变量的常义积分

§13.4 含参变量的反常积分

§13.5 Euler积分

## §13.4 含参变量的反常积分

设函数  $f(x, u)$  在  $I = [a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$  上连续, 若对任意给定的  $u \in [\alpha, \beta]$ , 广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$$

都收敛, 称为**含参变量  $u$  的反常积分**. 这种积分确定了区间  $[\alpha, \beta]$  上的一个函数

$$u \in [\alpha, \beta] \longmapsto \varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x, u) dx.$$

**注记:** (1) 这里的  $[\alpha, \beta]$  可换成开区间或无穷区间, 后面统一用  $I$ .  
(2) 含参变量的无穷区间上的积分, 类比于函数项级数.

本节的目的是要研究这类函数的连续性、可微性和可积性.

## §13.4 含参变量的反常积分

### §13.4.1 含参变量反常积分的一致收敛性

#### ● 含参变量反常积分的收敛

所谓积分  $\int_a^{+\infty} f(x, u)dx$  收敛, 是指对于每个固定的  $u$ , 有

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x, u)dx = \int_a^{+\infty} f(x, u)dx,$$

即对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在数  $B = B(u, \varepsilon) (> a)$ , 当  $b > B$  时有

$$\left| \int_a^b f(x, u)dx - \int_a^{+\infty} f(x, u)dx \right| = \left| \int_b^{+\infty} f(x, u)dx \right| < \varepsilon.$$

一般说来, 数  $B$  不仅依赖于  $\varepsilon$ , 而且还依赖于参变量  $u$ .

称含参变量广义积分  $\int_a^{+\infty} f(x, u)dx$  在区间  $I$  上 **逐点收敛** 或在  $I$  上 **收敛**.



## §13.4 含参变量的反常积分

### §13.4.1 含参变量反常积分的一致收敛性

#### ● 含参变量反常积分的一致收敛

(1) 如果对任给的 $\varepsilon > 0$ , 存在一个 $B = B(\varepsilon) > a$ , 使得当 $b > B$ 时, 不等式

$$\left| \int_a^b f(x, u) dx - \int_a^{+\infty} f(x, u) dx \right| = \left| \int_b^{+\infty} f(x, u) dx \right| < \varepsilon$$

对所有的 $u \in I$ 都成立, 则称含参变量广义积分

$\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 在区间 $I$ 上**一致收敛**.

(2) 如果 $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 在区间 $I$ 的任何有界闭子区间上一致收敛, 则称它在 $I$ 中**内闭一致收敛**.

## §13.4 含参变量的反常积分

### Theorem (一致收敛定义的另一种表达)

无穷区间上含参变量的广义积分  $\int_a^{+\infty} f(x, u)dx$  一致收敛的充分必要条件是

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \beta(b) = 0$$

其中

$$\beta(b) = \sup_{u \in [\alpha, \beta]} \left| \int_b^{+\infty} f(x, u)dx \right|$$

## §13.4 含参变量的反常积分

### Example

研究含参变量广义积分  $\int_0^{+\infty} ue^{-ux} dx$  在区间  $[0, +\infty)$  上的一致收敛性.

解: 对  $b > 0$ ,

$$\int_b^{+\infty} ue^{-ux} dx = e^{-bu}, \quad \beta(b) = \sup_{u \geq 0} \left| \int_b^{+\infty} ue^{-ux} dx \right| = 1$$

所以含参变量广义积分  $\int_0^{+\infty} ue^{-ux} dx$  在区间  $[0, +\infty)$  上不一致收敛.

## §13.4 含参变量的反常积分

另解：对任意  $u \in [0, +\infty)$ ，积分  $\int_0^{+\infty} ue^{-ux} dx$  收敛. 为考察其一致收敛性，对  $b > 0$ ,

$$\int_b^{+\infty} ue^{-ux} dx = e^{-bu}.$$

如果取  $u = \frac{1}{b}$ ，则有  $\left| \int_b^{+\infty} ue^{-ux} dx \right| = e^{-1}$ . 因此，

取  $\varepsilon_0 \in (0, e^{-1})$ ，对任意  $B > 0$ ，存在  $b_0 > B$  及  $u_0 = \frac{1}{b_0}$ ，有

$$\left| \int_{b_0}^{+\infty} ue^{-u_0x} dx \right| = e^{-1} > \varepsilon_0,$$

即含参变量广义积分  $\int_0^{+\infty} ue^{-ux} dx$  在区间  $(0, +\infty)$  上不一致收敛.

