# 2020-2021 学年第一学期线性代数（B）期末考试回忆版

（全校统考，范围简明线性代数 4.2-9.3（不含带星号部分），整理 by 19yyk）

一、填空题（12 分，一题 3 分）

1.A 为四阶矩阵，rank（$A^*$）的所有可能取值为___________-

2.三阶矩阵按合同规范形分类可以分为___________种不同的类别

3.将$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$表示为三个初等矩阵的乘积: $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ =___________

4.写出四个子空间的和的维数公式： $\dim(V_1 + V_2 + V_3 + V_4)=$ ___________

二、计算题（53 分）

1.已知一个四阶矩阵 A

i.求正交矩阵 T，使 T'AT 为对角矩阵（算出来 A 的特征值为 2，4，4，6）(24 分）

ii.写出正交对角化所得矩阵的所有可能？（3 分）

iii.求矩阵 C 使$C^2 = A$（3 分）

2.已知一个二次型 f(x1,x2,x3)，用成对初等行、列变化法计算其标准型及所作非退化线性变换（15 分）

3.已知一个线性变换在$K^3$的标准正交基$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$下的矩阵 A,并且已知$K^3$的另一组基$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$分别的坐标，计算该线性变换在$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$下的矩阵（8 分）

三、证明题（35 分）

1.已知 M 为线性空间 V 的一组基$(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$到一组标准正交基$(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$的过渡矩阵，求证:存在正交矩阵 P 和上三角矩阵 S，满足 M=PS（10 分）

2.$\underline{A}$ 为欧氏空间 V 上的一个变换，求证以下两个命题等价：(10 分)

（i）$\underline{A}$ 线性，且将标准正交基映为标准正交基

（ii）对任意α，β ∈ V,$(\underline{A}\alpha,\underline{A}\beta)=(\alpha,\beta)$

3.求 V 上所有的线性变换 $\underline{A}$,满足其在 V 的任意一组基下的矩阵都相同,并证明你的结论(10 分）

4.n 级方阵 M 满足：第 i 行第 j 列元素为 i 和 j 的最大公因数，求证：M 正定（5 分）

（试卷上告诉了你数论中的欧拉函数的某些性质，具体给了什么性质记不太清了）

注：

填空 1 指的是伴随矩阵，不是共轭转置

计算 1 矩阵可以用数上习题 5.5/1（4）的矩阵

计算 2 可以用习题 6.1/8（1）

计算 3 可以用习题 8.2/8

# 北京大学线性代数$B$期末试题

1. 填空题(共12分)

   (a) 设$A$为四级方阵，则$A^*$的秩可能为________.

   (b) 把矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$写成三个初等矩阵的乘积________.

   (c) 三级实对称矩阵集合按合同关系分类，可以分成________类.

   (d) 设$V_1, V_2, V_3, V_4$是有限维线性空间$V$的子空间,则四个子空间和的维数公式为：$\dim(V_1+V_2+V_3+V_4)=$________.

2. 计算题(共53分)

   (a) (30分) 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

   i. (24分)求正交矩阵$T$,使得$T'AT$为对角阵.

   ii. (3分)写出与$A$相似的所有对角阵.

   iii. (3分)求矩阵$C$使得$A=C^2$.

   (b) (15分)用矩阵的成对初等行列变换把数域$K$上的下面二次型化成标准型，并写出所作的非退化线性替换。

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+4x_2x_3.$$

   (c) (8分)已知$K^3$上的线性变换$\mathscr{A}$在标准基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

   求$\mathscr{A}$在基$\eta_1,\eta_2,\eta_3$下的矩阵，其中$\eta_1=(2,3,1)',\eta_2=(3,4,1)',\eta_3=(1,2,2)'$.

3. 证明题(共35分)

   (a) (10分)设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$为欧几里得空间$V$的一组基。设$\beta_1,\cdots,\beta_n$为$V$的任意一组标准正交基。矩阵$M$ 是$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$到$\beta_1,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵。证明：$M=SP$,其中$P$为$n$-级正交矩阵，$S$为$n$-级上三角矩阵.

   (b) (10分) 设$V$是实数域$\mathbb{R}$上的有限维实内积空间。设$\mathscr{A}$是$V$到自身的映射。证明下面条件等价：

i. 映射$\mathscr{A}$保持内积,即：对于任意$\alpha, \beta \in V$都有$(\mathscr{A}(\alpha), \mathscr{A}(\beta)) = (\alpha, \beta)$.

ii. $\mathscr{A}$是线性的且把标准正交基变到标准正交基。

(c) (10分) 设$V$是数域$K$上的有限维线性空间，试确定$V$的在任何一组基下矩阵都相同的线性变换$\mathscr{A}$，并给出证明。

(d) (5分)设$M$是$n$-级矩阵，第$(i, j)$位置上的元素是$i$和$j$的最大公因子，$1 \leq i, j \leq n$. 证明：矩阵$M$是正定矩阵。

数学小知识：下面的结论可以直接用于试卷的解答。设$a$是一个正整数，$\phi(a)$表示小或等于$a$并且与$a$互素的正整数的个数，比如：$\phi(1) = 1$。该映射称为欧拉函数，关于欧拉函数有如下等式成立

$$\sum_{j|n} \phi(j) = n$$

求和取遍所有$n$ 的正因子.