线性代数(B)线下考试

1. (20分) 设K为一个数域. 在4维向量空间K^4中，给定向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-3\end{pmatrix},\quad \beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \beta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \beta_3=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\-4\end{pmatrix}$$

由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$生成的子空间记为$V_1$，由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$生成的子空间记为$V_2$.
试求子空间V_1+V_2和$V_1\bigcap V_2$的维数，并在上述6个向量中给出这两个子空间的基.

解：显然$V_1+V_2=\mathrm{span}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$. 把$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$作为列排成一个矩阵，再用初等行变换化成阶梯型

$$\begin{bmatrix}1&2&1&1&1&1\\2&3&2&1&0&3\\1&1&2&1&1&0\\-2&0&-3&1&-1&-4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&-2&0&5\\0&1&0&1&0&-1\\0&0&1&1&0&-2\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

这就可以看出$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2$为$V_1+V_2$的一个基，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为$V_1$的基. 又因为后3列组成的矩阵的后3行组成的3阶子式

$$\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&0&-2\\0&1&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-1\\1&-2\end{vmatrix}=-2+1=-1\neq 0$$

所以β_1,β_2,β_3为V_2的一个基.

由子空间的维数公式，$\dim(V_1\bigcap V_2)=6-4=2$.

任给一个$\eta\in V_1\bigcap V_2$，都有

$$\eta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=-x_4\beta_1-x_5\beta_2-x_6\beta_3,\quad x_1,x_2,x_3,x_4\,x_5,x_6\in K\ \text{待定}$$

这6个系数满足齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\beta_1+x_5\beta_2+x_6\beta_3=0$$

其系数矩阵用初等行变换化成阶梯型

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

最后一个矩阵对应的齐次线性方程组为：

$$\begin{cases} x_1 & = 2x_4 - 5x_6 \\ x_2 & = -x_4 + x_6 \\ x_3 & = -x_4 + 2x_6 \\ x_5 & = 0 \end{cases}, \quad x_4, x_6 \text{ 为自由未知量}$$

取$x_4 = k_1$, $x_6 = k_2$，得到通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k_1 - 5k_2 \\ -k_1 + k_2 \\ -k_1 + 2k_2 \\ k_1 \\ 0 \\ k_2 \end{pmatrix}, \quad \forall\, k_1, k_2 \in K$$

从而$V_1 \bigcap V_2$中的所有向量都可以表示为$\eta = -k_1\beta_1 - k_2\beta_3$，前面已经证明了$\beta_1, \beta_3$线性无关，所以$\beta_1, \beta_3$为$V_1 \bigcap V_2$的一个基.

2. (10分)　设K为数域，n是正整数. V是K上的线性空间, 且$\dim V = n$. 再设$\mathbf{T} \in \mathrm{Hom}(V, V)$在$K$中有$n$个互不相同的特征值. 证明: 如果$\mathbf{S} \in \mathrm{Hom}(V, V)$满足$\mathbf{ST} = \mathbf{TS}$, 那么$\mathbf{S}$可对角化.

解答：设$\mathbf{T}$的n个互异特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，对应的特征向量为$v_1, v_2, \cdots, v_n$，则这组向量一定线性无关，又因为$\dim V = n$，所以这个向量组构成$V$的基.

而且$\mathbf{T}$有n个一维的特征子空间$\mathrm{span}(v_1), \mathrm{span}(v_1), \cdots, \mathrm{span}(v_n)$.

由于$\mathbf{ST} = \mathbf{TS}$, 所以对$j = 1, 2, \ldots, n$都有

$$\mathbf{TS}v_j = \mathbf{T}(\mathbf{S}v_j) = \mathbf{S}(\mathbf{T}v_j) = \lambda_j(\mathbf{S}v_j)$$

这表明$\mathbf{S}v_j \in \mathrm{span}(v_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$，从而线性无关的n个向量$v_1, v_2, \cdots, v_n$就都是$\mathbf{S}$的特征向量. 这就证明了存在$\mathbf{S}$的特征向量构成V的基，即$\mathbf{S}$可对角化.

3. (20分) 已知数域K上含有参数a的矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & a & 5\end{bmatrix}$$

的特征多项式有一个2重根，求a的值并讨论A是否相似于对角矩阵.

解：A的特征多项式为：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 3\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2-\lambda & 0\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 2-\lambda & 0\\ \lambda-3 & \lambda-4 & 3\\ -1-a & -a & \lambda-5\end{vmatrix}$$

最后一个行列式按第一行展开，就得到

$$|\lambda I-A|=-(2-\lambda)\begin{vmatrix}\lambda-3 & 3\\ -1-a & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a)$$

下面分两种情况讨论：

1). 如果$\lambda=2$为二重根，则

$$4-16+18+3a=0\implies a=-2,\quad |\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$$

此时A特征值为$2,2,6$.

$$2I-A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & -2 & 3\\ -1 & 2 & -3\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad 3-\mathrm{rank}(2I-A)=3-1=2$$

2重特征值$\lambda=2$的特征子空间的维数为2，所以此时A可以对角化.

