

# VARIABLE COMPLEJA I

**Dra. Laura Hidalgo Solís**  
Departamento de Matemáticas,  
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa  
comentarios: [hiso@xanum.uam.mx](mailto:hiso@xanum.uam.mx)

Mayo del 2006



# Índice general

<b>1. Números Complejos</b>	<b>9</b>
1.1. El álgebra de los números complejos . . . . .	9
1.2. El plano extendido. . . . .	25
1.3. Ejercicios . . . . .	33
<b>2. Teoría de funciones <math>\mathbb{C}</math>-diferenciables</b>	<b>35</b>
2.1. Introducción. . . . .	35
2.2. Funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables y holomorfas. . . . .	36
2.3. Series de Potencias y funciones holomorfas . . . . .	47
2.4. Ejercicios . . . . .	56
<b>3. Funciones elementales</b>	<b>57</b>
3.1. Potencias y raíces. . . . .	57
3.2. La fórmula de Euler . . . . .	61
3.3. Las funciones exponencial y logaritmo. . . . .	62
3.3.1. La función exponencial . . . . .	62
3.3.2. La función Logaritmo . . . . .	64
3.4. Las fuciones trigonométricas . . . . .	67
<b>4. Aplicaciones Conformes</b>	<b>71</b>
4.1. Introducción. . . . .	71
4.2. Aplicaciones Conformes . . . . .	72
4.3. Transformaciones de Möbius. . . . .	79
4.4. Simetría. . . . .	85
4.5. Ejercicios . . . . .	87
<b>5. Integral de Línea.</b>	<b>91</b>
5.1. Integración Compleja . . . . .	91
5.2. El Teorema de Cauchy . . . . .	108
5.3. Ejercicios . . . . .	113

<b>6. Funciones holomorfas.</b>	<b>115</b>
<b>7. Homotopía y el Teorema de Cauchy.</b>	<b>121</b>
<b>8. El Índice de una curva</b>	<b>131</b>
<b>A. Teoría Básica de las Series de Potencias.</b>	<b>143</b>
A.1. Introducción. . . . .	143
A.2. Sucesiones y completos. . . . .	149
A.3. Continuidad . . . . .	150
A.4. Convergencia uniforme.	
El criterio M de Weierstrass. . . . .	151
A.5. Series de Potencias. . . . .	153
<b>A. Sumas de Riemann-Stieltjes</b>	<b>155</b>
A.1. Fórmulas de Cauchy y sus principales consecuencias. . . . .	162

## Introducción

RESUMEN. A continuación presentamos el resumen de las notas de curso de variable compleja I, con el fin de que el alumno tenga un apoyo complementario a su libro de texto y/o notas de clase. Como parte de los objetivos del presente curso tenemos que el alumno:

- Comprenda los elementos básicos de la teoría clásica de funciones de una variable compleja, y los relacione con otras ramas de las matemáticas, esto con el fin de prepararlo para cursos posteriores de matemáticas.
- Reconozca el papel que juega la variable compleja dentro de las matemáticas, como antecesor de diversas áreas de la misma, tales como la teoría de la homotopía, la teoría de variedades, la teoría de las Superficies de Riemann, y la teoría de Curvas Algebraicas, entre otras.
- Integre los conocimientos y habilidades adquiridos en cursos anteriores, tales como: Estructuras Numéricas, Cálculo Avanzado, Álgebra y Geometría, reconociendo la interrelación que hay entre ellos.
- Reafirme su habilidad para formular enunciados y demostraciones en términos matemáticos, con el rigor adecuado.

## Historia

Alrededor del año 1545 el matemático italiano Girolamo Cardano publicó *Ars Magna* (El Gran Arte), una obra maestra de 40 capítulos en el cual se da, por primera vez, una solución algebraica a la ecuación cúbica general:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Su técnica involucró el transformar esta ecuación en otra ecuación cúbica libre del término cuadrático, esto es, una ecuación de la forma:

$$x^3 + bx + c = 0$$

Una solución a dicha ecuación está dada como [U, pg. 84-86]:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}}$$

Dicha solución le había sido presentada por Niccolo Fontana, mejor conocido como Tartaglia, aunque dicha solución fue descubierta unos 30 años antes por Scipione Ferro de Bolonia, de manera totalmente independiente.

Este valor que se obtuvo para  $x$  podría usarse para factorizar la cúbica en una ecuación lineal y otra cuadrática, y la última podría resolverse aplicando la fórmula cuadrática. Así, basando en el trabajo de Tartaglia, y una transformación apropiada, Cardano pudo resolver la ecuación cúbica general, hecho que hasta entonces había parecido imposible.

En el tiempo de Cardano, todavía se trataban los números imaginarios con cierta suspicacia, pues era difícil concebir cualquier realidad física que correspondiese con ellos. El propio Cardano, pese a sus esfuerzos a tratar con esta noción, en un momento consideró que, *el proceso de la aritmética que trata con las cantidades imaginarias es, tan refinado como inútil*.

Esta forma de pensar cambió a partir de 1572, año en que Rafael Bombelli mostró que, de hecho, estos números tienen gran utilidad. Si se considera la ecuación cúbica  $x^3 - 15x - 4 = 0$ , y se substituyen los valores  $b = -15$  y  $c = -4$  en la fórmula de “Ferro-Tartaglia” para la ecuación cúbica  $x^3 + bx + c = 0$ , obtenemos el valor:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

que puede representarse como,

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}.$$

Bombelli sospechó que, si la ecuación cúbica original tenía solución, esta podría escribirse en términos de  $u + v\sqrt{-1}$  y  $u - v\sqrt{-1}$  para algunos números reales  $u$  y  $v$ .

Es decir, Bombelli pensó que

$$u + v\sqrt{-1} = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} \quad \text{y} \quad u - v\sqrt{-1} = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}.$$

De hecho, usando la identidad  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ , y pretendiendo que estos números obedezcan las reglas normales de el álgebra, tomando  $a = u$  y  $b = v\sqrt{-1}$ , lograron ver que:

$$\begin{aligned} (u + v\sqrt{-1})^3 &= u^3 + 3u^2(v\sqrt{-1}) + 3u(v\sqrt{-1})^2 + (v\sqrt{-1})^3 \\ &= u(u^3 - 3v^2) + v(3u^2 - v^2)\sqrt{-1} \\ &= 2 + 11\sqrt{-121} \end{aligned}$$

Así, igualando ambas partes de las ecuaciones, Bombelli razonó que:

$$u(u^2 - 3v^2) = 2 \quad \text{y} \quad v(3u^2 - v^2) = 11.$$

Entonces supuso que esos  $u$  y  $v$  eran enteros. Como 2 es un número primo, sus únicos factores enteros son 2 y 1, por lo que, la ecuación  $u(u^2 - 3v^2) = 2$  lo llevó a concluir que  $u = 2$  y  $u^2 - 3v^2 = 1$ . De esto se sigue que  $v^2 = 1$ , o que  $v = \pm 1$ . Increíblemente,  $u = 2$  y  $v = 1$  resuelven la segunda ecuación  $v(3u^2 - v^2) = 11$ , por lo que declaró que los valores para  $u$  y  $v$  debían ser respectivamente  $u = 2$  y  $v = 1$ . También notó que, si  $(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$ , entonces  $2 + \sqrt{-1} = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$ . Igualmente, afirmó  $2 + \sqrt{-1} = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$ . Y tenemos claramente:

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$$

lo cual era un hecho sorprendente.

Pues es claro que una solución de la ecuación  $x^3 - 15x - 4 = 0$  es  $x = 4$ . Sin embargo, para llegar a esta solución real, se forzó a recorrer el desconocido territorio de *los números imaginarios*.

Así, ya no podía ignorarse la utilidad de estos números, que actualmente llamamos *los números complejos*.

Pero ni siquiera este descubrimiento abrió la aceptación general hacia los números complejos. Después de todo, un número real podría representarse

geométricamente en la recta numérica. ¿Qué posible representación podrían tener estos nuevos números?

En 1673 John Wallis hizo una aproximación a una representación geométrica de los números complejos, como la que actualmente conocemos. Wallis estaba interesado en representar las soluciones de la ecuación cuadrática general  $x^2 + 2bx + c^2 = 0$ .

Usando la fórmula cuadrática, dicha ecuación tiene las soluciones  $x = -b \pm \sqrt{b^2 - c^2}$ .

Wallis imaginó estas soluciones como los desplazamientos a la izquierda, el punto  $-b$  como una corrección, y vió cada desplazamiento, cuyo valor era  $\sqrt{b^2 - c^2}$ , como las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

Desafortunadamente, el método de Wallis tiene como consecuencia que  $-\sqrt{-1}$  esta representado por el mismo punto que  $\sqrt{-1}$ . No obstante, con esta interpretación, se podía pensar a los números complejos como los puntos en el plano.

Por el año de 1800, el gran matemático suizo Leonhard Euler adoptó esta representación de los números complejos para obtener las  $n$  soluciones de la ecuación  $x^n - 1 = 0$ . Actualmente, sabemos que estas soluciones pueden expresarse como  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + \sqrt{-1} \sin(\theta)$  para algunos valores reales de  $\theta$ ; Euler pensó en ellos como los vértices de un polígono regular en el plano. Euler también fue el primero en usar el símbolo  $i$  para  $\sqrt{-1}$ . Actualmente, esta notación es la más popular, aunque algunos ingenieros eléctricos prefieren en cambio el símbolo  $j$ , pues  $i$  la utilizan para representar la corriente.

Quizá la figura que más influyó en la aceptación de números complejos fue el matemático alemán Carl Friedrich Gauss, que en su tesis doctoral (1799) presenta la primera demostración de *El Teorema Fundamental de Álgebra*, así como sus críticas y objeciones a pruebas anteriores, posteriormente en 1816 y 1831 presenta otras demostraciones de dichos resultados. En un artículo que escribió en 1831, produjo una representación geométrica clara: identificó el número complejo  $x + iy$  con el punto  $(x, y)$  en el plano cartesiano. Y también describió cómo realizar las operaciones aritméticas con estos números.

Por otra parte Cauchy, basándose en el trabajo sobre la teoría de funciones de Lagrange, inicia el estudio riguroso de la teoría de funciones de una variable compleja, trabajo que continuaría desarrollandose posteriormente bajo la guía de Weierstrass y Riemann.

[http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/History\\_overview.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/History_overview.html)



# Capítulo 1

## Números Complejos

### 1.1. El álgebra de los números complejos

Es fundamental que los números reales y complejos satisfagan las mismas leyes fundamentales de la aritmética. En esta sección se estudiarán dichas leyes, así como su interpretación geométrica.

**Definición 1.** *Un número complejo es una expresión de la forma  $x + yi$  donde  $x$  y  $y$  son números reales.*

*Si  $z_1 = x_1 + y_1i$  y  $z_2 = x_2 + y_2i$  son dos números complejos, diremos que:  $z_1 = z_2$  si, y solamente si,  $x_1 = x_2$  y  $y_1 = y_2$ .*

*Si  $z_1 = x_1 + y_1i$  y  $z_2 = x_2 + y_2i$  son dos números complejos, se define la suma de  $z_1$  con  $z_2$ , que denotamos  $z_1 + z_2$  como:*

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

*y el producto de  $z_1$  con  $z_2$ , que denotamos  $z_1 \cdot z_2$  (o simplemente  $z_1 z_2$ ), como:*

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i.$$

#### Ejemplo 1.

1. Si  $z_1 = 1 + 2i$  y  $z_2 = 3 + 8i$ , entonces  $z_1 + z_2 = 4 + 10i$ , mientras que  $z_1 \cdot z_2 = -13 + 14i$ .
2. Si  $z_1 = x_1 + 0i$  y  $z_2 = x_2 + 0i$ , entonces  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + 0i$  y  $z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 + 0i$ .
3. Si  $z_1 = z_2 = 0 + 1i$ , entonces  $z_1^2 = z_1 * z_1 = -1 + 0i$ .

**Teorema 1.** *Las definiciones anteriores para la adición y multiplicación vuelven al conjunto de los números complejos un campo, donde  $0 + 0i$  es el neutro aditivo, y  $1 + 0i$  es el neutro multiplicativo.*

*Demostración.* Para verificar que el conjunto de los números complejos dotado de las operaciones de suma y producto definidas anteriormente satisface los axiomas de campo utilizaremos la estructura de campo de los números reales.

Si  $z_1 = a + bi$ ,  $z_2 = c + di$  y  $z_3 = e + fi$ , donde  $a, b, c, d, e$  y  $f$  denotan números reales, entonces:

1. Como  $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$  donde  $a + c$  y  $b + d$  son números reales, tenemos que la suma es cerrada.
2. Sabemos que, en el campo de los números reales la suma es conmutativa, tenemos así que  $a + c = c + a$  y  $b + d = d + b$ , de donde

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i = (c + a) + (d + b)i = z_2 + z_1$$

por lo que la suma también es conmutativa en  $\mathbb{C}$ .

3. En el campo de los números reales la suma es asociativa, por lo tanto:  $a + (c + e) = (a + c) + e$  y  $b + (d + f) = (b + d) + f$ , se sigue de aquí que:

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= a + bi + [(c + e) + (d + f)i] \\ &= a + (c + e) + [b + (d + f)]i \\ &= (a + c) + e + [(b + d) + f]i \\ &= (z_1 + z_2) + z_3 \end{aligned}$$

la suma en  $\mathbb{C}$  es asociativa.

4. Como 0 es el neutro aditivo en  $\mathbb{R}$ , entonces  $a + 0 = a$  y  $b + 0 = b$ , de donde

$$z_1 = a + bi = (a + 0) + (b + 0)i = (a + bi) + (0 + 0i)$$

Esto implica que  $0 + 0i$  es neutro aditivo.

5. Como  $a, b \in \mathbb{R}$ , y  $\mathbb{R}$  es un campo,  $a$  y  $b$  tienen inverso aditivo, los cuales denotamos  $-a$  y  $-b$  respectivamente. Si definimos  $z_2$  como  $z_2 = -a + (-b)i = -a - bi$  tenemos que

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0i$$

Así  $z_2 = -a - bi$  es el inverso aditivo de  $z_1$  y solemos denotarlo como  $-z_1$ .

6. Como  $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$  donde  $ac - bd$  y  $ad + bc$  son números reales, tenemos que el producto es cerrado.
7. Sabemos que, en el campo de los números reales el producto es conmutativo, tenemos así que  $ac - bd = ca - db$  y  $ad + bc = da + cb$ , de donde

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i = (ca - db) + (da + cb)i = z_2 \cdot z_1$$

por lo que el producto es una operación conmutativa en  $\mathbb{C}$ .

8. Usando las propiedades de campo de los números reales es fácil ver que:

$$a(ce - df) - b(de + cf) = (ac - bd)e - (ad + bc)f$$

y que

$$b(ce - df) + a(de + cf) = (bc + ad)e + (-bd + ac)f = (ad + bc)e + (ac - bd)f,$$

por tanto:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) &= (a + bi) + [(ce - df) + (de + cf)i] \\ &= [a(ce - df) - b(de + cf)] + [b(ce - df) + a(de + cf)]i \\ &= [(ac - bd)e - (ad + bc)f] + [(ad + bc)e + (ac - bd)f]i \\ &= [(ac - bd) + (ad + bc)i](e + fi) \\ &= (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 \end{aligned}$$

tenemos así que el producto en  $\mathbb{C}$  es asociativo.

9. Para cada  $x \in \mathbb{R}$  tenemos que  $x \cdot 0 = 0$ ,  $x \cdot 1 = x$ , y  $x + 0 = x$ , se sigue de aquí que

$$z_1 = a + bi = (a + 0) + (0 + b)i = (a \cdot 1 + b \cdot 0) + (a \cdot 0 + b \cdot 1)i = (a + bi) \cdot (1 + 0i)$$

Esto implica que  $1 + 0i$  es neutro multiplicativo.

10. Para ver como obtener el inverso de un número complejo distinto de  $0 + 0i$ , supondremos que  $a, b \in \mathbb{R}$ , y alguno de ellos no es cero, en particular,  $a^2 + b^2 \neq 0$ . Si  $w = x + yi$  fuera inverso multiplicativo de  $z_1$  tendríamos que  $1 + 0i = z_1 \cdot w = (a + bi)(x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i$ , tenemos así el siguiente sistema de ecuaciones:

$$1 = ax - by, \quad 0 = bx + ay$$

Como  $a^2 + b^2 \neq 0$ , podemos ver que la solución a este sistema de ecuaciones está dada como

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Así  $w = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$  es inverso multiplicativo de  $z_1$  y solemos denotarlo como  $w = z_1^{-1}$ .

11. Para mostrar la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma, nuevamente utilizaremos las propiedades de campo de los números reales.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (a + bi)[(c + e) + (d + f)i] \\ &= [a(c + e) - b(d + f)] + [b(c + e) + a(d + f)]i \\ &= [(ac - bd) + (ae - bf)] + [(ad + bc) + (af + be)]i \\ &= [(ac - bd) + (ad + bc)i] + [(ae - bf) + (af + be)i] \\ &= z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \end{aligned}$$

□

Al campo de los números complejos lo denotaremos con la letra  $\mathbb{C}$

Nótese que la función  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dada como  $\phi(a) = a + i0$  es un monomorfismo de campos, por lo que  $\mathbb{R}$  es un subcampo de  $\mathbb{C}$ . Así, identificaremos el número real  $a$  con el número complejo  $a + i0$ , esto es,  $a = a + i0$ .

