Обратное программирование

По мотивам “Inverse Optimization, Part I: Linear Programming and General Problem”

by Ravindra K. Ahuja James B. Orlin

Постановка задачи

Есть задача на минимум с целевой функцией и ограничениями

$$\begin{gathered} c^T x \to \min \\ Ax \geq b \end{gathered} \qquad (A.1)$$

Задано x_0 - какое-то допустимое решение.

Требуется найти d, обладающее свойствами:

1. $d = \underset{d' \in \mathbb{R}^m}{\operatorname{argmin}}(||c - d'||_{L_p})$
2. x_0 - оптимальное решение задачи

$$\begin{gathered} d^T x \to \min \\ Ax \geq b \end{gathered}$$

где c - вектор размера m, A - матрица ($n \times m$), b - вектор размера n

Также будем использовать $I = \{1, \ldots, n\}$, $J = \{1, \ldots, m\}$

Постановка задачи

Это не что иное как задача на поиск минимума функции с ограничениями. (1) - целевая функция, (2) - ограничение

Попытаемся заменить (2) на что-нибудь более подходящее.

Двойственная задача к задаче в (2) будет такой

$$\begin{gathered} b^T\pi \to \max \\ A^T\pi = d, \\ \pi \geq 0 \end{gathered} \qquad \text{(A.2)}$$

(2) можно заменить на критерий оптимальности + ограничение.

x_0 - оптимальное решение <=> $\{ \sum_{j \in J} a_{ij}\, x_{0j} > b_i \Rightarrow \pi_i = 0 \}$

- Теперь задача выглядит так

$$
\begin{gathered}
||c - d'||_{L_p} \to \min \\
A^T \pi = d, \qquad \pi \geq 0, \\
\text{если } \sum_{j \in J} a_{ij}\, x_{0j} > b_i \text{ , то } \pi_i = 0
\end{gathered}
\tag{A.3}
$$

Сумма в нижнем выражении не содержит в себе переменных, значит можем сразу взять и сказать, что все такие π_i равны нулю.

Пусть B - множество индексов для которых ограчения выполняются как равенства, тогда задача

$$
\begin{gathered}
||c - d'||_{L_p} \to \min \\
\sum_{i \in B} a_{ij}\, \pi_i = d_j \text{ ,} \forall\, j \in J \\
\pi_i \geq 0, \qquad \forall\, i \in B
\end{gathered}
\tag{A.4}
$$

p = 1

$$\sum_{j \in J} |d_j \; - c_j \;| \to \min$$

$$\sum_{i \in B} a_{ij}\, \pi_i = d_j, \qquad \forall\, j \in J \qquad \text{(B.1)}$$

$$\pi_i \geq 0, \qquad \forall\, i \in B$$

- Линеаризуем функцию. Минимизировать $|d_j \; - c_j \;|$, тоже самое, что минимизировать $\alpha_j \; + \beta_j$, такие что

$$\alpha_j \geq 0\;,$$

$$\beta_j \geq 0,$$

$$d_j \; - c_j = \alpha_j - \beta_j$$

- Почему так? Во первых, при минимизации $\alpha_j \ + \beta_j$ получается, что если уменьшить и то и другое на одно и тоже очень маленькое число, то на выполнении ограничений это никак не скажется

$$\sum_{i \in B} a_{ij}\, \pi_i = d_j \ \ \text{<=>} \sum_{i \in B} a_{ij}\, \pi_i = \alpha_j - \beta_j + c_j \ ,$$
$$\text{<=>} \sum_{i \in B} a_{ij}\, \pi_i = (\alpha_j - \gamma) - (\beta_j - \gamma) + c_j,$$

а целевая функция только уменьшится от этого.