2). 如果$\lambda=2$为单根，则$\lambda^2-8\lambda+18+3a$必为完全平方式，于是可得$a=-2/3$.

此时三个特征值为$2,4,4$，而且

$$4I-A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 3\\ -1 & 2/3 & -1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad 3-\mathrm{rank}(4I-A)=3-2=1$$

2重特征值$\lambda=4$的特征子空间的维数为1，所以此时A不能对角化.

4. (15分) 设s,n为正整数且$s\leq n$，K为数域，A为K上的$s\times n$矩阵，B 为K上的$n\times s$ 矩阵.

(1) 什么是A的相抵标准形？

(2) 记I_n,I_s分别为n阶s阶单位矩阵，证明AB与BA这两个方阵的特征多项式满足关系式：

$$|\lambda I_n-BA|=\lambda^{n-s}|\lambda I_s-AB|.$$

解答：只考虑A为非零矩阵的情形.

(1)存在s阶可逆矩阵P和n阶可逆矩阵Q，使得

$$PAQ=\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix},\quad \text{其中 } r=\operatorname{rank}(A),\ I_r \text{ 为}r\text{阶单位矩阵.}$$

(2)将$Q^{-1}BP^{-1}$分块为：

$$Q^{-1}BP^{-1}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},\quad \text{其中 } B_{11} \text{ 为}r\text{阶方阵.}$$

则有

$$Q^{-1}BA\,Q=Q^{-1}BP^{-1}PAQ=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{11} & O \\ B_{21} & O \end{bmatrix}$$

$$PABP^{-1}=PAQQ^{-1}BP^{-1}=\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ O & O \end{bmatrix}$$

这表明

$$BA \text{ 与 } \begin{bmatrix} B_{11} & O \\ B_{21} & O \end{bmatrix} \text{ 相似, 它们的特征多项式相同;}\quad AB \text{ 与 } \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} \\ O & O \end{bmatrix} \text{ 相似, 它们的特征多项式相同.}$$

于是就有

$$|\lambda I_n-BA|=\left|\begin{bmatrix} \lambda I_r & O \\ O & \lambda I_{n-r} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} B_{11} & O \\ B_{21} & O \end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix} \lambda I_r-B_{11} & O \\ -B_{21} & \lambda I_{n-r} \end{bmatrix}\right|=\lambda^{n-r}|\lambda I_r-B_{11}|$$

以及

$$|\lambda I_s-AB|=\left|\begin{bmatrix} \lambda I_r & O \\ O & \lambda I_{s-r} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ O & O \end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix} \lambda I_r-B_{11} & -B_{12} \\ O & \lambda I_{s-r} \end{bmatrix}\right|=\lambda^{s-r}|\lambda I_r-B_{11}|$$

所以就有

$$|\lambda I_n-BA|=\lambda^{n-r}|\lambda I_r-B_{11}|=\lambda^{n-s}\,\lambda^{s-r}|\lambda I_r-B_{11}|=\lambda^{n-s}|\lambda I_s-AB|.$$

5. (10分) 设n为正整数，A为n阶半正定实对称矩阵. 求证：对任意的n维实列向量α, β，都有

$$(\alpha^T A\beta)^2 \le (\alpha^T A\alpha)\,(\beta^T A\beta)$$

其中α^T表示α的转置.

解答：由于A为n阶半正定实对称矩阵，所以它与一个对角阵正交相似，即存在n阶正交阵Q使得

$$QAQ^T = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}, \quad d_j \ge 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

所以就有

$$A = Q^T \begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & & \\ & \sqrt{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{d_n} \end{bmatrix} Q^T Q \begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & & \\ & \sqrt{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{d_n} \end{bmatrix} Q^T = C^T C$$

其中C是半正定矩阵.

于是有

$$|\alpha^T A\beta|^2 = |\alpha^T C^T C\beta|^2 = |(C\alpha)^T (C\beta)|^2 = |(C\alpha, C\beta)|^2,\ \text{其中}(\cdot,\cdot)\text{为标准内积}$$

利用标准内积的Cauchy不等式，就有

$$|\alpha^T A\beta|^2 = |(C\alpha, C\beta)|^2 \le \|C\alpha\|^2 \|C\beta\|^2 = (C\alpha, C\alpha)(C\beta, C\beta) = (\alpha^T C^T C\alpha)(\beta^T C^T C\beta) = (\alpha^T A\alpha)\,(\beta^T A\beta).$$

6. (15分) 设s, n为正整数且$s > n$，A是实数域$\mathbb{R}$上的$s \times n$矩阵，$b \in \mathbb{R}^s$，$\|\cdot\|_2$表示Euclid空间的标准内积定义的范数. 如果$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$使得

$$\|A\bar{x} - b\|_2 \leq \|Ax - b\|_2,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

则称$\bar{x}$是线性方程组$Ax = b$的最小二乘解.
试证明：最小二乘解一定存在，但不一定惟一，并且$\bar{x}$是线性方程组$Ax = b$的最小二乘解当且仅当$\bar{x}$是线性方程组$A^T Ax = A^T b$的解，其中A^T表示A的转置.