Por otra parte, si  $z = 0 + yi$  simplemente escribiremos  $z = yi$ .

Una vez realizadas estas aclaraciones el ejemplo 3 nos dice que  $i^2 = -1$ , por lo que  $i$  es una solución a la ecuación  $x^2 + 1 = 0$ .

**Proposición 1.**  $\mathbb{C}$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión dos.

*Demostración.* Si  $z_1 = x_1 + y_1i$  y  $z_2 = x_2 + y_2i$  son dos números complejos, tenemos que  $z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$ , y si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces  $\lambda \cdot z_1 = \lambda x_1 + \lambda y_1i$ , como consecuencia del teorema anterior, tenemos que  $\mathbb{C}$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.

Aún más, como  $x + yi = x(1 + 0i) + y(0 + 1i)$  para cada  $x + yi \in \mathbb{C}$  tenemos que  $\mathbb{C}$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión dos. □

El claro ahora que podemos definir un  $\mathbb{R}$ -isomorfismo de  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{R}^2$  como  $\mu(x + yi) = (x, y)$ . Claramente  $\mu$  respeta las operaciones de espacio vectorial, y la inversa de esta función está dada como  $\mu^{-1}(x, y) = x + yi$ .

En particular, esto nos permite pensar al número complejo  $a + bi$  como un segmento dirigido con origen  $(0, 0)$  y punto final  $(a, b)$ , como se muestra en (1.1).

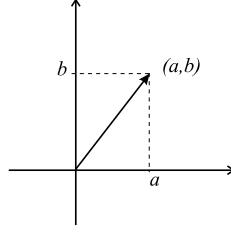


Figura 1.1: Representación de un número complejo como punto en  $\mathbb{R}^2$

Luego entonces, si tenemos los números complejos  $z_1$  y  $z_2$ , como segmentos dirigidos en el plano, la suma  $z_1 + z_2$  corresponde a la diagonal del paralelogramo que determinan  $z_1$  y  $z_2$  (1.2).

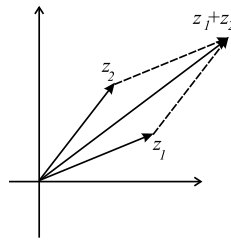


Figura 1.2: Representación geométrica de la suma de números complejos.

**Observación:**

Pese a que en  $\mathbb{R}^2$  podemos definir distintos tipos de ordenes parciales  $\preceq$ , entre otros el lexicográfico, cabe notar que *no puede existir un buen orden en  $\mathbb{C}$  compatible con las operaciones de campo definidas en  $\mathbb{C}$ .*

Si así fuera, deberíamos tener una clase positiva  $\mathbb{C}^+$  la cual contiene al  $1 = 1 + 0i$  y al cuadrado de cualquier número complejo distinto de cero. Si  $i \in \mathbb{C}^+$ , entonces  $i^2 \in \mathbb{C}^+$ , pero  $i^2 = -1$ , como  $1 \in \mathbb{C}$ , como consecuencia de el principio de tricotomía,  $-1$  no puede estar en la clase positiva  $\mathbb{C}^+$ , lo cual contradice el hecho de que  $i$  este en  $\mathbb{C}^+$ , de donde  $-i \in \mathbb{C}^+$ , pero suponer esto implicaría que  $(-i)^2 = -1$ , lo cual nos conduce nuevamente a una contradicción.

Así, no es posible construir una clase positiva en  $\mathbb{C}$  compatible con las operaciones de campo.

**Definición 2.** Si  $x$  y  $y$  son números reales, y  $z$  es el número complejo  $x + yi$ , entonces al número complejo  $x - yi$  se le denomina el conjugado de  $z$ , y se denota  $\bar{z} = x - yi$ .

El número  $x$  es la parte real de  $z$ , y suele escribirse  $x = \operatorname{Re}(z)$ . Por otra parte, el número  $y$  es la parte imaginaria de  $z$ , y se escribe  $\operatorname{Im}(z)$ .

**Ejemplo 2.**

1. Si  $z = 3 + 5i$ , entonces  $\bar{z} = 3 - 5i$ ,  $\operatorname{Re}(z) = 3$ , y  $\operatorname{Im}(z) = 5$
2. Si  $z = 8 - 13i$ , entonces  $\bar{z} = 8 + 13i$ ,  $\operatorname{Re}(z) = 8$ , y  $\operatorname{Im}(z) = -13$ .

La conjugación por un número complejo, nos permite definir una función  $\mathbb{C}$ -valuada de variable compleja  $\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  como  $\rho(z) = \bar{z}$ .

Al identificar  $\mathbb{C}$  con el plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$  podemos interpretar esta función como la reflexión con respecto al eje  $x$ . Mientras que  $\operatorname{Re}(z)$  corresponde a la proyección ortogonal de  $z$  con respecto al eje  $x$  y  $\operatorname{Im}(z)$  corresponde a la proyección ortogonal con respecto al eje  $y$ .

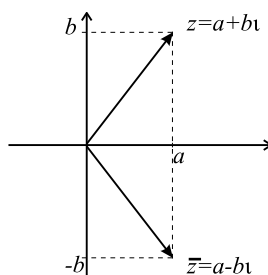


Figura 1.3: Representación geométrica del conjugado de un número complejo.

**Teorema 2.** Si  $z$  y  $w$  son números complejos, entonces:

1.  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ .
2.  $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ .
3.  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ .
4.  $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ .
5. Si  $z$  es un número complejo distinto de cero, entonces  $z \cdot \bar{z}$  es un número real y positivo

*Demostración.* Si  $z = a + bi$  y  $w = c + di$ , entonces:

1.  $\bar{z} + \bar{w} = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i = \overline{z + w}.$
2.  $\bar{z} \cdot \bar{w} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i = \overline{z \cdot w}.$
3.  $\frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{(a + bi) + (a - bi)}{2} = \frac{2a + 0i}{2} = a = \operatorname{Re}(z).$
4.  $\frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{(a + bi) - (a - bi)}{2i} = \frac{0 + 2bi}{2i} = b = \operatorname{Im}(z).$
5.  $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = (a^2 - b(-b)) + (a(-b) + ba)i = a^2 + b^2.$

Como  $a, b \in \mathbb{R}$ , entonces  $a^2 + b^2 \geq 0$ , y como alguno de ellos es distinto de cero, entonces  $a^2 + b^2 \neq 0$ .  $\square$

Como consecuencia del inciso 5 del teorema anterior, la raíz cuadrada de  $z \cdot \bar{z}$  está bien definida, lo cual nos permite definir una función  $\mathbb{R}$ -valuada de variable compleja  $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  como  $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ .

**Definición 3.** Si  $z$  es un número complejo, el módulo de  $z$ , que denotaremos  $|z|$ , se define como la raíz cuadrada no negativa de  $z \cdot \bar{z}$ , esto es,  $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

**Ejemplo 3.**

1. Si  $z = 8 - 15i$ , entonces  $|z| = \sqrt{289} = 17.$
2. Si  $z = -24 + 7i$ , entonces  $|z| = \sqrt{625} = 25.$
3. Si  $z = -5 - 12i$ , entonces  $|z| = \sqrt{169} = 13.$
4. Si  $z = 1 + i$ , entonces  $|z| = \sqrt{2}.$

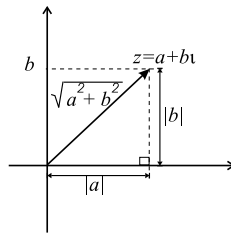


Figura 1.4: El módulo de un número complejo.

Cuando  $z = x + 0i$  es un número real,  $\bar{z} = z = x$ , así  $z \cdot \bar{z} = x^2 \geq 0$ , por lo que  $\sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2} = |x|$ . Por tanto, el módulo de un número real coincide

con su valor absoluto, y el módulo de un número complejo  $z = a + bi$  coincide con la distancia que hay, en  $\mathbb{R}^2$ , del punto  $(a, b)$  al origen  $(0, 0)$ .

Además se satisfacen las siguientes propiedades:

**Proposición 2.** *Si  $z$  y  $w$  son dos números complejos, entonces:*

1.  $|z| = |\bar{z}|$ .
2.  $|zw| = |z| \cdot |w|$ .
3. Si  $w \neq 0$ , entonces  $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ .
4.  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$
5.  $|z + w| \leq |z| + |w|$ .

*Demostración.* Si  $z$  y  $w$  son dos números complejos, entonces:

1. Como  $z = \overline{\bar{z}}$ , entonces  $z\bar{z} = \bar{\bar{z}}\bar{z}$ , de donde

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\bar{\bar{z}}\bar{z}} = |\bar{z}|.$$

2.  $|zw| = \sqrt{zw \cdot \overline{zw}} = \sqrt{(z\bar{z})(w\bar{w})} = \sqrt{z\bar{z}}\sqrt{w\bar{w}} = |z| \cdot |w|$ .

3. Si  $w \neq 0$ , entonces  $|w| \neq 0$ , como consecuencia del inciso anterior bastará mostrar que  $|w^{-1}| = 1/|w|$ . Como  $w\bar{w} = |w|^2$ , y  $w \neq 0$  tenemos que

$$\frac{w\bar{w}}{|w|^2} = 1 \quad \text{de donde} \quad w^{-1} = \frac{\bar{w}}{|w|^2}$$

Por tanto

$$|w^{-1}| = \left| \frac{\bar{w}}{|w|^2} \right| = \frac{|\bar{w}|}{|w|^2} = \frac{1}{|w|}$$

4. Si  $z = x + yi$ , entonces  $x = \operatorname{Re}(z)$ , pero  $|x| = \sqrt{x^2}$ , y como  $x^2 \leq x^2 + y^2$ , se sigue que  $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ .
5. Para demostrar que  $|z + w| \leq |z| + |w|$ , notamos que  $z\bar{w} = \overline{\bar{z}w}$ , de donde,  $z\bar{w} + \bar{z}w = 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$ . Por tanto

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z| \cdot |w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$



extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros se obtiene el resultado deseado.  $\square$

Como consecuencia de esta proposición tenemos que, si  $z \neq 0$ , entonces

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

**Proposición 3 (La desigualdad de Schwarz).** Si  $z_1, \dots, z_n$  y  $w_1, \dots, w_n$  son números complejos, entonces

$$\left| \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \sum_{j=1}^n |w_j|^2.$$

*Demostración.* Si  $A = \sum_{j=1}^n |z_j|^2$ ,  $B = \sum_{j=1}^n |w_j|^2$  y  $C = \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j$ , entonces  $B \geq 0$ , si  $B = 0$ , entonces  $w_j = 0$  para  $j = 1, \dots, n$ , así  $C = 0$ .

Supongamos entonces que  $B \neq 0$ , en particular  $B > 0$  y

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |Bz_j - Cw_j|^2 &= \sum_{j=1}^n (Bz_j - Cw_j)(B\bar{z}_j - \bar{C}\bar{w}_j) \\ &= B^2 \sum_{j=1}^n |z_j|^2 - B\bar{C} \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j - BC \sum_{j=1}^n \bar{z}_j w_j + |C|^2 \sum_{j=1}^n |w_j|^2 \\ &= B^2 A - B|C|^2 \\ &= B(AB - |C|^2) \end{aligned}$$

Como cada término de la expresión  $\sum_{j=1}^n |Bz_j - Cw_j|^2$  es no negativo, tenemos que  $B(AB - |C|^2) \geq 0$ , y como  $B > 0$ , entonces  $AB - |C|^2 \geq 0$ , como esperábamos demostrar.  $\square$

*Completez del campo  $\mathbb{C}$ .* De manera similar a como se hace en  $\mathbb{R}$ , podemos decir que una sucesión en  $\mathbb{C}$  es una función  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ . Si  $n \in \mathbb{N}$ , a su imagen bajo  $s$  la denotamos como  $s(n) = s_n$ . También usamos la notación  $\{s_n\}$  para una sucesión en  $\mathbb{C}$ .

Usando el módulo de los números complejos  $s_n$ , podemos definir los conceptos de sucesión de Cauchy y de límite de una sucesión en  $\mathbb{C}$

**Definición 4.** Se dice que la sucesión de números complejos  $\{s_n\}$  es una sucesión de Cauchy si dado  $\varepsilon$ , un número real positivo, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|s_n - s_m| < \varepsilon$  siempre que  $n, m \geq N$ .

Se dice que un número complejo  $s$  es el límite de la sucesión  $\{s_n\}$  si para cada número  $\varepsilon$  real positivo, existe un entero positivo  $N$  tal que  $|s_n - s| < \varepsilon$  siempre que  $n \geq N$ .

Si la sucesión  $\{s_n\}$  tiene un límite en  $\mathbb{C}$  diremos que la sucesión es convergente.

Si  $\{s_n\}$  es una sucesión en  $\mathbb{C}$ , y escribimos cada  $s_n = a_n + b_n i$  con  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ , tenemos las sucesiones  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  en  $\mathbb{R}$ . Recíprocamente, si tenemos dos sucesiones  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  en  $\mathbb{R}$ , y definimos  $s_n = a_n + b_n i$ , entonces  $\{s_n\}$  es una sucesión en  $\mathbb{C}$ .

**Proposición 4.** Sea  $\{s_n\}$  una sucesión de números complejos, con  $s_n = a_n + b_n i$ . Entonces:

1. La sucesión  $\{s_n\}$  es de Cauchy si y sólo si las sucesiones  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  son de Cauchy en  $\mathbb{R}$ .
2. La sucesión  $\{z_n\}$  converge a  $s = a + bi$  en  $\mathbb{C}$  si y solo si  $\{a_n\}$  converge a  $a$  y  $\{b_n\}$  converge a  $b$  en  $\mathbb{R}$ .

*Demostración.* 1. Sea  $\{s_n\}$ , con  $s_n = a_n + b_n i$ , una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{C}$ .

Como  $|Re(w)| \leq |w|$  y  $Im(w) = Re(-iw)$ , de donde  $|Im(w)| \leq |w|$ , para cada número complejo  $w$ .

Dado  $\varepsilon$  un número real positivo, como  $\{s_n\}$  es una sucesión de Cauchy, existe un entero positivo tal que  $|s_n - s_m| < \varepsilon$  siempre que  $n, m \geq N$ , de donde :

$$|a_n - a_m| = |Re(s_n - s_m)| \leq |s_n - s_m| < \varepsilon$$

y

$$|b_n - b_m| = |Im(s_n - s_m)| \leq |s_n - s_m| < \varepsilon$$

siempre que  $n, m \geq N$ .

Recíprocamente, Dado  $\varepsilon$  un número real positivo, como las sucesiones  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  son de Cauchy en  $\mathbb{R}$  existe un entero positivo  $N$  tal que  $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$  y  $|b_n - b_m| < \varepsilon/2$  siempre que  $n, m \geq N$ .

Como consecuencia de la desigualdad del triángulo tenemos:

$$|s_n - s_m| = |(a_n - a_m) + (b_n - b_m)i| \leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \varepsilon$$

siempre que  $n, m \geq N$ . Es decir,  $\{s_n\}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{C}$ .

2. Supongamos que la sucesión  $\{s_n\}$  converge a  $s$  en  $\mathbb{C}$ , con  $s_n = a_n + b_n i$  y  $s = a + bi$ . Dado un número real positivo  $\varepsilon$ , existe un entero positivo  $N$  tal que  $|s_n - s| < \varepsilon$ , de donde:

$$|a_n - a| = \left| \frac{(s_n - s) + \overline{(s_n - s)}}{2} \right| \leq \frac{|s_n - s|}{2} + \frac{|\overline{s_n - s}|}{2} = 2 \frac{|s_n - s|}{2} < \varepsilon,$$

y

$$|b_n - b| = \left| \frac{(s_n - s) - \overline{(s_n - s)}}{2i} \right| \leq \frac{|s_n - s|}{2} + \frac{|\overline{s_n - s}|}{2} = 2 \frac{|s_n - s|}{2} < \varepsilon,$$

si  $n \geq N$ .

Finalmente, si  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  son sucesiones en  $\mathbb{R}$  que convergen a los valores  $a$  y  $b$  respectivamente, dado un número real positivo  $\varepsilon$ , existe un entero positivo  $N$  tal que  $|a_n - a| < \varepsilon/2$  y  $|b_n - b| < \varepsilon/2$  si  $n \geq N$ . Si  $s_n = a_n + b_n i$  y  $s = a + bi$ , entonces:

$$\begin{aligned} |s_n - s| &= |(a_n + b_n i) - (a + bi)| = |(a_n - a) + (b_n - b)i| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon \end{aligned}$$

siempre que  $n \geq N$ .

Por lo que, la sucesión  $\{s_n\}$  converge a  $s$ .  $\square$

Como  $\mathbb{R}$  es un campo completo, toda sucesión de Cauchy en  $\mathbb{R}$  converge en  $\mathbb{R}$ . Así, las partes real e imaginaria de una sucesión de Cauchy  $\{s_n\}$  en  $\mathbb{C}$  convergen en  $\mathbb{R}$  a dos números, digamos  $a$  y  $b$ , tenemos entonces que la sucesión de Cauchy  $\{s_n\}$  converge al número complejo  $s = a + bi$ .

Concluimos de aquí que  $\mathbb{C}$  es un campo completo.

