

# 1 集合

## 1.1 定义

(1) 集合相等:  $\forall a \in A \Rightarrow a \in B \wedge \forall b \in B \Rightarrow b \in A$ , 则  $A = B$

(2) 集合包含:  $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$ , 则  $A \subseteq B$

(3) 真包含:  $\forall a \in A \Rightarrow a \in B \wedge \exists b \in B, b \notin A$ , 则  $A \subsetneq B$

(4) 幂集:  $\mathcal{P}(A) = \{S | S \subseteq A\}$

如  $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

(5) 积集: (举例)  $A = \{1, 2\}, B = \{m, n\}$ , 则  $A \times B = \{(1, m), (1, n), (2, m), (2, n)\}$

注意  $A \times B \neq B \times A$ , 除非  $A = B$ , 因为这数组是有序的

(6) 集合运算:  $\cup, \cap, -$

补运算 ( $-$ ):  $A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ , 注意  $A - B, B - A$  都是可以定义的而且不一定相等

若取  $A = U$ , 则  $A - B = \bar{B}$  ( $B$  的补集)

## 1.2 定理

(1)  $A$  是有限集合, 则  $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

(2)  $A, B$  是有限集合, 则  $|A \times B| = |A||B|$ ,  $|\times_{i=1}^n A_i| = \prod_{i=1}^n |A_i|$

(3)  $\forall A, A \cup \bar{A} = U, A \cap \bar{A} = \emptyset$

(4) 集合的运算成立交换律、结合律、分配律 (格)

## 1.3 集合的归纳定义 (重点)

集合的归纳定义是由基础语句, 归纳语句和终结语句三个部分组成的。

### 1.3.1 非负偶整数集合 $E$

1° (基础语句)  $0 \in E$

2° (归纳语句) 若  $n \in E$ , 则  $n + 2 \in E$

3° (终结语句) 除了有限多次使用 1°, 2° 产生的整数之外再也没有其他元素属于  $E$

### 1.3.2 字母表 $\Sigma$ 上所有非空行集合 $\Sigma^+$

1°（基础语句）若 $a \in \Sigma$ ，则 $a \in \Sigma^+$

2°（归纳语句）若 $x \in \Sigma^+$ 且 $a \in \Sigma$ ，则 $ax \in \Sigma^+$

3°（终结语句）除了有限多次使用1°，2°产生的行之外再也没有其他元素属于 $\Sigma^+$

tips: 注意性质，一个是字母表，一个是行，空行 $\lambda$ 不属于字母表哈

### 1.3.3 字母表 $\Sigma$ 上所有行集合 $\Sigma^*$

1°（基础语句） $\lambda \in \Sigma^*$

2°（归纳语句）若 $x \in \Sigma^*$ 且 $a \in \Sigma$ ，则 $ax \in \Sigma^*$

3°（终结语句）除了有限多次使用1°，2°产生的行之外再也没有其他元素属于 $\Sigma^*$

### 1.3.4 仅由整数、一目运算符 $+$ , $-$ ，二目运算符 $+$ , $-$ , $*$ , $/$ 记括号组成的算术表达式

1°（基础语句） $D = \{0, 1, \dots, 9\}$ ，若 $x \in D^+$ ，则 $x$ 是算术表达式

2°（归纳语句）若 $x, y$ 是算术表达式，则 $(+x), (-x), (x + y), (x - y), (x * y), (x / y)$ 也是算术表达式

3°（终结语句）一个符号行是算术表达式，当且仅当它是有限次使用1°，2°得到的

tips: 这个定义未排除前导0

### 1.3.5 令 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , 十进制无符号整数集 $E$

1.如果  $a \in A$ ， 则  $a \in E$

2.如果  $x \in E$ ， 且  $a \in A$ ， 则  $a$  与  $x$  的连接  $ax \in E$

3.集合  $E$ 只包含有限次使用 1,2 所得到的元素。

### 1.3.6 令 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , 带有限小数部分的无符号实数集 $E$

1.如果  $a \in A$ ， 则  $a. \in E$

2.如果  $x \in E$ ， 且  $a \in A$ ， 则  $a$  与  $x$  的连接  $ax, xa \in E$

3.集合  $E$ 只包含有限次使用 1,2 所得到的元素。

### 1.3.7 令 $A = \{0, 1\}$ , 不以 0 打头的二进制偶整数集 $E$

1.有  $0, 10 \in E$

2.如果  $1x0 \in E$ , 且  $a \in A$ ， 则将  $a$  插在  $x$  后的  $1xa0 \in E$

3.集合  $E$ 只包含有限次使用 1,2 所得到的元素。

### 1.3.8 自然数集合上的“小于”关系 $R$

1°（基础语句） $(0, 1) \in R$

2°（归纳语句）若 $(x, y) \in R$ ，则 $(x, y + 1) \in R, (x + 1, y + 1) \in R$

3°（终结语句）集合 $R$ 只包含有限次使用 1°, 2° 所得到的元素