

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων  
Πολυτεχνική Σχολή  
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής

Μεταπτυχιακό Μάθημα  
(Δ3) Βελτιστοποίηση  
Ακαδημαϊκό Έτος 2022-2023

Εργασία 2

## 1 Εισαγωγή

Τα μοντέλα predator-prey (κυνηγού-θηράματος) χρησιμοποιούνται συχνά για τη μοντελοποίηση και ανάλυση οικονομικών συστημάτων και των αλληλοσυσχετίσεων οικονομικών-κοινωνικών μεγεθών. Η παρούσα εργασία στοχεύει στην προσαρμογή ενός τέτοιου μοντέλου σε δεδομένα μηνιαίων τιμών που αφορούν στο ποσοστό απασχόλησης και στο ποσοστό εισοδήματος που προέρχεται από εργασία.

Πιο συγκεκριμένα, θα πρέπει να υπολογιστούν οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων ενός μοντέλου predator-prey ώστε αυτό να προσαρμόζεται με τον καλύτερο δυνατό τρόπο στα παρεχόμενα δεδομένα. Το κριτήριο προσαρμογής είναι το μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα των τιμών που δίνει το μοντέλο και των πραγματικών τιμών των δύο μεγεθών που μας ενδιαφέρουν. Η μετρική σφάλματος στην προκειμένη περίπτωση δεν είναι παραγωγίσιμη παντού. Κατά συνέπεια θα απαιτηθεί η χρήση μεθόδων βελτιστοποίησης που δεν χρησιμοποιούν παραγώγους.

## 2 Αναλυτική περιγραφή

Στο παρεχόμενο αρχείο `data.txt` δίνονται σε δύο στήλες, αντίστοιχα, οι κανονικοποιημένες μέσες μηνιαίες τιμές του ποσοστού απασχόλησης και του ποσοστού εισοδήματος που προέρχεται από εργασία, για διάστημα 100 διαδοχικών μηνών. Η κανονικοποίηση έγινε ως ποσόστωση της μονάδας βάσης, η οποία ήταν ο μέσος όρος προηγούμενων ετών και αντιστοιχεί στη μονάδα που δίνεται ως η πρώτη τιμή στα δεδομένα μας (αρχική συνθήκη – χρονική στιγμή 0) και για τις δύο ποσότητες.

Αν συμβολίσουμε με  $P_t$  το ποσοστό απασχόλησης και  $Q_t$  το ποσοστό εισοδήματος από εργασία στη χρονική στιγμή  $t$ , τότε οι μεταβολές τους στον χρόνο μπορούν να μοντελοποιηθούν από ένα μοντέλο predator-prey της μορφής

$$\Delta P_t = \left[ r \left( 1 - \frac{P_t}{K} \right) - s Q_t \right] P_t, \quad (1)$$

$$\Delta Q_t = (-u + v P_t) Q_t, \quad (2)$$

όπου  $r$ ,  $K$ ,  $s$ ,  $u$  και  $v$  είναι οι παράμετροι του μοντέλου. Έτσι, οι τελικές τιμές των δύο μεγεθών στον χρόνο δίνονται ως:

$$P_{t+1} = P_t + \Delta P_t, \quad (3)$$

$$Q_{t+1} = Q_t + \Delta Q_t. \quad (4)$$

Αν στη δεδομένη χρονική στιγμή  $t$  έχουμε την πραγματική τιμή  $P_t^*$  και την προσέγγιση του μοντέλου,  $P_t$ , τότε το απόλυτο σχετικό σφάλμα είναι:

$$\varepsilon_t^P = \frac{|P_t - P_t^*|}{P_t^*}.$$

Αντίστοιχα για το  $Q$  έχουμε απόλυτο σχετικό σφάλμα

$$\varepsilon_t^Q = \frac{|Q_t - Q_t^*|}{Q_t^*},$$

όπου  $Q_t^*$  η πραγματική τιμή και  $Q_t$  η προσέγγιση του μοντέλου.