**Definición 5.** Si  $z$  es un número complejo distinto de cero, el argumento, o amplitud, de  $z$ , que denotaremos  $\arg(z)$ , se define como el ángulo  $\theta$  que hay del eje real positivo al vector determinado por el punto  $z$ , véase la figura (1.5) y solemos escribirlo como:

$$\arg(z) = \theta.$$

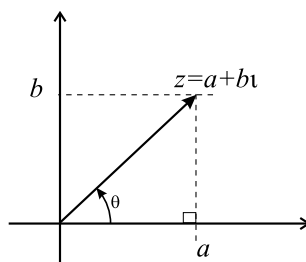


Figura 1.5: El argumento de un número complejo.

El ángulo se considera positivo si se mide en sentido contrario a las manecillas del reloj (levogiro), y negativo en el caso contrario (dextrogiro).

Al número complejo  $z = 0$  no le asignamos argumento. El argumento queda definido salvo múltiplos enteros de  $2\pi$ , y podemos terminar con esta ambigüedad si determinamos una “rama” para el argumento, se suele considerar  $0 \leq \theta < 2\pi$  o bien  $-\pi < \theta \leq \pi$ . Aunque puede considerarse cualquier intervalo semiabierto de longitud  $2\pi$ .

Ahora, si  $z \neq 0$  y  $z = a + bi$  y consideramos el triángulo cuyos lados son los vectores determinados por  $a$ ,  $b$  y  $z$  tenemos que:

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|}, \text{ lo cual implica que } a = |z| \cos(\theta)$$

y

$$\sin(\theta) = \frac{b}{|z|}, \text{ de donde } b = |z| \sin(\theta).$$

Consecuentemente  $z = a + bi = |z| \cos(\theta) + |z| \sin(\theta)i = |z|(\cos(\theta) + \sin(\theta)i)$  y, si  $a \neq 0$ , entonces  $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$ .

Restringiendo el dominio de la función tangente a un intervalo donde sea biyectiva tenemos:

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right),$$

o bien, si  $a = 0$  entonces  $\theta = \pi/2 + k\pi$  con  $k$  entero.

En esta parte, cabe notar que la función  $\arctan$  está bien definida salvo múltiplos enteros de  $\pi$ , no de  $2\pi$ , como es el caso de la función argumento. El problema radica en que los vectores determinados por  $z$  y  $-z$  tienen el mismo módulo y direcciones opuestas, por lo que  $\frac{b}{a} = \frac{-b}{-a}$ , notamos así que  $\arg(z)$  y  $\arg(-z)$  difieren por un múltiplo impar de  $\pi$ .

El número complejo  $\cos(\theta) + \sin(\theta)\iota$  suele abreviarse como  $e^{\iota\theta}$ , o bien  $\exp(\iota\theta)$ , esto es,

$$e^{\iota\theta} := \cos(\theta) + \sin(\theta)\iota$$

Representar un número complejo  $z$  en términos de su módulo y su argumento, nos permite dar una interpretación geométrica al producto, esto es:

**Proposición 5.** *El módulo de un producto es el producto de los módulos y el argumento de un producto es la suma de los argumentos de los factores.*

Ya que el argumento no es una función, debemos entender esta proposición de la siguiente manera, si  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son valores admisibles para  $\arg(z_1)$  y  $\arg(z_2)$ , entonces  $\theta = \theta_1 + \theta_2$  es un valor admisible para  $\arg(z_1 \cdot z_2)$ . Véase la figura (1.6).

*Demostración.* Si  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + \iota \sin \theta_1)$  y  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + \iota \sin \theta_2)$ , por trigonometría elemental tenemos que:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= [r_1(\cos \theta_1 + \iota \sin \theta_1)] \cdot [r_2(\cos \theta_2 + \iota \sin \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2) \\ &\quad + (\cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2)\iota] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 + \theta_2)\iota] \end{aligned}$$

esto es,  $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ . □

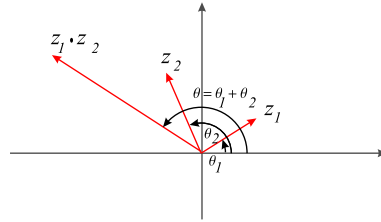


Figura 1.6: El producto de dos números complejos.

Como consecuencia de este resultado tenemos que, si  $z$  es un número complejo distinto de cero, entonces:

$$|z^{-1}| = \frac{1}{|z|} \quad \text{y} \quad \arg z^{-1} = -\arg(z).$$

También podemos analizar el producto de números complejos de la siguiente manera: Sea  $w \in \mathbb{C}$  un número complejo fijo, y definamos la aplicación  $\psi_w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  como  $\psi_w(z) = wz$ ; la multiplicación por  $w$ . Además, la transformación  $\psi_w$  es  $\mathbb{R}$ -lineal, pues:

$$\psi_w(z_1 + \lambda z_2) = w(z_1 + \lambda z_2) = wz_1 + \lambda wz_2 = \psi_w(z_1) + \lambda \psi_w(z_2),$$

para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

Al identificar  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$  tenemos que  $\psi_w$  es la aplicación que simplemente gira al vector  $z$  por un ángulo igual al argumento de  $w$ , y modifica la longitud del vector  $z$  por el factor  $|w|$ . Véase (1.7).

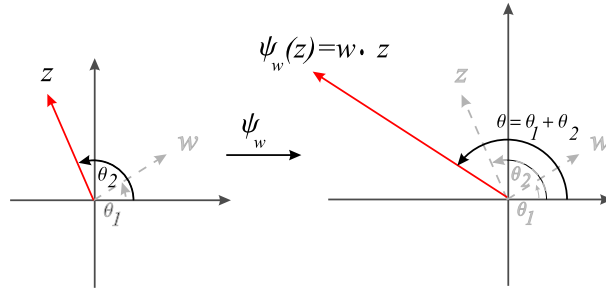


Figura 1.7: La transformación  $\mathbb{R}$ -lineal  $\psi_w$

Si  $w = a + bi$  y  $z = x + yi$ , tenemos:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\psi_w} & \mathbb{C} \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mu \circ \psi_w \circ \mu^{-1}} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} z = x + yi & \mapsto & wz = (ax - by) + (ay + bx)i \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x, y) & \mapsto & (ax - by, bx + ay) \end{array}$$

Como toda transformación lineal del plano puede representarse por una matriz, tenemos que la matriz de  $\psi_w$  es:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

es decir:

$$\psi_w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix}$$

**Definición 6.** Si  $z \neq 0$  es un número complejo, si  $r = |z|$  y  $\theta = \arg(z)$ , entonces  $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = re^{i\theta}$ . A esta representación del número complejo  $z \neq 0$ , se le denomina la forma polar del número complejo  $z$ .

**Ejemplo 4.**

1. Si  $z_0 = 1 + i$ , entonces  $|z_0| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$  y  $\arg(z_0) = \pi/4$ , por lo que, la forma polar del número complejo  $z_0$  está dada como  $z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ .
2. Si  $z = 1 - i$ , entonces  $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$  y  $\arg(z_1) = 7\pi/4$ , por lo que, la forma polar del número complejo  $z_1$  está dada como  $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$ .
3. Si  $z_2 = -1 - i$ , entonces  $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$  y  $\arg(z_2) = 5\pi/4$ , por lo que, la forma polar del número complejo  $z_2$  está dada como  $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ .

La fórmula para el producto de dos números complejos en forma polar es muy útil para calcular las potencias  $z^n$  con  $n \geq 0$  de un número complejo distinto de cero, ya que, si  $z = re^{i\theta}$ , utilizando inducción sobre  $n$  podemos ver fácilmente que  $|z^n| = r^n$  y  $\arg(z^n) = n\theta$ , de donde

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

Por otra parte, como  $z^{-1} = r^{-1}e^{-i\theta}$ , tenemos que la fórmula  $z^n = r^n e^{in\theta}$  se cumple para cada número entero  $n$ . Esta fórmula se conoce como *la fórmula de D'Moivre*.

Si  $w \in \mathbb{C}$ , utilizando la fórmula de D'Moivre podemos resolver la ecuación  $z^n = w$ .

Si  $w = re^{i\theta}$ , y  $z = \rho e^{i\psi}$ , como consecuencia de la fórmula de D'Moivre tenemos que  $z^n = \rho^n e^{in\psi}$ , de donde  $\rho^n = r$  y  $n\psi = \theta + 2\pi k$ , para algún entero  $k$ , de donde:

$$z = \sqrt[n]{r} \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) \right]$$

Es decir, todo número complejo distinto de cero tiene exactamente  $n$  raíces  $n$ -ésimas complejas, dichas raíces tienen el mismo módulo, y sus argumentos se encuentran igualmente espaciados.

Geométricamente, las raíces  $n$ -ésimas de un número complejo, distinto de cero, son los vértices de un polígono regular de  $n$  lados.

**Ejemplo 5.**

Las cinco soluciones  $z_k$  con  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ , de la ecuación  $z^n = 1$  son:

$$z_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{5}\right) + \imath \sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Así, las raíces quintas de la unidad son:

$$\begin{aligned} z_0 &= 1; \\ z_1 &= \exp\left(\imath \frac{2\pi}{5}\right) = \left(\frac{1}{1+\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}\right)\imath; \\ z_2 &= \exp\left(\imath \frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)\imath; \\ z_3 &= \exp\left(\imath \frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)\imath; \quad y \\ z_4 &= \exp\left(\imath \frac{2\pi}{5}\right) = \left(\frac{1}{1+\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}\right)\imath. \end{aligned}$$

Como podemos apreciar en la figura (1.8), las raíces quintas de la unidad corresponden a los vértices de un pentágono regular, con centro en el origen, el cual tiene uno de sus vértices ubicado en el punto 1. Además,  $z_4 = \bar{z}_1$  y  $z_3 = \bar{z}_2$ .

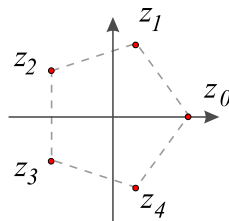


Figura 1.8: Las raíces quintas de la unidad

En general, las raíces  $n$ -ésimas de la unidad, esto es, las soluciones de la ecuación  $z^n = 1$  están dadas como:

$$\zeta = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \imath \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Si  $\zeta$  es una raíz distinta de uno, esto es,  $\zeta \neq 1$  todas las raíces pueden expresarse como  $1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1}$ , y como  $\zeta \neq 1$  es solución de la ecuación:

$$0 = z^n - 1 = (z - 1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z^2 + z + 1),$$



tenemos que  $\zeta$  es solución de la ecuación ciclotómica:

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z^2 + z + 1 = 0.$$

En la geometría analítica clásica la ecuación de un lugar geométrico se expresa como una relación entre las variables  $x$  y  $y$ , tomando en cuenta que, al identificar  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$  tenemos  $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$  y  $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ , entonces podemos expresar un lugar geométrico en términos de las coordenadas  $z$  y  $\bar{z}$ . Así, podemos pensar a una ecuación en variable compleja como una ecuación, o sistema de ecuaciones, en dos variables reales.

Por ejemplo, sabemos que una circunferencia con centro en un punto  $z_0 = (x_0, y_0)$  y radio  $r > 0$  es el lugar geométrico de los puntos  $z = (x, y)$  que equidistan la distancia  $r$  del punto  $z_0$ , esto es,  $|z - z_0| = r$ .

Una línea recta  $\mathcal{L}$  en  $\mathbb{C}$  puede darse en su forma paramétrica por medio de la ecuación  $z = a + tb$ , donde  $a$  y  $b$  son números complejos,  $b \neq 0$  y  $t$  es un parámetro real, es decir:

$$\mathcal{L} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = a + tb, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}\}$$

Como  $z \in \mathcal{L}$  si, y sólo si existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $z = a + tb$ , equivalentemente,  $t = \frac{z-a}{b} \in \mathbb{R}$ .

Esto es,  $z \in \mathcal{L}$  si, y sólo si  $\text{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) = 0$ . De donde,

$$\mathcal{L} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) = 0\}.$$

Dos ecuaciones  $z = a + tb$  y  $z = a' + tb'$  representan líneas paralelas si  $b'$  es múltiplo real de  $b$ , y representan la misma línea si, y sólo si,  $a - a'$  y  $b'$  son múltiplos reales de  $b$ . La dirección de esta línea queda determinada por  $\arg(b)$ . El ángulo entre las líneas  $z = a + tb$  y  $z = a' + tb'$  está dado como  $\arg(b/b')$ ; nótese que este ángulo sólo depende del orden en que se dan las líneas. Dos líneas son ortogonales si  $b/b'$  tiene parte real cero.

## 1.2. El plano extendido.

Algunas veces será necesario estudiar el comportamiento de una función de variable compleja cuando  $|z|$  crezca arbitrariamente, por lo cual resulta conveniente agregar al plano complejo un punto ideal, llamado el punto al infinito, que denotamos  $\infty$ . Así, el plano extendido es  $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \equiv \mathbb{C}_\infty$ . También introduciremos una función distancia en  $\mathbb{C}_\infty$  par discutir las propiedades de

continuidad, y aquellas nuevas propiedades se relacionen con el concepto de límite, y que tenga una función en el punto al infinito.

Un modelo que representa el plano extendido lo constituye la esfera unitaria  $\mathbb{S}^2$  en  $\mathbb{R}^3$ , esto es:

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

Si  $N = (0, 0, 1)$ , podemos identificar  $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$  con  $\mathbb{R}^2$  donde identificamos  $\mathbb{R}^2$  con el plano  $\Pi = \{(x_1, x_2, 0); x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ , y el punto  $N$  con el punto al infinito.

Para esto, emplearemos la proyección estereográfica,  $\varphi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ , la cual está dada como sigue:  $\varphi(N) = \infty$ . Si  $u \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$  consideremos la línea  $\ell_u$  que une el punto  $N$  con el punto  $u$ . Esta recta intersecta al plano  $\Pi$  en un punto, el cual denotamos  $\varphi(u)$ , esto es,  $\varphi(u) = \ell_u \cap \Pi$ , como se muestra en la Figura (1.9). Claramente  $\varphi(u) = \varphi(v)$  si, y sólo si  $u = v$ , es decir,  $\varphi$  es inyectiva.

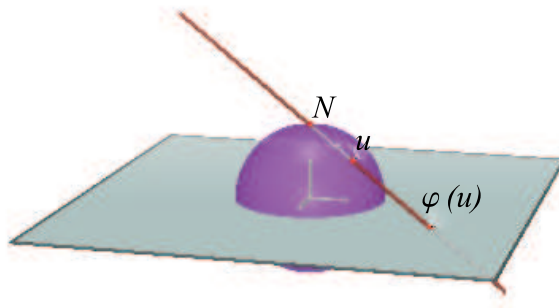


Figura 1.9: La proyección estereográfica.

Además,  $\varphi$  es sobre, esto es, si  $z \in \Pi$ , consideramos la recta  $\ell$  que pasa por los puntos  $N$  y  $z$ , dicha recta corta exactamente en un punto  $u \in \mathbb{S}^2$ , en particular  $\varphi(u) = z$ .

Para obtener el valor que  $\varphi$  y  $\varphi^{-1}$  toman en un punto procederemos de la siguiente forma. Sea  $z = x + yi$ , identificamos  $z \in \mathbb{C}$  con el punto  $z = (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$ , sea  $u = (x_1, x_2, x_3)$  el punto correspondiente en  $\mathbb{S}^2$ . La línea que pasa por  $z$  y  $N$  esta dada por  $\{tN + (1-t)z; t \in \mathbb{R}\}$  esto es,  $\{((1-t)x, (1-t)y, t); t \in \mathbb{R}\}$ .

Un punto de la forma  $((1-t)x, (1-t)y, t)$  esta en  $\mathbb{S}^2$  si:

$$1 = (1-t)^2x^2 + (1-t)^2y^2 + t^2 = (1-t)^2|z|^2 + t^2.$$

De donde  $t = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$ , de aquí se sigue que:

$$\varphi^{-1}(z) = \left( \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) = \left( \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{-i(z - \bar{z})}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \quad (1.1)$$

Por otra parte, si  $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ , y queremos encontrar las coordenadas del punto correspondiente  $z$ , simplemente tomamos  $t = \frac{1}{1 - x_3}$ , y tenemos

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}. \quad (1.2)$$

Esto es, hay una correspondencia uno a uno entre los puntos de la esfera y el plano complejo extendido.

Podemos notar además que, bajo la proyección estereográfica, los puntos del ecuador corresponden a la circunferencia unitaria con centro en el origen, el hemisferio sur corresponde a los puntos en el interior de la circunferencia, y el hemisferio norte a los puntos en el exterior de la circunferencia. En particular, la reflexión en el círculo unitario corresponde a reflejar con respecto al plano que pasa por el ecuador.

A continuación enumeramos algunas propiedades de la proyección estereográfica:

**Teorema 3.** *Bajo la proyección estereográfica las circunferencias en la esfera se proyectan en líneas rectas o circunferencias en el plano, y viceversa.*

Ilustramos este hecho en la Figura (1.10).