Таким образом на минимуме одно из значений точно будет 0, а другое будет равно $|d_j \ - c_j \ |$ и очевидно будет минимальным значением этого выражения.

$$\sum_{j \in J} \alpha_j + \beta_j \to \min$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \in B} a_{ij}\,\pi_i &= d_j, \qquad \forall\, j \in J \\ \pi_i &\geq 0, \qquad \forall\, i \in B \\ \alpha_j &\geq 0\,, \qquad \forall\, j \in J \\ \beta_j &\geq 0, \qquad \forall\, j \in J \\ d_j - c_j &= \alpha_j - \beta_j \quad \forall\, j \in J \end{aligned} \tag{B.2}$$

Теперь это ЗЛП.

Введем обозначение

$$\mathrm{c}_j^{\pi} = -\alpha_j + \beta_j = c_j - \sum_{i \in B} a_{ij}\, \pi_i \qquad (1)$$

Тогда

$$d_j = c_j - \mathrm{c}_j^{\pi} \qquad (2)$$

- Построим двойственную задачу к задаче В.2:

- Двойственные переменные - $y_j,\ j \in J$
- Целевая функция - $\sum_{j\in J} c_j\, y_j + 0(\dots) \to min$
- Ограничения из “$\sum_{i\in B} a_{ij}\, \pi_i$” -> $\sum_{j\in J} a_{ij}\, y_j \geq 0$
- Ограничения из $\alpha_j - \beta_j$ -> $-y_j \geq -1$ и $y_j \geq -1$

$$\sum_{j\in J} c_j y_j \to \min$$

$$\sum_{j\in J} a_{ij}\, y_j \geq 0_i, \qquad \forall\, i \in B \tag{B.3}$$

$$-1 \leq y_j \leq 1, \qquad \forall\, j \in J$$

- Если сделать замену $y = x - x_0$

то вернемся к исходной задаче с доп. ограничениями

$$\sum_{j \in J} c_j x \ \to \min$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij}\, x_j \geq b_i, \qquad \forall\, i \in B \tag{B.4}$$

$$|x_j - x_{0j}| \leq 1, \qquad \forall\, j \in J$$

Решение задачи обратного программирования получим из двойственных переменных π_i и с помощью формул (1), (2)

Анализ результата (при р = 1)

4 случая

Рассмотрим как будет меняться задача в зависимости от расположения x_0 в пространстве относительно ограничений.

1) Все ограничения при x_0 не выполняются.

- x_0 - недопустимая точка для данной задачи, а значит и для задачи обратного программирования.

2) Все ограничения при x_0 выполняются как строгие неравенства.

- x_0 - не может быть оптимальным решением задачи (A.1) ни при каких d (не равных нулю). Оптимальное решение должно быть базисным.

- Однако, если $d = 0$, то любое допустимое решение - решение. Т.е. для такого x_0 решением будет нулевой вектор d.

3) ровно одно выполняется как равенство $\sum_{j\in J} a_{i_0 j} x_0 = b_{i_0}$.

- Если $m > 1$, то такое решение не будет базисным. Однако это решение можно представить в виде

