1. 解: (答案不唯一)　　　　　　By W.J.Sun 22/12/30

本文档仅供学习交流，严禁用于商业用途

$$\begin{pmatrix}4&1&2\\3&2&1\\5&-3&2\end{pmatrix}\xrightarrow{①-②}\begin{pmatrix}1&-1&1\\3&2&1\\5&-3&2\end{pmatrix}\xrightarrow{②-3\cdot①}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&5&-2\\5&-3&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③-5\cdot①}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&5&-2\\0&2&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{5}\cdot②}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2/5\\0&2&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③-2\cdot②}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2/5\\0&0&-11/5\end{pmatrix}\xrightarrow{③\cdot(-\frac{5}{11})}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2/5\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{②+\frac{2}{5}\cdot③}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{①+②}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{①-③}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4&1&2\\3&2&1\\5&-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\3&1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\5&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&5&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&2&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-\frac{11}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&-\frac{2}{5}\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&1\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$$

求矩阵的逆即从I做把A变为I的行变换得到的矩阵。

$$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&\\-3&4&\\&&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&\\-3&4&\\-5&5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&\\-3/5&4/5&\\-5&5&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&\\-3/5&4/5&\\-19/5&17/5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&\\-3/5&4/5&\\19/11&-17/11&-5/11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\1/11&2/11&-2/11\\19/11&-17/11&-5/11\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}12/11&-9/11&-2/11\\1/11&2/11&-2/11\\19/11&-17/11&-5/11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-7/11&8/11&3/11\\1/11&2/11&-2/11\\19/11&-17/11&-5/11\end{pmatrix}$$ ← 这个唯一.

2. 解: 记 $f: M_2(\mathbb{K}) \to M_2(\mathbb{K})$

$A \mapsto A'$.

(i) $\forall A,B\in M_2(\mathbb{K})$, $f(A+B)=(A+B)'=A'+B'=f(A)+f(B)$

$\forall k\in\mathbb{K}, A\in M_2(\mathbb{K})$, $f(kA)=(kA)'=kA'=kf(A)$.

(其中 $(A+B)'(i,j)=(A+B)(j,i)=A(j,i)+B(j,i)=A'(i,j)+B'(i,j)$

$(kA)'(i,j)=(kA)(j,i)=kA(j,i)=kA'(i,j)$.)

(ii) $f(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})=(E_{11},E_{21},E_{12},E_{22})=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

因此f在该基下矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

3. 解：(1) $|\lambda I-A| = \begin{vmatrix} \lambda-a & -1 & 1 \\ -1 & \lambda-a & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -(\lambda-a+1) & 1-(\lambda-a)^2 \\ 0 & \lambda-a+1 & \lambda-a+1 \\ 1 & 1 & \lambda-a \end{vmatrix}$

$= 1\cdot(\lambda-a+1)^2\left(-1+(\lambda-a-1)\right) = (\lambda-a+1)^2(\lambda-a-2)$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=a-1,\ \lambda_3=a+2$,

$\lambda=a-1$ 时，$\lambda I-A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

解系 $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. 正交化 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt2\\0\\1/\sqrt2\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt6\\2/\sqrt6\\1/\sqrt6\end{pmatrix}$.

$\lambda=a+2$ 时 $\lambda I-A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

解系 $\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 正交化 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt3\\1/\sqrt3\\-1/\sqrt3\end{pmatrix}$.

$\therefore Q=\begin{pmatrix} 1/\sqrt2 & -1/\sqrt6 & 1/\sqrt3 \\ 0 & 2/\sqrt6 & 1/\sqrt3 \\ 1/\sqrt2 & 1/\sqrt6 & -1/\sqrt3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt2}{2} & -\frac{\sqrt6}{6} & \frac{\sqrt3}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt6}{3} & \frac{\sqrt3}{3} \\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt6}{6} & -\frac{\sqrt3}{3} \end{pmatrix}$ 为正交阵，

⇐ 不唯一.