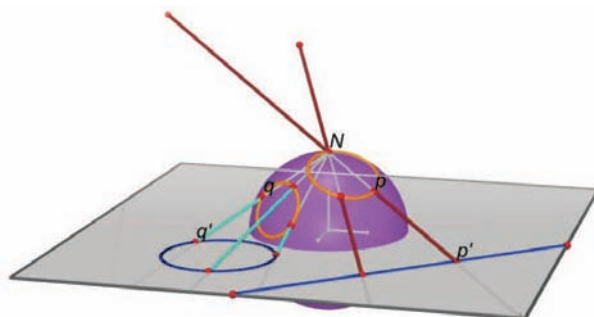
*Demostración.* Una circunferencia en la esfera está dada como la intersección de la esfera  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$  con un plano:

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D, \quad \text{donde} \quad A^2 + B^2 > 4D(D - C). \quad (1.3)$$

Si  $(\xi, \eta, \zeta)$  es un punto en esta intersección del plano y la esfera, el punto  $(x_1, x_2, 0)$  que le corresponderá deberá satisfacer la ecuación:

$$(C - D)(x_1^2 + x_2^2) + Ax_1 + Bx_2 = D, \quad x_3 = 0 \quad (1.4)$$

Esta ecuación corresponde a una circunferencia en el plano  $x_3 = 0$  si  $C \neq D$ , y a una línea recta si  $C = D$ .



Podemos notar que, si  $C = D$  entonces, la circunferencia original pasa por el punto  $N = (0, 0, 1)$ .

Usando la ecuación (1.2), podemos ver que los puntos sobre la esfera que están en la imagen inversa bajo  $\varphi$  de la circunferencia, o recta, cuya ecuación está dada por (1.4) también están en el plano  $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D$ .  $\square$

**Teorema 4.** *La proyección estereográfica preserva ángulos.*

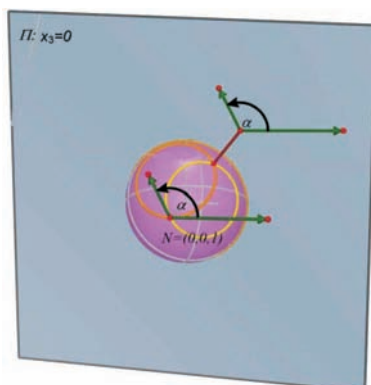
Es decir, si dos curvas se intersectan en el plano  $x_3 = 0$ , y sus tangentes en el punto de intersección forman un ángulo  $\alpha$ , entonces las tangentes de las imágenes de dichas curvas bajo la estereográfica en la imagen del punto de intersección formarán nuevamente un ángulo  $\alpha$ .

Ya que, lo importante es ver que se preservan que forman las tangentes a las curvas, y con el fin de simplificar la demostración, sólo verificaremos que el teorema se cumple en el caso de líneas rectas.

*Demostración.* Supongamos que tenemos dos líneas rectas en el plano  $x_3 = 0$  que pasan por el punto  $z_0$ . Como vimos en el teorema anterior, estas líneas se transforman en dos circunferencias sobre la esfera que pasan por los puntos  $N$  y  $\varphi^{-1}(p) = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ , y estas circunferencias forman el mismo ángulo, una con respecto a la otra, en sus dos intersecciones.

Si las rectas tienen ecuaciones

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3 &= 0, & x_3 &= 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3 &= 0, & x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Figura 1.11:  $\varphi$  preserva ángulos.

y sus imágenes inversas bajo la proyección estereográfica se encuentran, respectivamente, en los planos:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3(1 - x_3) &= 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3(1 - x_3) &= 0, \end{aligned}$$

Las tangentes a las circunferencias en el polo norte son las intersecciones de los planos con el plano  $x_3 = 0$ , esto es, sus ecuaciones están dadas como:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 &= 0, & x_3 &= 1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 &= 0, & x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Y, ya que estas rectas están en un plano, a saber el  $x_3 = 1$ , es claro que el ángulo entre estas dos rectas es el mismo que el ángulo entre las rectas dadas en (1.5).  $\square$

**Teorema 5.** *La razón entre elementos de línea correspondientes entre el plano y la esfera es una función que depende sólo de la posición, es decir, si  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , el segmento  $z_1z_2$  y el arco  $\varphi^{-1}(z_1), \varphi^{-1}(z_2)$  sobre la esfera satisfacen la siguiente relación.*

$$\lim_{z_2 \rightarrow z_1} \frac{\ell(Z_1, Z_2)}{|z_1 - z_2|} = \frac{2}{1 + |z_1|^2}, \quad (1.6)$$

donde  $\ell(Z_1, Z_2)$  denota la longitud de arco entre los puntos  $Z_1$  y  $Z_2$  con  $\varphi(Z_1) = z_1$  y  $\varphi(Z_2) = z_2$ .

*Demostración.* Si  $C$  denota el segmento de recta en el plano  $x_3 = 0$  dado, en términos de longitud de arco  $s$ , por  $C : z = z(s)$ , con  $0 \leq s \leq L$ , y si  $\Gamma = \varphi^{-1}(C)$ .

Entonces la longitud de arco de  $\Gamma$  está dada por:

$$\ell(\Gamma) = \int_0^L |\Gamma'(s)| ds = \int_0^L \frac{|dz(s)|}{1 + |z(s)|^2} ds.$$

Obsérvese que, podemos reemplazar  $\ell(Z_1, Z_2)$  por  $d(Z_1, Z_2)$ , pues la razón entre la longitud de arco y su cuerda, esta tiende a 1 cuando  $z_2 \rightarrow z_1$ .

Definamos  $d(Z_1, Z_2) = \chi(z_1, z_2)$ .

Esta expresión determina una función distancia, la cual se denomina la distancia cordal entre  $z_1$  y  $z_2$ . Luego entonces

$$\chi(z, z') = \begin{cases} \frac{2|z - z'|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}} & \text{si } z, z' \in \mathbb{C} \\ \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}} & \text{si } z' = \infty, z \neq \infty \end{cases}$$

Esta última expresión implica el resultado buscado.

Así, para obtener la distancia cordal, consideremos el plano que pasa por los puntos  $(0, 0, 1)$ ,  $z_1 = (x_1, y_1, 0)$  y  $z_2 = (x_2, y_2, 0)$ . Este plano también contendrá los puntos  $Z_1 = \varphi^{-1}(z_1)$ ,  $Z_2 = \varphi^{-1}(z_2)$ , el segmento de recta que los une, y el arco de circunferencia de  $Z_1$  a  $Z_2$ .

En 1.12, la circunferencia es la intersección del plano que pasa por  $N, z_1$  y  $z_2$  con la esfera  $\mathbb{S}^2$ .

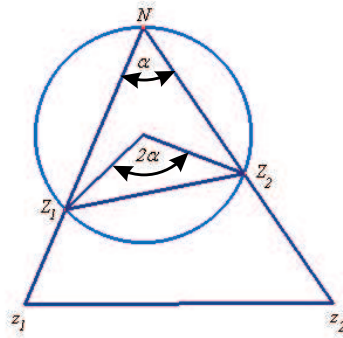


Figura 1.12: Relación entre la distancia en la esfera y la distancia euclidiana.

Si  $\alpha = \angle Z_1 N Z_2$ , entonces

$$\frac{d(Z_1, Z_2)}{\ell(Z_1, Z_2)} = \frac{\sin \alpha}{\alpha},$$

este cociente tiende a 1 cuando  $z_2$  tiende a  $z_1$ , por lo cual, podemos reemplazar  $\ell(Z_1, Z_2)$  por  $d(Z_1, Z_2)$ .

Además,  $d(N, z_1) = \sqrt{1 + |z_1|^2}$ ,  $d(N, z_2) = \sqrt{1 + |z_2|^2}$ ,  $d(N, Z_1) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}$  y  $d(N, Z_2) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_2|^2}}$ , donde las dos últimas relaciones se deducen de las primeras dos, ya que:

$$\frac{d(N, Z)}{d(N, z)} = \frac{1 - \xi}{1} = \frac{1}{1 + |z|^2}$$

De la relación

$$d(N, Z_1) \cdot d(N, z_1) = d(N, Z_2) \cdot d(N, z_2)$$

concluimos que los triángulos  $NZ_2Z_1$  y  $Nz_1z_2$  son semejantes. De aquí se sigue que:

$$\frac{d(Z_1, Z_2)}{d(z_1, z_2)} = \frac{d(N, Z_2)}{d(N, z_1)}.$$

Esto es,

$$d(Z_1, Z_2) = \frac{d(N, Z_2) \cdot d(z_1, z_2)}{d(N, z_1)} = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}}$$

□

Al agregar el símbolo  $\infty$  a los complejos, también podemos definir las operaciones de suma y producto con el punto  $\infty$  por medio de las siguientes reglas:

1. Si  $z \in \mathbb{C}$ , entonces  $z + \infty = \infty$ .
2. Si  $z \neq 0$ , entonces  $z \cdot \infty = \infty$ .
3.  $\infty + \infty = \infty$ .
4.  $\infty \cdot \infty = \infty$ .
5. Si  $z \in \mathbb{C}$ , entonces  $\frac{z}{\infty} = 0$ .

Lo cual, podemos pensar como una consecuencia de las propiedades de los límites en  $\mathbb{C}$ . Sin embargo, aún tenemos problemas con algunas expresiones, como  $\infty/\infty$ ,  $0 \cdot \infty$  y  $\infty - \infty$ , las cuales aún no están definidas.

Para tratar apropiadamente con estos términos, introducimos los conceptos de límite en infinito, y al infinito apropiados:

**Definición 7.** Sea  $\{z_m\}$  una sucesión de números complejos, y  $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  una función.

1. Diremos que la sucesión  $\{z_n\}$  tiende a  $\infty$  cuando: Para cada  $R > 0$ , exista  $N \in \mathbb{N}$  tal que, si  $N \leq n$  entonces  $|z_n| > R$ .

2. El límite cuando  $z$  tiende a  $\infty$  de la función  $f(z)$  existe, y es igual a un número complejo  $z_0$ , cuando: Para cada  $\varepsilon > 0$ , exista una  $R > 0$  tal que, si  $|z| \geq R$  entonces  $|f(z) - z_0| < \varepsilon$ .

Si dicho límite existe lo denotaremos  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = z_0$

3. El límite cuando  $z$  tiende a  $z_0$  de la función  $f(z)$  existe, y es igual a  $\infty$ , cuando: Para cada  $R > 0$ , exista una  $\delta > 0$  tal que, si  $|z - z_0| < \delta$  entonces  $|f(z)| \geq R$ .

Si dicho límite existe lo denotaremos  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$

4. El límite cuando  $z$  tiende a  $\infty$  de la función  $f(z)$  existe, y es igual a  $\infty$  si: Para cada  $N > 0$ , exista una  $R > 0$  tal que, si  $|z| \geq R$  entonces  $|f(z)| > N$ .

Si dicho límite existe lo denotaremos  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$

Por ejemplo, si  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  son tales que  $ad - bc \neq 0$ , entonces la función  $t : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \rightarrow \mathbb{C}$  definida como  $t(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , es continua, y su imagen es  $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ .

Podemos notar que  $\lim_{z \rightarrow -d/c} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{bd-ad}{c \lim_{z \rightarrow -d/c} cz+d} = \infty$ , mientras que

$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{w} + b}{\frac{c}{w} + d} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{a + bw}{c + dw} = \frac{a}{c}$ , por lo que  $t$  se extiende a una función  $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  definida por  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , la cual es biyectiva, y continua.

Basandonos nuevamente en la proyección estereográfica, de acuerdo con esta definición, un punto está cerca del punto  $\infty$  cuando este fuera de un círculo arbitrariamente grande.



Basados en esto, podemos ver que, si  $\{z_n\}$  es una sucesión de números complejos, entonces:

1.  $z_n \rightarrow z_0$  si, y sólo si,  $d_\infty(z_n, z_0) \rightarrow 0$ .
2.  $z_n \rightarrow \infty$  si, y sólo si,  $d_\infty(z_n, \infty) \rightarrow 0$ .

Con respecto a la métrica  $d_\infty$ , el plano complejo extendido  $\mathbb{C}_\infty$  resulta ser un espacio métrico completo, esta es una propiedad que se hereda del hecho que  $\mathbb{R}^n$  es un espacio métrico completo para cada entero positivo  $n$ .

Además es un espacio totalmente acotado, esto es, para cada  $\varepsilon > 0$  existe un conjunto finito de puntos  $\{p_1, \dots, p_n\}$  tal que las  $\varepsilon$ -vecindades de estos puntos cubren la esfera, esto es,

$$\bigcup_{k=1}^n B(p_k, \varepsilon) = \mathbb{C}_\infty, \quad \text{donde } B(p_k, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}_\infty : d_\infty(z, p_k) < \varepsilon\}.$$

El plano complejo extendido también se denomina la esfera de Riemann.

### 1.3. Ejercicios

1. Una  $n$ -ésima raíz primitiva de la unidad es un número complejo  $\zeta$  tal que  $1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1}$  son las  $n$  raíces  $n$ -ésimas de la unidad. Demuestre que si  $a$  y  $b$  son primitivas de ordenes  $n$  y  $m$  de la unidad, entonces  $ab$  es una raíz primitiva de la unidad para algún orden  $k$ ,
2. Si  $\zeta \neq 1$  es una raíz  $n$ -ésima de la unidad, evalúe la siguiente expresión:

$$1 + 2\zeta + 3\zeta^2 + \dots + n\zeta^{n-1}$$

3. Utilice la ecuación binomial  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ , y la fórmula de D'Moivre para demostrar que

$$\cos n\theta = \cos^n \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta - \dots$$

y que

$$\sin n\theta = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \theta \sin \theta - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + \dots$$

4. Demuestre que la función  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por  $\varphi(t) = e^{it}$  es un homomorfismo del grupo aditivo de los números reales en el grupo multiplicativo  $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ .
5. Diga que subconjuntos de  $\mathbb{S}^2$  corresponden, respectivamente a los ejes real e imaginario al identificar el plano extendido con  $\mathbb{S}^2$ .
6. Muestre que, bajo la proyección estereográfica, líneas en  $\mathbb{C}$  corresponden a círculos que pasan por  $N$ .
7. Si  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ , con  $a_0 \neq 0$ , demuestre que la suma y el producto de las raíces de  $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$  son  $-a_1/a_0$  y  $(-1)^n a_n/a_0$  respectivamente.
8. Si  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , con  $a_0 \neq 0$ , y si  $\alpha$  es una raíz de  $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$ , demuestre que  $\bar{\alpha}$  también es una raíz.
9. Si  $n$  es un entero positivo,  $n \geq 2$ , demuestre que:
  - a)  $\cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \cos \frac{6\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} = -1.$
  - b)  $\sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \sin \frac{6\pi}{n} + \dots + \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0.$
10. Para cada entero positivo  $m \geq 2$ , demuestre que se cumple la siguiente identidad:  $\sin \frac{\pi}{m} \cdot \sin \frac{2\pi}{m} \cdot \sin \frac{3\pi}{m} \cdots \sin \frac{(m-1)\pi}{m} = \frac{m}{2^{m-1}}.$

## Capítulo 2

# Teoría de funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables

### 2.1. Introducción.

El concepto de función de variable compleja representa un caso particular del concepto matemático de función, esto es, si  $\mathcal{U}$  es un subconjunto de  $\mathbb{C}$ , a cada punto  $z \in \mathbb{C}$  se le asocia exactamente un número complejo  $w$ . Abreviando,  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  es la función que a cada número  $z \in \mathcal{U}$  le asocia el valor  $w = f(z)$ .

Por ejemplo, dado un entero positivo  $n$ , tenemos la función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = z^n$ . Otro ejemplo es la función  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  que asocia a cada número complejo  $z$  su conjugado  $\bar{z}$ , esto es,  $g(z) = \bar{z}$ . También tenemos la función  $Re : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  que asocia a cada número complejo  $z \in \mathbb{C}$  su parte real, esto es,  $Re(z) = (z + \bar{z})/2$ . Y la función que asocia a cada número complejo su módulo, esto es,  $| \cdot | : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada como  $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ , entre otros ejemplos.

En el caso general, si  $z = x + yi$  y  $w = u + vi$ , decir que la función  $w = f(z)$  está definida en  $\mathcal{U}$ , al identificar  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$  equivale a decir que en cada punto de  $\mathcal{U}$  de coordenadas  $(x, y)$  se le asocia una pareja de números reales  $u(x, y)$   $v(x, y)$ . En otras palabras, en  $\mathcal{U}$  están definidas dos funciones realvaluadas  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$ . Por ejemplo, la función  $w = z^2$  equivale a  $w = u(x, y) + v(x, y)i$ , donde  $u(x, y) = x^2 - y^2$  y  $v(x, y) = 2xy$ .

Por otra parte, también vimos que, si  $n \geq 2$  es un entero positivo, y  $w$  es un número complejo distinto de cero, la ecuación  $z^n = w$  tiene exactamente  $n$  soluciones. Como  $z = \sqrt[n]{w}$  si, y sólo si  $z^n = w$ , la raíz  $n$ -ésima de  $w$  no define una función como en los casos anteriores, sin embargo, tenemos una relación multivaluada bien definida. Posteriormente veremos cómo cons-

truir apropiadamente un dominio para que este tipo de relaciones sea una función, por lo que a este tipo de relaciones las denominaremos funciones multivaluadas.

Los conceptos de límite y continuidad que induce  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{C}$ , aunados a la estructura de campo de  $\mathbb{C}$  nos permitirá definir el concepto de derivada en el sentido complejo. Posteriormente, daremos el concepto de diferencial en el sentido complejo, y los compararemos con los conceptos en el sentido real. Introducimos también los conceptos de funciones holomorfas y  $\mathbb{C}$ -diferenciables, así como el estudio de sus principales propiedades.