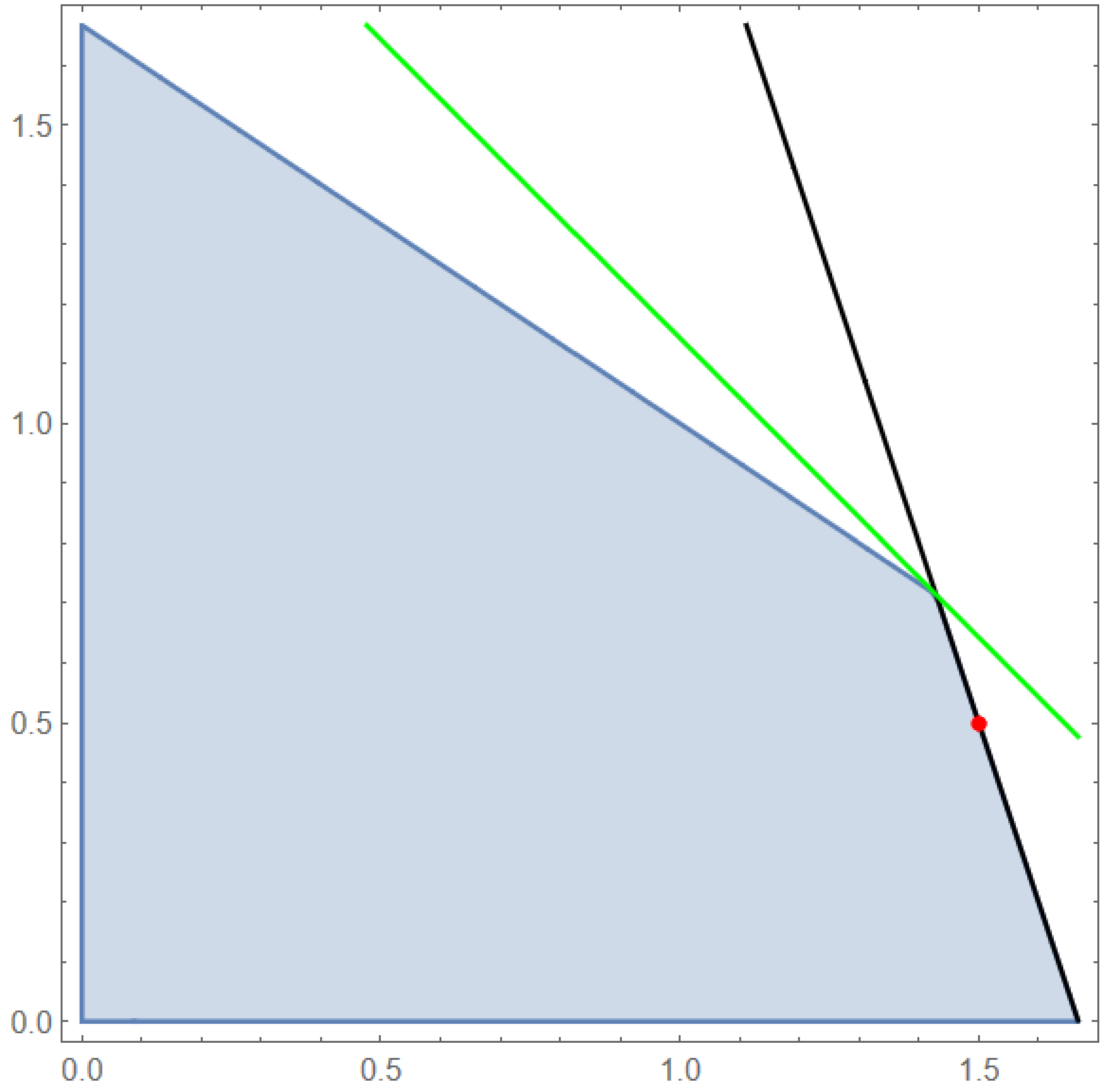
$$x_0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{q-1} x_{q-1} + \alpha_q x_q$$

где $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i x_i = 1$, а x_i - вершины многогранника, содержащиеся в гиперплоскости $\sum_{j\in J} a_{i_0 j} x = b_{i_0}$

- Тогда, если $\forall\ x_i$ при каком-то d будут оптимальными решениями, то x_0 тоже будет оптимальным решением.

-Пусть $\sum_{j\in J} c_j x_0 = \Phi$. Тогда получается, что гиперплоскость $\sum_{j\in J} c_j x = \Psi$ развернется в гиперплоскость $\sum_{j\in J} \frac{\Phi a_{i_0 j}}{b_{i_0}} x = \Phi$

Ψ - оптимальное значение функции исходной задачи.



