北京大学高等数学A（I）期末考试试题

2022 年 12 月 19 日

全卷共 2 页, 计六 道大题, 满分 100 分.

一、 (本题$2\times 8=16$ 分)

1. 证明直线 ℓ $\begin{cases} x-2y+z &= 0 \\ 5x+2y-5z &= -6 \end{cases}$ 过点$(1,2,3)$, 并把此一般方程化为标准方程。

2. 求曲线 $x=7t-14$, $y=4t^2$, $z=3t^3$ 在参数$t=1$时对应的点P处的法平面方程。

二、 (本题$2\times 10=20$ 分) 计算下列各题

1. 设 $z=\arctan\dfrac{(x-3)y+(x^2+x-1)y^2}{(x-2)y+(x-3)^2y^4}$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(3,0)}$.

2. 设 $z=z(x,y)$ 由方程

$$m\left(x+\frac{z}{y}\right)^n+n\left(y+\frac{z}{x}\right)^m=1$$

确定，其中m 和 n都是自然数。计算并化简：$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}+xy.$

三、 (本题$3\times 8=24$ 分) 考虑下列极限, 若存在, 则求其值; 若不存在,说明为什么。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^3}\sin^3 2t dt}{\int_0^{x^2}\tan t^5 dt}$; (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k^2}$.

转下页

四、 (本题$3\times 8=24$ 分) 计算下列各题

1. 设$P_1(a_1,b_1,c_1)$, $P_2(a_2,b_2,c_2)$ 是三维空间单位球面$x^2+y^2+z^2=1$ 上的两个不同的点，$O(0,0,0)$ 是坐标原点。计算

$$(\overrightarrow{OP_1}\times\overrightarrow{OP_2})^2+(\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2})^2$$

的值，其中符号$(\vec{\mathbf{r}})^2$ 表示向量$\vec{\mathbf{r}}$的自身内积$\vec{\mathbf{r}}\cdot\vec{\mathbf{r}}$.

2. 计算 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\frac{\sin^2 x}{1+e^x}+\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\right)dx.$

3. 计算 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\cos x}dx.$

五、 (本题8 分)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可导, $f(a)=f(b)=0$, $f(\frac{a+b}{2})>0$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)<0$.

六、 (本题8 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上有连续的导数，$f(0)=f(2)=0$, 记 $M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$. 证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,2)$ 使得 $|f'(\xi)|\geq M$.

(2) 若对任意的 $x\in(0,2)$, 有 $|f'(x)|\leq M$, 则 $f\equiv 0$.