**Definición 8.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto no vacío,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función,  $a \in \Omega$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Se define la derivada parcial  $(\partial f / \partial x_j)(a)$  de  $f$  en el punto  $a$ , como el siguiente límite, cuando este existe,

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

Denotaremos por  $\mathcal{C}^1(\Omega)$  al conjunto de funciones  $\mathbb{R}^n$ -valuadas definidas sobre  $\Omega$  tales que  $(\partial f / \partial x_j)(a)$  exista para cada  $a \in \Omega$  y  $1 \leq j \leq n$ , y es una función continua. Para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$  se define inductivamente  $\mathcal{C}^k(\Omega)$  como el conjunto de funciones para las cuales las derivadas parciales de todos los ordenes menores o iguales a  $k$  existen y son continuas. Finalmente  $\mathcal{C}^\infty$  es el conjunto de funciones infinitamente diferenciables definidas sobre  $\Omega$ , esto es,  $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}^k(\Omega)$ .

En este capítulo, cuando sea necesario, identificaremos  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$  por medio de la aplicación  $z = x + iy \rightarrow (x, y)$ , donde  $x, y \in \mathbb{R}^2$ .

## 2.2. Funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables y holomorfas.

A lo largo de la presente sección  $\Omega \subset \mathbb{C}$  denotará un subconjunto abierto no vacío.

**Definición 9.** Dada una función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  compleja valuada definida sobre  $\Omega$ , y  $a \in \Omega$ , diremos que  $f$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $a$  si

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

existe. Cuando este límite existe, lo denotaremos por  $f'(a)$ , o bien  $(df/dz)(a)$ , y este límite se denomina la derivada de  $f$  en  $a$ .

Diremos que  $f$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $\Omega$  si,  $f$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $a$ , para cada  $a \in \Omega$ . En este caso, la función  $a \mapsto f'(a)$ , que denotamos denotamos  $f'$ , se denomina la derivada de  $f$ .

En variable real, una función diferenciable es continua, esto también se tiene en variable compleja, esto es:

**Proposición 6.** Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es una función  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $\Omega$ , entonces  $f$  es continua en  $\Omega$ .

*Demostración.* Dado  $a \in \Omega$ , tenemos:

$$\lim_{z \rightarrow a, z \neq a} |f(z) - f(a)| = \lim_{z \rightarrow a, z \neq a} \frac{|f(z) - f(a)|}{z - a} |z - a| = |f'(a)| \lim_{z \rightarrow a, z \neq a} |z - a| = 0$$

donde  $h = z - a$ . □

### Ejemplo 6.

1. Las funciones constantes  $\mathbb{C}$ -valuadas son  $\mathbb{C}$ -diferenciables, esto es, si  $\lambda \in \mathbb{C}$  es fijo, y  $f(z) = \lambda$  para toda  $z \in \mathbb{C}$  dada  $a \in \mathbb{C}$  tenemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{\lambda - \lambda}{h} = 0,$$

de donde  $f$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $a$  para cada  $a \in \mathbb{C}$  y  $f'(a) = 0$ .

2. Dada  $n \in \mathbb{C}$ , la función  $f(z) = z^n$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable para toda  $a \in \mathbb{C}$ , pues

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^n - a^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{(a^n + na^{n-1}h + \dots + h^n) - a^n}{h} \\ &= \frac{h(na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}h + \dots + h^{n-1})}{h} \\ &= na^{n-1} + \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} h\mathcal{O}(a) = na^{n-1} \end{aligned}$$

3. La función que a cada  $z \in \mathbb{C}$  le asocia su conjugado no es  $\mathbb{C}$ -diferenciable. Si  $f(z) = \bar{z}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ , y  $h \in \mathbb{R}$ ,  $h \neq 0$ , entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{a+h} - \bar{a}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{a} + h - \bar{a}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1,$$

por otra parte

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{a+ih} - \bar{a}}{ih} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{a} - ih - \bar{a}}{ih} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-ih}{ih} = -1,$$

por lo cual, el límite no puede existir, es decir,  $f(z) = \bar{z}$  no es  $\mathbb{C}$ -diferenciable.

A continuación veremos como expresar el hecho de que  $f$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en términos de las variables reales  $x, y$ , así como de las funciones coordenadas que determinan a  $f$ .

**Proposición 7.** Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es una función complejo valuada definida sobre  $\Omega$ , y  $f$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $a$ , con  $a \in \Omega$ , entonces:

1. Existen las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ .
2.  $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(a) = f'(a)$

*Demostración.* Dado  $a = \alpha + i\beta \in \Omega$ , y  $h \in \mathbb{R}$ ,  $h \neq 0$ , por definición de  $f'(a)$  y unicidad del límite, al identificar  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$  y  $f(x+iy)$  con  $f(x, y)$  tenemos:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+h, \beta) - f(\alpha, \beta)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(a).$$

De manera similar tenemos:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+ih) - f(a)}{ih} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+ih, \beta) - f(\alpha, \beta)}{ih} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(a) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

□

Nótese que, una función  $f(x, y)$  de las variables reales  $x, y$  puede verse formalmente como una función  $g(z, \bar{z})$ , de las variables  $z$  y  $\bar{z}$ , donde  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ , consecuentemente  $x = (z + \bar{z})/2$  y  $y = (z - \bar{z})/(2i)$ . Derivando formalmente  $\partial \bar{z}/\partial z = 0$ ,  $\partial z/\partial z = 1$ ,  $\partial z/\partial \bar{z} = 0$ ,  $\partial \bar{z}/\partial \bar{z} = 1$ . Como consecuencia de la regla de la cadena en derivadas parciales podemos definir la derivada parcial de la función  $f$  con respecto a las variables  $z$  y  $\bar{z}$ .

**Definición 10.** Sea  $f$  una función complejo valuada definida sobre un conjunto abierto  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , y supóngase que  $f$  posee primeras derivadas parciales, con respecto a las variables reales  $x, y$ , en el punto  $a$ , entonces

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a) - i \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a) + i \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right).$$

Utilizando esta notación, y como consecuencia de la proposición anterior tenemos:

**Corolario 1.** Si  $f$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $\Omega$ ,  $a \in \Omega$ , entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) = f'(a) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0.$$

Recordamos que una función  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  puede describirse en términos de funciones coordenadas como  $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ , e identificando vía  $\mu(x + iy) = (x, y)$ , tenemos  $f(z) = u(z) + iv(z)$ , basándonos en esto, podemos re-escribir el corolario anterior en términos de las funciones coordenadas  $u$  y  $v$  como sigue:

**Corolario 2.** Si  $f$  es una función  $\mathbb{C}$ -valuada, definida sobre  $\Omega$ ,  $a \in \Omega$ , y escribimos  $f = u + iv$ , donde  $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$   $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $a$ , entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a).$$

Como consecuencia de lo anterior, podemos dar la siguiente definición.

**Definición 11.** Sea  $f$  una función complejo valuada definida sobre  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , y escriba  $f = u + iv$ , donde  $u$  y  $v$  son funciones real valuadas definidas sobre  $\Omega$ . Las siguientes ecuaciones son equivalentes por pares, y se denominan las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

1.  $\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}.$
2.  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$
3.  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$

$$4. \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Por otra parte, dada una función  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con:

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)),$$

la matriz Jacobiana de  $f$  en  $a \in \Omega$ , se define como la matriz de derivadas parciales

$$Df(x, y)|_a = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a) & \frac{\partial u}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a) & \frac{\partial v}{\partial y}(a) \end{pmatrix},$$

la cual induce, de manera natural, una transformación  $\mathbb{R}$ -lineal entre  $T_a\Omega \sim \mathbb{R}^2$ , el espacio tangente a  $\Omega$  en el punto  $a$ , y  $T_{f(a)} \sim \mathbb{R}^2$ , el espacio tangente a  $\mathbb{R}^2$  en el punto  $f(a)$ , a saber, la diferencial de  $f$  en  $a$ . Dicha transformación está dada como sigue:

$$Df_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$Df_a \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a) & \frac{\partial u}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a) & \frac{\partial v}{\partial y}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

En este contexto, las ecuaciones de Cauchy-Riemann admiten otra interpretación, para lo cual nos basamos en el siguiente resultado:

**Lema 1.** *Una matriz  $A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{R})$  representa la multiplicación por un número complejo si, y sólo si,  $a_{11} = a_{22}$  y  $a_{12} = a_{21}$ .*

*Demostración.* Dado  $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$  fijo, al multiplicar  $z = x + iy$  por  $\lambda$  obtenemos:

$$\lambda z = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(ay + bx),$$

lo cual, identificando  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$  vía  $z + iy \mapsto (x, y)$ , es equivalente a:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix}.$$

Recíprocamente, si



$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot (x + iy),$$

con  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ , tenemos:

$$ax + by = \lambda_1 x - \lambda_2 y \qquad cx + dy = \lambda_1 x + \lambda_2 y$$

para toda  $x, y \in \mathbb{R}$ . Tomando  $x = 1; y = 0$  obtenemos  $a = \lambda_1 = c$ . Por otra parte, si  $x = 0; y = 1$  entonces  $b = -\lambda_2 = d$ .  $\square$

**Proposición 8.** *Con la notación anterior,  $(\partial f / \partial \bar{z})(z) = 0$  si, y sólo si la aplicación diferencial  $Df_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es una transformación  $\mathbb{C}$ -lineal. En este caso*

$$Df_a(\zeta) = f'(a) \cdot \zeta \quad \text{para toda } \zeta \in \mathbb{C}$$

Con lo antes demostrado, tenemos que las reglas formales de cálculo diferencial pueden extenderse a funciones diferenciables de una variable compleja, podemos resumir estos resultados en la siguiente proposición.

**Proposición 9.** *Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto, no vacío. Si  $f$  y  $g$  son funciones  $\mathbb{C}$ -diferenciables en  $\Omega$  y  $\lambda \in \mathbb{C}$ , entonces:*

1.  $\lambda f + g$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable, y  $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$ .
2.  $f \cdot g$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable, y  $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ .
3. Si  $g(z) \neq 0$  para toda  $z \in \Omega$ , entonces  $f/g$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable y

$$\left( \frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Como consecuencia de estas fórmulas tenemos que cualquier polinomio en la variable  $z$  es una función  $\mathbb{C}$ -diferenciable. Además una función racional es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en cualquier abierto que no contenga los ceros del denominador. En particular, las funciones

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad c \neq 0$$

es una función  $\mathbb{C}$ -diferenciable si  $z \neq -d/c$ .

**Proposición 10 (La regla de la cadena).** Si  $U, V \subset \mathbb{C}$  son abiertos, y  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g : V \rightarrow \mathbb{C}$  son  $\mathbb{C}$ -diferenciables, y  $f(U) \subset V$ , entonces  $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{C}$  también es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $U$ . Si  $a \in U$  entonces

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

*Demostración.* Si  $a \in U$  y elegimos un número positivo  $r$  tal que  $B(a, r) \subset U$ . Bastará demostrar que, si  $\{h_n\}$  es una sucesión de números complejos no nulos, tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$  y  $|h_n| < r$ , entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(f(a + h_n)) - g(f(a))}{h_n}$$

existe y es igual a  $g'(f(a)) \cdot f'(a)$ .

*Primer Caso.* Supóngase que  $f(a) \neq f(a + h_n)$  para cada  $n$ . Entonces  $f(a + h_n) - f(a) \neq 0$ , de donde:

$$\frac{g(f(a + h_n)) - g(f(a))}{h_n} = \frac{g(f(a + h_n)) - g(f(a))}{f(a + h_n) - f(a)} \cdot \frac{f(a + h_n) - f(a)}{h_n}$$

Como  $f$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $a$ , entonces  $f$  es continua en  $a$ , de donde  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a + h_n) - f(a) = 0$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(f(a + h_n)) - g(f(a))}{h_n}$  existe y es igual al producto de los límites  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(f(a + h_n)) - g(f(a))}{f(a + h_n) - f(a)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a + h_n) - f(a)}{h_n}$ , el cual, por definición de derivada, es  $g'(f(a)) \cdot f'(a)$ .

*Segundo Caso.* Si  $f$  es constante en una vecindad de  $a$ , entonces  $f'(a) = 0$  y  $g \circ f$  también es constante en dicha vecindad de  $a$ , por lo que  $(g \circ f)'(a) = 0 = g'(f(a))f'(a)$ .

Supóngase que  $f(a + h_n) = f(a)$  para una infinidad de valores  $n$ , consideremos las subsucesiones  $\{k_n\}$  y  $\{l_n\}$  de  $\{h_n\}$  que satisfacen  $f(a + k_n) \neq f(a)$  y  $f(a + l_n) = f(a)$  para toda  $n$ . Como  $f$  es derivable:

$$f'(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a + k_n) - f(a)}{k_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a + l_n) - f(a)}{l_n} = 0$$

En particular,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(f(a + h_n)) - g(f(a))}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(f(a + k_n)) - g(f(a))}{k_n}$ , y como consecuencia de lo visto en la primera parte,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(f(a + h_n)) - g(f(a))}{h_n} = g'(f(a))f'(a) = 0.$$

□

Como consecuencia de la regla de la cadena tenemos el siguiente resultado:

**Corolario 3.** Si  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  son dos subconjuntos abiertos de  $\mathbb{C}$ ,  $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$  y  $g : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$  son funciones continuas tales que  $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$  y  $g(f(z)) = z$  para cada  $z \in \Omega_1$ . Si  $g$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable y  $g'(z) \neq 0$ , entonces  $f$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable y

$$f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))}.$$

*Demostración.* Si  $a \in \Omega_1$  y  $h \in \mathbb{C}$ , es tal que  $h \neq 0$  y  $a+h \in \Omega_1$ , en particular  $g(f(a)) = a$  y  $g(f(a+h)) = a+h$ , lo cual implica que  $f(a+h) \neq f(a)$ , y como  $f$  es continua, entonces  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - f(a) = 0$ . Por otra parte sabemos que  $dz/dz = 1$ , luego entonces  $(g \circ f)'(a)$  existe y es igual a uno, pero como

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(a+h)) - f(f(a))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(a+h)) - f(f(a))}{f(a+h) - f(a)} \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \end{aligned}$$

tenemos que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  existe, y  $f'(a) = \frac{1}{g'(f(a))}$ .  $\square$

**Proposición 11 (El teorema de la función inversa).** Si  $z \in \Omega$  y  $f$  es una función  $\mathbb{C}$ -diferenciable, tal que  $f'(a) \neq 0$ , entonces existe una vecindad  $U$  de  $a$  y una vecindad  $V$  de  $f(a)$  tal que  $f|_U : U \rightarrow V$  es biyectiva, su inversa  $f|_V^{-1} : V \rightarrow U$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $V$ , y su derivada está dada por:

$$\frac{df|_V^{-1}(w)}{dw} = \frac{1}{f'|_U(z)}, \quad \text{donde } w = f|_V(z).$$

*Demostración.* Como  $f'(a) \neq 0$ , al identificar  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$ , tenemos  $z = x + yi$ , y  $f = u + vi$ , entonces el determinante de la matriz jacobiana real es no nulo,

$$\begin{aligned} \det(Df_a) &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a) & \frac{\partial u}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a) & \frac{\partial v}{\partial y}(a) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a) & -\frac{\partial v}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a) & \frac{\partial u}{\partial x}(a) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(a)^2 + \frac{\partial v}{\partial x}(a)^2 = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 = |f'(a)|^2 \neq 0, \end{aligned}$$

como consecuencia del teorema de la función inversa para funciones de variable real, existen vecindades  $U$  de  $a$  y  $V$  de  $f(a)$  tales que  $f|_U : U \rightarrow V$  es biyectiva, por lo que existe  $f|_V^{-1} : V \rightarrow U$  tal que  $f^{-1}(f(z)) = z$  para cada  $z \in U$ .

Como consecuencia de la proposición anterior,  $f|_V^{-1}$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable y

$$\frac{df|_V^{-1}(w)}{dw} = \frac{1}{f'|_U(z)}. \quad \square$$

Dada un entero positivo  $n$ , sabemos que la función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada como  $f(z) = z^n$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable, además  $f'(z) = nz^{n-1} = 0$ , sólo cuando  $z = 0$ .

De acuerdo con el teorema de la función inversa, existen abiertos  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  contenidos en el plano complejo tales que  $f|_{\Omega_1} : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  es biyectiva y la función inversa de  $f$ , que denotaremos  $f^{-1}(w) = \sqrt[n]{w}$  si  $f(z) = w$  satisface:

$$\frac{d}{dw} f^{-1}(w) = \frac{d \sqrt[n]{w}}{dw} = \frac{1}{nz^{n-1}} = \frac{1}{n} (\sqrt[n]{w})^{1-n} = \frac{1}{n} w^{\frac{1}{n}-1}.$$

Concluimos así que la función raíz  $n$ -ésima de una función es  $\mathbb{C}$ -diferenciable si restringimos la función a un dominio en el cual esta sea univaluada.