## §13.4 含参变量的反常积分

但  $\int_0^{+\infty} ue^{-ux} dx$  在  $0 < a \leq u \leq b$  上一致收敛.

因  $ue^{-ux} \leq be^{-ax}$ , 而  $\int_0^{+\infty} be^{-ax} dx$  收敛, 故由 *Weierstrass* 判别法

$\int_0^{+\infty} ue^{-ux} dx$  在  $0 < a \leq u \leq b$  上一致收敛.

也就是含参变量广义积分  $\int_0^{+\infty} ue^{-ux} dx$  在区间  $(0, +\infty)$  上内闭一致收敛.

## §13.4 含参变量的反常积分

### 含参变量反常积分的一致收敛的判别法

- **定理1: 柯西(Cauchy)收敛准则**

含参变量广义积分  $\int_a^{+\infty} f(x, u)dx$  在  $I$  上一致收敛的充分必要条件是: 对任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在一个仅与  $\varepsilon$  有关的实数  $B = B(\varepsilon) > a$ , 使得当  $b_1, b_2 > B$  时, 不等式

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, u)dx \right| < \varepsilon$$

对所有的  $u \in I$  都成立.

### 含参变量反常积分的一致收敛的判别法

#### ● 定理2: 魏尔斯特拉斯(Weierstrass)判别法

设函数 $f(x, u)$ 在区域 $D = [a, +\infty) \times I$ 上连续, 如果存在一个 $[a, +\infty)$ 上的连续函数 $p(x)$ , 使得对充分大的 $x$ 以及所有的 $u \in I$ , 都有

$$|f(x, u)| \leq p(x),$$

且积分 $\int_a^{+\infty} p(x)dx$ 收敛, 则含参变量广义积分

$\int_a^{+\infty} f(x, u)dx$ 在 $I$ 上一致收敛.  $p(x)$ 称为它的控制函数.

## §13.4 含参变量的反常积分

### 含参变量反常积分的一致收敛的判别法

#### ● 定理3: 狄利克雷(Dirichlet)判别法

设函数 $f(x, u)$ 和 $g(x, u)$ 对每个 $u \in I$ 在区间 $[a, +\infty)$ 的任意有限区间 $[a, b]$ 上可积, 且满足以下两条:

- (1) 积分 $\int_a^b f(x, u)dx$ 关于 $b$ 和 $u$ 一致有界, 即存在一个与 $b$ 和 $u$ 均无关的常数 $K$ , 使得 $\left| \int_a^b f(x, u)dx \right| \leq K$ 对任意 $b > a$ 和所有 $u \in I$ 成立;
- (2) 函数 $g(x, u)$ 对于每个 $u \in I$ 关于 $x$ 是单调的, 并且当 $x \rightarrow +\infty$ 时,  $g(x, u)$ 关于 $u$ 在 $I$ 上一致趋于零;

则含参变量广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u)g(x, u)dx$ 在 $I$ 上一致收敛.



## §13.4 含参变量的反常积分

### 含参变量反常积分的一致收敛的判别法

#### ● 定理4: 阿贝尔(Abel)判别法

设函数 $f(x, u)$ 和 $g(x, u)$ 对每个 $u \in I$ 在区间 $[a, +\infty)$ 的任意有限区间 $[a, b]$ 上可积, 且满足以下两条:

- (1) 积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u)dx$ 在 $I$ 上一致收敛;
- (2) 函数 $g(x, u)$ 对于每个 $u \in I$ 关于 $x$ 是单调的, 并且 $g(x, u)$ 关于 $u$ 在 $I$ 上一致有界;

则含参变量广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u)g(x, u)dx$ 在 $I$ 上一致收敛.

## §13.4 含参变量的反常积分

### Example

研究含参变量广义积分  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin ux}{x^2} dx$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  上的一致收敛性。

解：对任意  $u \in (-\infty, +\infty)$ , 有估计

$$\left| \frac{\sin ux}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2},$$

而积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  收敛, 故由Weierstrass判别法知, 原积分在区间  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛.

