

第12次作业反馈

8.1

按照定义证明

格的定义：部分序集，任意两个元素存在最大下界和最小上界（具体证明过程略）

$\forall a, b \in R_1$ ， a, b 的最大下界为 $\min(a, b)$ ，最小上界为 $\max(a, b)$ ，所以 $a * b = \min(a, b)$ ， $a \oplus b = \max(a, b)$

8.3

证明： $a * c \leq a \leq b, a * c \leq c \leq d \Rightarrow a * c \leq b * d$

所以 $a * c$ 是 b, d 的一个下界，由最大下界 $(*)$ 的定义， $a * c \leq b * d$

8.6

- 由于 $B \subseteq A$ ，则 \leq 在 B 上仍然为自反、反对称、传递的，为部分序
- $\forall x, y \in B$ ，则 $x, y \in A$ ，且 $a \leq x, y \leq b$
 $x, y \in A$ ，故 $x * y$ 是 $\{x, y\}$ 的最大下界， $x \oplus y$ 是 $\{x, y\}$ 的最小上界
由于 $a \leq x, a \leq y, a \leq x * y$ ，又 $x * y \leq x \leq b$ ，则 $a \leq x * y \leq b$
同理， $a \leq x \oplus y \leq b$
故 $x * y, x \oplus y \in B$ ，为最大下界和最小上界

8.8

乘法表如下：

	1	3	5	15	25	75
1	1	1	1	1	1	1
3		3	1	3	1	3
5			5	5	5	5
15				15	5	5
25					25	25
75						75

加法表如下：

	1	3	5	15	25	75
1	1	3	5	15	25	75
3		3	15	15	75	75
5			5	15	25	75
15				15	75	75
25					25	75
75						75

从加法表和乘法表可以得到，互为逆元的有 (1,75), (3,25)

8.12

⇒：（方法不唯一，本题出错的同学比较少，在此提供一种解法）

$$\begin{aligned}
 (a \oplus b) * (b \oplus c) * (c \oplus a) &= (((a \oplus b) * b) \oplus ((a \oplus b) * c)) * (c \oplus a) = (b \oplus a * c \oplus b * c) * (c \oplus a) \\
 &= b * c \oplus b * a \oplus a * c \oplus a * c \oplus b * c \oplus b * c * a = (b * c) \oplus (b * a) \oplus (a * c)
 \end{aligned}$$

⇐：（方法不唯一，在此提供一些解法）

方法一：

(\Leftarrow): 格中任意元素 a, b, c

$$\text{令 } \begin{cases} a' = (a \times b) \oplus (a \times c) \\ b' = b \times c \\ c' = a \end{cases}$$

a', b', c' 仍在格中

$$\text{且有 } (a' \times b') \oplus (b' \times c') \oplus (c' \times a') = (a' \oplus b') \times (b' \oplus c') \times (c' \oplus a') \quad (*)$$

将 a', b', c' 代入,

$$\begin{aligned} & (a' \times b') \oplus (b' \times c') \oplus (c' \times a') \\ = & [(a \times b) \oplus (a \times c) \times (b \times c)] \oplus [b \times c \times a] \oplus [a \times ((a \times b) \oplus (a \times c))] \\ \because & a \times b \leq a \quad a \times c \leq a \\ \therefore & (a \times b) \oplus (a \times c) \leq a \\ \therefore & a \times [(a \times b) \oplus (a \times c)] = (a \times b) \oplus (a \times c) \\ \therefore & (a' \times b') \oplus (b' \times c') \oplus (c' \times a') \\ = & [(a \times b) \oplus (a \times c) \times (b \times c)] \oplus [b \times (c \times a)] \oplus [(a \times b) \oplus (a \times c)] \\ = & [(a \times b) \oplus (a \times c) \times (b \times c)] \oplus [(a \times b) \oplus (a \times c)] \quad (a \times b \times c \leq a \times c) \\ = & (a \times b) \oplus (a \times c) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{同理, } & (a' \oplus b') \times (b' \oplus c') \times (c' \oplus a') \\ = & [(a \times b) \oplus (a \times c) \oplus (b \times c)] \times [(b \times c) \oplus a] \times [a \oplus (a \times b) \oplus (a \times c)] \\ = & [(a \times b) \oplus (a \times c) \oplus (b \times c)] \times [(b \times c) \oplus a] \times a \quad (a \geq a \times b, a \geq a \times c) \\ = & [(a \times b) \oplus (a \times c) \oplus (b \times c)] \times a \\ = & [(a \oplus b) \times (a \oplus c) \times (b \oplus c)] \times a \quad (2) \\ = & a \times (b \oplus c) \end{aligned}$$

$$\text{由 } (*)(1)(2), \quad (a \times b) \oplus (a \times c) = a \times (b \oplus c)$$

$$\text{由对偶性, 可证 } (a \oplus b) \times (a \oplus c) = a \oplus (b \times c)$$

\therefore 该格为分配格

方法二:

反证。利用定理8.13和8.14, 反设此格不是分配格, 则格中有子格同构于钻石格或菱形格。将 a, b, c 取为这三个子格中间的三个元素, 直接验证即可与题设条件导出矛盾。

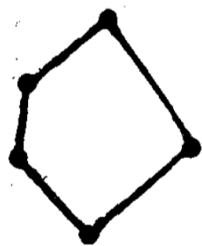


图 22

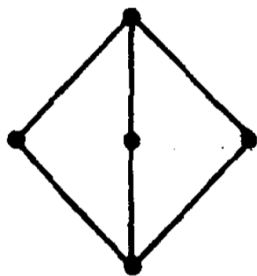


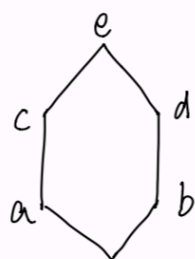
图 23

定理 8.13 格是模格当且仅当它不包含一个 5 元子格与图 22 同构。

与此类似的定理我们不加以证明只叙述如下。

定理 8.14 格是分配格当且仅当该格是模格且不包含一个 5 元子格与图 23 同构。

注：本题有同学采用分配不等式方法证明，需要注意的是，如下例所示， $a \oplus b \leq c \oplus d$ 取等号，但 $a \leq c, b \leq d$ 却可以不取等



$$a < c, b < d$$

$$a \oplus b = c \oplus d$$