Двухуровневое программирвоание

По мотивам Inverse Linear Programming S. Dempe and S. Lohse

Постановка задачи

- Пусть $\Psi(b, c) = \text{argmax}\{\text{c}^T x\colon\ Ax = b, x \geq 0\}$ - множество решений ЗЛП $\{\text{c}^T x\colon\ Ax = b, x \geq 0\}$, где A - матрица $(n \times m)$
- Причем эта функция задана на множестве $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, таком, что

  $\mathcal{B} = \{b\colon\ Bb = \overline{b}\}$ и $\mathcal{C} = \{c\colon\ Cc = \overline{c}\}$,

  где $B, C, \overline{b}, \overline{c}$ - заранее заданные константные матрицы и вектора.
- Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Тогда задача двухуровневой оптимизации - это найти b' и c', такие, что $x_0 \in \Psi(b', c')$ или, если это не возможно, он должен быть максимально близко к $\Psi(b', c')$.

Постановка задачи

- Другими словами, это следующая проблема

$$
\begin{gathered}
||x - x_0|| \to \min_{x,c,b} \\
Ax = b \\
Cc = \overline{c} \\
Bb = \overline{b} \\
x \in \operatorname{argmax}\{\mathrm{c}^T x\colon\ Ax = b, x \geq 0\} \\
x \geq 0
\end{gathered}
\tag{A.1}
$$

Двойственная задача к задаче $\{\mathrm{c}^T x\colon\ Ax = b, x \geq 0\}$ такая:

$$\{b^T y\colon\ A^T y \geq c\}$$

Если СЛАУ

$$\begin{array}{c} C c = \bar{c} \\ A^T y = c \end{array} \qquad (1)$$

имеет решения, то в силу соотношений двойственности

$$x^T (A^T y - c) = 0$$
$$y^T (Ax - b) = 0$$

множество решений системы $\{Ax = b, Bb = \bar{b}, x \geq 0\}$ будет в точности совпадать с $\operatorname{argmax}\{\mathrm{c}^T x\colon\ Ax = b, x \geq 0\}$, т.е. будет допустимыми для (A.1).

- Тогда А.1 упростится до

$$
\begin{gathered}
||x - x_0|| \to \min \\
Ax = b \\
Bb = \overline{b} \\
x \geq 0
\end{gathered}
\qquad (\text{A.2})
$$

- Это задача выпуклой оптимизации, которая не интересна.
- Поэтому предполагаем, что (1) не имеет решения.

Переформулировка задачи

- Заменим условие оптимальности $x \in \operatorname{argmax}\{\mathrm{c}^T x\colon\ Ax = b, x \geq 0\}$

на эквивалентное с помощью соотношений нежескости

$$
\begin{gathered}
||x - x_0|| \to \min_{x,y,c,b} \\
Ax = b \\
A^T y \geq c \\
x^T (A^T y - c) = 0 \\
x \geq 0 \\
Cc = \overline{c} \\
Bb = \overline{b}
\end{gathered}
\tag{A.3}
$$

Дополнение к задаче

- Дополним задачу (А.3) так, чтобы ее можно было использовать для следующей нижней задачи $\{\mathrm{c}^T x\colon\ Ax = b, 0 \leq x \leq u\}$. Т.е. учтем и верхние ограничения.
- u - вектор, такого же размера как x
- Сделаем это простым способом, приведя ограничения $x \leq U$ к виду $x + \lambda = U$. λ - вектор такого же размера как и x
- Соответственно двойственные переменные к этим ограничениям обозначим как ν.
- Примем следующие обозначения:

$$A' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ \mathrm{diag}(x) & \mathrm{diag}(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b \\ u \end{pmatrix}, \qquad y' = \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}, \qquad x' = \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}, c' = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда задача примет вид:

$$\begin{gathered} ||x - x_0|| \to \min_{x', y', c, b} \\ Ax' = b' \\ A'^T y' \geq c' \\ x'^T (A^T y' - c') = 0 \\ x' \geq 0 \\ Cc = \overline{c} \\ Bb = \overline{b} \end{gathered} \tag{A.3}$$