Como consecuencia de esto, tenemos que, si  $p > 0$  y  $q$  son enteros, la función  $f(z) = z^{\frac{p}{q}}$  es  $\mathbb{C}$  diferenciable, si restringimos el convenientemente el dominio de  $z$  para que la función  $z \mapsto z^{1/q} = \sqrt[q]{z}$  sea univaluada, y aplicando la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{d}{dz} \left( z^{\frac{p}{q}} \right) = \frac{p}{q} z^{\frac{p}{q}-1}.$$

**Proposición 12.** Si  $\Omega \subset \mathbb{C}$  es un subconjunto abierto, conexo, y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es una función  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $\Omega$  tal que  $f'(z) = 0$  para toda  $z \in \Omega$ , entonces  $f$  es una función constante en  $\Omega$ .

*Demostración.* Si  $z, w \in \Omega$ , queremos demostrar que  $f(z) = f(w)$ . Como  $\Omega$  es conexo, podemos encontrar una curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  tal que  $\gamma(0) = z$  y  $\gamma(1) = w$ . Como consecuencia de la regla de la cadena

$$\frac{df(\gamma(t))}{dt} = f'(\gamma(t))\gamma'(t) = 0,$$

pues  $f'(s) = 0$  para toda  $s \in \Omega$ . Por otra parte, si  $f = u + iv$ , con  $u$  y  $v$  funciones real valuadas definidas en  $\Omega$ , entonces

$$\frac{df(\gamma(t))}{dt} = \frac{du(\gamma(t))}{dt} + i \frac{dv(\gamma(t))}{dt},$$

de donde

$$\frac{du(\gamma(t))}{dt} = 0 \quad y \quad \frac{dv(\gamma(t))}{dt},$$

y como  $u \circ \gamma$  son funciones real valuadas de variable real con derivadas cero, de cálculo elemental sabemos que,  $u \circ \gamma$  y  $v \circ \gamma$  son funciones constantes en  $[0, 1]$ , esto es,  $u \circ \gamma = c_1$ , y  $v \circ \gamma = c_2$  con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . De donde  $f(z) = (u + iv)(z) = c_1 + ic_2 = (u + iv)(w) = f(w)$ .  $\square$

Cabe notar que, en el capítulo anterior, definimos el plano complejo extendido, así como los conceptos de límite al infinito, y límite en el punto al infinito, esto nos permite extender también el concepto de derivada de una función en el punto al infinito.

**Definición 12.** Una función  $f$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $z = \infty$  si  $f(1/w)$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $w = 0$ .

Las funciones racionales de la forma

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

donde el grado del polinomio  $P(z)$  no excede al grado del polinomio  $Q(z)$ , nos proporcionan ejemplos de funciones  $\mathbb{C}$ -diferenciables en el punto al infinito, como consecuencia de esto, tenemos que, las funciones fraccionales lineales

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ con } c \neq 0 \text{ son } \mathbb{C}\text{-diferenciables.}$$

Por otra parte, la función

$$g(z) = z + \frac{1}{z}$$

es  $\mathbb{C}$ -diferenciable salvo en 0 y  $\infty$ .

**Proposición 13.** Sea  $f$  una función complejo valuada definida en  $\Omega$ . Supóngase que  $\partial f/\partial x$ ,  $\partial f/\partial y$  existen y son continuas en  $\Omega$ . Supóngase que además

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z) \quad \text{para cada punto } z \text{ en } \Omega$$

entonces,  $f$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $\Omega$ .

*Demostración.* Dado  $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$ ,  $\xi, \eta \in \mathbb{R}$  escribamos  $f = u + v$ , donde  $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Sea  $a = \alpha + i\beta \in \Omega$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Como  $\partial u/\partial x$  y  $\partial v/\partial y$  existen y son continuas, como consecuencia del teorema de Taylor tenemos que:

$$\begin{aligned} u(a + \zeta) - u(a) &= u(\alpha + \xi, \beta + \eta) - u(\alpha, \beta) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, \beta) \cdot \xi + \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha, \beta) \cdot \eta + \varepsilon_1(\xi, \eta), \end{aligned}$$

donde  $\varepsilon_1(\xi, \eta)/(|\xi| + |\eta|) \rightarrow 0$  si  $\xi, \eta \rightarrow 0$ . Análogamente,

$$\begin{aligned} v(a + \zeta) - v(a) &= v(\alpha + \xi, \beta + \eta) - v(\alpha, \beta) \\ &= \frac{\partial v}{\partial x}(\alpha, \beta) \cdot \xi + \frac{\partial v}{\partial y}(\alpha, \beta) \cdot \eta + \varepsilon_2(\xi, \eta), \end{aligned}$$

donde  $\varepsilon_2(\xi, \eta)/(|\xi| + |\eta|) \rightarrow 0$  si  $\xi, \eta \rightarrow 0$ .

Luego entonces:

$$\begin{aligned} f(a + \zeta) - f(a) &= (u + v)(a + \zeta) - (u + v)(a) \\ &= [u(a + \zeta) - u(a)] + i[v(a + \zeta) - v(a)] \\ &= \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, \beta) \cdot \xi + \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha, \beta) \cdot \eta + \varepsilon_1(\xi, \eta) \right] + \\ &\quad i \left[ \frac{\partial v}{\partial x}(\alpha, \beta) \cdot \xi + \frac{\partial v}{\partial y}(\alpha, \beta) \cdot \eta + \varepsilon_2(\xi, \eta) \right] \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot \xi + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot \eta + \varepsilon(\zeta), \end{aligned}$$

donde  $\varepsilon(\zeta)/(|\zeta|) \rightarrow 0$  cuando  $\zeta \rightarrow 0$ . Como  $\partial f/\partial y = i(\partial f/\partial x)$ , tenemos

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0, \zeta \neq 0} \frac{f(a + \zeta) - f(a)}{\zeta} = \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \lim_{\zeta \rightarrow 0, \zeta \neq 0} \frac{\varepsilon(\zeta)}{\zeta} = \frac{\partial f}{\partial x}(a).$$

Es decir,  $f$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $a$ . □

Podemos resumir algunos de los resultados anteriores en el siguiente teorema:

**Teorema 6.** (*Cauchy-Riemann*). Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto no vacío de  $\mathbb{C}$ ,  $f$  una función complejo valuada definida en  $\Omega$ , y sea  $a \in \Omega$ . Entonces  $f$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $a$  si, y solamente si,  $f$  es diferenciable en el sentido de variable real, y en  $a = (x_0, y_0)$  las funciones coordenadas  $u$  y  $v$  de  $f$  satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Así, si  $\partial u/\partial x$ ,  $\partial u/\partial y$ ,  $\partial v/\partial x$  y  $\partial v/\partial y$ , son continuas en  $\Omega$  y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces  $f$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $\Omega$ .

Si  $f'(a)$  existe, entonces  $f'(a) = \partial f/\partial x = -i\partial f/\partial y$ .

La hipótesis de la continuidad en las derivadas parciales resulta ser superflua, este hecho fue demostrado por Looman (1923) en *Über die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*, prueba que, desafortunadamente tenía un error, el cual fue corregido por Menchoff (1936) en *Les conditions de monogénéité*. Ya que la demostración de este resultado es bastante técnica, y puede verse en [?, §6, pg. 43-51], sin embargo, a continuación enunciamos la versión fuerte de este resultado.

**Teorema 7.** (Looman-Menchoff). *ea  $\Omega$  un subconjunto abierto no vacío de  $\mathbb{C}$ , y  $f$  una función complejo valuada y continua definida en  $\Omega$ . Supóngase que las derivadas parciales  $\partial f/\partial x$  y  $\partial f/\partial y$  existen en cada punto de  $\Omega$  y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann  $\partial f/\partial x = -i(\partial f/\partial y)$ . Entonces  $f$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $\Omega$ .*

#### Ejemplo 7.

Sea  $f(z) = z^5/|z|^4$  si  $z \neq 0$  y  $f(0) = 0$ . Nótese que  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)/z$  no existe, por lo cual,  $f$  no es continua en 0, y consecuentemente,  $f$  no es  $\mathbb{C}$ -diferenciable.

Si  $u$  y  $v$  denotan las partes real e imaginaria de la función  $f$  respectivamente, entonces  $u(x, 0) = x$ ,  $v(0, y) = y$ , y  $u(0, y) = v(x, 0) = 0$ .

De aquí concluimos que las derivadas parciales de  $u$  y  $v$  existen y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, pero  $f'(0)$  no existe. Esto significa que no es posible eliminar la hipótesis de continuidad de la función  $f$  en el teorema de Cauchy-Riemann.

### 2.3. Series de Potencias y funciones holomorfas

Las funciones  $\mathbb{C}$ -diferenciables también se conocen como funciones holomorfas, analíticas, o bien, funciones regulares. Como veremos posteriormente, hay una forma alternativa de definir una función  $\mathbb{C}$ -diferenciable, esta se basa en la representación local de una función en términos de una serie de potencias convergente, las cuales denominaremos funciones holomorfas, y uno de nuestros objetivos es mostrar que toda función  $\mathbb{C}$ -diferenciable es holomorfa y recíprocamente.

**Definición 13.** Si  $c_n \in \mathbb{C}$  para cada entero no negativo  $n$ , diremos que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  converge a un número complejo  $c$  si, y sólo si, para cada  $\epsilon > 0$  existe un entero positivo  $N = N_\epsilon$  tal que, si  $m \geq N$  entonces  $|\sum_{n=0}^m c_n - c| < \epsilon$ .

Diremos que la serie  $\sum c_n$  converge absolutamente si  $\sum |c_n|$  converge.

Como consecuencia de la desigualdad del triángulo, tenemos que, si una serie converge absolutamente, entonces converge.

**Definición 14.** Sea  $f$  una función complejo valuada definida en  $\Omega$ . Diremos que  $f$  es holomorfa en  $\Omega$  si, para cada  $a \in \Omega$ , existe una vecindad  $U$  de  $a$ ,  $U \subset \Omega$ , y una sucesión de números complejos  $\{c_n\}$  tal que, para cada  $z \in U$ , la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

converge a  $f(z)$ .

En la siguiente parte veremos que toda función holomorfa es  $\mathbb{C}$ -diferenciable, para lo cual, demostraremos primeramente algunos lemas técnicos.

**Proposición 14 (El criterio M de Weierstrass).** Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto no vacío del plano complejo,  $u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una sucesión de funciones definidas en  $\Omega$ , y supóngase que existe una sucesión de constantes reales  $M_n \geq 0$  tales que:

$$1. \quad |u_n(x)| \leq M_n \text{ para cada } x \in \Omega.$$

$$2. \quad \sum_{n=0}^{\infty} M_n \text{ converge.}$$

Entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  converge uniformemente en  $\Omega$ .

*Demostración.* Dada  $\epsilon > 0$ , como  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$  converge, entonces es de Cauchy, por tanto existe  $N = N_\epsilon \in \mathbb{N}$  tal que, si  $n, m \geq N$  y  $m \geq n$ , entonces  $\sum_{k=n+1}^m M_k < \epsilon$ . Luego entonces, si  $s_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$  entonces, para  $n, m \geq N$  tenemos que



$$|s_n(x) - s_m(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^m u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m M_k < \epsilon$$

se sigue de aquí que la serie  $s_n(x)$  es de Cauchy, y por ende, converge. Para cada  $x \in \Omega$  existe  $\zeta = \zeta_x \in \mathbb{C}$  tal que  $s(x) = \zeta$ , es decir, tenemos una función  $s : X \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$|s(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \epsilon$$

para toda  $x \in \Omega$ , si  $n \geq N$ .  $\square$

Por ejemplo,  $\sum_{k=n+1}^{\infty} z^n/n$  converge uniformemente en  $\overline{B(0, r)}$  si  $0 \leq r < 1$ ,

para ver esto, basta tomar  $M_n = r^n/n$  y aplicar el criterio  $M$  de Weierstrass.

**Lema 2 (El lema de Abel).** *Dada una sucesión  $\{c_n\}$  de números complejos, existe  $R \geq 0$  ( $R$  puede ser  $\infty$ ) tal que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

*converge si  $|z| < R$ , y diverge para  $|z| > R$ .*

*Además, la serie converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto de  $B(0, R) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$ , la bola abierta con centro en el origen y radio  $R$ .*

*Demostración.* Consideremos el número real  $R$  dado como sigue:

$$R = \sup \{r \geq 0; \exists M = M_r > 0 \forall n \geq 0 \quad |c_n| r^n \leq M\}.$$

Si  $|z| > R$ , la sucesión  $|c_n||z|^n$  no es acotada, luego entonces la serie  $\sum c_n z^n$  no puede ser convergente.

Sea  $K$  un subconjunto compacto de  $B(0, R)$ , como  $R$  es un número real, podemos elegir otro número  $\rho$  con  $0 < \rho < R$  y tal que

$$K \subset \overline{B(0, \rho)} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq \rho\}.$$

Sea  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $\rho < r < R$ , por definición de  $R$ , existe  $M = M(r) > 0$  tal que  $|c_n| r^n \leq M$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $z \in K$ , tenemos que  $|z| \leq \rho < r$ , de donde:

$$|c_n z^n| \leq |c_n| \rho^n \leq M \left( \frac{\rho}{r} \right)^n$$

Como  $\rho < r$ , la serie  $\sum \left( \frac{\rho}{r} \right)^n$  converge.

Aplicando el Criterio  $M$  de Wierstrass, se sigue que la serie  $\sum c_n z^n$  converge uniformemente en  $K$ .  $\square$

**Corolario 4.** Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto no vacío de  $\mathbb{C}$ , y  $f$  una función compleja valuada definida en  $\Omega$ . Si  $f$  es una función holomorfa en  $\Omega$ , entonces  $f$  es continua en  $\Omega$ .

Por ejemplo, si  $\Omega = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ , y  $K$  es un subconjunto compacto de  $\Omega$ , la función  $f$  definida por la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

es holomorfa y continua en  $K$ .

**Definición 15.** Dada una sucesión  $\{c_n\}$  de números complejos, el número dado por  $R = \sup\{r \in \mathbb{R}; r \geq 0, \exists M = M(r) \in \mathbb{R} \forall n \geq 0 |c_n| r^n \leq M\}$ , de acuerdo con el lema de Abel, se denomina el radio de convergencia de la serie  $\sum c_n z^n$ .

Desde luego, hay diversas formas de obtener el radio de convergencia de una serie, dos métodos prácticos para calcular  $R$  son los criterios de la razón y de la raíz, que recordamos a continuación:

**Proposición 15.** Considere una serie de potencias  $\sum c_n z^n$ .

1. Criterio de la razón: Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$$

existe, entonces es igual a  $R$ , el radio de convergencia de la serie.

2. Criterio de la raíz: Si  $\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$  existe, entonces  $R = 1/\rho$  es el radio de convergencia de la serie. Si  $\rho = 0$ , entonces  $R = \infty$ , y  $R = 0$  si  $\rho = \infty$ .

Recordamos que,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{c_n, c_{n+1}, \dots\}$ .

*Demostración.* Utilizando los criterios de convergencia para series con términos reales, tenemos que:

1. La serie  $\sum |c_n| r^n$  converge, si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1} r^{n+1}|}{|c_n r^n|} < 1$$

(y diverge si este límite es mayor que uno), de aquí, la serie converge si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} > r \quad \text{diverge si} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} < r.$$

Ya que

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}; r \geq 0, \exists M = M(r) \in \mathbb{R} \forall n \geq 0 |c_n| r^n \leq M\},$$

tenemos  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| / |c_{n+1}|$ .

2. Aplicando el criterio de la raíz para series reales, sabemos que  $\sum |c_n| r^n$  converge si  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n| r^n} < 1$  (diverge si este límite es mayor que uno); o equivalentemente, converge si  $r < 1 / \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ .

Diverge si  $r > \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$  aplicando el inciso anterior se sigue que:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

□

### Ejemplo 8.

1. La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  tiene radio de convergencia uno.
2. La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n / n!$  tiene radio de convergencia  $R = +\infty$ , pues:  

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n / c_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$
3. La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (z^n / e^n)$  tiene radio de convergencia  $R = e$ , pues:  

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/e^n} = 1/e, \text{ de donde } R = 1/\rho = e.$$

**Lema 3.** *El radio de convergencia de la serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

*coincide con el radio de convergencia de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}.$$

*Demostración.* Denotemos por  $R$  y  $R'$  los radios de convergencia de las series  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ , y  $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ , en particular:

$$R = \sup\{r \geq 0; \exists M=M(r) \in \mathbb{R} \forall n \geq 0 |c_n| r^n \leq M\}$$

y

$$R' = \sup\{r \geq 0; \exists N=N(r) \in \mathbb{R} \forall n \geq 0 |(n+1)c_{n+1}| r^n \leq M\}.$$

Veremos primeramente que  $R' \leq R$ . Si  $n \geq 1$ , entonces:

$$|c_n z^n| \leq |n c_n z^n| = |n c_n z^{n-1}| |z|.$$

Si  $|z| = r \leq R'$ , entonces  $|n c_n| r^n = (|n c_n| r^{n-1}) r \leq N r \leq N R'$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

Por ende, si  $|z| = r \leq R'$ , se sigue que existe  $M_{R'} := N R' \in \mathbb{R}$  tal que,  $|c_n| r^n \leq M$  para cada entero no negativo  $n$ , por lo que  $R' \leq R$ . Si  $R = 0$ , en particular  $R' = 0 = R$ .

