

Level 3 实验报告

PB20111686 黄瑞轩

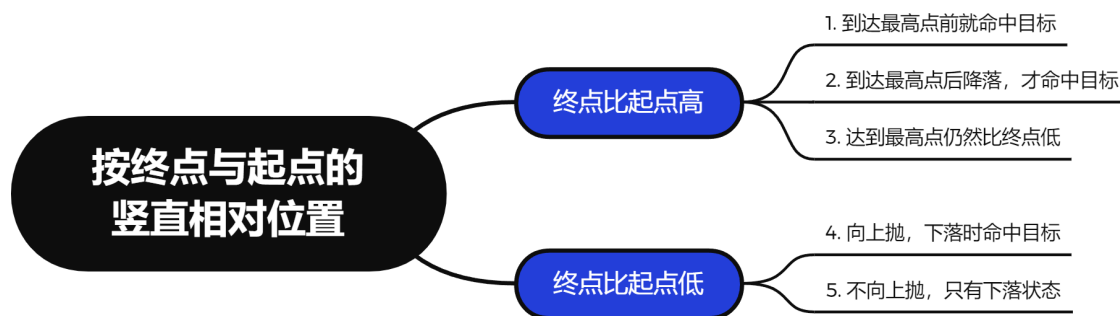
选题：Level 3.6 【物理】

接【数学】Level 2.3 野外彩弹 CS 游戏，考虑重力和空气阻力影响，给定发射点坐标 (x_0, y_0, z_0) ，落点坐标 (x_1, y_1, z_1) ，空气阻力 f (矢量，以 (f_x, f_y, f_z) 表示)，及彩弹的初速度大小 v_0 (标量数值)，使用 numpy、math 库等工具求解满足给定起点、落点、空气阻力和初速的发射仰角。

提示 1：默认 $g = 9.8$ 为常数；如果初速度过小，解可能不存在

提示 2：弹道计算机的雏形

思路：问题的关键是否**上抛**。从上抛到下落的过程会导致加速度变化，是这个问题的主要难点。在竖直方向，向上运动的加速度为 $g + fz/m$ (向下)，向下运动的加速度为 $g - fz/m$ (定向下)，须知空气阻力**不是动力**。其不可能导致原本向下运动的物体向上运动，所以可以认为向下运动的物体受到的 z 方向加速度仍然是向下的。



这里列出 5 种可能的情况，我们发现情况 1 和 5 是比较特殊的，情况 2 ~ 4 都是上抛再降落的情况，特判讨论即可。（详细推导过程放置在本文附录，助教可凭心情查看）

程序将采用类似二分法（这里参数设置成 1.1）进行逼近，对于每一个试探解，计算出其落点位置与需求位置的相对误差 e ，当 $e < \epsilon$ 时停止迭代并输出解。

