均值函数，方差函数，

联合分布，

自相关函数，协方差函数

同分布：和对任意*x*都是相等的

平稳过程：主要性质只与时间间隔有关，与考察起始点无关。

严格平稳：X(t)对任意t\_i∈T和任何h∈T有

**习题1.8**：一列独立随机变量Xi如果同分布，那么过程严平稳。

宽平稳：随机过程的所有二阶矩存在并有EX(t)=m，及协方差函数RX(t, s)只与时间差t-s有关，或称之为二阶矩平稳。

宽平稳过程：RX(s, t) = RX(0, t-s) := RX(t-s)

平稳独立增量过程的均值函数一定是t的线性函数。

独立和：Zi独立同分布, 独立和Xn=Σ0~nZi, {Xn}是**独立增量过程**

**证明：**即证ΔXn之间相互独立即可。

条件期望：

平滑公式：

矩母函数：

矩母函数（if存在）唯一确定了X的分布，通过它可求X的各阶矩：E[Xn] = g(n)(0), n≥1，对独立的r.v. X, Y，有gX+Y(t)=gX(t)gY(t)

随机和：**Xi，i.i.d**, ，**N也是一个独立r.v.** 对N取条件，求exp{tY}的条件期望，可得gY(t) = E[(gX(t))N]，对此关于t求一阶两阶导可得EY = E[NE(X)]=EN·EX，EY2=EN·VarX+EN2E2X，VarY=EN·VarX+E2X·VarN

概率生成函数：X是离散r.v.，，→ ，且，，，，，随机和情形：.

Markov不等式：。

均方收敛：lim n→∞ E(Xn-X)2=0，均方收敛和几乎必然收敛（P(lim(Xn-X)=0)=1）蕴含依概率收敛（lim P(|Xn-X|≥a)=0），反之不成；均方收敛和几乎必然收敛互不包含。

**习题1.6**：Z1, Z2 iid ~ P(Z=±1)=1/2，X(t)=Z1cost+Z2sint，t∈R，证X(t)不是严平稳。解：Ft(x)=P(Z1cost+Z2sint≤x)，考虑Ft(0)，t=0时Ft(0)=1/2，t=π/4时Ft(0)=3/4，Ft(x)~t，所以非严平稳。

**习题1.13**：X1~n i.i.d. ~ εxp(λ)，则T=Σ1~nXi ~Γ(n, λ)，即f(t)=λexp{-λt}(λt)n-1/(n-1)!, t≥0。验证方法：求矩母函数（**求分布**可用）

Poisson过程定义：(i) N(0)=0; (ii) N(t)增量独立; (iii) 任何t>0, s≥0，Δ=N(t+s)-N(s) ~ Poi(λt)，即。性质：EN(t)=VarN(t)=λt，λ强度/速率。

**定理2.1**：若N(t)为PoiProc，Wi=Σ1~iXj是等待时间，给定N(t)=n下等待时间的联合**密度**是*f*W1,…,Wn|N(t)=n(w1,…,wn|n)=n!/tn。

**例题2.2**：顾客按PoiProc N(λ, t)到达车站，若🚆t时刻离站，问(0,t]区间顾客的平均总等待时间。解：设第i位顾客到达时间为Wi，总等待时间为t-Wi；要求的总等待时间就是，求条件期望，给定n，Wi的联合密度与(0,t]上均匀分布随机样本的次序统计量的联合密度一样，，再对结果求期望，结果是λt2/2。

非齐次PoiProc：；

记录值：Xi i.i.d, F(x), f(x)，λ(t)=f(t)/[1-F(t)]称为失效率，X0=0，当Xn>max1~n-1Xi称创纪录，Xn是记录值，记录值比t小的新记录次数记为N(t)，则第n次记录在t时刻之前发生，则N(t)是非齐次PoiProc，强度是λ(t)；P(N(t)=0)=P(X1>t)。

更新过程：把PoiProc def中的poi改成任意分布。Wn为第n次事件发生的时刻，N(t)=max{n: Wn≤t}；P(N(t)=n)=F(n)(t)-F(n+1)(t)，这里不是求导是卷积，EN(t)=m(t)=Σ1~∞F(n)(t)；重要的是N(t)≥n等价于Wn≤t。