Supongamos ahora que  $R > 0$ , veremos ahora que  $R \leq R'$ . Podemos elegir  $r, \rho \in \mathbb{R}$  tales que  $0 < r < \rho < R$ , entonces

$$n |c_n| r^{n-1} = \left( \frac{1}{r} |c_n| \rho^n \right) \left[ n \left( \frac{r}{\rho} \right)^n \right] \leq \frac{1}{r} M_{\rho} n \left( \frac{r}{\rho} \right)^n.$$

Como  $n \alpha^n \rightarrow 0$  si  $|\alpha| < 1$ , se sigue que si  $|z| = r \leq R$ , existe  $N_r \in \mathbb{R}$  tal que,  $|n c_n| r^n \leq N_r$ , por lo que,  $R \leq R'$ .  $\square$

El siguiente lema nos permitira demostrar que una serie de potencias puede derivarse término a término

**Lema 4.** *Sean  $\alpha, \beta$  dos números complejos, para cada entero positivo  $n$  se tiene:*

$$|(\alpha + \beta)^n - \alpha^n| \leq n |\beta| (|\alpha| + |\beta|)^{n-1}$$

*Demostración.* Si  $\alpha = 0$  el resultado es evidente, supongamos entonces que  $\alpha \neq 0$  y definamos  $t = \beta/\alpha$ , entonces:

$$\begin{aligned} |(\alpha + \beta)^n - \alpha^n| &= |\alpha^n [(1 + t)^n - 1]| \\ &= |\alpha|^n \left| \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} t^k \right| \\ &\leq |\alpha|^n \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} |t|^k \\ &= |\alpha|^n [(1 + |t|)^n - 1] \end{aligned}$$

Si  $\tau \geq 0$ , entonces

$$(1 + \tau)^n - 1 = \int_0^\tau (1 + u)^{n-1} du \leq n\tau(1 + \tau)^{n-1}.$$

Se sigue de aquí que

$$|(\alpha + \beta)^n - \alpha^n| \leq |\alpha|^n n \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \left( 1 + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \right)^{n-1} = n|\beta|(|\alpha| + |\beta|)^{n-1}.$$

□

A continuación veremos que toda función holomorfa es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en el interior de su círculo de convergencia.

**Proposición 16.** Sea  $R > 0$  y supóngase que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$  converge

a  $f(z)$ , si  $|z - a| < R$ .

Entonces  $f$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $B(a, R) = \{z; |z - a| < R\}$ . Además

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - a)^{n-1}$$

*Demostración.* Denotemos por  $g(z)$  a la función  $g(z) = \sum n c_n (z - a)^{n-1}$ , si  $|z| < R$ .

Fijemos  $z \in B(a, R)$ , y elegimos  $\zeta \in \mathbb{C}$  con  $0 < |\zeta| < \frac{1}{2}(R - |z - a|)$ , entonces:

$$\frac{f(z + \zeta) - f(z)}{\zeta} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{(z + \zeta - a)^n - (z - a)^n}{\zeta}$$

Si  $N > 0$ , y  $\rho = \frac{1}{2}(R + |z - a|) < R$ , como consecuencia del lema anterior tenemos:

$$\left| \sum_{n>N} c_n \frac{(z + \zeta - a)^n - (z - a)^n}{\zeta} \right| \leq \sum_{n>N} n|c_n|(|\zeta| + |z - a|)^{n-1} \leq \sum_{n>N} n|c_n|\rho^{n-1}$$

Como  $|z - a| < R$  también tenemos  $|z - a| < \rho$ , de donde

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(z + \zeta) - f(z)}{\zeta} - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z - a)^{n-1} \right| \\ & \leq \sum_{n=1}^N |c_n| \left| \frac{(z + \zeta - a)^n - (z - a)^n}{\zeta} - n(z - a)^{n-1} \right| + 2 \sum_{n>N} n|c_n|\rho^{n-1}. \end{aligned}$$

Como el radio de convergencia de la serie  $\sum c_n z^n$  es el mismo que el de la serie  $\sum nc_n z^{n-1}$ , dada  $\varepsilon > 0$ , podemos elegir un entero positivo  $N = N_{\varepsilon, z, R}$  tal que  $\sum_{n>N} nc_n \rho^{n-1} < \frac{1}{2}\varepsilon$ . Además, como

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{(z + \zeta - a)^n (z - a)^n}{\zeta} = n(z - a)^{n-1},$$

podemos elegir  $\delta > 0$  (el cual depende de  $N$ ,  $z$  y  $\{c_n\}$ , para  $n < N$ ), donde  $\delta < \frac{1}{2}(R - |z - a|)$ , tal que

$$\sum_{n \leq N} |c_n| \left| \frac{(z + \zeta - a)^n - (z - a)^n}{\zeta} - n(z - a)^{n-1} \right| < \varepsilon \quad \text{si } 0 < |\zeta| < \delta.$$

Así, para  $0 < |\zeta| < \delta$ , tenemos

$$\left| \frac{f(z + \zeta) - f(z)}{\zeta} - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z - a)^{n-1} \right| < 2\varepsilon.$$

□

Como consecuencia de este resultado tenemos:

**Corolario 5.** Si  $\omega$  es un subconjunto abierto en  $\mathbb{C}$ , cualquier función holomorfa en  $\Omega$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $\Omega$ .

Posteriormente demostraremos que el recíproco también es cierto, toda función  $\mathbb{C}$ -diferenciable es holomorfa, lo cual nos permitirá utilizar indistintamente los términos  $\mathbb{C}$ -diferenciable, analítico y holomorfo.

**Corolario 6.** Si  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  tiene radio de convergencia  $R > 0$ , entonces

1. Para cada  $k \geq 1$  la serie

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdot (n-k+1)c_n(z-a)^{n-k}$$

tiene radio de convergencia  $R$ ;

2. La función  $f$  es infinitamente  $\mathbb{C}$ -diferenciable sobre  $B(a, R)$  y, además, para  $k \geq 1$  y  $z \in B(a, R)$  tenemos:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdot (n-k+1)c_n(z-a)^{n-k};$$

3. Para  $n \geq 0$ , el  $n$ -ésimo término de la serie de  $f$  satisface

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).$$

### Ejemplo 9.

Considere la serie  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n/n!$ , como consecuencia del criterio de la raíz, esta serie tiene radio de convergencia

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n^2}{1/(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^2 = 1$$

y su derivada está dada como

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}.$$

Note que la serie de  $f'(z)$  no converge para  $z = 1$ , de donde  $f$  no puede extenderse analíticamente a cualquier región que contenga a la cerradura del disco unitario.

**2.4. Ejercicios**

1. Suponga que  $f$  y  $g$  son  $\mathbb{C}$ –diferenciables en un abierto no vacío  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ . Demuestre las siguientes identidades:

a)  $(f + g)' = f' + g'$ .

b)  $(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$ .

c)  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$  si  $g(z) \neq 0$  para cada  $z \in \Omega$ .



## Capítulo 3

# Funciones elementales

El objetivo principal de este capítulo es extender las funciones elementales de variable real a variable compleja, tales como las funciones trigonométricas, la exponencial y la logarítmica. Asimismo, pretendemos estudiar sus propiedades fundamentales.

### 3.1. Potencias y raíces.

Sea  $n$  un entero positivo, y consideremos la aplicación  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida como  $f(z) = z^n$ . Si  $z = r \cdot \exp(i\theta)$ , entonces  $w = f(z) = r^n \exp(in\theta)$ .

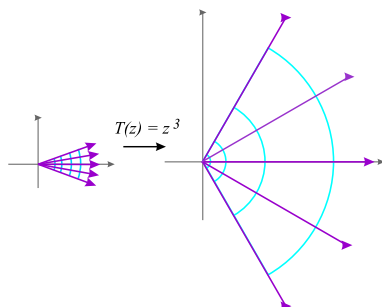


Figura 3.1: Representación geométrica de la función  $f(z) = z^n$ .

En particular, el rayo  $\arg z = \theta$  se transforma en el rayo  $\arg(w) = n\theta$ , mientras que la circunferencia  $|z| = r$  se transforma en la circunferencia  $|w| = r^n$ , el cual se cubre  $n$  veces. En efecto, cada uno de los  $n$  arcos de circunferencia

$$|z| = r, \quad k \frac{2\pi}{n} \leq \arg z < (k+1) \frac{2\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

se transforma completamente sobre la circunferencia  $|w| = r^n$ .

Como consecuencia de la fórmula de D'Moivre, la función  $f(z) = z^n$  es una transformación biyectiva del interior de cualquier sector de la forma  $\{z : 0 < \arg z \leq \frac{2\pi}{n}\}$ , sobre el interior del sector  $\{z : 0 < \arg z \leq 2\pi\}$ .

Lo descrito al inicio de esta sección, muestra que, para obtener una representación geométrica de la aplicación  $f(z) = z^n$  necesitamos  $n$  copias del  $w$ -plano, los cuales, además, deben unirse apropiadamente. Estas representaciones fueron introducidas por B. Riemann en 1851, y el tipo de espacios que se obtienen se conocen actualmente como superficies de Riemann.

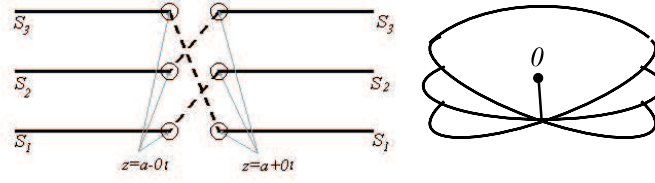
A continuación daremos una breve descripción de cómo se genera, en este caso, dicha superficie.

Iniciemos con  $n$  copias del  $w$ -plano extendido, las cuales denotamos  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , a partir de ellas formaremos una superficie conexa  $R$  siguiendo las siguientes convenciones:

1.  $S_k$  es la  $k$ -ésima hoja de  $R$ .
2. Todas las hojas tienen los puntos  $w = 0$  y  $w = \infty$ ; estos dos puntos se conocen como puntos de ramificación de la superficie, y estos son los dos puntos de orden  $n - 1$  donde las  $n$  hojas se pegan.
3. En cada hoja dibujamos una, y la misma curva, que una a los puntos  $0$  e  $\infty$ .
4. La curva se conoce como una línea de ramificación de la superficie, ya que a lo largo de esta línea se conecta una hoja con la otra. Para simplificar la discusión, tomaremos el eje real positivo como la línea de ramificación.

Procederemos a especificar cómo las hojas se unirán a lo largo de la línea de ramificación, y esta convención se amplificará por una descripción de que constituye una  $\varepsilon$ -vecindad de un punto de  $R$ . En la figura (??) presentamos una representación pictórica de una porción de  $R$  cerca del origen en el caso  $n = 3$ .

Si consideramos los puntos  $a + bi$  y  $a - bi$  en  $S_k$ , donde  $a > 0$  y  $b > 0$ . Estos puntos pueden conectarse por medio del perímetro del rectángulo con vértices  $a + bi, -a + bi, -a - bi, a - bi$ ; el cual se encuentra totalmente contenido en  $S_k$ . Ahora bien, si en lugar de seguir la trayectoria de  $a + bi$  al punto  $a - bi$  en  $S_k$  lo unimos al punto  $a - bi$  descendiendo a la hoja  $S_{k-1}$  para  $k - 1 \geq 1$ , y ascendiendo al punto  $a - bi$  en la hoja  $S_n$ .

Figura 3.2: Superficie de Riemann de  $z^3$ .

Si iniciamos en  $a - bi$  en  $S_k$  y procedemos a subir al punto  $a + bi$  en la hoja  $S_{k+1}$  hasta llegar a  $S_n$ , y descendemos entonces a  $S_1$  para continuar ascendiendo hasta regresar a  $S_k$ .

Iniciando en  $w = a + bi$  en  $S_k$ , describimos la circunferencia  $|w| = |a + bi|$   $n$  veces en sentido positivo, esto es,  $\arg w$  es crecientemente, entonces encontramos el punto  $a + bi$  en forma consecutiva en las siguientes hojas:

$$S_k, S_{k+1}, \dots, S_n, S_1, S_2, \dots, S_{k-1}, S_k.$$

Así, regresamos al punto de partida después de dar  $n$  vueltas. Si describimos la circunferencia en el sentido negativo, las hojas se recorrerán en el orden inverso:

$$S_k, S_{k-1}, \dots, S_1, S_n, S_{n-1}, \dots, S_{k+1}, S_k.$$

Para completar la descripción de la superficie, asignamos vecindades a los puntos de  $R$  de la siguiente manera: Si  $a + bi$  está en  $S_k$  y la distancia al eje real positivo es menor que  $\varepsilon$  entonces el conjunto de todos los puntos en  $S_k$  y su distancia de  $a + bi$  es menor que  $\varepsilon$  constituye una  $\varepsilon$ -vecindad de  $a + bi$ . Los puntos sobre la línea de ramificación, esto es, aquellos sobre el eje real positivo, debemos distinguir entre los dos ejes de la línea, pues  $a + 0i$  en  $S_k$  es el mismo punto que  $a - 0i$  en  $S_{k-1}$ , y  $a - 0i$  en  $S_k$  es el mismo punto que  $a + 0i$  en  $S_{k+1}$ . En el primer caso, una  $\varepsilon$ -vecindad está dada como:

$$\{w; |w-a| < \varepsilon, \operatorname{Im}(w) \geq 0, w \in S_k\} \cup \{w; |w-a| < \varepsilon, \operatorname{Im}(w) < 0, w \in S_{k-1}\},$$

y en el segundo caso

$$\{w; |w-a| < \varepsilon, \operatorname{Im}(w) < 0, w \in S_k\} \cup \{w; |w-a| < \varepsilon, \operatorname{Im}(w) \geq 0, w \in S_{k+1}\},$$

donde  $a \neq 0, \infty, a > \varepsilon$ .

Una  $\varepsilon$ -vecindad de  $w = 0$  es el conjunto de todos los puntos  $w$  con  $|w| < \varepsilon$  y  $w$  que se encuentran sobre las  $n$  hojas  $S_k$ . Reemplazando  $|w| < \varepsilon$  por  $1/|w| < \varepsilon$ , tenemos la vecindad en  $w = \infty$ . Con lo cual se concluye la descripción de la superficie  $R$ .

Bajo la aplicación  $w = z^n$  hay una correspondencia uno a uno entre el  $z$ -plano extendido y la superficie de Riemann  $R$ .

Por otra parte, si  $n$  es un entero positivo mayor que uno, tenemos  $z = \sqrt[n]{w}$ , ya que  $z = \sqrt[n]{w}$  si, y sólo si  $w = z^n$ . Sin embargo, esta función no es univaluada, y por ende, no está bien definida.

Supongamos que  $w = R \exp(i\Theta)$ , con  $0 \leq \Theta < 2\Pi$ . Definamos entonces

$$z_k = z_k(w) = \sqrt[n]{R} \exp\left(\frac{\Theta}{n} + (k-1)\frac{2\Pi}{n}\right) \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

Como  $(z_k(w))^n = w$  para cada  $k = 1, 2, \dots, n$  esta fórmula determina las  $n$ -raíces de  $w$ .

Si  $w$  es un punto distinto de cero, los puntos  $z_1(w), z_2(w), \dots, z_n(w)$  son los vértices de un polígono regular de  $n$  lados con centro en el origen, el cual varía continuamente con  $w$ .

Para que  $z_k(w)$  sea una función univaluada de  $w$  tenemos dos opciones; podemos utilizar el hecho de que  $w = z^n$  da una correspondencia uno a uno entre la esfera de Riemann y la superficie de Riemann  $R$  descrita anteriormente. Por lo cual, la superficie de Riemann  $R$  es el dominio de la función univaluada  $z = \sqrt[n]{w}$ , o bien, restringir el dominio de  $w$ .

Sea  $D$  un abierto conexo en el  $w$ -plano tal que, si  $Pi$  es un polígono cerrado simple contenido en  $D$  entonces  $w = 0$  nunca es un punto de  $Pi$  o de su interior. Si  $w_0 \in D$  y  $\Theta_0$  es el valor que determina  $\arg w_0$ , la función  $\arg w \cong \Theta$  está determinado en forma única en  $D$  pidiendo que la función argumento sea continua en la variable  $w$  y asuma el valor  $\Theta_0$  en el punto  $w = w_0$ . La función  $z_k(w)$  definida por (??) usando el valor  $\Theta$ , es univaluada, está bien definida y es continua en  $D$ .

En particular, podemos tomar  $D$  como el sector  $0 < \arg w < 2\pi$ .

Cada uno de las funciones resultantes  $z_k(w)$  es univaluada y continua en este sector. Se acostumbra denominar a  $z_1(w)$  la rama principal de la raíz  $n$ -ésima de  $w$ . Esta elección de  $D$  tiene la propiedad de que la raíz  $n$ -ésima de un número real positivo es un número real positivo.

### 3.2. La fórmula de Euler

Como mencionamos en el primer capítulo, en 1740 Leonhard Euler descubrió la fórmula

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Para explicar la fórmula de Euler debemos responder a la pregunta ¿Qué significa  $e^{i\theta}$ .