如果经过以上三种情况判断后都没有解，程序就判断没有解。

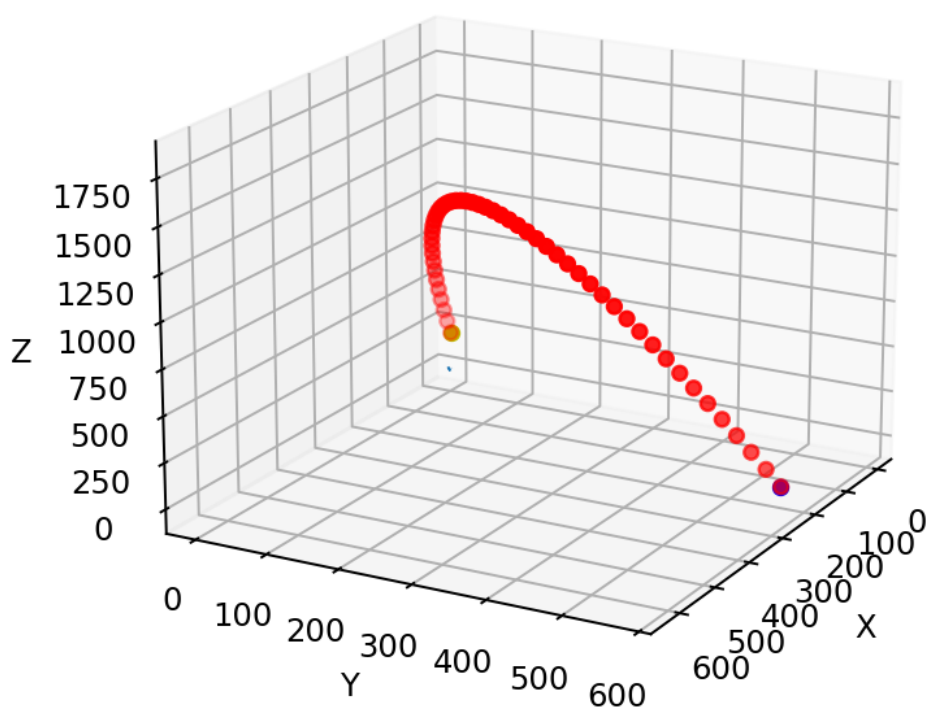
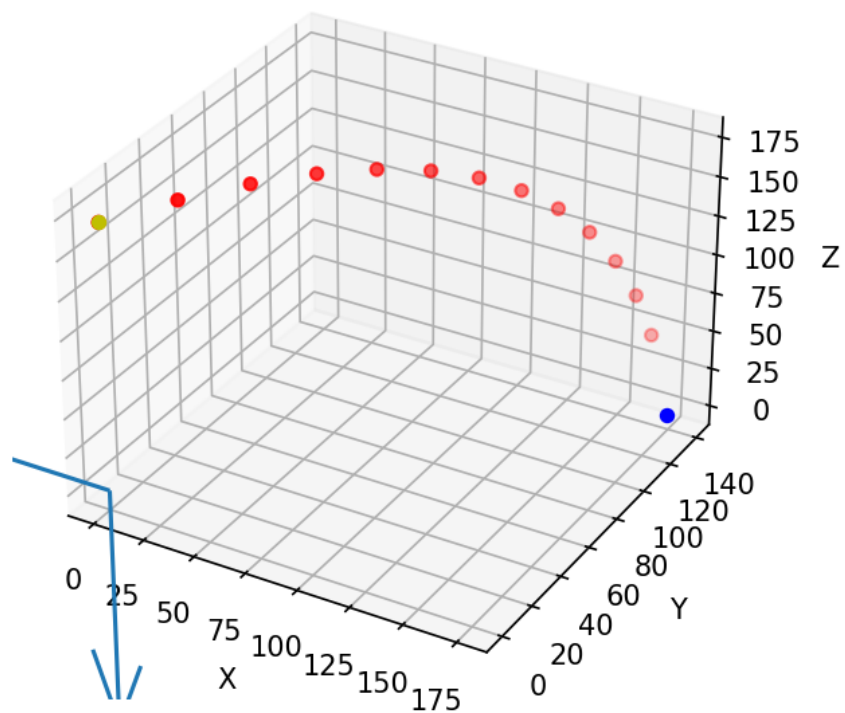
按照计算出的 (v_x, v_y, v_z) 来做时序模拟，所得结果如下所示。黄色点是初始位置，蓝色点是末了位置。