**习题2.1**：P(Ns=k | Nt=n) = P(Ns=k, Nt=n) / P(N(t)=n) = P(Ns-N0=k, Nt-Ns=n-k) / P(N(t)-N(0)=n)。

**习题2.7**：N(t)~ PoiProc(λ)，给定N(t)=n，求第r≤n个事件发生的时刻Wr的条件概率密度fWr|N(t)=n(wr|n)。解：fWr|N(t)=n(wr|n)·

Δwr=P(N(wr)-N(0)=r-1, N(wr+Δwr)-N(wr)=1|N(t)=n)。然后两边除以Δwr并让其趋于0可得表达式。

**习题2.8**：有n个泊松过程，T是这些里面第一次发生事件的时刻，求分布。解：F(t)=P(T≤t)=1-P(T>t)=1-P(Ni(t)=0, i=1,…)。

提示：对非负随机变量ET=∫0∞P(T>t)dt。

Markov性质：，Xn是离散时间Markov链。

转移概率，与n无关时为平稳转移概率。，注意求和变量是j。

*n*步转移概率，约定: Pij(0)=0。

**P**(n)=**P**n，这是由Markov定义和矩阵乘法定义恰好相容得到的。

CK方程：。

可达：存在n, Pij(n)>0，则称i可达j。互达性是等价关系。

如果Markov链只有一个等价类，称之为不可约；不可约过程的各个状态都是互达的。

状态i的周期：使得的所有正整数n的最大公约数，记作d(i)，如果任意n都有就定义周期为∞，d(i)=1是非周期的。如果n不能被d(i)整除，则.

**命题3.2**：则。

**命题3.3**：如果状态i有周期d(i)，则存在整数N，使得对于所有的n>N恒有。**推论**：如果，则存在正整数N使得对所有的n≥N恒有。

**命题3.4**：**P**不可约、非周期有限状态，则必然存在N，使得n≥N时**P**(n)的所有元素都非0.

从i出发在n步转移时首次到达j的概率：。从i出发在第n次转移时首次回到i的概率。

记，是从i出发最终转入j的概率，若i≠j，则i→j当且仅当fij>0。状态i常返：fii=1；非常返状态就是瞬过的。

状态i常返的充要条件：，瞬过充要

**证明**：由Markov性，从i出发***至少***回到i两次的概率为fii2，K为返回i的次数，则。且。

**推论**：常返性也是等价关系。，则，两边求和，对右边求和是∞。

常返时：首次返回状态i的时刻Ti，。

零常返：μi=∞（可列无穷多个状态才会出现），正常返：μi<∞

还可记为，

**定理3.3**：（a）若状态i是瞬过的或者是零常返的，则，（b）若状态i是周期为d的常返状态，则，（c）若状态i是非周期的正常返状态，则。

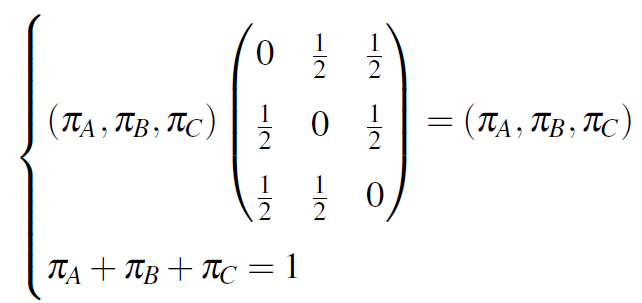
**证明**：求形式矩母函数：，，则

，……

一个正常返非周期状态也称作是遍历的，遍历状态i有lim Pii(n)=1/μi。

平稳分布：如果一个概率分布满足，则称。

若一个不可约MC中所有状态都是遍历的，则平稳分布就是这个MC的极限分布。



分支过程：记Xn为第n代后裔的大小，{Xn}就是分支过程，Zi是第n代中第i个个体繁衍的后代数，则Xn+1=Σi=1XnZi，假设Zi i.i.d, P(Z1=k)=pk，EZ1=μ，VarZ1=σ2，则EXn+1=μn+1，VarXn+1=，当μ<1时群体终将消亡（切比雪夫不等式），≥1时较为复杂。

