Mixed-integer bilevel linear program.

Мотивация

- Есть следующая проблема

$$
\begin{aligned}
&||x - x_0|| \to \min_{x,c,b} \\
&Cc = \overline{c} \\
&Bb = \overline{b} \\
&x \in \operatorname{argmax}\{\mathrm{c}^T x`\colon\ Ax` = b, x` \geq 0\}
\end{aligned}
\qquad \text{(A.1)}
$$

- $A, C, B, \overline{c}, \overline{b}, x_0$ - заранее определенный матрицы/вектора.

Пусть x’, b’, c’ - решение этой задачи.

Тогда множество $x \in \mathrm{argmax}\{\mathrm{c'}^T x\colon\ Ax = b', x \geq 0\}$ такого, что x’ будет ближайшим к x_0 элементом этого множества.

Однако про расположения других элементов множества ничего не известно.

Можно сформулировать другую задачу.

$$
\begin{aligned}
&|x - x_0| \to \min_{x,c,b} \\
&Cc = \overline{c} \\
&Bb = \overline{b} \\
&x \in \operatorname{argmax}\{||x` - x_0|| \\
&\qquad x` \in \operatorname{argmax}\{\mathrm{c}^T x``\colon\ Ax`` = b, x`` \geq 0\} \\
&\}
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

Теперь, если x’, b’, c’ - допустимое решение этой задачи, то x’ всегда будет самым далеким от x_0 элементом множества $\operatorname{argmax}\{\mathrm{c}^T x\colon\ Ax = b, x \geq 0\}$. А оптимальное решение - это такой x’, который является самым близким к x_0 среди всех b и c.

Возьмем L_1 норму.

Теперь попробуем линеаризовать все это:

$$\sum_{j\in J} w_j \to \min_{x,c,b,w}$$

$$Cc = \overline{c}, \qquad Bb = \overline{b}$$

$$|x - x_0| \leq w$$

$$x \in \operatorname{argmax}\{\sum_{j\in J} w'_j:$$

$$Ax` = b$$

$$A^T y \geq c, \quad (A^T y - c)x`^T = 0$$

$$|x - x_0| \geq w'$$

$$x` \geq 0$$

$$\}$$

$$\sum_{j\in J} w_j \to \min_{x,c,b,w}$$

$$Cc = \overline{c}, \qquad Bb = \overline{b}$$

$$-\leq x - x_0 \leq w$$

$$x \in \underset{x`,y,w',\varphi,\psi}{\operatorname{argmax}} \{ \sum_{j\in J} w'_j:$$

$$Ax` = b, \quad A^T y \geq c, \quad x` \geq 0$$

$$A^T y - c \leq M\psi$$

$$x` \leq M(1-\psi)$$

$$x - x_0 + M\varphi \geq w'$$

$$- + x_0 + M(1-\varphi) \geq w'$$

$$\varphi, \psi \in \{0, 1\} \}$$

MIBLP

$$
\begin{aligned}
\textbf{(P0)} \quad \min_{x^u, y^u, x^{l0}, y^{l0}} \quad & c_R^t x^u + c_Z^t y^u + d_R^t x^{l0} + d_Z^t y^{l0} \\
\text{s.t.} \quad & A_R x^u + A_Z y^u + B_R x^{l0} + B_Z y^{l0} \le r \\
& x^u \in \mathbb{R}_+^{m_R}, y^u \in \mathbb{Z}_+^{m_Z}, x^{l0} \in \mathbb{R}_+^{n_R}, y^{l0} \in \mathbb{Z}_+^{n_Z} \\
& \left(x^{l0}, y^{l0}\right) \in \underset{(x^l, y^l)}{\operatorname{argmax}} \{ \quad w_R^t x^l + w_Z^t y^l : \\
& \qquad P_R x^l + P_Z y^l \le s - Q_R x^u - Q_Z y^u \\
& \qquad x^l \in \mathbb{R}_+^{n_R}, y^l \in \mathbb{Z}_+^{n_Z} \quad \}
\end{aligned}
$$

