若A为反对称实矩阵，先验证 $I+A$ 可逆：注意到A的特征值要么为0，要么为纯虚数，即 -1 不是A的特征值，从而 $|-I-A| = (-1)^n|I+A| \neq 0$，即 $I+A$ 可逆。

1. 设A为反对称实矩阵，则 $(I-A)(I+A)^{-1}$ 为正交矩阵

证明：验证 $((I-A)(I+A)^{-1})^T(I-A)(I+A)^{-1} = I$ 即可

$$((I-A)(I+A)^{-1})^T(I-A)(I+A)^{-1} = (I+A^T)^{-1}(I-A^T)(I-A)(I+A)^{-1}$$

$$= (I-A)^{-1}\underline{(I+A)(I-A)}(I+A)^{-1} = (I-A)^{-1}(I-A)(I+A)(I+A)^{-1} = I$$

2、设 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 为n维欧氏空间中的一组向量，令 $\Delta = \begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_1), & (\alpha_1,\alpha_2), & \cdots, & (\alpha_1,\alpha_m) \\ (\alpha_2,\alpha_1), & (\alpha_2,\alpha_2), & \cdots, & (\alpha_2,\alpha_m) \\ & \vdots & & \\ (\alpha_m,\alpha_1), & (\alpha_m,\alpha_2), & \cdots, & (\alpha_m,\alpha_m) \end{pmatrix}$

证明：$|\Delta| \neq 0$ 当且仅当 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关

证明：($\Longleftarrow$) 充分性：若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，则对任意不全为0的数 $x_1, \cdots, x_m$ 均有 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m \neq 0$，考虑 $(\alpha, \alpha) = (\sum_{i=1}^m x_i\alpha_i, \sum_{j=1}^m x_j\alpha_j)$

$$= (x_1, x_2, \cdots, x_m)\, \Delta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} > 0$$，因此 Δ 为正定矩阵，故 $|\Delta| \neq 0$.

($\Longrightarrow$) 必要性：考虑向量方程 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = 0$，要证 $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$.

令 $\alpha = \sum_{i=1}^m x_i\alpha_i$，$0 = (\alpha, \alpha_j) = ((\alpha_1, \alpha_j), \cdots, (\alpha_m, \alpha_j))\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ 对任意的 $j = 1, 2, \cdots, m$ 成立，因此线性方程组 $\Delta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0$ 只有0解，因此 $|\Delta| \neq 0$.

3、设 α 为欧氏空间V中的一个非零向量，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 为V中p个向量，且满足：

$(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0$，且 $(\alpha_i, \alpha) > 0$，$i, j = 1, 2, \cdots, p$；$i \neq j$. 证明：

(1) $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ 线性无关

(2) n维欧氏空间中最多有 $n+1$ 个向量，使其两两夹角均大于 $\frac{\pi}{2}$.

证明：(1) 反证：若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 线性相关，则不妨设 $\alpha_p = \sum_{j=1}^{p-1} x_j\alpha_j$.

把 α_p 中求和项根据系数 $x_j > 0$ 和 ≤ 0 分成两部分，即 $\alpha_p = \sum' x_i\alpha_i + \sum'' x_t\alpha_t$，

其中 $x_i > 0$ 的项归入 $\sum'$ 中，$x_i \leq 0$ 的项归入 $\sum''$ 中，再令 $\beta = \sum' x_i\alpha_i$，$\gamma = \sum'' x_i\alpha_t$

于是：$\alpha = \beta + \gamma$. 考虑 (α_p, β) 的符号：

另一方面 $(\alpha_p, \beta) = \left(\sum' x_i\alpha_i + \sum'' x_i\alpha_i,\ \sum' x_i\alpha_i\right)$

由内积的正定性 $(\beta,\beta)>0\ (\beta\neq 0)$ $= (\beta,\beta) + (\gamma,\beta) \geq 0$ 由 $\sum'' x_i\alpha_i$ 中的 $x_i \leq 0$，且 $(\alpha_i,\alpha_j) \leq 0$ 知 $(\gamma,\beta) \geq 0$

另一方面由条件 $(\alpha_p, \beta) = (\alpha_p, \sum' x_i\alpha_i) \leq 0$，矛盾.

因此 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 线性无关.

(2) 假设 n 维欧氏空间中有 m 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 两两成钝角，即 $(\alpha_i, \alpha_j) < 0$ 对 $\forall i,j = 1,2,\cdots,m$，$i \neq j$ 成立. 即 $(\alpha_j, -\alpha_m) > 0$，对 $\forall j = 1,2,\cdots,m-1$ 成立，于是向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{m-1}$ 符合 (1) 中的设定，故 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{m-1}$ 线性无关，又空间维数为 n. 即有 $m-1 \leq n$，即 $m \leq n+1$. 因此 n 维欧氏空间中至多 $n+1$ 个向量两两成钝角.