## §13.4 含参变量的反常积分

### Example

设 $\alpha > 0$ 时, 研究含参变量广义积

分 $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx$ 在 $\beta \geq \beta_0 > 0$ 上的一致收敛性.

解: 由于对任意正数 $b$ , 有估计

$$\left| \int_0^b \sin \beta x dx \right| \leq \left| \frac{1 - \cos \beta b}{\beta} \right| \leq \frac{2}{\beta},$$

即积分 $\int_0^b \sin \beta x dx$ 区间 $[\beta_0, +\infty)$ 上的一致有界; 而函数 $\frac{x}{\alpha^2 + x^2}$ 与参变量 $\beta$ 无关, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 单调减趋于零. 由Dirchlet判别法知, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx$ 在区间 $[\beta_0, +\infty)$ 上的一致收敛.

## §13.4 含参变量的反常积分

### Example

研究积分  $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x^3}{1+x^p} dx$  在区间  $0 \leq p < +\infty$  上的一致收敛性.

解: 令  $x^3 = t$ , 然后由Dirchlet判别法知, 与  $p$  无关的积分

$$\int_0^{+\infty} x \sin x^3 dx = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt[3]{t}} dt$$

是收敛的. 又  $\frac{1}{1+x^p}$  关于  $x$  单调, 且当  $x \geq 0$  时关于  $p \geq 0$  一致有界  $\left(0 < \frac{1}{1+x^p} \leq 1\right)$ , 所以由含参变量广义积分一致收敛的Abel判别法知,  $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x^3}{1+x^p} dx$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛.

## §13.4 含参变量的反常积分

### Example

研究含参变量广义积分  $\int_0^{+\infty} e^{-ux} \frac{\sin 2x}{x+u} dx$  在区间  $[b, B]$   $0 < b < B$  上的一致收敛性.

解: 对  $\forall A > 0$ ,  $\left| \int_0^A \sin 2x dx \right| = \frac{1}{2} |1 - \cos 2A|$  一致有界.

$\forall u \in [b, B]$ , 函数  $\frac{1}{x+u}$  关于  $x$  单调减,

且  $\left| \frac{1}{x+u} \right| < \frac{1}{x} \rightarrow 0, (x \rightarrow +\infty)$ , 故由Dirchlet判别法, 积

分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x+u} dx$  在区间  $[b, B]$  上一致收敛. 又  $e^{-ux}$  对  $x$  单调, 且  $e^{-ux} \leq 1$ , 由Abel判别法, 积分在区间  $[b, B]$  上的一致收敛.

## §13.4 含参变量的反常积分

### §13.4.2 一致收敛含参变量反常积分的性质

#### ● 定理：(连续性)

设函数  $f(x, u)$  在区域  $D = [a, +\infty) \times I$  上连续, 且含参变量广义积分  $\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x, u)dx$  在区间  $I$  上内闭一致收敛, 则函数  $\varphi(u)$  在  $I$  上连续, 即对任意  $u_0 \in I$ , 有极限关系

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \int_a^{+\infty} f(x, u)dx = \int_a^{+\infty} \lim_{u \rightarrow u_0} f(x, u)dx.$$

即可以交换极限运算与积分运算的顺序.

## §13.4 含参变量的反常积分

### §13.4.2 一致收敛含参变量反常积分的性质

#### ● 定理：(可积性)

- (1) 设函数  $f(x, u)$  在区域  $D = [a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$  上连续, 且含参变量广义积分  $\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  在有界闭区间  $[\alpha, \beta]$  上一致收敛, 则函数  $\varphi(u)$  在  $[\alpha, \beta]$  上可积, 并有

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(u) du &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ \int_a^{+\infty} f(x, u) dx \right] du \\ &= \int_a^{+\infty} \left[ \int_{\alpha}^{\beta} f(x, u) du \right] dx,\end{aligned}$$

即可以交换两个积分运算的顺序.

