第 27 卷 第 2 期

Journal of Tianshui Normal University

Vol.27 No.2

由迭代生成数列收敛的条件

程希旺

( 淮阴师范学院 数学系,

江苏 淮安

223300)

要: 探讨了由初始值 x1和递推公式 xn+1=f(xn), n∈N+通过迭代生成的数列{xn}的收敛性与函数 f的关系,

摘

若 lim xn= ξ, 则ξ必为函数f的不动点。给出了数列{xn}收敛的若干充分条件和必要条件。

n→+∞

为:

关键词: 迭代; 数列; 收敛;

条件

中图分类号: O172

文献标识码: A

文章编号: 1371- 1351 ( 2007) 02- 0018- 02

所 谓

“由 迭 代 生 成 的 数 列 ”,

是 指 在 给 出 数 列 的 第 一

证 明 :

( 1) 当f在 区 间I 上 单 调 增 加 时 , 由 条 件 ,

有

项x1后, 用递推公式xn+1=f( xn) , n∈N+通过迭代生成的数列。

xn∈I,n∈N+ 。如有x1≤x2, 用数学归纳法可以证明{xn}单调增

这样的数列在数学和许多应用领域中经常出现,

有 很 强 的

加。事实上,

若xn≤xn+1, 则xn+1=f(xn)≤f(xn+1)=xn+2 。又由于函

理论和实用价值。例如, 大量的近似计算方法都是 通 过 迭

代方式来实现的。 [1] 判定由迭代生成的数列的收敛性, 除

数f在区间I上有界,

所以数列

{xn} 有界。因 此 ,

根 据 单 调

有界定理, 数列 {x } 收敛。如果x ≥x , 类似可以证 明{x }

1 2

n

n

了直接利用单调有界 定 理 和Cauchy收 敛 准 则 外 ,

还 可 利 用

单调减少且有界, 从而收敛。

( 2) 当f在区间I上单调减少时,

函数f自身的性质来判定, 本文主要利用函数f的性质讨论由

迭代生成数列收敛的条件。

如有x1≤x3,

用数学归

若x2k- 1≤x2k+1,

纳法可以证明{x2k- 1}单调增加。事实上,

则x2k=

f(x2k - 1)≥f (x2k +1)=x2k +2,

x2k +1= f (x2k) ≤ f (x2k +2) =x2k +3 。 再 由 x2k=

预备知识

1

f (x2k- 1), 可知{x2k}单调减少。又由于函数f在区间I上有界,

所

以数列{x2k- 1}和{x2k}都有界。因此, 根据单调有界定理,

数列

定义1 [2]

设f为定义在数集D上的函数,

ξ∈D, 若ξ是

{x2 1}和{x }都收敛。如果x ≥x , 证明完全类似。

k- 2k

1 3

方程f ( x) =x的根, 则称ξ为函数f的不动点。

注:

定理2中, 当f在区间I上单调减少时,

由迭代生成

定 义2 [3]