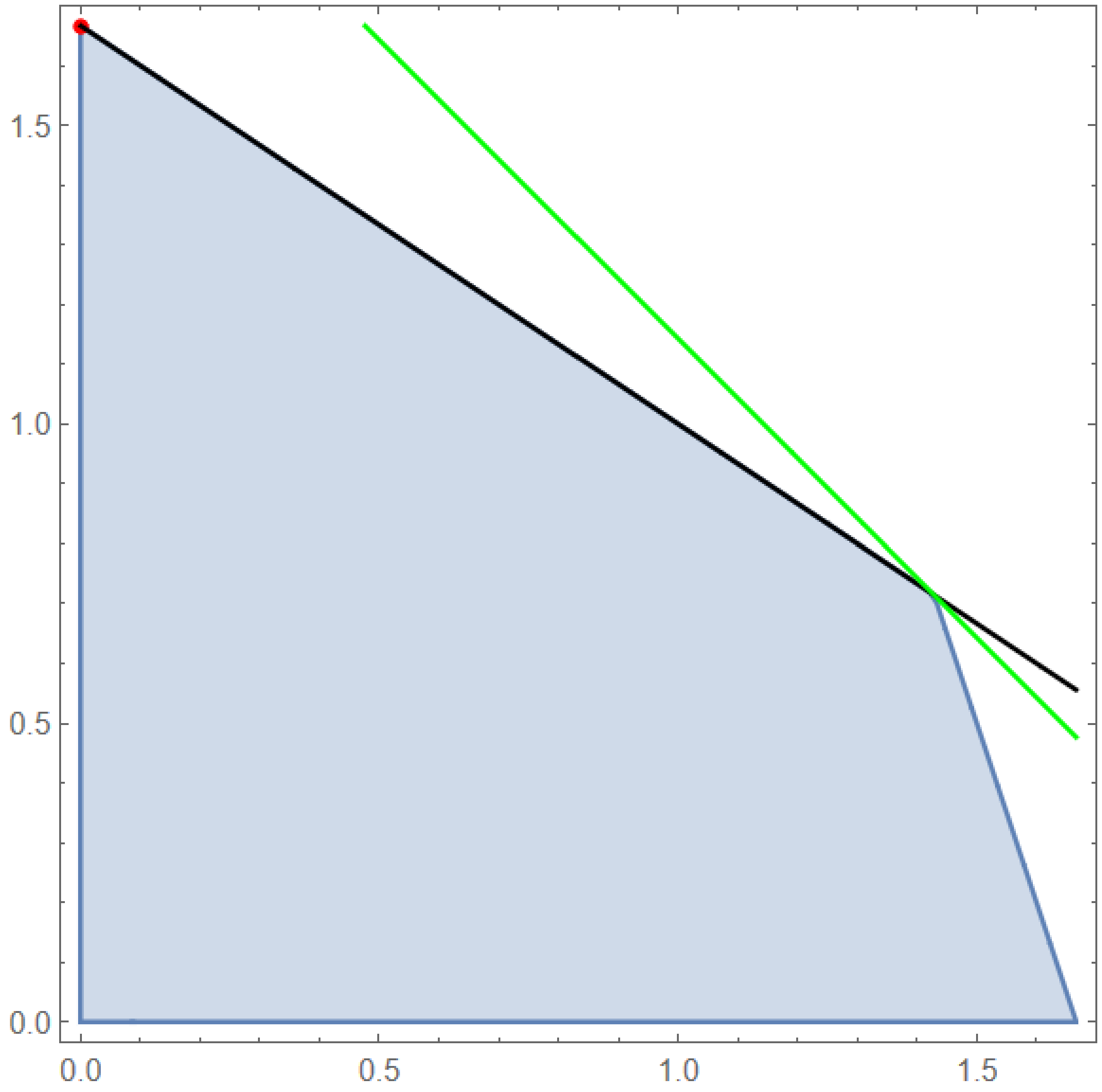
- Зеленая прямая - линия уровня исходной целевой функции при оптимальном значении.
- Черная прямая - линия уровня получившейся целевой функции при оптимальном значении.
- Красная точка - x_0

4) > 1 ограничений выполняются как равенства. Решение лежит на поверхности многогранника.

- аналогично (3) гиперплоскость $\sum_{j \in J} d_j x = \Phi$ “ляжет” на грань (вершину) многогранника, в которой содержится x_0.

- Причем вариантов как это сделать много, в отличие от случая (3), поэтому будет выбран d с минимальным расстоянием от $c.$

Исходя из (1-4), задача обратного программирования заключается в том, чтобы преобразовать гиперплоскость $\sum_{j \in J} c_j x = \Psi$ так, чтобы она стала гиперплоскостью $\sum_{j \in J} d_j x_0 = \Phi$, причем так, чтобы расстояние d от c было минимальным.



