# 北京大学线性代数 B 期末试题

(2022-2023学年第一学期)

**1.** (12分)
把下面矩阵表示成初等矩阵的乘积并求出其逆矩阵。

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

**2.** (18分) 设$M_2(k)$是数域$k$上所有2-级方阵构成的线性空间。
(i).证明：矩阵的转置是$M_2(k)$上的线性变换。
(ii).求出转置线性变换在基本矩阵$E_{ij}$构成的基下的矩阵。

**3.** (15分) 设实数域$\mathbb{R}$上的矩阵$A$为

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$$

(1) 求正交矩阵$Q$，使得$Q^T AQ$为对角矩阵$D$，其中$Q^T$为$Q$的转置;
(2) 求正定矩阵$C$，使得$C^2 = (a+3)I - A$，其中$I$为3阶单位矩阵。

**4.** (20分) 设实二次型

$$f(X) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2ax_2x_3, \quad a \in \mathbb{R}\text{为参数},$$

可用非退化线性替换$X = CY$化成二次型

$$g(Y) = g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1y_2.$$

(1) 求参数$a$的值；
(2) 求把$f(X)$化成$g(Y)$的非退化线性替换中的可逆矩阵$C$。

**5.** （16分）设$r$, $s$为正整数，分块矩阵$A$为

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix},$$

其中$A_{11}$, $A_{22}$分别为$r$阶，$s$阶的方阵，$O$为$s \times r$零矩阵。
求证：
(1) $A$可逆的充分必要条件是$A_{11}$与$A_{22}$都可逆;
(2) 当$A$可逆时，用$A_{11}$,$A_{12}$,$A_{22}$给出$A^{-1}$的表达式。

**6.** (12分) 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$为欧几里得空间$\mathbb{R}^n$中的一组基。证明：存在$\mathbb{R}^n$中的一组标准正交基$\beta_1,\cdots,\beta_n$使得$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$到$\beta_1,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵为上三角矩阵。

**7.** (7分) 设$\mathbb{R}$为实数域，$V$是以0为极限的实数数列全体，即

$$V=\left\{\{a_n\}\mid a_n\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty}a_n=0\right\}$$

在$V$中定义加法与数乘运算：$\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\},\ k\{a_n\}=\{ka_n\},k\in\mathbb{R}$，则$V$构成实数域$\mathbb{R}$上的线性空间(不需要证明).
请证明：$V$是无穷维的线性空间.