设f为 定 义 在 数 集D上 的 函 数 , f (D) "D,

的数列{x }可能收敛, 也可能发散。但{x }的两个子列{x }和

n

n

2k- 1

若存在常数k∈(0, 1), 使得对一切x、y∈D, │f(x)- f(y)│≤k

{x2k}都收敛。可见,

由迭代生成数列的敛散性取决于两个子

│x- y│成立,

缩常数。

则称f为D上的一个压缩 映 射 ,

称 常 数k 为 压

列{x2k- 1}和{x2k}的极限是否相 等 。 若{x2k- 1}和{x2k}的 极 限 相 等 ,

则数列{xn}必定收敛, 否则发散。

定理3 设f是[a,b]上的一个压缩映射,

则由任何初始值

2

主要结果

x1∈[a,b]和递推公式xn+1=f(xn), n∈N+ 生成的数列{xn}收敛。

证明: 由于f是[a,b]上的压缩映射, 故f ( [a,b]) "[a,b],

定 理1

设 数 列

{xn} 满 足 递 推 关 系 xn +1= f (xn),n ∈N+ ,

{x }必在[a,b]中, 且(常数k∈(0,1), 使得)n∈N+, )p∈N+

n

有

其中f为连续函数。若 lim xn= ξ, 则ξ必为函数f的不动点。

n→+∞

证明: 由条件, f在点ξ连续, 即limf( x) = f (ξ) 。根据He-

x→ξ

ine归结原理, lim f(xn)= f(ξ)。在xn+1= f (xn)的两边取n→+∞时

n→+∞

的极限, 即得ξ=f(ξ), 故ξ为函数f的不动点。

│xn- xn+p│=│f( xn- 1) - f( xn+p- 1) │≤k│xn- 1- xn+p- 1│

≤k2│x - x │≤ ≤kn│x - x │≤kn( b- a)

n- 2 n+p- 2

0 p

ln $

b- a

可 见 ,

)$ >0 ( 不 妨 设 $ <b - a ) ,

只 要 取 N= [

],

lnk

注 :

定 理1 为 由 迭 代 生 成 数 列 收 敛 的 一 个 必 要 条 件 。

)n∈N, )p∈N+ , 都 有│xn- xn+p│<$。 根 据Cauchy收 敛 准

则, {xn}收敛。

若函数f没有不动点, 则数列{xn}必定发散。

定理2 设数列{xn}满足递推关系xn+1=f(xn), n∈N+ ,

其

推论

设f是定义在[a,b]上的可导函数, f( [a,b]) "[a,b] ,

中函数f在区间I上单调且有界, 同时{xn}的每一项都在区间I

中, 则⑴当f在区间I上单调增加时, {xn}收敛; ⑵当f在区间I

若 存 在 常 数 k ∈(0,1), 使 得 对 一 切 x ∈[a,b],

成 立 不 等 式

│f′(x)│≤k, 则由任何初始值x1∈[a,b]和递推公式xn+1= f(xn),

n∈N+生成的数列{xn}收敛。

上单调减少时,

{xn}的两个子列{x2k- 1}和{x2k}都收敛。

收稿日期:

2006- 12- 15

作者简介: 程希旺 ( 1969- ) , 男, 江苏淮阴人, 淮阴师范学院数学系讲师, 硕士。

18

证明: 由Lagrange中值定理, !x、y∈[a,b],

有

射。根据定理3, 即得所要证明的结论。 当 1 ≤α< 1 时,

2l

l

│f (x)- f (y)│=│f′(ξ)│·│x- y│≤k│x- y│,

x<ξ<y 或y< ξ<x, 于是f是[a,b]上的一个压缩映射。根据定理

3, 由任何初始值x1∈[a,b]和递推公式xn+1= f(xn), n∈N+生成的 数列{xn}收敛。

定理3及其推论还可作如下推广:

1≤k<2, F 不 是 压 缩 映 射 。 但 由F([a,b])$[a,b]及x1∈[a,b]知 ,

对一切n∈N+, xn∈[a,b], 于是{xn}为一有界数列。下面只要 证明{xn}单调, 根据单调有界定理便可得到, {xn}收敛。事实

若f (x1)≥ 1- αl x1,

则x2=α[l x1+f (x1)]≥α[l x1+ 1- αl x1]

上,

α

α

定理4 设函数f在区间[a, b]上满足Lipschitz条件,

即存

=x , 而对n>1 , 若x ≤x ,

便有

1

n- 1 n

在常数l>0, 对一切x、y∈[a,b], 都有│f(x)- f (y)│≤l│x- y│,

f ( x )- f (x )≤│f ( x )- f (x )│≤l│x - x │=l( x - x

)

