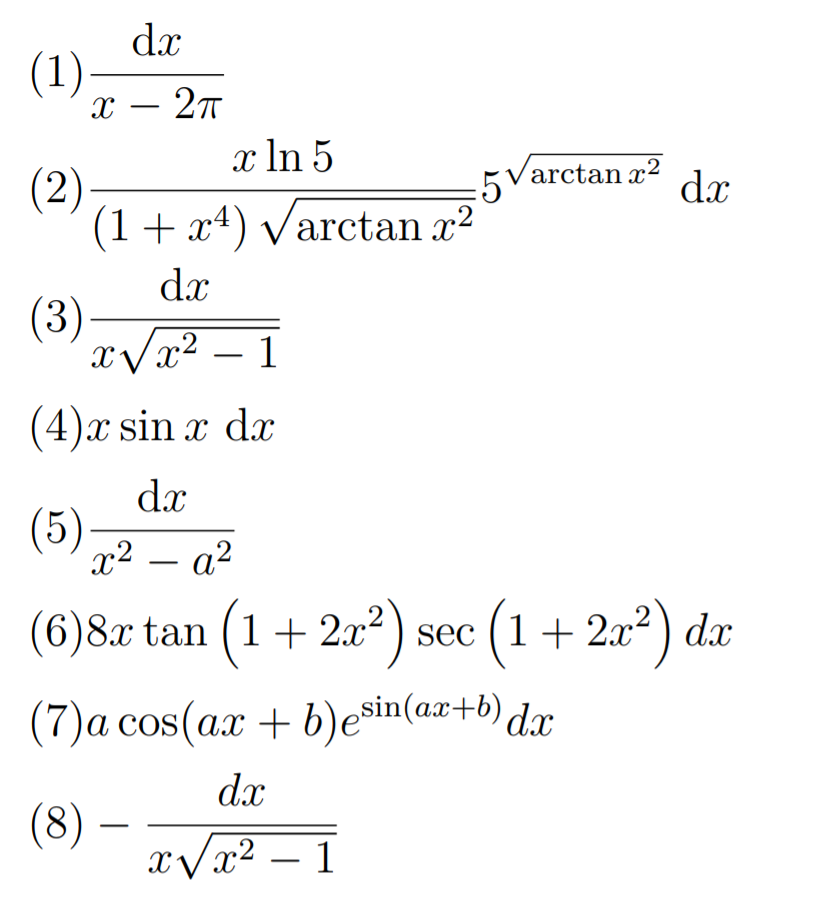
**第六次习题课**

**助教**：黄瑞轩 2022/11/4

PART I 习题答案

**习题3.2，3**



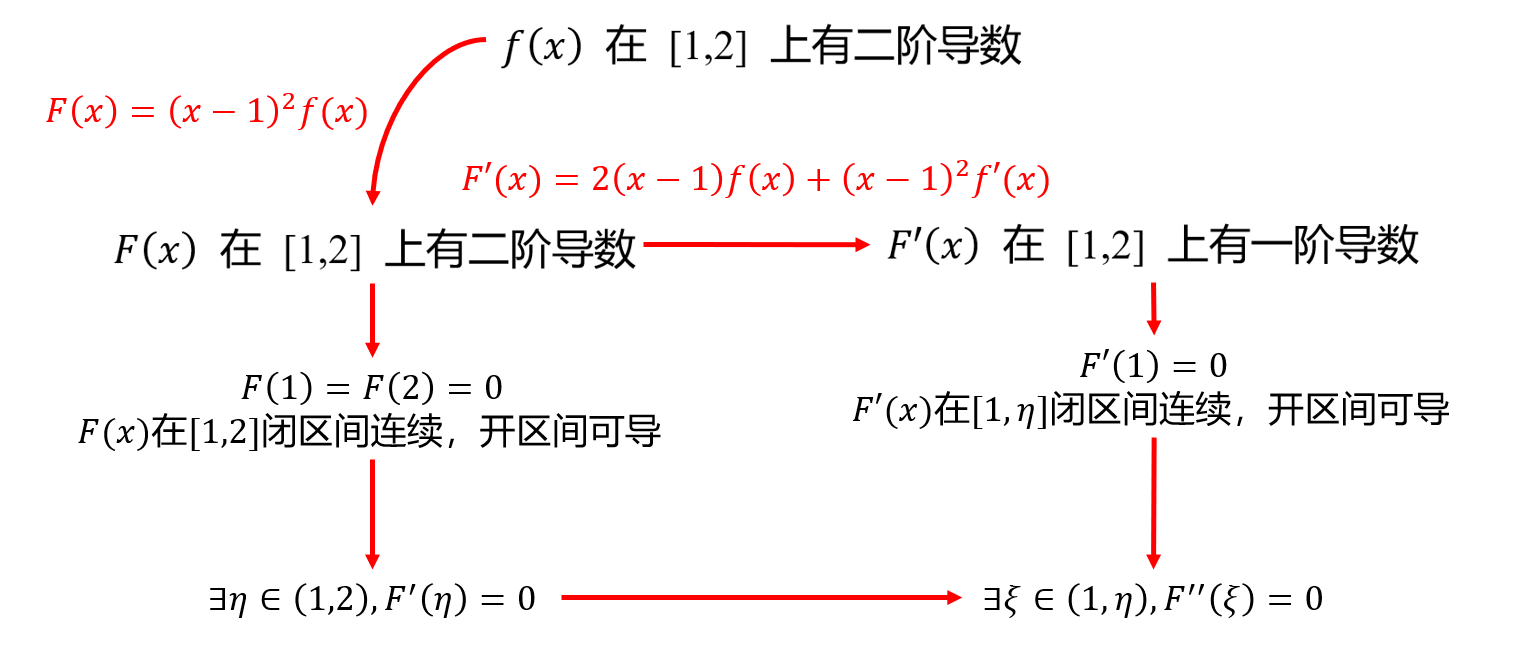
**习题3.2 5**：略

**习题3.2 7**

隐含的条件是：这里 *x* 是中间变量，所以 d2*x* 不一定为 0；*t* 是自变量，d2*t* = 0

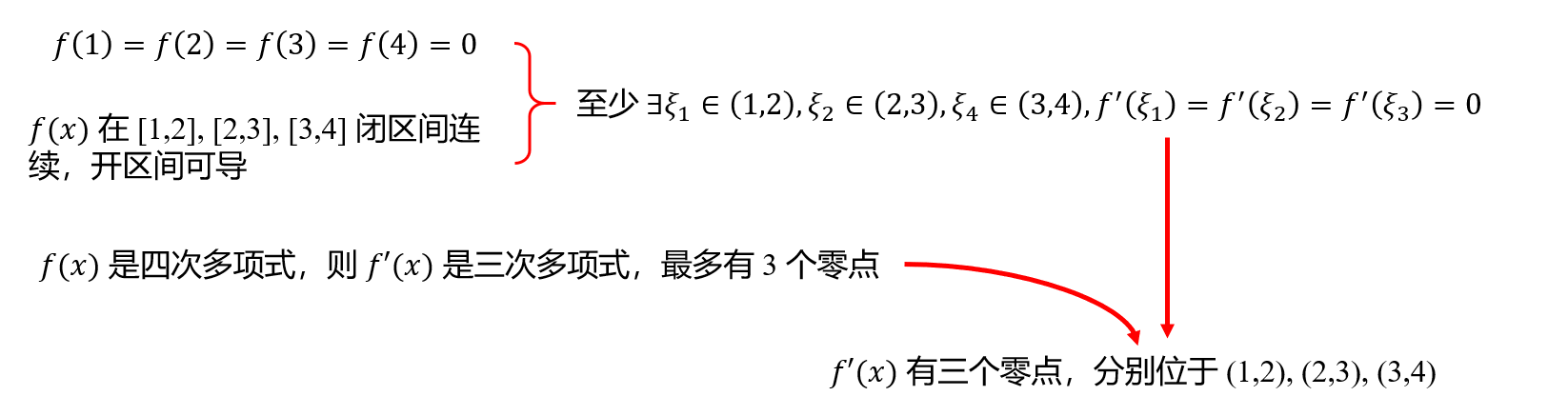
**习题3.2 10**

**习题3.3 4**



**习题3.3 6**

（1）



（2）设 ，其中 分别是 的 重根，且 （代数学基本定理）。

由罗尔定理，在相邻的两个不同的零点之间，存在 的一个根。

这样的“间隙”有 个，由此我们可以得到 的 个根。

当 是 的 重根时，其为 的 重根。

这样的重根个数为 。

现在我们知道 至少有 个实零点。因为 是 次多项式，至多有 个零点，所以 的所有零点都是实零点。

反复进行上述过程，即可得证。

**习题3.3 7**

1. 令 ，其在 [*a*, *b*] 闭区间连续，开区间可导，由 Lagrange 中值定理可知存在 ，因为 是 上的增函数，所以 ，不等式同乘 即可得证（为负，不等号方向改变）。
2. 令 ，不妨令 ，其在 [0, *t*] 闭区间连续，开区间可导，由 Lagrange 中值定理可知存在 ，因为 ，所以 。 亦然，即证。