Αν συμβολίσουμε με  $\varepsilon^P$  το διάνυσμα σφαλμάτων για το  $P$  για 100 διαδοχικές χρονικές στιγμές, δηλαδή,

$$\varepsilon^P = (\varepsilon_0^P, \varepsilon_1^P, \dots, \varepsilon_{100}^P),$$

και αντίστοιχα με  $\varepsilon^Q$  το διάνυσμα σφαλμάτων για το  $Q$ ,

$$\varepsilon^Q = (\varepsilon_0^Q, \varepsilon_1^Q, \dots, \varepsilon_{100}^Q),$$

τότε το μέγιστο απόλυτο σφάλμα των  $P$  και  $Q$  για το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα δίνεται ως

$$\varepsilon_{\max}^P = \|\varepsilon^P\|_{\infty}, \quad \varepsilon_{\max}^Q = \|\varepsilon^Q\|_{\infty},$$

όπου  $\|\cdot\|_{\infty}$  είναι η  $l_{\infty}$ -νόρμα του αντιστοιχού διανύσματος.

Ο στόχος της παρούσας εργασίας είναι να βρεθούν βέλτιστες τιμές των παραμέτρων του μοντέλου που περιγράφεται από τις Σχέσεις (1)-(4) έτσι ώστε το μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα και για τις δύο ποσότητες να μην υπερβαίνει ένα συγκεκριμένο ποσοστό που επιθυμεί ο χρήστης. Με άλλα λόγια, αν ο χρήστης επιθυμεί κάποιο ποσοστό  $\alpha * 100\%$ , με  $\alpha \in [0, 1]$ , τότε πρέπει να επιλυθεί το πρόβλημα:

$$\min_{r, K, s, u, v} f_{P, Q} \triangleq \|(\varepsilon_{\max}^P, \varepsilon_{\max}^Q)\|_{\infty}, \quad (5)$$

μέχρι να εντοπιστεί λύση με  $f_{P, Q} \leq \alpha$ .

### 3 Εφαρμογή

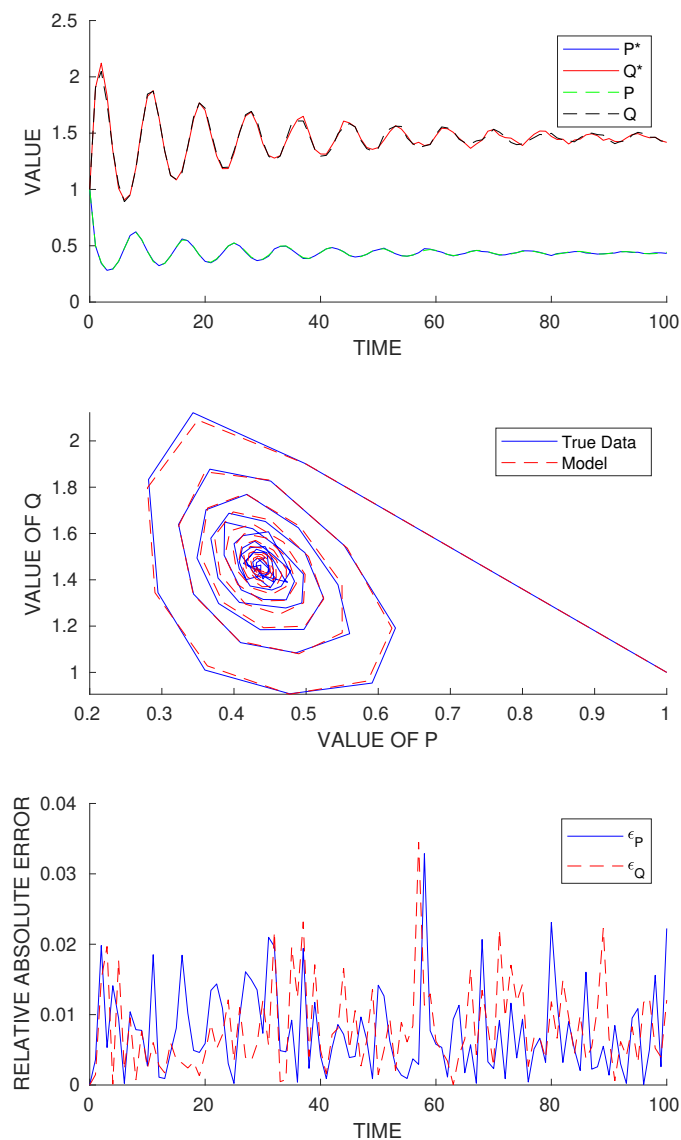
Για την επίλυση του δοθέντος προβλήματος θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι ακόλουθοι αλγόριθμοι:

- (1) Nelder-Mead
- (2) Genetic Algorithms με πραγματική αναπαράσταση
- (3) Particle Swarm Optimization

Η κατάλληλη παραμετροποίηση των αλγορίθμων αποτελεί αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας. Οι τιμές των παραμέτρων του μοντέλου predator-prey θα πρέπει να ανήκουν όλες στο διάστημα  $[0.1, 3.0]$ . Το επιθυμητό μέγιστο ποσοστό σφάλματος που ζητείται από τον χρήστη είναι 3.5%. Για κάθε αλγόριθμο θα πρέπει να εκτελεστούν 30 πειράματα με προκειμένου να εξαχθούν στατιστικά συμπεράσματα.

Στα αποτελέσματα της μελέτης θα πρέπει να περιλαμβάνονται τα ακόλουθα:

- (1) Πίνακες με στατιστικά μεγέθη (mean, median, standard deviation, min, max) των συναρτησιακών υπολογισμών που απαίτησε κάθε αλγόριθμος μέχρι να επιλύσει το πρόβλημα με τη ζητούμενη ακρίβεια.
- (2) Γραφικές αναπαραστάσεις boxplots των παραπάνω συναρτησιακών υπολογισμών.
- (3) Στατιστικός έλεγχος σημαντικότητας με Wilcoxon test μεταξύ των αλγορίθμων (σε ζεύγη) και πίνακες με τα αντίστοιχα  $p$ -values και το αποτέλεσμα του ελέγχου.



Σχήμα 1: Γραφική αναπαράσταση των αποτελεσμάτων.

- (4) Αρχεία με τις 30 λύσεις που βρέθηκαν (διανύσματα παραμέτρων του μοντέλου) και τις αντίστοιχες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης για καθένα αλγόριθμο.
- (5) Για την καλύτερη μεταξύ των 30 λύσεων καθενός αλγορίθμου να δοθούν γραφικές παραστάσεις της μορφής του Σχήματος 1, όπου δίνονται:
  - (Επάνω) Γραφική αναπαράσταση των τιμών  $P$  και  $Q$  που προέκυψαν από το συγκεκριμένο (καλύτερο) μοντέλο και οι αντίστοιχες τιμές από τα δεδομένα,  $P^*$  και  $Q^*$ .
  - (Μέση) Γραφική παράσταση των τιμών  $P$  έναντι των  $Q$ , τόσο για το μοντέλο όσο και για τα δεδομένα.
  - (Κάτω) Γραφική παράσταση των τιμών του απόλυτου σχετικού σφάλματος για το  $P$  και για το  $Q$ .

Τα κριτήρια βαθμολόγησης της εργασίας είναι:

- Η κατάλληλη εφαρμογή και παραμετροποίηση των αλγορίθμων
- Η ποιότητα της αναφοράς και της επιστημονικής ανάλυσης
- Η ποιότητα του κώδικα
- Η αξιοποίηση γνώσεων από το μάθημα
- Η πρωτοβουλία και αυτονομία του φοιτητή

Τα παραδοτέα της εργασίας είναι:

1. Μια αναλυτική αναφορά στην οποία θα εξηγείται επακριβώς η μεθοδολογία, όλες οι λεπτομέρειες εφαρμογής της και τα αποτελέσματα σε ενδελεχή παρουσίαση και σχολιασμό.
2. Ο σχετικός κώδικας και οδηγίες εφαρμογής του. Θα πρέπει να αποθηκεύσετε όλες τις λεπτομέρειες που είναι αναγκαίες για πλήρη αναπαραγωγή των πειραμάτων σας.

Όλα τα παραπάνω θα πρέπει να παραδοθούν σε ένα αρχείο zip μέχρι την παρακάτω καταληκτική ημερομηνία. Οι υλοποιήσεις μπορούν να γίνουν σε γλώσσα προγραμματισμού της επιλογής σας ανάμεσα στις ακόλουθες: C/C++, Java, Fortran, Matlab/Octave, Python, R.

**Ημερομηνία παράδοσης: 8 Φεβρουαρίου 2023**