**定理3.5**：对分支过程Xn，若p0>0, p0+p1<0，群体消亡概率是的最小正解，。

当且仅当

**习题3.9**：设表示从i出发在n步转移时首次到达j的概率，试证明。引入，……

**习题3.11**：一MC有状态0~3和**P**，试求。

，

对n≥2有

当n=3时，当n≥4时

**习题3.15**：有限状态MC至少有一个状态是常返的。

证明：反设所有状态都是瞬过或者零常返的，则对，有，考虑，则有

固定*l*，令n→∞，由（\*）得0≤≤0+

在（\*\*\*）中令*l*→∞，由于收敛，所以(\*4)，若此MC有N个状态，则，令n→∞, 由(\*4)得0=1，矛盾。

标准自相关函数：，

Gauss过程：G: G(t\_i)的联合分布是k维正态分布。

平稳白噪声序列：Xn是一列两两不相关的r.v. EXn=0, EXn2=σ2，且EXmXn=0(m≠n)，则X={Xn}是平稳序列，因为协方差函数仅与m-n有关。

三角多项式过程：设A，B同分布，均值为0，方差为σ2，且A和B不相关，Cov(A,B)=EAB=0，对ω∈[0,Π]，定义Xt=Acosωt+Bsinωt，则X={Xt}是平稳过程。

滑动平均序列：设是一列不相关的有相同均值m和方差σ2的随机变量，设a1~ak是任意的k个实数，定义，则X={Xt}平稳过程。

周期平稳过程：X={X(t)}是平稳过程，如果存在正常数κ使得X(t+κ)=X(t)，则称之。κ为过程的周期，如果X是周期平稳过程，则其协方差与过程有相同的周期。

遍历性：设X={Xt}平稳过程，若或者，称X均值有遍历性。如果

或者

则称X的协方差函数有遍历性.若随机过程(或序列)的均值和协方差函数都有遍历性，则称此随机过程有遍历性.

**定理4.1**：（均值遍历性定理）（1）设X={Xn, n=0,±1,…}是平稳序列，则X有遍历性的充要条件是

（2）若X={X(t), t∈R}为平稳过程，则X有遍历性的充要条件是。

**推论**：若，则均值遍历性成立。

**推论**：对平稳序列而言，若，则均值遍历。

**定理**：设X={Xn, n=0,±1,…}是均值为0的Gauss平稳过程，如果，则Gauss过程的协方差函数有遍历性

**协方差函数**：对平稳过程X的协方差函数R(τ)有如下性质：

（1）对称性（2）有界性（3）非负定性，即对任意的时刻tn及实数an，n=1,…,N，有。

（4）平稳过程n阶导数的协方差函数为

Cov(X(n)(t), X(n)(t+τ))=(-1)nR(2n)(τ)，这里导数指的是满足定义

的Y(t)。

振幅调制波：{Y(t), t∈R}是一个零均值的实平稳过程，λ为实数，则Z(t)=Y(t)ejλt是一个复值的平稳过程。RZ(τ)=RY(τ)ejλτ。

频率调制波：{Y(t), t∈R}是一个零均值的Gauss平稳过程，设X(t)=cosY(t)，得。

平方检波：{Y(t), t∈R}是一个零均值的Gauss平稳过程，设X(t)=Y2(t)，则RX(τ)=2RY2(τ)。

**功率谱密度**：偶函数。

**定理4.4**：假定EX(t)=0，且，则

，

，

可以用S(w)和R(τ)的偶函数性质来做一点点简化。

**δ函数**：，，

，当R(t)=1, S(w)=2Πδ(w)，当S(w)=1时，R(t)=δ(t)。,

S(w)的分母不能有实根，分母多项式次数至少比分子高2.

**例4.14**：已知谱密度为，求协方差函数。

由留数定理（对τ≥0利用上半平面围道，τ<0时利用下半平面上的围道）可算得=

f(z)在z0处的留数Res[f(z), z0]=

B(n,p)，矩母函数(pet+(1-p))n  Poisson，g(t)=exp[λ(et-1)]

几何分布 g(t)=pet/[1-(1-p)et]，EX=1/p，VarX=q/p2

均匀分布g(t)=(eta-etb)/(ta-tb)，EX=(a+b)/2，VarX=(b-a)2/12

指数分布f(x)=λe-λx，g(t)=λ/(λ-t)，EX=1/λ，VarX=1/λ2

Γ分布(n,λ)，f(x)=，g(t)=[λ/(λ-t)]n，EX,VarX都是指数分布的n倍。

正态分布，g(t)=exp[μt+]

**习题4.16**：设X0为随机变量，其概率密度函数为，Xn+1在给定X0~Xn下是(1-Xn,1]上的均匀分布，证明{Xn}均值有遍历性。对给定条件用全期望公式：EXn+1=E[E(Xn+1|Xn)]=E[]；EXnXm=E[E(XnXm|Xn)] =E[XnE(Xn+m|Xn)]