3. 令 ，仿（1）。
4. 令 ，仿（2）。
5. 令 ，其在 闭区间连续，开区间可导，由 Lagrange 中值定理可知：

* 存在
* 存在

因为 是 上的增函数，所以 ，即证。

**习题3.3 8**：略，提供思路

在各自的定义域上，定义函数 ，得到 在某区间上恒为 0，说明在此区间上 ，再带入一个好算的点把 *C* 算出来。

**习题3.3 11**

不妨设 ， 在 上满足 Lagrange 中值定理的条件：

* 存在
* 存在

因为 ，所以 是严格减函数，所以

**习题3.3 12**

用反证法，假设 ，则固定一个点 ，对于 ，由 Lagrange 中值定理，，使得

说明 有界，矛盾。

逆命题：举反例，考虑

**习题3.3 13**

只要找到不同的两点 使得 就可以应用连续函数的零点定理。

用反证法，假设不存在这样的两点 使得 ，说明 在 上恒正或者恒负，不妨设为恒正，所以对于 ，有 ，对这两个式子分别取 的极限，就得到 ，矛盾。

**习题3.3 14**

令 ，使用 Cauchy 中值定理。

**习题3.3 15**

令 ，使用Cauchy 中值定理。

**习题3.3 16**

注意：没说 二阶可导

取 ，由 Lagrange 中值定理：

* 存在
* 存在

因为 严格递增，所以 ，则

所以 严格递增。

**习题3.3 17**

* 存在 使得 ，所以

由连续函数零点定理得原方程有一个正根。

