北京大学高等数学A（I）期末考试试题

(共五道大题， 满分100分)

2024.01.04

一、（本题 20 分）

1.1 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}-e\right)$.

1.2 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 $n+1$阶可导,且

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0,\ \ f^{(n)}(0)=a$$

求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(e^x-1)-f(x)}{x^{n+1}}$.

二、（本题 20 分）

2.1 设二元函数 $F(u,v)$ 有连续的二阶偏导数，$z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x-z,y-z)=0$ 确定的隐函数. 计算并化简

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

2.2 给定方程组

$$\begin{cases} xy+yz^2+4=0 \\ x^2y+yz-z^2+5=0. \end{cases} \qquad (\star)$$

试讨论在点 $P_0(1,-2,1)$ 附近方程组 $(\star)$ 能确定哪些隐函数？

并计算 $(\star)$ 确定出的隐函数在 P_0 处的导数.

三、（本题 20 分）求函数 $f(x,y)=(y-x^2)(y-x^3)$ 的极值.

【转下页】

四、（本题 20 分）

4.1 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的一个邻域内有定义且在 $(0,0)$ 处连续.
若极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，求证：$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

4.2 平面 $x+y+z=1$ 截圆柱面 $x^2+y^2=1$ 得一椭圆周，试用多元微分学的方法求此椭圆周上到原点最近及最远的点.

五、（本题 20 分）

5.1 设 $f(x)$ 是一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期为 $T \neq 0$ 的无穷阶光滑函数，k为任一给定的自然数（从1开始）. 证明一定存在点 $\xi \in \mathbb{R}$，使得 $f^{(k)}(\xi)=0$.

5.2 设函数 $f(u,v)$ 有连续偏导数 $f_u(u,v)$, $f_v(u,v)$. 且满足 $f(x,1-x)=1$.
证明：函数 $f(u,v)$ 在单位圆周 $u^2+v^2=1$ 上至少存在两个不同的点满足下列方程：$v\,f_u(u,v)=u\,f_v(u,v)$.

【全卷完】