

1 Математическая модель транспортной задачи

Переменные: Пусть x_{ij} — количество груза, перевозимого из пункта поставки A_i в пункт потребления B_j , где $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

Ограничения: 1. По запасам:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 200, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 250, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 160. \end{cases}$$

2. По потребностям:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 120, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 120, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 100, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 210, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 60. \end{cases}$$

3. Неотрицательность:

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j.$$

Целевая функция: Минимизировать общие затраты на перевозку:

$$\begin{aligned} Z = & 10x_{11} + 15x_{12} + 16x_{13} + 12x_{14} + 20x_{15} \\ & + 21x_{21} + 9x_{22} + 10x_{23} + 9x_{24} + 7x_{25} \\ & + 12x_{31} + 15x_{32} + 16x_{33} + 13x_{34} + 21x_{35} \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (1)$$

2 Метод северо-западного угла

Шаги: 1. Начинаем с верхнего левого угла матрицы (клетка x_{11}). 2. Распределяем груз, пока не исчерпаем запас или потребность.

Распределение:

1. $x_{11} = \min(200, 120) = 120$. Остаток в A_1 : $200 - 120 = 80$. Потребность B_1 удовлетворена.

2. $x_{12} = \min(80, 120) = 80$. Остаток в A_1 : 0. Потребность B_2 : $120 - 80 = 40$.

3. $x_{22} = \min(250, 40) = 40$. Остаток в A_2 : $250 - 40 = 210$. Потребность B_2 удовлетворена.

4. $x_{23} = \min(210, 100) = 100$. Остаток в A_2 : $210 - 100 = 110$. Потребность B_3 удовлетворена.

5. $x_{24} = \min(110, 210) = 110$. Остаток в A_2 : 0. Потребность B_4 : $210 - 110 = 100$.

6. $x_{34} = \min(160, 100) = 100$. Остаток в A_3 : $160 - 100 = 60$. Потребность B_4 удовлетворена.

7. $x_{35} = \min(60, 60) = 60$. Остаток в A_3 : 0. Потребность B_5 удовлетворена.

Опорный план:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	120	80	0	0	0
A_2	0	40	100	110	0
A_3	0	0	0	100	60

$$\begin{aligned}
 Z &= 120 \cdot 10 + 80 \cdot 15 + 40 \cdot 9 + 100 \cdot 10 \\
 &\quad + 110 \cdot 9 + 100 \cdot 13 + 60 \cdot 21 \\
 &= 1200 + 1200 + 360 + 1000 \\
 &\quad + 990 + 1300 + 1260 \\
 &= 7310.
 \end{aligned} \tag{2}$$

3 Метод минимальной стоимости

Шаги: 1. На каждом шаге выбираем клетку с минимальной стоимостью. 2. Распределяем груз, пока не исчерпаем запас или потребность.

Распределение: 1. Минимальная стоимость $c_{25} = 7$. $x_{25} = \min(250, 60) = 60$. Остаток в A_2 : $250 - 60 = 190$. Потребность B_5 удовлетворена.

2. Следующая минимальная стоимость $c_{24} = 9$. $x_{24} = \min(190, 210) = 190$. Остаток в A_2 : 0. Потребность B_4 : $210 - 190 = 20$.

3. Следующая минимальная стоимость $c_{22} = 9$. $x_{22} = \min(190, 120) = 120$. Но запас A_2 уже исчерпан. Пропускаем.

4. Следующая минимальная стоимость $c_{21} = 21$, но это дорого. Лучше $c_{11} = 10$. $x_{11} = \min(200, 120) = 120$. Остаток в A_1 : $200 - 120 = 80$. Потребность B_1 удовлетворена.

5. Следующая минимальная стоимость $c_{14} = 12$. $x_{14} = \min(80, 20) = 20$. Остаток в A_1 : $80 - 20 = 60$. Потребность B_4 удовлетворена.

6. Следующая минимальная стоимость $c_{12} = 15$. $x_{12} = \min(60, 120) = 60$. Остаток в A_1 : 0. Потребность B_2 : $120 - 60 = 60$.

7. Следующая минимальная стоимость $c_{32} = 15$. $x_{32} = \min(160, 60) = 60$. Остаток в A_3 : $160 - 60 = 100$. Потребность B_2 удовлетворена.

8. Следующая минимальная стоимость $c_{23} = 10$, но A_2 пуст. $c_{33} = 16$. $x_{33} = \min(100, 100) = 100$. Остаток в A_3 : 0. Потребность B_3 удовлетворена.

Опорный план:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	120	60	0	20	0
A_2	0	0	0	190	60
A_3	0	60	100	0	0

Стоимость:

$$\begin{aligned}
 Z &= 120 \cdot 10 + 60 \cdot 15 + 20 \cdot 12 + 190 \cdot 9 \\
 &\quad + 60 \cdot 7 + 60 \cdot 15 + 100 \cdot 16 \\
 &= 1200 + 900 + 240 + 1710 \\
 &\quad + 420 + 900 + 1600 \\
 &= 6970.
 \end{aligned} \tag{3}$$

4 Метод Фогеля

Шаги: 1. Для каждой строки и столбца вычисляем разницу между двумя минимальными стоимостями. 2. Выбираем строку или столбец с максимальной разницей. 3. В выбранной строке/столбце распределяем груз в клетку с минимальной стоимостью.