使 $Q'AQ=D=\begin{pmatrix} a-1 & & \\ & a-1 & \\ & & a+2 \end{pmatrix}$ 为对角阵

(2) 设 $B=(a+3)I-A$. 则 $Q'BQ=(a+3)I-D=\begin{pmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 取 $C=Q\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}Q'$ 即满足要求：

C 正定：由上式知 C 合同于 $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$，进而合同于 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$，正定.

$C^2=B$：$C^2=Q\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}Q'Q\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}Q'=Q\begin{pmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 1 \end{pmatrix}Q'$

而由 $Q'BQ=\begin{pmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ 知：$B=Q\begin{pmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 1 \end{pmatrix}Q'=C^2$.

巧办法：

$\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}=\frac13\begin{pmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 1 \end{pmatrix}+\frac23 I$

$C=Q'\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}Q$

$=\frac13 Q'\begin{pmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 1 \end{pmatrix}Q+\frac23 I$

$=\frac13 B+\frac23 I$ ⟶

(这办法不开根号)

$\therefore C=\begin{pmatrix} 1/\sqrt2 & -1/\sqrt6 & 1/\sqrt3 \\ 0 & 2/\sqrt6 & 1/\sqrt3 \\ 1/\sqrt2 & 1/\sqrt6 & -1/\sqrt3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt2 & 0 & 1/\sqrt2 \\ -1/\sqrt6 & 2/\sqrt6 & 1/\sqrt6 \\ 1/\sqrt3 & 1/\sqrt3 & -1/\sqrt3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \frac53 & -\frac13 & \frac13 \\ -\frac13 & \frac53 & \frac13 \\ \frac13 & \frac13 & \frac53 \end{pmatrix}$

4. 解：(1) 二次型 $g(Y)$ 关于 Y 矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&1&\\1&1&\\&&4\end{pmatrix}$，

$\begin{pmatrix}1&1&\\1&1&\\&&4\end{pmatrix}$ 有特征值 $0,2,4$. 因此规范型 $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$.

$f(x)$ 关于 X 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{pmatrix}$

由 $f(x)$ 由非退化线性替换 $X=CY$ 化成二次型 $g(Y)$ 知：

C 可逆，$C'AC=B$，A 与 B 合同. 因此 $\operatorname{rank}(A)=2,<3$

$$\therefore 0=\det A=\begin{vmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{vmatrix}=2a^3-3a^2+1=(2a+1)(a-1)^2.$$

$a=1$ 时 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，$r(A)=1$ 不符合要求.

用合同的方式判断也可以.

$a=-\frac{1}{2}$ 时 $A=\begin{pmatrix}1&-\frac12&-\frac12\\-\frac12&1&-\frac12\\-\frac12&-\frac12&1\end{pmatrix}$. A 特征值 $\frac32$（二重），0. 因此 A 也合同于 $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$ 符合要求.

$\therefore a=-\frac12$.

对 A 做成对初等行列变换.

$$\begin{pmatrix}A\\I_3\end{pmatrix}\xrightarrow{②+\frac12\cdot①}\begin{pmatrix}1&-\frac12&-\frac12\\0&\frac34&-\frac34\\-\frac12&-\frac12&1\\1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\xrightarrow{②+\frac12\cdot①}\begin{pmatrix}1&0&-\frac12\\0&\frac34&-\frac34\\-\frac12&-\frac34&1\\1&\frac12&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③+\frac12\cdot①}\xrightarrow{③+\frac12\cdot①}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac34&-\frac34\\0&-\frac34&\frac34\\1&\frac12&\frac12\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\xrightarrow{③+②}\xrightarrow{③+②}\begin{pmatrix}1&&\\&\frac34&\\&&0\\1&\frac12&1\\&1&1\\&&1\end{pmatrix}.$$

$$\xrightarrow{②\cdot\frac{2}{\sqrt3}}\xrightarrow{②\cdot\frac{2}{\sqrt3}}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\\1&\frac{1}{\sqrt3}&1\\&\frac{2}{\sqrt3}&1\\&&1\end{pmatrix}$$

$\therefore C_1'AC_1=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$，$C_1=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{\sqrt3}&1\\&\frac{2}{\sqrt3}&1\\&&1\end{pmatrix}$.