* 是一个严格增函数（考虑到 ）

所以原方程仅有一个正根。

**习题3.3 18**

由条件③知， 是 的不增函数

再由条件②知，在 上

所以在 上 严格递减

假设 ，则

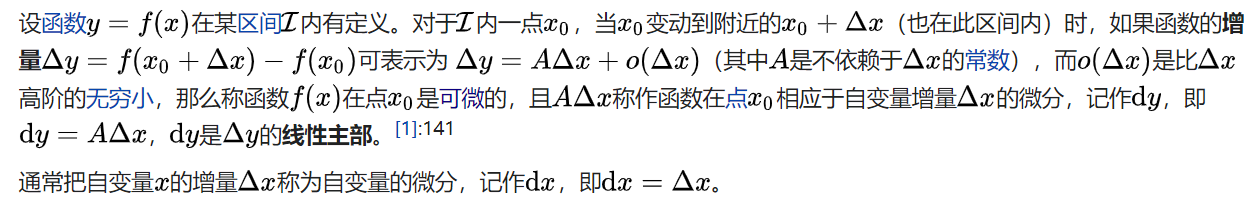
对 ，由 Lagrange 中值定理：

因为 是给定的数，所以只要 就有

由条件①和连续函数零点定理，得证。

PART II 知识复习

1. **函数的微分**
   * 微分的定义（书P129）



* + 理解：函数的微分是指对函数的局部变化的一种**线性描述**。微分可以近似地描述当函数自变量的取值作足够小的改变时，函数的值是怎样改变的。
  + 可微性（可导性和可微性对于一元函数是等价的）
  + ，基本初等函数微分表、微分四则运算
  + 一阶微分形式不变性

一阶微分形式不变性是指：无论u 是自变量还是中间变量，函数z=f(u) 的微分形式是一样的。此性质的好处是：一方面是可以不用区分变量直接利用一元函数的微分性质计算；另一方面是不用区分变量是自变量、因变量还是中间变量，以及它们的结构问题就可以利用微分性质直接计算。

* + 高阶微分不具有形式不变性
  + 对符号 的区分和理解

1. **微分中值定理**
   * 费马定理：极值点 + 可导 → 驻点：导数为0（理解“极值点”的定义）
   * 从几何意义理解罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理