## §13.4 含参变量的反常积分

### §13.4.2 一致收敛含参变量广义积分的性质

#### ● 定理: (可积性)

(2) 如果函数 $f(x, u)$ 满足下列条件:

1° 函数 $f(x, u)$ 在区域 $D = [a, +\infty) \times [\alpha, +\infty)$ 上连续;

2° 积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u)dx$ 和 $\int_\alpha^{+\infty} f(x, u)du$ 分别关于 $u$ 在 $[\alpha, +\infty)$ 上, 关于 $x$ 在 $[a, +\infty)$ 上内闭一致收敛;

3° 下列两个积分之中至少有一个存在

$$\int_a^{+\infty} \left( \int_\alpha^{+\infty} |f(x, u)| du \right) dx, \quad \int_\alpha^{+\infty} \left( \int_a^{+\infty} |f(x, u)| dx \right) du$$

那么下列两个积分都存在, 而且相等, 即

$$\int_a^{+\infty} \left( \int_\alpha^{+\infty} f(x, u) du \right) dx = \int_\alpha^{+\infty} \left( \int_a^{+\infty} f(x, u) dx \right) du,$$



## §13.4 含参变量的反常积分

### §13.4.2 一致收敛含参变量广义积分的性质

#### ● 定理：(可微性)

设函数 $f(x, u)$ 满足下列条件：

1° 函数 $f(x, u)$ 和 $\frac{\partial f(x, u)}{\partial u}$ 在区域 $D = [a, +\infty) \times I$ 上连续；

2° 含参变量积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u)dx$ 在 $I$ 上收敛；

3° 含参变量积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx$ 在 $I$ 上内闭一致收敛.

那么函数 $\varphi(u)$ 在 $I$ 上可导, 并且

$$\varphi'(u) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx, \quad (u \in I)$$

即可以交换求导运算与积分运算的顺序.

## §13.4 含参变量的反常积分

### Example

计算积分  $I(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\beta x dx, \quad -\infty < \beta < +\infty.$

## §13.4 含参变量的反常积分

解：对任意实数 $\beta$ ，有估计

$$|e^{-x^2} \cos 2\beta x| \leq e^{-x^2},$$

而无穷积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ 收敛，由比较判别法知，广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\beta x dx$ 收敛。为求其值，可视 $\beta$ 为参数，并注意到，当 $x > 0$ 时，有

$$\left| \frac{\partial}{\partial \beta} (e^{-x^2} \cos 2\beta x) \right| = |2xe^{-x^2} \sin 2\beta x| \leq 2xe^{-x^2},$$

但积分 $\int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2} dx$ 收敛，由魏尔斯特拉斯判别法知，积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \beta} (e^{-x^2} \cos 2\beta x) dx$ 在整个数轴上关于 $\beta$ 一致收敛，故交换求导与积分的顺序，有

## §13.4 含参变量的反常积分

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \beta} (e^{-x^2} \cos 2\beta x) dx = -2 \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} \sin 2\beta x dx.$$

利用分部积分法, 可得

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} \sin 2\beta x dx = \beta \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\beta x dx = \beta I(\beta),$$

于是, 函数 $I(\beta)$ 满足微分方程

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta} = -2\beta I(\beta),$$

以及定解条件 $I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . 求解这个定解问题,

$$\text{可得 } I(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\beta^2}.$$

## §13.4 含参变量的反常积分

### Example

计算下列含参变量积分:  $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x(1+x^2)} dx, \alpha > 0.$

## §13.4 含参变量的反常积分

解法1: 因为

$$\frac{\arctan \alpha x}{x} = \int_0^{\alpha} \frac{1}{1+x^2 u^2} du,$$

故

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{\alpha} \frac{1}{(1+x^2 u^2)(1+x^2)} du.$$

又  $\frac{1}{(1+x^2 u^2)(1+x^2)}$  在  $0 \leq x < +\infty$ ,  $0 \leq u \leq \alpha$  连续, 且由比较判别法, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2 u^2)(1+x^2)} dx$$

关于  $u$  在  $[0, \alpha]$  上一致收敛.

## §13.4 含参变量的反常积分

故由含参变量广义积分的积分性质, 交换积分次序得

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_0^{\alpha} du \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2u^2)(1+x^2)} dx \\ &= \int_0^{\alpha} \frac{du}{1-u^2} \left( \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx - \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+x^2u^2} dx \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\alpha} \frac{1-u}{1-u^2} du = \frac{\pi}{2} \ln(1+\alpha). \end{aligned}$$

## §13.4 含参变量的反常积分

**解法2:** 记  $f(x, \alpha) = \frac{\arctan \alpha x}{x(1+x^2)}$ , 因为  $f(x, \alpha)$

及  $f'_\alpha(x, \alpha) = \frac{1}{(1+\alpha^2 x^2)(1+x^2)}$  在  $[0, +\infty)^2$  上连续,

且  $I(\alpha)$  在  $[0, +\infty)$  上收敛,  $I(0) = 0$ , 又对  $\alpha \geq 0$  有

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\alpha^2 x^2)(1+x^2)} dx \\ &= \frac{1}{1-\alpha^2} \left( \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx - \int_0^{+\infty} \frac{\alpha^2}{1+x^2 \alpha^2} dx \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+\alpha}, \end{aligned}$$

且  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2 \alpha^2)(1+x^2)} dx$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛.