解答：记$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，其中$\alpha_j \in \mathbb{R}^n$ 为矩阵A 的第j列，$U = \mathrm{span}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$是$A$的列空间.

$$\begin{aligned}
& \|A\bar{x} - b\|_2 \leq \|Ax - b\|_2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \\
\Longleftrightarrow\ & \|A\bar{x} - b\|_2 \leq \|y - b\|_2, \quad \forall\, y \in U \\
\Longleftrightarrow\ & d(A\bar{x}, b) \leq d(y, b) \quad \forall\, y \in U \\
\Longleftrightarrow\ & A\bar{x}\text{是}b\text{在}U\text{中的正交投影} \\
\Longleftrightarrow\ & b - A\bar{x} \in U^{\perp} \\
\Longleftrightarrow\ & (b - A\bar{x}, \alpha_j) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \\
\Longleftrightarrow\ & \alpha_j^T (b - A\bar{x}) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \\
\Longleftrightarrow\ & A^T (b - A\bar{x}) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & A^T A\, \bar{x} = A^T b
\end{aligned}$$

由于

$$\mathrm{rank}(A^T A, A^T b) = \mathrm{rank}(A^T (A, b)) \leq \mathrm{rank}(A^T) = \mathrm{rank}(A)$$

以及

$$\mathrm{rank}(A^T A, A^T b) \geq \mathrm{rank}(A^T A) = \mathrm{rank}(A)$$

所以线性方程组

$$A^T A\, x = A^T b$$

必有解. 这就说明最小二乘解一定存在.

只有当$A^T A$是满秩方阵时，解才惟一.

7. (10分) 设A为实对称正定矩阵，试证明：必存在对角元都是正数的下三角矩阵L，使得$A=LL^T$，并且这个分解是惟一的.

解答：对A的阶数n作数学归纳法.

当$n=1$时，$A=(a)$, $a>0$, $(a)=(\sqrt{a})(\sqrt{a})$，结论显然成立.

当$n>1$时，设任意$n-1$阶实对称正定矩阵结论都成立. 现在看n阶实对称正定矩阵A.

把$A=(a_{ij})$分块成：

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{bmatrix},\quad 其中\ A_1\in M_{n-1}(\mathbb{R}),\ A_1^T=A_1,\ \alpha\in\mathbb{R}^{n-1}.$$

A正定$\Rightarrow$其所有顺序主子式都>0. A_1的顺序主子式就是A的顺序主子式，所以A_1 正定.

$$\begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -\alpha^T A_1^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{n-1} & -A_1^{-1}\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix},\quad 其中\ b=a_{nn}-\alpha^T A_1^{-1}\alpha$$

两边取行列式，得$|A|=|A_1|b\ \Rightarrow b>0$. 等价地有

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -\alpha^T A_1^{-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{n-1} & -A_1^{-1}\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=L_2\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}L_2^T$$

由下三角矩阵的性质，L_2为对角元>0的下三角方阵.

因为A_1正定，由归纳法假设，存在$n-1$阶对角元都是正数的下三角矩阵L_1，使得$A_1=L_1L_1^T$. 于是有

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} L_1L_1^T & 0 \\ 0 & \sqrt{b}\sqrt{b} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} \end{bmatrix}^T=L_3L_3^T,\ 其中L_3为对角元都是正数的n阶下三角矩阵.$$

最后就有

$$A=L_2L_3L_3^TL_2^T=(L_2L_3)(L_2L_3)^T=LL^T,\quad 其中L=L_2L_3为对角元都是正数的n\ 阶下三角矩阵.$$

下面证分解惟一.

若$A=LL^T=\bar{L}\bar{L}^T$，$L,\bar{L}$都是对角元是正数的下三角阵，则有

$$L^T(\bar{L}^T)^{-1}=L^{-1}\bar{L}$$

由三角矩阵的性质，此等式左边是上三角阵，右边是下三角阵，所以两边一定都等于一个对角阵D，并且对角元都是正数，即得

$$L^T(\bar{L}^T)^{-1}=L^{-1}\bar{L}=D$$

所以有

$$D=L^{-1}\bar{L}\Rightarrow D^{-1}=\bar{L}^{-1}L,\quad D=L^T(\bar{L}^T)^{-1}=L^T(\bar{L}^{-1})^T=\bar{L}^{-1}L$$

即

$$D^{-1}=D=I\Rightarrow L=\bar{L}.$$