1. 设*f*是将区间[*a*, *b*]映入自身的连续映射。从[*a*, *b*]内任一点*x*出发，用，生成迭代数列。证明：收敛的充分必要条件是。

证明：由Cauchy收敛准则容易得出；

由，得，

由于，则有收敛子列，设收敛于，

则，。

1. (Toeplitz定理)设，又有。若已知，则。

证明：由可知，有界，即，

同时，，

由知，，

取，当时，有



即，证明完毕。

注记：（1）令，可以快速推导出Cauchy命题；

（2）令，可以快速推导出Stolz定理；

（3）将条件改为，结论仍然成立。

相关例题1：设，证明：。

其中而且。

证明：令，显然，

再由，，则



由夹逼定理知，于是由Toeplitz定理可得出结论。

相关例题2：设，证明：。(提示：令.)

1. 设函数*f*在(*a*,*b*)内连续，且为有限值，证明：

（1）*f*在(*a*,*b*)内有界；

（2）若存在使得，则*f*在(*a*,*b*)内能取到最大值；

（3）*f*在(*a*,*b*)上一致连续。

证明：（1）（证法一）

设，则对任意的，，使得：

当时，有；

当时，有；

由于在上连续，则在上有界，设界为，

取，

则当时，有。证毕。

（证法二）补充定义，令



则在闭区间上连续，则在闭区间上有界，设界为，

则当时，有。证毕。

证明：（2）由（1）的证法二知，在闭区间上连续，则，使得。

若取，则；

又存在使得，则：

若，则存在使得；

若，则。

证明：（3）在闭区间上连续，所以在闭区间上一致连续，则*f*在上一致连续。

1. 设正数列的前*n*项和数列收敛，求证：数列收敛于0。

(提示：)

1. (压缩映照原理)设*f*是将区间[*a*, *b*]映入自身的连续映射。且满足，其中是[*a*, *b*]上任意两点，。证明：存在唯一的使得。

证明：任取，由条件“*f*是将区间[*a*, *b*]映入自身的连续映射”知，我们可递推地定义



由函数所满足的条件，我们有



反复应用上述不等式，可得



Accordingly, 对任意的正整数*n*和*p*，有



而



由此可知是基本列，从而它收敛，记极限为*c*。显然，。又由于



所以当时，，必有。（也可用Cauchy判则证连续性）

在两边同时取极限就得到，这样*c*的存在性得证。

若存在，则



即得矛盾，从而的唯一性得证。

1. 设函数定义在上，在每一个有限区间内有界，并满足。

求证：。

证明：先设

则，

其中，

由于在每一个有限区间内有界，则在区间内有界，

。

于是，由，得到



当充分大(*n*>*N*)时，，于是当时，，即。

若，

，

且，故*F*在每一个有限区间内有界，于是由上述结论，

得到。