## §13.4 含参变量的反常积分

由含参变量广义积分的求导性质, 得

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha} \int_0^{+\infty} f(x, \alpha) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + \alpha^2 x^2)(1 + x^2)} dx = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + \alpha}. \end{aligned}$$

故

$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha} I'(\alpha) d\alpha + I(0) = \int_0^{\alpha} \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + \alpha} d\alpha + I(0) = \frac{\pi}{2} \ln(1 + \alpha).$$

## §13.4 含参变量的反常积分

注记:

若直接求  $I(u) = \int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  有困难, 常采用以下两种方法:

(1) 把  $f(x, u)$  表示为积分形式, 从而把  $I(u)$  视为累次积分, 由含参变量广义积分的积分性质, 再交换积分次序求积分.

(2) 先求  $I'(u)$ , 由含参变量广义积分的微分性质, 即先求

$$\int_a^{+\infty} f'_u(x, u) dx, \text{ 然后再对 } u \text{ 积分,}$$

$$\text{由 } I(u) = \int_{u_0}^u I'(u) du + I(u_0) \text{ 求出 } I(u).$$

有时计算广义积分常规方法不易求时, 将其化为含参变量广义积分, 利用含参变量广义积分的性质计算.

## §13.4 含参变量的反常积分

### §13.4.3 几个重要的广义积分

#### (1) 概率积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

#### (2) 狄利克雷(Dirichlet)积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

进一步有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \beta > 0, \\ 0, & \beta = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \beta < 0. \end{cases}$$

**问题：**能否用含参变量积分表示非初等函数符号函数 $\operatorname{sgn} x$ ?

## §13.4 含参变量的反常积分

### §13.4.3 几个重要的广义积分

#### (3) 拉普拉斯(Laplace)积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta} \quad (\alpha > 0, \beta \geqslant 0),$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta} \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

#### (4) 菲涅耳(Fresnel)积分

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

## §13.4 含参变量的反常积分

### Example

利用  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ , 计算  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx$ .

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx &= -\frac{\sin^4 x}{x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{4 \sin^3 x \cos x}{x} dx \\&= \int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos 2x) \sin 2x}{x} dx \\&= \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx - \int_0^{+\infty} \frac{\sin 4x}{2x} dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

## §13.4 含参变量的反常积分

### 小结

- ① 研究含参变量广义积分在指定区间上的一致收敛性.
- ② 利用含参变量广义积分的微分性质或积分性质求含参变量广义积分.
- ③ 利用概率积分或Dirichlet积分计算一些广义积分.

## 目录

§13.1 反常积分

§13.2 反常多重积分\*

§13.3 含参变量的常义积分

§13.4 含参变量的反常积分

§13.5 Euler积分

## §13.5 欧拉(Euler)积分

Euler在求解微分方程时, 引出如下两个含参变量积分:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

分别称为 $\Gamma$ (伽马)函数和 $B$ (贝塔)函数.  $\Gamma$ 函数和 $B$ 函数统称为欧拉积分或欧拉函数, 其中 $B$ 函数也称为第一类Euler 积分,  $\Gamma$  函数称为第二类Euler 积分.

$\Gamma$ 函数和 $B$ 函数在数学、物理以及工程计算中有着广泛的应用, 有不少重要的定积分值可以用 $\Gamma$ 函数和 $B$ 函数表示出来.

本节讨论 $\Gamma$ 函数和 $B$ 函数的性质, 如连续性、递推公式, 以及 $\Gamma$ 函数和 $B$ 函数之间的关系式等.



## §13.5 欧拉(Euler)积分

### §13.5.1 $\Gamma$ 函数的性质

#### ● 连续性

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

的定义域是  $(0, +\infty)$ , 而且是  $(0, +\infty)$  上连续函数.