n- 1 n

n- 1 n

n- 1 n n n- 1

常数α满足: 0<α< 1 , f( [a,b]) #[ a , b ],

则由任何初始值

将带负号的项移到不等式的另一端,

即得

然后两边同乘以

α α

l

a,

x1∈[a, b]和递推公式xn+1=αf(xn), n∈N+生成的数列{xn}收敛。

证 明: 令F(x)=αf (x) , x∈[a, b] , 容 易 验 证F ([a, b])$

xn=α[l xn- 1+f (xn- 1)]≤α[l xn+f (xn)]=xn+1

αl

故{xn}单调递增。同理若f(x1)≤ 1-

可证{xn}单调递减。

[a, b], 对一切x, y∈[a, b],

有

x1,

α

│F (x)- F(y)│=α│f (x)- f (y)│≤αl│x- y│=k│x- y│

1

文 [4] 中的定理为本定理l=1, α= 2 时的特殊情形。

其中0<k=al<1, 所 以F 是 一 个 压 缩 映 射 ,

即得所要证明的结论。

定理5 设f是定义在[a, b]上的可导函数,

根 据 定 理3,

最后, 作为定理3及其推论的应用, 给出如下定理。

定理7 设f是定义在[a,b]上的可导函数, x+f(x)∈[a,b],

若存在常数

M>0, 使得对一切x∈[a, b], 成立不等式│f′(x)│≤M,

常数

若 存 在 常 数 k∈(0, 1), 使 得 对 一 切x∈[a, b] ,

成 立 不 等 式

α满 足 : 0<α< 1 , f ( [a,b])

$ [ a , b ],

│1+f′(x)│≤k, 则方程 f (x)=0在 [a,b]上至少有一个根。

证明: 令F (x)=x+f (x), x∈[a,b], 容易验证F符合定理3

推论的条件, 因此, 由初始值x1∈[a,b]和递推公式xn+1=F (xn)

则 由 任 何 初 始 值

M

α α

x1∈[a,b]和递推公式xn+1=af(xn),n∈N+生成的数列{xn}收敛。

证 明 : 容 易 验 证 (αf) ([a,b]) $[a,b], │ αf ′(x) │ ≤

=x +f (x ),n∈N+通 过 迭 代 生 成 的 数 列{x }收 敛 。 设 数 列{x }的

n n

n

n

αM<1, x∈[a,b]。于是, 函数αf满足定理3推论的条件,

理5得证。

定

极 限 为ξ, 则 由 定 理1, ξ为F 在[a,b]上 的 不 动 点 , 即!=F (")

=#+f ($), 从而, f (%)=0, 因此, 方程f (x)=0在[a,b]上至少有一 个根。

定 理6 设函数f在区间[a,b]上满足Lipschitz条件,

即存

在常数l>0, 对一切x, y∈[a,b], 都有│f (x)- f (y)│≤l│x- y│,

0<α< 1 , f ( [a,b] )$[ 1- αl a, 1- αl b],

常数α满足:

则由

参考文献:

α α

l

徐萃薇.计算方法引论[M].北京:高等教育出版社,1985.

刘世伟,李逊.泛函分析概要[M].北京:高等教育出版社,1987.

吴良森,毛羽辉,宋国栋,等.数学分析习题精解[M].北京:科学出版 社,2002.

席泓, 李庆玉. 关于两类递推数列的极限[J]. 贵州教育学院学报,

2001,12(4).

[1]

[2] [3]

任何初始值x1∈[a b]和递推公式xn+1=α[lxn+f(xn)],

的数列{xn}收敛。

n∈N+生成

证 明 : 令F (x)=α[lx+f(x)],

x∈[a,b],

容 易 验 证F([a, b])

$[a, b], 对一切x, y∈[a,b],

有

[4]

│F (x)- F(y)│=α│[l x+f (x)]- [l y+f (y)]│

≤α[l│x- y│+│f (x)- f (y)│]≤2αl│x- y│=k│x- y│

其中k=2αl 。当0<α< 1 时, 0<k<1, F是一个压缩映

〔责任编辑 王三福〕

2l

19