- Зеленая прямая - линия уровня исходной целевой функции при оптимальном значении.
- Черная прямая - линия уровня получившейся целевой функции при оптимальном значении.
- Красная точка - x_0

p = 1 с весами

$$\sum_{j\in J} w_j |d_j - c_j| \to \min$$

$$\sum_{i\in B} a_{ij}\,\pi_i = d_j\,, \qquad \forall\, j \in J \tag{B.5}$$

$$\pi_i \geq 0, \qquad \forall\, i \in B$$

Понятно, что различие будет в том, что при переменных α_j и β_j коэффициент будет не 1, а w_j. Поэтому доп. ограничение будет таким

$$|x_j - x_{0j}| \leq w_j$$

p = 1 с доп. ограничениями

- пусть в исходной задаче есть доп. ограничения вида
- $l_j \leq x_j \quad \text{и} \quad x_j \leq r_j$
- Если аккуратно проделать все те же шаги, что были проделаны до этого, но уже с этими ограничениями, то получим следующие дополнительные ограничения к исходной задаче, которые делают ее задачей обратного программирования.

$$l_j \leq x_j \leq l_j + 1, \qquad \forall\, j \in L$$

$$r_j - 1 \leq x_j \leq r_j, \qquad \forall\, j \in U$$

$$|x_j - x_{0j}| \leq 1, \qquad \forall\, j \in F$$

p = 1 с доп. ограничениями

- где $j \in L$ значит, что нижнее ограничение для x_0 выполняется как равенство
- $j \in U$ значит, что верхнее ограничение для x_0 выполняется как равенство
- $j \in F$ значит, что j не поподает ни в L, ни в U
- $J = L \cup U \cup F$

0-1 ЗЛП

$$c^T x \to \min$$

$$Ax \geq b$$

$$0 \leq x_j \leq 1, \forall\, j \in J$$

Из полученного выше получаем следующую задачу обр. пр.

$$c^T x \to \min$$

$$Ax \geq b$$

$$0 \leq x_j \leq 1, \qquad \forall\, j \in J$$

$$0 \leq x_j \leq 0 + 1, \forall\, j \in L$$

$$1 - 1 \leq x_j \leq 1, \qquad \forall\, j \in U$$

$$|x_j - x_{0j}| \leq 1, \qquad \forall\, j \in F$$

0-1 ЗЛП

Т. е. получаем исходную задачу

$$\mathrm{c}^T x \to \min$$

$$Ax \geq b$$

$$0 \leq x_j \leq 1, \forall\, j \in J$$

Для любого x_0 можно найти соответсвующие двойственные переменные и из них нужный вектор d.

0-1 ЗЛП

1) решаем 0-1 задачу любым пригодным алгоритмом;

2) преобразуем полученный ответ в ответ ЗЛП;

3) находим двойственные переменные π_i из свойств двойственности;

4) находим d из формул (1), (2).

(на самом деле здесь доказан факт, что если задача из класса P, то ее задача обратного программирования тоже из класса P).

p = ∞

$$\max_{j \in J} |d_j - c_j| \to \min$$

$$\sum_{i \in B} a_{ij}\,\pi_i = d_j, \qquad \forall\, j \in J \qquad \text{(C.1)}$$

$$\pi_i \geq 0, i \in B$$

- Выполним те же шаги, и сначала попробуем линеаризовать f.