令  $t = u^2$ , 得  $\Gamma$  函数的另一种表示

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} u^{2x-1} e^{-u^2} du$$

#### ● 可微性

$\Gamma$  函数有任意阶导数, 且导数为

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^k dt.$$

## §13.5 欧拉(Euler)积分

### §13.5.1 $\Gamma$ 函数的性质

#### ● $\Gamma$ 函数递推公式

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0.$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma(n+1) = n(n-1) \cdots 1 \cdot \Gamma(1) = n!, \quad n \in \mathbf{Z}^+$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

#### ● 余元公式 当 $x \in (0, 1)$ 时, 有

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

## §13.5 欧拉(Euler)积分

### Example

已知  $\int_0^{+\infty} x^{u-1} \sin x dx = \Gamma(u) \sin \frac{\pi u}{2}$ ,  $\int_0^{+\infty} x^{u-1} \cos x dx = \Gamma(u) \cos \frac{\pi u}{2}$ ,  $0 < u < 1$ . 求函

数  $f(x) = x^{-a}$  ( $x > 0$ ) 的 Fourier 正弦变换以及正弦反演公式, 进而证明余元公式. 其中常数  $a$  满足  $0 < a < 1$ .

**分析:** 例题中的函数  $f(x) = x^{-a}$  不满足傅里叶积分表示收敛定理中的条件, 但是仍然求出了它的傅里叶变换. 这是因为收敛定理中的条件是充分条件, 不是必要的. 事实上, 收敛定理的条件可放宽为:

- (1°) 函数  $f(x)$  在任何有限区间上绝对可积(允许在瑕积分意义下);
- (2°) 存在  $M > 0$ , 当  $|x| \geq M$  时,  $f(x)$  单调减, 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

可以验证, 函数  $f(x) = x^{-a}$  满足上面两个条件.

## §13.5 欧拉(Euler)积分

解: 函数  $f(x) = x^{-a}$  ( $x, \lambda > 0$ ) 的 Fourier 正弦变换为

$$F(\lambda) = 2 \int_0^{+\infty} x^{-a} \sin \lambda x dx = 2\Gamma(1-a) \cos \frac{\pi a}{2} \cdot \lambda^{a-1},$$

其正弦反演公式为 ( $x > 0$ )

$$\begin{aligned} x^{-a} = f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} F(\lambda) \sin \lambda x d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot 2\Gamma(1-a) \cos \frac{\pi a}{2} \int_0^{+\infty} \lambda^{a-1} \cdot \sin \lambda x d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot 2\Gamma(1-a) \cos \frac{\pi a}{2} \cdot \Gamma(a) \sin \frac{\pi a}{2} \cdot x^{-a}. \end{aligned}$$

由上述反演公式, 立得  $\Gamma$  函数的余元公式

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad 0 < a < 1.$$

## §13.5 欧拉(Euler)积分

### §13.5.2 B函数的性质

- 连续性

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

在  $I = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$  上连续.

- B 函数无穷积分表示

对任意的  $x > 0, y > 0$ , 有 (令  $t = \frac{1}{1+z}$ )

$$B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{z^{y-1}}{(1+z)^{x+y}} dz.$$

## §13.5 欧拉(Euler)积分

### §13.5.2 B函数的性质

令  $t = \sin^2 \theta$ , 或  $t = \cos^2 \theta$  得B函数的另一种表示

$$B(x, y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta$$

$$B(x, y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta d\theta$$

## §13.5 欧拉(Euler)积分

### §13.5.2 B函数的性质

- $\Gamma$ 函数与B函数的关系

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (x, y > 0).$$

特别地, 有B函数的对称性

$$B(x, y) = B(y, x) \quad (x, y > 0).$$

$$B(n, m) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

## §13.5 欧拉(Euler)积分

### §13.5.2 B函数的性质

#### ● 递推公式

$$B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y); \quad B(x, y+1) = \frac{y}{x+y} B(x, y);$$

$$B(x+1, y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)} B(x, y).$$

#### ● Legendre加倍公式

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) \quad (x > 0).$$



## §13.5 欧拉(Euler)积分

证明:  $B(x, x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}dt$ , 分段积分并换元得

$$B(x, x) = \int_0^1 \left[ \frac{1}{4} - \left( t - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{x-1} dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{4} - \left( t - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{x-1} dt$$