且 C_1 可逆

（C_1 和 C_2 都不唯一）

对 B 做成对初等行列变换

$$\begin{pmatrix}B\\I_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&\\1&1&\\&&4\\1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\xrightarrow{②-①}\xrightarrow{②-①}\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&4\\1&-1&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\xrightarrow{(②,③)}\xrightarrow{(②,③)}\begin{pmatrix}1&&\\&4&\\&&0\\1&0&-1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac12\cdot②}\xrightarrow{②\cdot\frac12}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\\1&0&-1\\0&0&1\\0&\frac12&0\end{pmatrix}$$

$\therefore C_2'BC_2=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$，$C_2=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\0&\frac12&0\end{pmatrix}$

且 C_2 可逆.

由 $(C_2')^{-1}C_1'AC_1(C_2)^{-1} = (C_2')^{-1}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}C_2^{-1} = B$ 知：

取 $C = C_1C_2^{-1}$ 即可. ∵ 由 C_1, C_2 均可逆知 C 可逆，$C'AC$

$$= (C_2^{-1})'C_1'AC_1C_2^{-1} = (C_2^{-1})'\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}C_2^{-1} = B,$$

具体地，
$$C = \begin{pmatrix}1 & 1/\sqrt{3} & 1\\ & 2/\sqrt{3} & 1\\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\0&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix}1 & 1/\sqrt{3} & 1\\ & 2/\sqrt{3} & 1\\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}1&2&\frac{2\sqrt{3}}{3}\\0&1&\frac{4\sqrt{3}}{3}\\0&1&0\end{pmatrix}$$
(不唯一).

5. 证明：(1) $|A| = \begin{vmatrix}A_{11}&A_{12}\\0&A_{22}\end{vmatrix} = |A_{11}|\,|A_{22}|$.

∴ 当 A 可逆时，$0 \neq |A| = |A_{11}|\,|A_{22}|$ ∴ $|A_{11}|, |A_{22}| \neq 0$，$A_{11}, A_{22}$ 均可逆.

当 A_{11}, A_{22} 均可逆时，$|A_{11}| \neq 0$，$|A_{22}| \neq 0$. ∴ $|A| \neq 0$，A 可逆.

(2)
$$(A, I_{r+s}) = \begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&I_r&0\\0&A_{22}&0&I_s\end{pmatrix} \xrightarrow{A_{11}^{-1}\cdot ①} \begin{pmatrix}I_r&A_{11}^{-1}A_{12}&A_{11}^{-1}&0\\0&A_{22}&0&I_s\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{A_{22}^{-1}\cdot ②} \begin{pmatrix}I_r&A_{11}^{-1}A_{12}&A_{11}^{-1}&0\\0&I_s&0&A_{22}^{-1}\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{① - A_{11}^{-1}A_{12}\cdot ②} \begin{pmatrix}I_r&0&A_{11}^{-1}&-A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}\\0&I_s&0&A_{22}^{-1}\end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix}A_{11}^{-1}&-A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}\\0&A_{22}^{-1}\end{pmatrix}.$$

6. 证明：对 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 做 Schmidt 正交化：
$$\gamma_1 = \alpha_1,\quad \gamma_i = \alpha_i - \sum_{j=1}^{i-1}\frac{(\alpha_i, \gamma_j)}{(\gamma_j, \gamma_j)}\gamma_j,\quad i = 2, \cdots, n.$$

再做单位化：$\beta_i = \dfrac{1}{(\gamma_i, \gamma_i)^{1/2}}\cdot\gamma_i$. $i = 1, \cdots, n$.