$$-\theta \to \max,$$

$$\sum_{i \in B} a_{ij}\,\pi_i - (\alpha_j - \beta_j) = c_j, \forall\, j \in J$$

$$\alpha_j + \beta_j - \theta \leq 0, \qquad \forall\, j \in J \qquad \text{(C.2)}$$

$$\alpha_j \geq 0, \qquad \forall\, j \in J$$

$$\beta_j \geq 0, \qquad \forall\, j \in J$$

$$\pi_i \geq 0, \qquad \forall\, i \in B$$

- c_j^{π} найдем из той же формулы (1), что и была
- 1) $c_j^{\pi} > 0$, тогда $\alpha_j = 0$, а $\beta_j = |c_j^{\pi}|$, и тогда огр. $\alpha_j + \beta_j - \theta \le 0$ принимает вид $|c_j^{\pi}| \le \theta$
- 2) $c_j^{\pi} < 0$, тогда $\beta_j = 0$, а $\alpha_j = |c_j^{\pi}|$, и тогда огр. $\alpha_j + \beta_j - \theta \le 0$ принимает вид $|c_j^{\pi}| \le \theta$
- 3) $c_j^{\pi} < 0$ - очевидно $\alpha_j = \beta_j = 0$ и ограничение выполнено.

$$-\theta \to \max,$$

$$|c_j^{\pi}| \le \theta, \qquad \forall\, j \in J$$

$$c_j^{\pi} = -\alpha_j + \beta_j = c_j - \sum_{i \in B} a_{ij}\, \pi_i, \forall\, j \in J \qquad \text{(C.3)}$$

$$\pi_i \ge 0, \qquad \forall\, i \in B$$

$$
\begin{aligned}
&-\theta \to \max, \\
&-\theta + \sum_{i \in B} a_{ij}\,\pi_i \le c_j, \forall\, j \in J \\
&-\theta - \sum_{i \in B} a_{ij}\,\pi_i \le c_j, \qquad \forall\, j \in J \\
&\pi_i \ge 0, \qquad \forall\, i \in B
\end{aligned}
\tag{C.4}
$$

- Построим двойственную
- Пусть y_j^+ - переменная, связанная с “первыми” ограничениями,
- Пусть y_j^- - переменная, связанная со “вторыми” ограничениями,

- Целевая функция - $\sum_{j\in J} c_j\,(y_j^+ - y_i^-) \to \min$
- Ограничения из $\sum_{i\in B} a_{ij}\,\pi_i$ -> $\sum_{j\in J} a_{ij}\,(y_j^+ - y_j^-) \geq 0$
- Ограничение из “оставшегося” $\sum_{j\in J}(-y_j^+ - y_j^-) \geq -1$
- $y_j^+ \geq 0$
- $y_j^- \geq 0$

- Итого

$$\sum_{j\in J} c_j\,(y_j^+ - y_j^-) \to \min$$

$$\sum_{j\in J} a_{ij}\,(y_j^+ - y_j^-) \ge 0, \forall\, i \in B \qquad (C.5)$$

$$\sum_{j\in J} (y_j^+ + y_j^-) \le 1$$

- Пусть $y_j = y_j^+ - y_j^-$

$$\sum_{j\in J} c_j\,y_j \to \min$$

$$\sum_{j\in J} a_{ij}\,y_j \ge 0, \forall\, i \in B \qquad (C.6)$$

$$\sum_{j\in J} |y_j| \le 1$$

Если сделать замену $y = x - x_0$

то вернемся к исходной задаче с доп. ограничением

$$\sum_{j \in J} c_j \, x_j \to \min$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} \, x_i \geq b_i, \forall \, i \in B \qquad \text{(C.6)}$$

$$\sum_{j \in J} |x - x_0| \leq 1$$

p = ∞ с весами

$$\sum_{j\in J} w_j |d_j - c_j| \to \min$$

$$\sum_{i\in B} a_{ij}\,\pi_i = d_j, \forall\, j \in J$$

$$\pi_i \geq 0, \forall\, i \in B$$

- полная аналогия с p=1

$$\sum_{j\in J} c_j\, x_j \to \min$$

$$\sum_{j\in J} a_{ij}\, x_i \geq b_i, \forall\, i \in B \qquad \text{(C.7)}$$

$$\sum_{j\in J} |x - x_0| \leq w_j$$

p = ∞ с доп. ограничениями

- пусть в исходной задаче есть доп. ограничения вида

$$l_j \le x_j \quad \text{и} \quad x_j \le r_j$$

- Аналогично p=1