

算法设计与分析实验报告

实验名称： 推销员问题（ETS 算法）

一、问题陈述，相关背景、应用及研究现状的综述分析

1.问题陈述：

实验内容：有一推销员，欲到 $n(n \leq 10)$ 个城市推销产品。为了节省旅行费用，在出发前他查清了任意两个城市间的旅行费用，想找到一条旅行路线，仅经过每个城市一次，且使旅行费用最少。本问题已知城市 n ，和 $n \times n$ 的表达任意两个城市间费用的矩阵。试求最短路径及其费用；

2.相关背景：

TSP 的研究历史很久，最早的描述是 1759 年欧拉研究的骑士环游问题，即对于国际象棋棋盘中的 64 个方格，走访 64 个方格一次且仅一次，并且最终返回到起始点。1954 年，Geo~eDanzig 等人用线性规划的方法取得了旅行商问题的历史性的突破——解决了美国 49 个城市的巡回问题。这就是割平面法，这种方法在整数规划问题上也广泛应用。后来还提出了一种方法叫做分枝限界法，所谓限界，就是求出问题解的上、下界，通过当前得到的限界值排除一些次优解，为最终获得最优解提示方向。每次搜索下界最小的分枝，可以减小计算量。

从图论的角度来看，该问题实质是在一个带权完全无向图中，找一个权值最小的 Hamilton 回路。由于该问题的可行解是所有顶点的全排列，随着顶点数的增加，会产生组合爆炸，它是一个 NP 完全问题。

迄今为止，这类问题中没有一个找到有效算法。倾向于接受 NP 完全问题（NP-Complete 或 NPC）和 NP 难题（NP-Hard 或 NPH）不存在有效算法这一猜想，认为这类问题的大型实例不能用精确算法求解，必须寻求这类问题的有效的近似算法。

3.应用及研究现状：

该问题应用广泛，其在交通运输、电路板线路设计以及物流配送等领域内都有应用，如：印刷电路板制造中：规划打孔机在 PCB 版上钻孔的路线。在机械加工或钻孔应用中，“城市”是需要加工的部分或需要钻的（不同大小）的孔，而“旅行成本”包括更换机具所用的时间（单机作业排序问题）。

国内外学者对其进行了大量的研究。早期的研究者使用精确算法求解该问题，常用的方法包括：分枝定界法、线性规划法、动态规划法等。但是，随着问题规模的增大，精确算法将变得无能为力，因此，在后来的研究中，国内外学者重点使用近似算法或启发式算法，主要有遗传算法、模拟退火法、蚁群算法、禁忌搜索算法、贪婪算法和神经网络等。

二、模型拟制、算法设计和正确性证明

1. 模型拟制

本解法中用常规的有向图来表示城市及其通行费用，图 CityGraph 包含城市列表 citylist[citynumber] 及一个邻接矩阵 Edge[citynumber][citynumber]，分别存储城市结点以及城市之间的通行费用。

2. 算法设计

1: 求解有向图中的哈密顿路径时，采用贪心策略，从有向图中依次选择通行费用最小的路径加进总路径，但是在下一次选择时要有所限制，比如 选择 城市 1→城市 2 之后，限制为：

- A: 不能再选择城市 1 为起点的路径
- B: 不能再选择城市 2 为终点的路径
- C: 新选择的路径不能和原来已经选择过的路径构成回路。

这样经过 $n-1$ 次选择 (n 为城市数量) 可以拼接出一条哈密顿路径。

2. 求解有向图中的哈密顿回路时，用编号表示城市，对编号数组全排列从而对路径进行穷举，从中选择出可行的并且总费用最小的对应路径 (全排列)，进而得出最后结果。

3. 正确性证明：

根据贪心算法的原理可知，算法 1 从局部最优解进而得到全局最优解；算法 2 利用穷举法，将所有可行路径进行比较，进而得到最优解。

三、时间和空间复杂性分析

算法 1: 哈密顿路径

每次求得局部最优解时对邻接矩阵进行搜索 (n^2), 再加上最外层循环 (n), 因此 时间复杂度为 $O(n^3)$, 空间复杂度主要来源于邻接矩阵存储, 空间复杂度为 $O(n^2)$

算法 2: 哈密顿回路

由于利用全排列对路径进行穷举, 因此时间复杂度为 $O(n!)$, 空间复杂度与算法 1 类似, 为 $O(n^2)$

四、程序实现和实验测试过程

程序实现代码存于 salesman_problem 文件

实验测试截图如下：

1. 实例用基本信息：邻接矩阵和城市列表，通行费用由随机数生成 1-200

```
city list and cost matrix are as follows:
      0      31      196      117      1      171      168      118      160      131
189    0      20      176      3      74      127      194      75      120
131    25      0      25      22      101      72      36      107      22
125    28      117      0      86      116      200      114      91      166
192    101      57      52      0      69      163      156      182      37
150    68      137      107      113      0      16      129      79      86
151    123      162      141      66      166      0      77      29      118
42     42      64      81      170      42      34      0      99      86
160    82      31      69      151      100      57      57      0      72
6      18      187      6      66      154      40      6      76      0
城市   上海   北京   重庆   郑州   成都   青岛   西安   武汉   杭州   大连
```

2. 哈密顿路径：

```
Hamiltonian path is as follows ,no given start-city:
-----
武汉-->青岛 cost is 42
青岛-->西安 cost is 16
西安-->杭州 cost is 29
杭州-->郑州 cost is 69
郑州-->北京 cost is 28
北京-->重庆 cost is 20
重庆-->大连 cost is 22
大连-->上海 cost is 6
上海-->成都 cost is 1
total cost is 233
城市   上海   北京   重庆   郑州   成都   青岛   西安   武汉   杭州   大连
前驱    9      3      1      8      0      7      5     -1      6      2
后继    4      2      9      1     -1      6      8      5      3      0
-----
```

3. 哈密顿回路：

```
-----
Hamiltonian circle is follow:重庆 is start-city for instance
重庆-->武汉 cost is 36
武汉-->上海 cost is 42
上海-->成都 cost is 1
成都-->大连 cost is 37
大连-->郑州 cost is 6
郑州-->北京 cost is 28
北京-->青岛 cost is 74
青岛-->西安 cost is 16
西安-->杭州 cost is 29
杭州-->重庆 cost is 31
least cost is 300
```

五、总结

利用贪心算法求解哈密顿回路时我还没有找到太好的思路，因此只能处理哈密顿路径；哈密顿回路利用全排列的穷举法求解，当 N 很大时，时间复杂度过高。