下证 $(\gamma_1, \cdots, \gamma_i)$ 与向量组 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_i)$ 等价. 归纳法. $i=1$ 时 $(\gamma_1) = (\alpha_1) \cong (\alpha_1)$.

下设 $i = k$ 时成立 $(k \geq 1)$. 则 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \alpha_{k+1}) \cong (\gamma_1, \cdots, \gamma_k, \alpha_{k+1})$

$\cong (\gamma_1, \cdots, \gamma_k, \gamma_{k+1})$. 归纳假设成立. ∴ 任意 $i = 1, \cdots, n$. 两组向量等价.

这句不写 （由 $k+1 = r(\alpha_1, \cdots, \alpha_{k+1}) = r(\gamma_1, \cdots, \gamma_{k+1})$ 知 每步 γ_{k+1} 均不为 0. 因此正交化单位化均可进行.

类似地，对 i 归纳得 $(\gamma_i, \gamma_j) = 0$，$\forall 1 \leq j < i$.

这可不写

$\because (\beta_i,\beta_j)=0,\ \forall 1\le j<i\le n,\ (\beta_i,\beta_i)=\left((\gamma_i,\gamma_i)^{-\frac{1}{2}}\right)^2(\gamma_i,\gamma_i)=1,\ i=1,\cdots,n$

$\therefore \beta_1,\cdots,\beta_n$ 是 R^n 中的标准正交基.

且由 β_i 的取法知 $(\beta_1,\cdots,\beta_i)$ 与 $(\gamma_1,\cdots,\gamma_i)$ 等价，进而

这里是最重要的. $\longleftarrow$ $(\beta_1,\cdots,\beta_i)$ 与 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_i)$ 等价. $\quad i=1,\cdots,n.$

设 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 到 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 过渡阵为 P.

这个P其实是课本上4.6 14那个B的逆矩阵.

则 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P,\quad \beta_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\cdot p_{ji}.$

由 $(\beta_1,\cdots,\beta_i)$ 与 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_i)$ 等价知 β_i 由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_i$ 线性表出.

因此存在 $k_{ji}\ (1\le j\le i)$，使 $\beta_i=\sum_{j=1}^{i}\alpha_j k_{ji}$.

由 β_i 被 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 表出的唯一性知 $p_{ji}=\begin{cases}k_{ji} & (j\le i)\\ 0 & (j>i)\end{cases}$.

即P行号大于列号位置元素均为0. P为上三角矩阵.

7. 证明：对正整数m. 取 $v_m=(a_{mi})_{i=1}^{+\infty}$ 其中 $a_{mi}=\begin{cases}1 & i=m\\ 0 & i\ne m.\end{cases}$

任取正整数m. 由 a_{mi} 在 $i>m$ 时均取0知：$\lim\limits_{i\to\infty}a_{mi}=0$

$\therefore v_m\in V$.

又$\because$ 对 $\forall m>1$. $v_1,\cdots,v_m$ 线性无关：

$0_V=0\{0\}_{n=1}^{+\infty}=\{0\}_{n=1}^{+\infty}$;

$\forall k_1,\cdots,k_m\in R,\quad k_1v_1+\cdots+k_mv_m=\{k_1v_{1i}+\cdots+k_mv_{mi}\}_{i=1}^{+\infty}$

$=(x_i)_{i=1}^{+\infty}$,

其中 $x_i=\begin{cases}k_i & i=1,\cdots,m\\ 0 & i=m+1,\cdots.\end{cases}$

$\therefore$ 由 $k_1v_1+\cdots+k_mv_m=0$ 可得 $k_i=0,\ i=1,\cdots,m.$

$\therefore v_1,\cdots,v_m$ 线性无关.

若V是有限维的，设 $\dim V=N$,

则V中极大线性无关组均包含N个向量，

因此 V中 $(N+1)$ 个向量必然线性相关.

这与 $v_1,\cdots,v_{N+1}$ 线性无关矛盾！

$\therefore$ V是无穷维的线性空间.