第三周作业选讲

助教　黄瑞轩

1. 利用两边夹定理求极限（$n \to \infty$）

（2）$a_n = \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i^\alpha} (\alpha > 1)$

（3）$a_n = (n+1)^k - n^k (0 < k < 1)$

（4）$a_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$

（5）$a_n = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{2}$

2. 证明数列收敛

（1）　$a_n = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^i}\right)$

（2） $a_n = \prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^i}\right)$

3. 证明数列收敛并求极限

（1） $a_n = \sin\sin\ldots\sin n$（n 个）

（3）$a_1 = \dfrac{c}{2}, a_{n+1} = \dfrac{c}{2} + \dfrac{{a_n}^2}{2} (0 \le c \le 1)$

（5）$a_1 > 1, a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$

4. 利用 Cauchy 收敛准则判别敛散性

（1） $a_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i q^i, |\alpha_i| \le M, |q| < 1$

（2）$a_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos i!}{i(i+1)}$

（3）$a_n=\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{1}{\sqrt{i}}$

判断数列收敛的方法

（1）　定义分析法

（2）　适当放大法

（3）　两边夹

（4）　单调有界判别法

（5）　柯西收敛准则

求数列极限的方法

（1） 有些判断极限收敛的同时也可以求极限

（2） Stoltz 定理

（3） 极限的四则运算

（4） 已知的一些数列极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}=0, a>1$$

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0, |q|<1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1, a>0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

（5） Heine 定理

$\lim_{x\to a}f(x)=b$存在的充要条件是：取$f(x)$定义域内的任意数列$\{a_n\}$，$\lim_{n\to\infty}a_n=a$，且a_n不等于a，有$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=b$.

海涅定理表明了函数极限与数列极限的关系。如果极限$\lim_{x\to x_0}f(x)$存在，$\{x_n\}$为函数$f(x)$的定义域内任一收敛于X0的数列，且满足：$x_n\neq x_0, n\in N^+$，那么相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$必收敛，且$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{x\to x_0}f(x)$.