这里时序模拟用到了 matplotlib 和 numpy 库。

测试截图：

```
10258@DESKTOP-CSAR08L MINGW64 /d/_USTC/Study_Materials/4/Class-Python/level3 (main)
$ python main.py
from (5.0, 166.0, 4.0) to (181.0, 85.0, 130.0), initial speed is 69.0, air force is (4.0, 8.0, 14.0)
For condition 0 Iteration[0], e = 48423.8723777798
For condition 0 Iteration[1], e = 17363.648735337545
For condition 0 Iteration[2], e = 1.8676143435350332
For condition 1 Iteration[0], e = 48258.68513169832
For condition 1 Iteration[1], e = 20093.649902097142
For condition 1 Iteration[2], e = 65.68436754765133
For condition 1 Iteration[3], e = 0.8435983112575132
For condition 2 Iteration[0], e = 11.210607451294244
For condition 2 Iteration[1], e = 8.95766609420703
A solution found: vec: v0 = (-70.50185528756957, -55.18274582560295, -116.66141001855287)
A solution found: vec: v0 = (-70.50185528756958, -62.428149772305595, -116.42865575982458)
A solution found: vec: v0 = (7.45918367346939, -41.86734693877549, -22.826530612244895)
```

3d_image_show



用法:

```
$ python3 main.py
```

注: 这里如不做另外的修改, 程序将通过 `generate` 系列函数随机生成一系列位置数据。

附录：诸情况的数学证明

(1) 到达最高点前就命中目标

在竖直方向，有 $z_1 - z_0 = vzt - \frac{1}{2}(g + fz/m)t^2$

解之，得 $t = \frac{vz - \sqrt{vz^2 - 2(g + fz/m)(z_1 - z_0)}}{g + fz/m}$

此时，对于 x, y 方向，约束条件： $x_1 - x_0 = vxt - \frac{1}{2}(fx/m)t^2$, $y_1 - y_0 = vyt - \frac{1}{2}(fy/m)t^2$

为了操作方便，将 t 作为一个辅助函数：

```
def t(vz, fz, z1, z0):  
    return ...
```

于是约束函数为：

$$L = \left[vxt - \frac{1}{2}(fx/m)t^2 - (x_1 - x_0) \right]^2 + \left[vyt - \frac{1}{2}(fy/m)t^2 - (y_1 - y_0) \right]^2 + [\sqrt{vx^2 + vy^2 + vz^2} - v_0]^2$$

这里需要捕捉的异常为： t 是否是负数

(5) 不向上抛，只有下落状态

在竖直方向，有 $z_1 - z_0 = vzt - \frac{1}{2}(g - fz/m)t^2$

解之，得 $t = \frac{vz - \sqrt{vz^2 - 2(g - fz/m)(z_1 - z_0)}}{g - fz/m}$

此时，对于 x, y 方向，约束条件： $x_1 - x_0 = vxt - \frac{1}{2}(fx/m)t^2$, $y_1 - y_0 = vyt - \frac{1}{2}(fy/m)t^2$

于是约束函数为：

$$L = \left[vxt - \frac{1}{2}(fx/m)t^2 - (x_1 - x_0) \right]^2 + \left[vyt - \frac{1}{2}(fy/m)t^2 - (y_1 - y_0) \right]^2 + [\sqrt{vx^2 + vy^2 + vz^2} - v_0]^2$$

合适的话有解，无解的情况比较复杂，不做讨论了。

(2 ~ 4) 诸情况

上抛过程： $t_1 = vz/(g + fz/m)$ ，高度 $h = vz^2/2(g + fz/m)$

此时需要判断是否是情况（3）。

下落过程： $z_0 + h - z_1 = \frac{1}{2}(g - fz/m)t_2^2$ ，可以求出 $t_2 = \sqrt{2(z_0 - z_1 + h)/(g - fz/m)}$ 。

此时，对于 x, y 方向，约束条件： $x_1 - x_0 = vxt - \frac{1}{2}(fx/m)t^2$, $y_1 - y_0 = vyt - \frac{1}{2}(fy/m)t^2$

于是约束函数为：

$$L = \left[vxt - \frac{1}{2}(fx/m)t^2 - (x_1 - x_0) \right]^2 + \left[vyt - \frac{1}{2}(fy/m)t^2 - (y_1 - y_0) \right]^2 + [\sqrt{vx^2 + vy^2 + vz^2} - v_0]^2$$

这里 $t = t_1 + t_2$ ，合适的话有解，无解的情况比较复杂，不做讨论了。