用 (1) 结论

4. (2) 设 A 为可逆实矩阵，则它是一个正交矩阵和一个正定矩阵的乘积.

证明：若 A 为可逆实矩阵，则 A^TA 为正定矩阵，则存在正定矩阵 C，使得 $A^TA = C^2 = C^TC$，于是：$I = (C^{-1})^T C^T C C^{-1} = (C^{-1})^T A^T A C^{-1} = (AC^{-1})^T AC^{-1}$.

即 AC^{-1} 为正交阵，从而 $A = (CA^{-1})^T C$ 为正交矩阵和正定矩阵的乘积.

(1) 设 A 为 n 阶实对称矩阵，证明：A 为半正定矩阵当且仅当存在实对称矩阵 B，使得 $B^2 = A$.

证明：($\Leftarrow$) 若 $A = B^2$，设 B 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则 A 的特征值为 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2$ 均非负，则 A 为半正定阵.

($\Rightarrow$) 若 A 为半正定阵，则存在正交阵 T，使得 $A = T^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}T$，

由半正定矩阵特征值非负，有：$A = T^{-1}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix} T T^{-1} \begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix} T$

令 $B = T^{-1}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix} T$，则有 $A = B^2$. #

特别地，当 A 为半正定矩阵时，A 为半正定矩阵的平方

A 为正定矩阵时，A 为正定矩阵的平方.

5. 证明：上三角形的正交矩阵必为对角矩阵，且对角线上元素为+1或-1.

证明：设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 为正交阵，则

$$A^TA=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{12} & \cdots & a_{11}a_{1n} \\ a_{11}a_{12} & a_{12}^2+a_{22}^2 & \cdots & a_{12}a_{1n}+a_{22}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11}a_{1n} & a_{1n}a_{12}+a_{2n}a_{22} & \cdots & a_{1n}^2+a_{2n}^2+\cdots+a_{nn}^2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$ 通过比较矩阵元素，解方程有 $a_{ij}=0, \forall i\neq j$，且 $a_{ii}=1$ 或 -1

6. (1) 设 A 为一 n 级实矩阵，且 $|A|\neq 0$，求证：A 可以分解为 $A=QT$，其中 Q 为正交矩阵，T 为上三角矩阵：$T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$ 且 $t_{ii}>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$

并且此分解是唯一的

(2) 设 A 为 n 级正定矩阵，证明：存在一上三角形矩阵 T，使得 $A=T'T$.

证明：(1) 【想法：对矩阵 A 的列向量组做 Schmit 正交化的过程，相当于在 A 的右边乘上一些上三角形矩阵，且对角线上的元素全部大于0。】

1° 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，下对向量组做正交化和单位化变为正交阵：

有 $\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= t_{11}\alpha_1 \\ \gamma_2 &= t_{21}\alpha_1+t_{22}\alpha_2 \\ &\vdots \\ \gamma_n &= t_{n1}\alpha_1+\cdots+t_{nn}\alpha_n \end{aligned}\right\}$ 于是，$(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & \cdots & t_{n1} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{n2} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$ 且 $t_{ii}>0$

令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$，$T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & \cdots & t_{n1} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$ $(t_{ii}>0)$ 有 $Q=AT$

于是 $A=QT^{-1}$，其中 Q 为正交阵，T^{-1} 仍为上三角阵，且对角线元素为 $\frac{1}{t_{ii}}>0$，

2° 验证分解的唯一性.

若 A 有两种分解 $A=QT=Q_1T_1$，其中 Q、Q_1 均为正交阵，T 和 T_1 均为对

角线元素为正的上三角阵. 于是: $Q_1^{-1}Q = T_1T^{-1}$, 左边 $Q_1^{-1}Q$ 为正交阵, 右边 T_1T^{-1} 为对角线元素为正的上三角形阵. 于是 T_1T^{-1} 为对角阵且对角线上元素全为1. 即 $Q_1^{-1}Q = T_1T^{-1} = I$, 从而 $Q_1 = Q$, $T_1 = T$, 即 A 的分解是唯一的.

