2021 春电动力学 A 期中试题

（共 100 分。）

（分数分布：30，30，40。）

1. **带电球面的静电势（30 分）** 考虑真空中一个半径为 R 的球壳，除去靠近北极附近张角为 α 的椎体表面不带电之外，其余球面的部分均匀地带有面电荷密度为 $Q/(4\pi R^2)$ 的面电荷 (特别提醒：不是一个导体球面！而是一个非导体的球壳，一部分均匀带电，一部分不带电！)。空间其余地方没有电荷分布。我们将计算球内和球外的静电势。本题中你可能需要下列勒让德多项式的关系：

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x)P_k(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{lk}\ ,\ \ P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) = (2l+1)P_l(x)\ , \qquad (1)$$
$$P_l(-x) = (-)^l P_l(x)\ ,\ \ P_l(1) \equiv 1\ .$$

其中 $P'_{l\pm1}(x) = dP_{l\pm1}(x)/dx$ 代表相应勒让德多项式的导数。

(a) 首先给出球面带电的总电量。

(b) 利用在球坐标中拉普拉斯方程的典型解在小的和大的 r 处保持有限的解分别可以写为 $r^l P_l(\cos\theta)$ 和 $r^{-(l+1)}P_l(\cos\theta$ 的事实，分别写出这个问题中球内和球外的静电势 $\Phi_{r<R}$ 和 $\Phi_{r>R}$ 按照勒让德多项式的展开式。

(c) 写出 $r = R$ 处的连接条件并给出上问中展开系数满足的方程。

(d) 利用上问的连接条件确定所有展开系数从而得到全空间的静电势。

2. **均匀带电球壳旋转后产生的磁场（30 分）** 考虑一个表面均匀带电的导体球壳，其半径为 R_0，总电量为 Q。现在将球壳绕其直径 (取为 z 轴) 以一定的角速度 $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_3$ 旋转。导体表面的电荷因此会产生面电流密度从而在球壳的内部和外部产生稳恒磁场 (本题忽略相对论效应)。

(a) 首先给出球面所带电荷引起的面电流密度的表达式 (包括其大小及方向)。

(b) 利用我们的替换规则 $\mathbf{J}(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}' \Leftrightarrow \mathbf{K}(\mathbf{x}')d^2A(\mathbf{x}')$, 以及下面的矢势的标准表达式，

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\mathbf{x}'\,\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\ , \qquad (2)$$

给出任意一点 $\mathbf{x}$ 处产生的矢势的积分表达式。

(c) 利用下面的加法定理

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y^*_{lm}(\mathbf{n}')Y_{lm}(\mathbf{n})\ \ , \qquad (3)$$

完成上问中对立体角的积分，分球外和球内两种情形，将结果 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 用观测点 $\mathbf{x}$ 的球坐标表示出来。

(d) 利用 $\mathbf{e}_\phi = -\sin\phi\mathbf{e}_1 + \cos\phi\mathbf{e}_2$ 将球内的矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 表达为直角坐标的形式并且利用 $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$ 求出球内的磁场 $\mathbf{B}$ 的分布。

3. ***电离层中电磁波的传播（40 分）*** 地球的电离层可以视为完全电离了的电子和离子。其中的自由电子的数密度记为 n，其电荷为 $(-e)$(其中 $e>0$)，质量为 m。同时地球表面实际上存在着均匀的地磁场 $\mathbf{B}_0=B_0\mathbf{e}_3$(为方便起见已将 $\mathbf{B}_0$ 的方向取为 z)。本题中将讨论电离层中沿着磁场方向传播的圆频率为 ω 的平面电磁波，从而电磁波的电场可以写为 $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\mathbf{E}e^{ikz-i\omega t}$，其中复振幅 $\mathbf{E}$ 仅仅包含 xy 方向的分量。

(a) 考虑原点附近的一个自由电子，只计及电磁波的电场 $\mathbf{E}$ 和恒定地磁场 $\mathbf{B}_0$ 对电子的相互作用力，写出该自由电子运动的牛顿运动方程。

(b) 在这个问题中，假定入射电场的偏振是左旋/右旋圆偏振将有助于求解上问得到的运动方程。为此设电子运动方程的稳态解为 $\mathbf{x}\propto(\mathbf{e}_1\pm i\mathbf{e}_2)Ee^{-i\omega t}$，分别给出这个解，用 $\mathbf{E}=(\mathbf{e}_1\pm i\mathbf{e}_2)E\equiv\mathbf{e}_\pm E$ 来表达。

(c) 上问中的稳态解对应于电子稳态的一个电偶极矩 $\mathbf{p}=(-e)\mathbf{x}$，于是介质的极化强度 $\mathbf{P}=n\mathbf{p}$(n 为单位体积中自由电子数目)。利用这个事实，分别对左/右旋偏振的光，给出介质的介电常数 $\epsilon_\pm(\omega)$ 作为频率 ω 的函数形式 (其中上/下面的符号分别对应于左/右旋的圆偏振光)。

(d) 左右旋电磁波在电离层中传播的方式的不同 (即 $\epsilon_+(\omega)\neq\epsilon_-(\omega)$) 使得电离层展现出旋光性。也就是说，对于一个线偏振的平面电磁波来说，其线偏振方向会随着传播距离而发生旋转。利用波数 $k_\pm=(\omega/c)\sqrt{\epsilon_\pm}$（其中上/下面的符号分别对应于左/右旋的圆偏振光），线偏振方向旋转的角度将正比于传播的距离。试说明这一现象的原因并给出偏振方向旋转角随传播距离 L 的变化公式。