中作变量代换  $t - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\tau}$ , 则有

$$B(x, x) = \frac{1}{2^{2x-1}} \int_0^1 \tau^{-\frac{1}{2}} (1-\tau)^{x-1} d\tau = \frac{1}{2^{2x-1}} B\left(\frac{1}{2}, x\right).$$

将上式中的  $B$  函数用  $\Gamma$  函数表达, 则有

$$\frac{\Gamma^2(x)}{\Gamma(2x)} = \frac{1}{2^{2x-1}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(x)}{\Gamma(x + \frac{1}{2})},$$

将  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  代入, 即得  $\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)$ .

## §13.5 欧拉(Euler)积分

### Example

计算积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x dx$ , 其中  $n$  和  $m$  都是自然数.

**解:** 作变量代换  $t = \sin^2 x$ , 则得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}} (1-t)^{\frac{m-1}{2}} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right),$$

或用  $\Gamma$  函数表达

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2}) \Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+n}{2} + 1)}.$$

**注记:** 类似地,  $\alpha > 0, \beta > 0$ ,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x \cos^\beta x dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2}) \Gamma(\frac{\beta+1}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+\beta}{2} + 1)}.$$

## §13.5 欧拉(Euler)积分

### Example

计算广义积分  $\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\alpha t} dt \quad (\alpha > 0).$

解: 令  $\alpha t = x$ , 则有

$$\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

**注记:** 计算一些广义积分, 可通过对广义积分作变量代换化为Euler积分, 再利用Euler积分的递推公式或其它公式, 求得广义积分值.

## §13.5 欧拉(Euler)积分

### Example

计算广义积分  $\int_0^1 (\ln x)^n dx \quad (n \in \mathbf{N})$ .

解：令  $\ln x = -t$ , 则有

$$\int_0^1 (\ln x)^n dx = \int_0^{+\infty} (-1)^n t^n e^{-t} dt = (-1)^n \Gamma(n+1) = (-1)^n n!.$$

## §13.5 欧拉(Euler)积分

### Example

计算广义积分  $\int_a^b (x-a)^2 \left(\frac{b-x}{x-a}\right)^p dx \quad (0 < p < 1).$

解: 利用变量代换  $t = \frac{x-a}{b-a}$ , 使  $[a, b] \rightarrow [0, 1]$ , 故有

$$\begin{aligned}\int_a^b (x-a)^2 \left(\frac{b-x}{x-a}\right)^p dx &= (b-a)^3 \int_0^1 t^{2-p} (1-t)^p dt \\&= (b-a)^3 B(3-p, 1+p) \\&= (b-a)^3 \frac{\Gamma(3-p)\Gamma(1+p)}{\Gamma(4)} \\&= \frac{p(2-p)(1-p)(b-a)^3}{6} \Gamma(1-p)\Gamma(p) \\&= \frac{p(2-p)(1-p)(b-a)^3}{6} \frac{\pi}{\sin p\pi}.\end{aligned}$$

## §13.5 欧拉(Euler)积分

### Example

求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{1+x^n}{1+x^{2n}} dx$ .

## §13.5 欧拉(Euler)积分

解: 令  $x^{2n} = t$ , 则有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1+x^n}{1+x^{2n}} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1+\sqrt{t}}{1+t} \frac{1}{2n} t^{\frac{1}{2n}-1} dt \\&= \frac{1}{2n} \left( \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{2n}-1}}{1+t} dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{2n}-\frac{1}{2}}}{1+t} dt \right) \\&= \frac{1}{2n} \left[ B\left(\frac{1}{2n}, 1 - \frac{1}{2n}\right) + B\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) \right] \\&= \frac{1}{2n} \left[ \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2n}} + \frac{\pi}{\sin \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\right) \pi} \right] = \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} + \frac{\frac{\pi}{2n}}{\cos \frac{\pi}{2n}}.\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{1+x^n}{1+x^{2n}} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} + \frac{\frac{\pi}{2n}}{\cos \frac{\pi}{2n}} \right) = 1.$$

## §13.5 欧拉(Euler)积分

### Example

试求曲线  $x^n + y^n = a^n$  当  $x > 0, y > 0, n > 0$  时所围成平面图形的面积.