Итерации: 1. Разницы по строкам: $A_1: 12 - 10 = 2$, $A_2: 9 - 7 = 2$, $A_3: 13 - 12 = 1$. Разницы по столбцам: $B_1: 12 - 10 = 2$, $B_2: 15 - 9 = 6$, $B_3: 16 - 10 = 6$, $B_4: 12 - 9 = 3$, $B_5: 7 - 7 = 0$. Максимальная разница в столбцах B_2 и B_3 (6). Выбираем B_2 , минимальная стоимость $c_{22} = 9$. $x_{22} = \min(250, 120) = 120$. Остаток в A_2 : $250 - 120 = 130$. Потребность B_2 удовлетворена.

2. Удаляем столбец B_2 . Разницы по строкам: $A_1: 12 - 10 = 2$, $A_2: 9 - 7 = 2$, $A_3: 13 - 12 = 1$. Разницы по столбцам: $B_1: 12 - 10 = 2$, $B_3: 10 - 10 = 0$ (так как $c_{23} = c_{33} = 10$), $B_4: 12 - 9 = 3$, $B_5: 7 - 7 = 0$. Максимальная разница в столбце B_4 (3). Минимальная стоимость $c_{24} = 9$. $x_{24} = \min(130, 210) = 130$. Остаток в A_2 : 0. Потребность B_4 : $210 - 130 = 80$.

3. Удаляем строку A_2 . Разницы по строкам: $A_1: 12 - 10 = 2$, $A_3: 13 - 12 = 1$. Разницы по столбцам: $B_1: 12 - 10 = 2$, $B_3: 16 - 16 = 0$, $B_4: 12 - 12 = 0$, $B_5: 21 - 20 = 1$. Максимальная разница в строках A_1 (2) и столбцах B_1 (2). Выбираем A_1 , минимальная стоимость $c_{11} = 10$. $x_{11} = \min(200, 120) = 120$. Остаток в A_1 : $200 - 120 = 80$. Потребность B_1 удовлетворена.

4. Удаляем столбец B_1 . Разницы по строкам: $A_1: 12 - 12 = 0$, $A_3: 13 - 13 = 0$. Разницы по столбцам: $B_3: 16 - 16 = 0$, $B_4: 12 - 12 = 0$, $B_5: 21 - 20 = 1$. Все разницы нулевые, распределяем по минимальным стоимостям. $x_{14} = \min(80, 80) = 80$. Остаток в A_1 : 0. Потребность B_4 удовлетворена.

5. Остается A_3 . $x_{33} = 100$, $x_{35} = 60$.

Опорный план:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	120	0	0	80	0
A_2	0	120	0	130	0
A_3	0	0	100	0	60

$$\begin{aligned}
Z &= 120 \cdot 10 + 80 \cdot 12 + 120 \cdot 9 \\
&\quad + 130 \cdot 9 + 100 \cdot 16 + 60 \cdot 21 \\
&= 1200 + 960 + 1080 + 1170 \\
&\quad + 1600 + 1260 \\
&= 7270.
\end{aligned} \tag{4}$$

5 Проверка на оптимальность методом потенциалов

Проверим план, полученный методом минимальной стоимости (он лучше других).

Базисные клетки: $x_{11}, x_{12}, x_{14}, x_{24}, x_{25}, x_{32}, x_{33}$.

Система потенциалов:

$$u_1 + v_1 = 10, \quad u_1 + v_2 = 15, \quad u_1 + v_4 = 12, \quad u_2 + v_4 = 9, \quad u_2 + v_5 = 7, \quad u_3 + v_2 = 15, \quad u_3 + v_3 = 16.$$

Полагаем $u_1 = 0$:

$$v_1 = 10, \quad v_2 = 15, \quad v_4 = 12, \quad u_2 = 9 - 12 = -3, \quad v_5 = 7 - (-3) = 10, \quad u_3 = 15 - 15 = 0, \quad v_3 = 16 - 0 = 16.$$

Проверка свободных клеток:

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j).$$

1. $\Delta_{13} = 16 - (0 + 16) = 0$, 2. $\Delta_{15} = 20 - (0 + 10) = 10$, 3. $\Delta_{21} = 21 - (-3 + 10) = 14$, 4. $\Delta_{22} = 9 - (-3 + 15) = -3$ (отрицательная оценка).

План не оптимален. Улучшаем по клетке x_{22} .

Цикл пересчета: $x_{22} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{14} \rightarrow x_{24}$. Минимальный груз в минусовых клетках: $\theta = \min(60, 190) = 60$. Новый план:

$$x_{22} = 60, \quad x_{12} = 0, \quad x_{14} = 80, \quad x_{24} = 130.$$

Обновленный план:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	120	0	0	80	0
A_2	0	60	0	130	60
A_3	0	60	100	0	0

Стоимость: $Z = 6970 - 3 \cdot 60 = 6790$.

6 Итоговый оптимальный план:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	120	0	0	80	0
A_2	0	60	0	130	60
A_3	0	60	100	0	0

Минимальная стоимость: $Z = 6790$.