Master problem

$$\textbf{(P5)}\quad \Theta_k^* = \min_{\substack{x^u, y^u, x^{l0}, y^{l0} \\ x^{l,j}, \pi^{l,j}}} \; c_R^t x^u + c_Z^t y^u + d_R^t x^{l0} + d_Z^t y^{l0}$$

$$\text{s.t. } A_R x^u + A_Z y^u + B_R x^{l0} + B_Z y^{l0} \le r$$

$$Q_R x^u + Q_Z y^u + P_R x^{l0} + P_Z y^{l0} \le s$$

$$x^u \in \mathbb{R}_+^{m_R}, y^u \in \mathbb{Z}_+^{m_Z}, x^{l0} \in \mathbb{R}_+^{n_R}, y^{l0} \in \mathbb{Z}_+^{n_Z}$$

$$\left[\exists x^l \in \mathbb{R}_+^{n_R} : Q_R x^u + Q_Z y^u + P_R x^l \le s - P_Z y^{l,j} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} w_R^t x^{l0} + w_Z^t y^{l0} \ge w_R^t x^{l,j} + w_Z^t y^{l,j} \\ P_R x^{l,j} \le s - Q_R x^u - Q_Z y^u - P_Z y^{l,j} \\ P_R^t \pi^j \ge w_R^t, x^{l,j} \perp \left(P_R^t \pi^j - w_R^t \right) \\ \pi^j \perp \left(s - Q_R x^u - Q_Z y^u - P_R x^{l,j} - P_Z y^{l,j} \right) \\ x^{l,j} \in \mathbb{R}_+^{n_R}, \pi^j \in \mathbb{R}_+^{n_L} \end{bmatrix}, \forall y^{l,j} \in \underline{Y}_k^L \subseteq Y^L$$

$$
\begin{aligned}
\textbf{(P5)}\quad \Theta_k^* = \min_{\substack{x^u, y^u, x^{l0}, y^{l0} \\ x^{l,j}, \pi^{l,j}}} \quad & c_R^t x^u + c_Z^t y^u + d_R^t x^{l0} + d_Z^t y^{l0} \\
\text{s.t. } & A_R x^u + A_Z y^u + B_R x^{l0} + B_Z y^{l0} \le r \\
& Q_R x^u + Q_Z y^u + P_R x^{l0} + P_Z y^{l0} \le s \\
& x^u \in \mathbb{R}_+^{m_R}, y^u \in \mathbb{Z}_+^{m_Z}, x^{l0} \in \mathbb{R}_+^{n_R}, y^{l0} \in \mathbb{Z}_+^{n_Z} \\
& P_R x^{l,j} - t^j \le s - Q_R x^u - Q_Z y^u - P_Z y^{l,j}, \forall y^{l,j} \in \underline{Y}_k^L \subseteq Y^L \\
& P_R \lambda^j \ge 0, x^{l,j} \perp P_R \lambda^j, \forall y^{l,j} \in \underline{Y}_k^L \subseteq Y^L \\
& e - \lambda^j \ge 0, t^j \perp \left(e - \lambda^j\right), \forall y^{l,j} \in \underline{Y}_k^L \subseteq Y^L \\
& \lambda^j \perp \left(s - Q_R x^u - Q_Z y^u - P_Z y^{l,j} - P_R x^{l,j} + t^j\right), \forall y^{l,j} \in \underline{Y}_k^L \subseteq Y^L \\
& \psi^j \Rightarrow \begin{bmatrix} w_R^t x^{l0} + w_Z^t y^{l0} \ge w_R^t x^{l,j} + w_Z^t y^{l,j} \\ P_R x^{l,j} \le s - Q_R x^u - Q_Z y^u - P_Z y^{l,j} \\ P_R^t \pi^j \ge w_R^t, x^{l,j} \perp \left(P_R^t \pi^j - w_R^t\right) \\ \pi^j \perp \left(s - Q_R x^u - Q_Z y^u - P_R x^{l,j} - P_Z y^{l,j}\right) \\ x^{l,j} \in \mathbb{R}_+^{n_R}, \pi^j \in \mathbb{R}_+^{n_L} \end{bmatrix}, \forall y^{l,j} \in \underline{Y}_k^L \subseteq Y^L \\
& \varepsilon\left(1 - \psi^j\right) \le e^t t^j, \psi^j \in \{0,1\}, \quad \forall y^{l,j} \in \underline{Y}_k^L \subseteq Y^L \\
& x^{l,j} \in \mathbb{R}_+^{n_R}, \pi^j \in \mathbb{R}_+^{n_L}
\end{aligned}
$$