解: 所围成平面图形的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a y(x) dx = \int_0^a (a^n - x^n)^{\frac{1}{n}} dx = a^2 \int_0^a [1 - (\frac{x}{a})^n]^{\frac{1}{n}} d(\frac{x}{a}) \\ &\stackrel{(\frac{x}{a})^n = t}{=} \frac{a^2}{n} \int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1} (1-t)^{\frac{1}{n}} dt = \frac{a^2}{n} B(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + 1) = \frac{a^2}{2n} \frac{\Gamma^2(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{2}{n})}. \end{aligned}$$



## §13.5 欧拉(Euler)积分

### Example

设曲线 $L$ 的极坐标方程为 $r^m = a^m \cos m\theta$ , 其中 $a, m > 0$ .

(1) 求其一支所围区域的面积 $S$ ;

(2) 求这一支的弧长 $\ell$ .

## §13.5 欧拉(Euler)积分

解: 当 $\theta$ 从 $-\frac{\pi}{2m}$ 变到 $\frac{\pi}{2m}$ , 形成 $L$ 的一支曲线.  $\cos m\theta$ 是 $\theta$ 的偶函数, 故极轴上下区域对称, 且面积相等

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2m}} r^2(\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2m}} a^2 (\cos m\theta)^{\frac{2}{m}} d\theta$$
$$\xrightarrow{m\theta=\varphi} \frac{a^2}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{m}} \varphi d\varphi = \frac{a^2}{2m} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{m} + \frac{1}{2}\right) = \frac{a^2 \sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{m} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{m})}.$$

$$\ell = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2m}} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta = 2a \int_0^{\frac{\pi}{2m}} (\cos m\theta)^{\frac{1}{m}-1} d\theta$$
$$\xrightarrow{m\theta=\varphi} \frac{2a}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{1}{m}-1} \varphi d\varphi = \frac{a}{m} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2m}\right) = \frac{a\sqrt{\pi}}{m} \frac{\Gamma(\frac{1}{2m})}{\Gamma(\frac{1}{2m} + \frac{1}{2})}.$$

## §13.5 欧拉(Euler)积分

### Example

确定参数 $\alpha, \beta, \gamma$ , 使得积分

$$I = \iiint_D \frac{dx dy dz}{1 + x^\alpha + y^\beta + z^\gamma} < +\infty.$$

并求积分 $I$ 的值, 其中 $D = \{(x, y, z) \mid x, y, z \geq 0\}$ 为第一卦限.

## §13.5 欧拉(Euler)积分

解: 首先应该有  $\alpha, \beta, \gamma > 0$ , 作变量代换  $x = u^{2/\alpha}, y = v^{2/\beta}, z = w^{2/\gamma}$ , 则积分变为

$$I = \frac{8}{\alpha\beta\gamma} \iiint_{\Omega} \frac{u^{\frac{2}{\alpha}-1} v^{\frac{2}{\beta}-1} w^{\frac{2}{\gamma}-1}}{1+u^2+v^2+w^2} du dv dw,$$

其中  $\Omega = \{(u, v, w) \mid u, v, w \geq 0\}$ , 再选取球坐标

$$\begin{aligned} u &= \rho \sin \varphi \cos \theta, \quad v = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad w = \rho \cos \varphi, \\ \rho &\geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

于是积分变为

$$\begin{aligned} I &= \frac{8}{\alpha\beta\gamma} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{\alpha}-1} \theta \sin^{\frac{2}{\beta}-1} \theta d\theta \\ &\quad \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})-1} \varphi \cos^{\frac{2}{\gamma}-1} \varphi d\varphi \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{2(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma})-1}}{1+\rho^2} d\rho. \end{aligned}$$

## §13.5 欧拉(Euler)积分

可见当且仅当  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} < 1$  时, 最后一个积分收敛, 并且利用  $\Gamma$  函数和  $B$  函数, 可以将上述积分写为

$$I = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right) B\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right) B\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}, 1 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)\right),$$

或

$$I = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) \Gamma\left(1 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)\right).$$

## §13.5 欧拉(Euler)积分

### 小结

本节重点是利用欧拉积分计算一些广义积分或极限.

**具体做法:** 一般是把广义积分进行分部积分或变量代换化为Euler积分的形式, 利用Euler积分的递推公式或其它相关公式, 求得广义积分值或极限.