(2) 若 A 为 n 阶正定矩阵, 则存在可逆矩阵 P, 使得 $A = P^TP$, 由 (1) 知 ∃ 正交阵 Q 和三角阵 T 使得 $P = QT$, 于是 $A = T^TQ^TQT = T^TT$, 即存在上三角矩阵 T, 使得 $A = T^TT$. #

7、(1) 若 A 为 n 阶实方阵, $A'A = I$, 且 $|A| = -1$, 则 $|A+I| = 0$

证明. A 为正交阵, 设 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ 为 A 特征值 则 $|\lambda_k| = 1$, $\forall k = 1, 2, \ldots, n$. 则 A 的特征值有三类: 1、-1 和虚数 $\cos\theta \pm i\sin\theta$. 由于虚根成对出现, $|A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = -1$ 知 A 的特征值中一定存在 -1. 于是: $|(-1)I - A| = (-1)^n|I + A| = 0$, 故 $|A+I| = 0$.

Rmk: 正交阵只要 $|A| = -1$, 则一定存在 -1 为其特征值.

(2) 若 A. B 均为 n 阶正交阵, 且 $|A| = -|B|$, 则求证: $|A+B| = 0$, 进而秩 $(A+B)^* \le 1$.

证明: 由 A.B 为正交阵知 AB^{-1} 也为正交阵, 且 $|AB^{-1}| = \frac{|A|}{|B|} = -1$. 于是 -1 为 AB^{-1} 的特征值, 故 $|-I - AB^{-1}| = |-BB^{-1} - AB^{-1}| = (-1)^n|A+B||B^{-1}| = 0$, 由 $|B^{-1}| \ne 0$ 知 $|A+B| = 0$. 进而秩 $(A+B) \le n-1$. 于是秩 $(A+B)^* = 1$ 或 0.

(3) 求证: 不存在正交阵 A. B, 使得 $A^2 = AB + B^2$.

证明 反证: 若存在 n 阶正交阵 A. B, 使得 $A^2 = AB + B^2$, 则有:

$$A^2 = (A+B)B \Rightarrow A+B = A^2B^{-1}; \quad A(A-B) = B^2 \Rightarrow A-B = A^{-1}B^2$$

由 A. B 为正交阵知 A^2, B^{-1}, A^{-1}, B^2 均为正交阵 且乘积也为正交阵. 于是 A+B 和 A-B 也为正交阵, 故

$$I = (A+B)^T(A+B) = A^TA + A^TB + B^TA + B^TB = 2I + A^TB + B^TA$$

$$I = (A-B)^T(A-B) = A^TA - B^TA - A^TB + B^TB = 2I - (A^TB + B^TA)$$

两式相加 $2I = 4I$ 矛盾. #

8. 设实对称矩阵A所有特征根模为1，证明：A为正交阵 No.

证明. A为实对称阵，则存在正交阵T，使得 $A=T^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}T$

由于 $\lambda_1\cdots\lambda_n$ 为A的特征根全为实数，且 $|\lambda_i|=1$ 知 $\lambda_i=1$ 或 -1，

于是 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 也为正交阵，于是A为三个正交阵的乘积为正交阵.

9、实矩阵A的特征值全为实数 当且仅当 存在正交矩阵Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为三角形矩阵（上三角形或下三角形矩阵）

证明（$\Leftarrow$）只考虑上三角形矩阵，若存在正交阵Q，使得 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}b_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n\end{pmatrix}$

则由 A, Q, Q^{-1} 均为实矩阵，故 $b_1\cdots b_n$ 均为实数，因此A的特征值为 $b_1,\cdots b_n$ 全为实数.

（$\Longrightarrow$）设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为所有不同的特征值，则存在可逆矩阵P，使得

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s\end{pmatrix}$，其中 $J_k=\begin{pmatrix}\lambda_k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \lambda_k\end{pmatrix}$

又由P为可逆阵，存在正交阵Q和实可逆上三角阵T，使得 $P=QT$

于是：$(QT)^{-1}A\,QT=\begin{pmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s\end{pmatrix}$，进而：$Q^{-1}AQ=T\begin{pmatrix}J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s\end{pmatrix}T^{-1}$

为三个上三角形矩阵的乘积，也为上三角形矩阵. #

10. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 则A与B是否合同？是否相似？

注意到A、B均为实对称阵

解. A和B均为实对称阵，B为4个特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$，$\lambda_4=4$.

A的特征多项式 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&-1&-1\\-1&-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^3(\lambda-4)=0$ 知A有四个特征值 0,0,0,4，

故存在正交阵 T_1, T_2，使得 $T_1^{-1}AT_1=\begin{pmatrix}4&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix}=T_2^{-1}BT_2$

于是：$A=T_1T_2^{-1}BT_2T_1^{-1}=(T_2T_1^{-1})^{-1}B(T_2T_1^{-1})$ 且 $T_2T_1^{-1}$ 为正交阵

故A和B既为合同，也为相似. #