Subproblem 1

$$\textbf{(P6)} \quad \theta_k\left(x_k^{u,*}, y_k^{u,*}\right) = \max_{x^l, y^l} \; w_R^t x^l + w_Z^t y^l$$

$$\text{s.t. } P_R x^l + P_Z y^l \le s - Q_R x_k^{u,*} - Q_Z y_k^{u,*}$$

$$x^l \in \mathbb{R}_+^{n_R}, y^l \in \mathbb{Z}_+^{n_Z}$$

Subproblem 2

$$
\begin{aligned}
\Theta_{o,k}\left(x_k^{u,*}, y_k^{u,*}\right) = \min_{x^l, y^l} \ & d_R^t x^l + d_Z^t y^l \\
\text{s.t.} \ & \text{(56) and (57)} \\
& B_R x^l + B_Z y^l \leq r - A_R x_k^{u,*} - A_Z y_k^{u,*} \\
& w_R^t x^l + w_Z^t y^l \geq \theta_k\left(x_k^{u,*}, y_k^{u,*}\right)
\end{aligned}
$$

Алгоритм

Step 1 (Initialization)

Set $LB = -\infty$, $UB = +\infty$, $\xi = 0$, $k = 0$, and $\underline{Y}_0^L \leftarrow \varnothing$.

Step 2 (Lower Bounding)

Solve problem (P5).

Denote the optimal solution as $\left(x_k^{u,*}, y_k^{u,*}, x_k^{l0,*}, y_k^{l0,*}\right)$.

Set LB to the optimal objective value Θ_k^*.

Step 3 (Termination)

if $UB - LB < \xi$, **then** Terminate and return optimal solution.

Step 4 (Subproblem 1)

Solve problem (P6) at $\left(x_k^{u,*}, y_k^{u,*}\right)$.

Denote the optimal solution as $\left(\hat{x}_k^l, \hat{y}_k^l\right)$ and optimal objective value as $\theta_k\left(x_k^{u,*}, y_k^{u,*}\right)$.

Step 5 (Subproblem 2)

Solve problem (P7) at $\left(x_k^{u,*}, y_k^{u,*}\right)$ and $\theta_k\left(x_k^{u,*}, y_k^{u,*}\right)$

if Feasible **then**

Denote the optimal solution as $\left(x_k^{l,*}, y_k^{l,*}\right)$

Set $UB = \min\left\{UB, c_R^t x_k^{u,*} + c_Z^t y_k^{u,*} + \Theta_{o,k}\left(x_k^{u,*}, y_k^{u,*}\right)\right\}$.

Set $\widehat{y}_k^l = y_k^{l,*}$.

else (Infeasible Problem)

Set $\widehat{y}_k^l = \hat{y}_k^l$.

end

Step 6 (Tightening the Master Problem)

Create new variables $\left(x^{l,j}, \pi^j\right)$ and constraint (54) corresponding to $y^{l,j} = \widehat{y}_k^l$.

Set $\underline{Y}_{k+1}^L = \underline{Y}_{k+1}^L \cup \left\{\widehat{y}_k^l\right\}$ and $k = k+1$.

Step 7 (Loop)

if $UB - LB < \xi$, **then**