Si  $x$  es un número real, sabemos que la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = e^x$  satisface las propiedades

$$\frac{df}{dx} = f(x), \quad \text{y} \quad f(0) = 1.$$

De manera similar, si  $k$  es una constante real, entonces  $e^{kx}$ , queda definido por la propiedad

$$\frac{df}{dx} = kf(x), \quad \text{y} \quad f(0) = 1.$$

Puede extenderse la acción de la función exponencial  $e^x$  de valores reales, a valores imaginarios, pidiendo que esta propiedad se cumpla para  $k = i$ , esto es

$$\frac{de^{it}}{dt} = ie^{it}$$

Para que esta ecuación tenga sentido, imaginemos a una partícula moviéndose a lo largo de una curva en  $\mathbb{C}$ . Este movimiento puede describirse parametricamente diciendo que en el tiempo  $t$  la partícula ocupa la posición  $\gamma(t)$ . La velocidad  $v(t)$  es el vector cuya longitud y dirección están determinados por la velocidad instantánea, y la dirección instantánea del movimiento, tangente a la trayectoria, del movimiento de la partícula.

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = v(t).$$

Así, dada una función compleja  $\gamma(t)$  de la variable real  $t$ , podemos visualizar  $\gamma$  como la posición de una partícula en movimiento, con velocidad  $d\gamma/dt$ .

Si  $\gamma(t) = e^{it}$ , como

$$\frac{de^{it}}{dt} = ie^{it}$$

tenemos que la velocidad es igual a la posición girada por un ángulo recto. Como la posición inicial de la partícula es  $\gamma(0) = e^0 = 1$ , la velocidad

inicial es 1 así la partícula se mueve en dirección vertical hacia arriba. Un instante después la partícula se mueve ligeramente en esta dirección, y la nueva velocidad formará un ángulo recto con respecto al nuevo vector de posición. Continuando con este proceso, podemos ver que la partícula se mueve alrededor del círculo unitario.

Sabemos que  $|\gamma(t)| = 1$  a lo largo del movimiento, se sigue que la velocidad de la partícula  $|v(t)| = 1$ . Así, después de un tiempo  $t = \theta$  la partícula viajará una distancia  $\theta$  alrededor del círculo unitario, y así el ángulo de  $\gamma(t) = e^{i\theta}$  será  $\theta$ . Este es el significado geométrico de la fórmula de Euler.

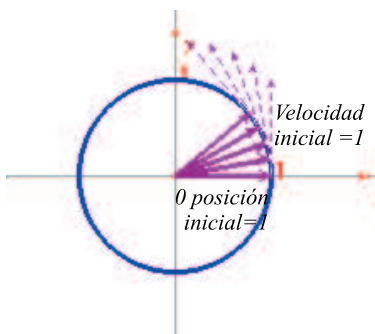


Figura 3.3: Representación geométrica de la fórmula de Euler.

### 3.3. Las funciones exponencial y logaritmo.

En esta parte se generaliza el método que se utilizó en la sección anterior, pasando de números imaginarios, a cualquier número complejo.

#### 3.3.1. La función exponencial

En general, podemos definir la función exponencial como la solución de la ecuación diferencial  $f'(z) = f(z)$  con condición inicial  $f(0) = 1$ . Si suponemos que hay una función analítica que, en una vecindad del origen, satisfaga esta propiedad, entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots \\ f'(z) &= c_1 + 2c_2 z + \dots + nc_n z^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

si queremos que  $f = f'$ , como dos series de potencias alrededor del cero coinciden si coinciden término a término, debemos tener  $c_{n-1} = nc_n$  para

toda  $n \geq 1$ , ahora bien, la condición inicial  $f(0) = 1$  nos dice  $c_0 = 1$ , de donde  $c_1 = 1$ , así  $2c_2 = 1$ , es decir,  $c_2 = \frac{1}{2}$  y, procediendo inductivamente podemos ver que,  $c_n = \frac{1}{n!}$ .

**Definición 16.** *La solución a la ecuación diferencial*

$$\frac{df}{dz} = f$$

*se denota  $e^z$  o bien  $\exp z$ , y determina una función analítica, la cual se denomina la función exponencial.*

*Como consecuencia del criterio de la razón, la serie*

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

*tiene radio de convergencia infinito, es decir, la serie converge en todo el plano.*

Como consecuencia de la definición, la función exponencial satisface el teorema de la adición, esto es:

**Proposición 17.**

$$e^{a+b} = e^a + e^b$$

*Demostración.* Sabemos que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(e^z \cdot e^{c-z}) &= \frac{d}{dz}(e^z) \cdot e^{c-z} + e^z \frac{d}{dz}(e^{c-z}) \\ &= e^z \cdot e^{c-z} + e^z \cdot (-e^{c-z}) = 0, \end{aligned}$$

como  $e^z$  esta definida y es analítica en  $\mathbb{C}$ , el cual es conexo, también la función  $e^z \cdot e^{c-z}$ , es analítica en  $\mathbb{C}$  y su derivada es idénticamente nula en  $\mathbb{C}$ .

Como una función  $\mathbb{C}$ -diferenciable definida en un abierto conexo, si tiene derivada idénticamente nula, entonces es constante, se sigue que  $e^z \cdot e^{c-z}$  es constante. Para encontrar el valor de dicha constante bastará evaluar esta función en  $z = 0$ , por lo que  $e^z \cdot e^{c-z} = e^0 \cdot e^{c-0} = e^c$ , tomando  $z = a$  y  $c = a + b$  tenemos  $e^{a+b} = e^a + e^b$ .  $\square$

Como consecuencia del teorema de la adición tenemos que  $e^z \cdot e^{-z} = 1$ , lo cual muestra que  $e^z$  es nunca nula. Para  $x \in \mathbb{R}$  el desarrollo en serie de la exponencial muestra que  $e^x > 1$  si  $x > 0$ , y así,  $e^x$  y  $e^{-x}$  son recíprocos,  $0 < e^x < 1$  cuando  $x < 0$ .

El hecho que la serie tenga coeficientes reales implica que  $\exp \bar{z}$  es el complejo conjugado de  $\exp z$ . Así  $|e^{iy}|^2 = e^{iy} \cdot e^{-iy} = 1$ , y si  $z = x + iy$  con  $x, y \in \mathbb{R}$ , el teorema de la adición nos dice que  $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$ , de donde  $|e^z| = e^x$ .

De lo anterior podemos concluir que  $e^z = 1$  si, y sólo si,  $z = 2\pi in$  para algún entero  $n$ . Antes de continuar analizando esta función, recordamos que

**Definición 17.** Una función  $f(z)$  tiene periodo  $c$  si,  $f(z + c) = f(z)$  para toda  $z$ .

Luego entonces, si  $e^{z+c} = e^z$ , entonces  $e^c = 1$ , así  $c = 2\pi in$ . Podemos concluir que el mínimo período positivo de la función exponencial es  $2\pi i$ .

Desde un punto de vista algebraico, la aplicación  $w(y) = e^{iy}$  con  $y \in \mathbb{R}$  establece un homomorfismo entre el grupo aditivo de los números reales y el grupo multiplicativo de los números complejos de módulo uno. El núcleo de este homomorfismo es el subgrupo formado por todos los múltiplos enteros de  $2\pi$ .

Si  $z = x + iy$  entonces  $\exp z$  es tal que  $|\exp z| = e^x$  y  $\arg(\exp z) = y + 2\pi k$ .

Observamos que, si  $x > 0$  entonces  $\lim_{z \rightarrow \infty} \exp z = \infty$ , mientras que, si  $x < 0$  tenemos que  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \exp z = 0$ , como consecuencia de esto tenemos que  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \exp z$  no existe.

### 3.3.2. La función Logaritmo

Como  $\frac{d \exp z}{dz} \neq 0$  para toda  $z \in \mathbb{C}$ , el teorema de la función inversa nos dice que  $\exp z$ , al menos localmente, la exponencial tiene función inversa, la cual, de manera análoga al caso real, denominaremos función logaritmo, por definición,  $z = \log w$  es una “raíz” de la ecuación  $e^z = w$ .

Como  $e^z \neq 0$  para toda  $z \in \mathbb{C}$ , entonces  $z = \log 0$  no tiene solución, esto es, el número cero no tiene logaritmo.

Podemos dar así la siguiente definición:

**Definición 18.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un conjunto abierto, conexo y tal que  $0 \notin \Omega$ , y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua tal que  $z = \exp(f(z))$  para toda  $z \in \Omega$ . La función  $f$  se denomina una rama de logaritmo definida en  $\Omega$ .

Si  $f$  es una rama de logaritmo definida sobre un conjunto abierto, conexo  $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , y  $n \in \mathbb{Z}$ , basandonos en lo discutido en los párrafos anteriores, la función  $g(z) = f(z) + 2\pi in$  es otra rama de logaritmo. Recíprocamente, si  $f$  y  $g$  son dos ramas de logaritmo, entonces para cada  $z \in \Omega$ , se tiene



que  $f(z) = g(z) + 2\pi ni$  para algún entero  $n$ , donde, en principio, el entero  $n$  depende de la elección del punto  $z$ . Sin embargo, podemos ver que el entero  $n$  es independiente de  $z \in \Omega$ , para esto, consideremos la función  $h(z) = [f(z) - g(z)] = 2\pi ni$ . Como  $f$  y  $g$  son continuas en  $\Omega$ , la función  $h$  resulta continua en  $\Omega$ , y su imagen  $h(\Omega)$  es un subconjunto de  $\mathbb{Z}$ . Como  $\Omega$  es conexo, y la imagen bajo una función continua de un conjunto conexo es conexo, entonces  $h(\Omega) \subset \mathbb{Z}$  es conexo. Luego entonces  $h(z)$  es constante, es decir, existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $h(z) = n$  para toda  $z \in \Omega$ . De donde,  $f(z) = g(z) + 2\pi ni$ .

Para definir explícitamente una rama de logaritmo, notamos que, si  $w \neq 0$ , la ecuación  $e^{x+iy} = w$  es equivalente a

$$e^x = |w|, \quad e^{iy} = \frac{w}{|w|}.$$

La primera ecuación tiene una única solución, a saber,  $x = \ln |w|$ , donde  $\ln$  denota la función logaritmo natural real. Por otra parte, la segunda ecuación da un número complejo de módulo uno, la cual tiene una única solución si  $0 \leq y < 2\pi$ . Además, como mencionamos anteriormente, podemos encontrar una solución diferente módulo múltiplos enteros de  $2\pi$  esto es, todo número complejo distinto de cero tiene una infinidad de “logaritmos”, los cuales difieren uno del otro por múltiplos enteros de  $2\pi i$ , esto es:

$$z = \log w = \ln |w| + i \arg(w) = \ln |w| + i(\arg w + 2\pi k), \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

La parte imaginaria de  $\log w$  se denomina el argumento de  $w$  y se denota  $\arg w$ . Geométricamente, el argumento se interpreta como el ángulo, medido en radianes y recorrido en levogiro, entre el eje real positivo y el rayo que va del origen al punto  $w$ .<sup>1</sup>

Por convención, el logaritmo  $\log w$  de un número real positivo  $w$  siempre se toma como el logaritmo real de  $w$ , esto es,  $\ln w$ , a menos que se especifique lo contrario.

Luego entonces, podemos considerar la rama principal de logaritmo como sigue:

**Definición 19.** Sea  $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq 0 \text{ y } \operatorname{Im}(z) = 0\}$ , El conjunto  $\Omega$  es un subconjunto abierto y conexo de  $\mathbb{C}$ , que corresponde al plano menos el eje real negativo. Cada punto  $z \in \Omega$ , puede representarse en forma única como  $z = |z|e^{i\theta}$  con  $-\pi < \theta < \pi$ , donde  $\theta = \arg z$ . Para  $-\pi < \theta < \pi$ , definimos la rama principal de la función logaritmo como:

---

<sup>1</sup>recorrido en levogiro= recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj.

$$\log z = \ln |z| + \imath \arg z,$$

donde  $\ln |z|$  es el logaritmo natural del número real positivo  $|z|$ .

Si escribimos el punto  $w$  en términos de coordenadas polares, esto es,  $w = re^{i\theta}$ , entonces  $\log w = r + i\theta$ .

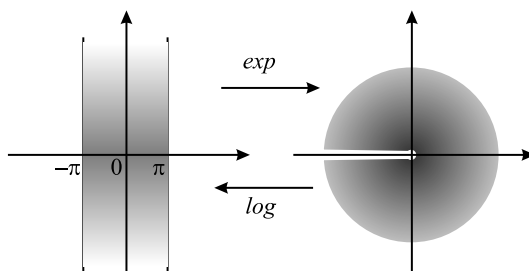


Figura 3.4: Exponencial y la rama principal de logaritmo.

En resumen, hemos visto que la función exponencial  $f(z) = \exp z$  es una aplicación biyectiva, de una franja de anchura  $0 < \theta \leq 2\pi$ , paralela al eje real, en un sector de magnitud  $\theta$  con vértice en el origen de coordenadas. Y es continua si la franja tiene anchura estrictamente menor a  $2\pi$ .

El teorema de la adición para la función exponencial implica:

$$\log(z_1 \cdot z_2) = \log z_1 + \log z_2;$$

pero sólo en el caso en que ambos lados representen el mismo conjunto de números complejos.

Como hemos mencionado anteriormente  $\exp' z = \exp z \neq 0$ , y el teorema de la función inversa implica que, localmente,  $\exp z$  tiene inversa, y como la función inversa es única, esta debe ser una rama de la función logaritmo. Además, la derivada de la función inversa de la función exponencial  $f(z) = \exp z$ , en el punto  $w = \exp z$  es igual a  $(f^{-1})'(w) = 1/e^z = 1/w$ , para cada  $z \in \{x + iy \in \mathbb{C}; y_0 \leq y < y_0 + 2\pi\}$ , de donde:

$$\frac{d \log z}{dz} = \frac{1}{z},$$

obtenemos así el siguiente resultado:

**Corolario 7.** Una rama de la función logaritmo es  $\mathbb{C}$ -diferenciable, y su derivada es la función  $z^{-1}$ .

Aún más, dado un abierto conexo  $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , si  $f$  es una rama de logaritmo definida en  $\Omega$ , y  $b \in \mathbb{C}$  es fijo, podemos definir una función  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  por  $g(z) = \exp(bf(z))$ . Si  $b \in \mathbb{Z}$ , entonces  $g(z) = z^b$ . Esto nos permite definir una rama de  $z^b$  para  $b \in \mathbb{C}$ . Si escribimos  $g(z) = z^b$  como función, deberemos entender  $z^b = \exp(b \log z)$ , donde  $\log z$  es la rama principal de logaritmo, en particular, como  $g(z)$  es composición de funciones  $\mathbb{C}$ -diferenciables, entonces  $g(z) = z^b$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable, y

$$\frac{dz^b}{dz} = bz^{b-1},$$

donde utilizamos la misma rama de logaritmo en ambos lados de la igualdad.

De aquí podemos deducir que, si  $a, b \in \mathbb{C}$ , y  $a \neq 0$ , el símbolo  $a^b$  se interpreta como  $\exp(b \log a)$ . Si  $a$  es un número real positivo,  $\log a$  también es un número real, y  $a^b$  es univaluada, de otra forma,  $a^b$  admite una infinidad de valores, los cuales difieren por factores de  $e^{2\pi i n b}$ . Esta tiene sólo un valor cuando  $b$  es un entero, en cuyo caso  $a^b$  se interpretará como una potencia de  $a$ , o bien, de  $a^{-1}$ . Si  $b$  es un número racional, con forma reducida  $\frac{p}{q}$ , entonces  $a^b$  admite exactamente  $q$  valores distintos, y pueden representarse como  $\sqrt[q]{a^p}$ .

Formalmente, si  $a \neq 0$ , también podemos definir la función  $f(z) = a^z = \exp(z \log a)$ , en una rama apropiada de logaritmo. En esta rama, la función  $f(z) = a^z$  es una función  $\mathbb{C}$ -diferenciable, univaluada y, definidas en la misma rama de logaritmo tenemos:

$$\frac{da^z}{dz} = a^z \log a.$$

### 3.4. Las funciones trigonométricas

Se definen las funciones trigonométricas como:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

que se denominan respectivamente, las funciones coseno y seno. Estas funciones claramente son analíticas en todo el plano complejo.

Sustituyendo la expresión en serie de potencias de  $e^{iz}$  obtenemos:

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

y

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

las cuales convergen para cada número complejo  $z$ .

Para  $z = x \in \mathbb{R}$  estas expresiones se reducen al desarrollo de Taylor de la series  $\cos x$  y  $\sin x$ , y tienen propiedades similares a las funciones trigonométricas de variable real, pero que ahora, tendremos diferencias significativas, tales como el hecho de que estas funciones no son acotadas.

Como consecuencia de las definiciones de las funciones  $\cos z$  y  $\sin z$  tenemos la fórmula de Euler:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

así como la identidad

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1,$$

para cada  $z \in \mathbb{C}$ . En particular, si  $z = x \in \mathbb{R}$  tenemos que  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ .

Además, se conserva la paridad de las funciones, esto es:

$$\cos(-z) = \cos z \quad \text{y} \quad \sin(-z) = -\sin z.$$

También es fácil verificar que

$$\cos' z = -\sin z, \quad \sin' z = \cos z.$$

Y la fórmula de adición de la función exponencial nos induce las fórmulas de la adición de las funciones trigonométricas:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$$

para cada  $a, b \in \mathbb{C}$ .

Esto muestra que, podemos expresar las funciones trigonometricas en términos de las funciones trigonométricas e hiperbólicas reales como sigue:

$$\begin{aligned} \cos(x+iy) &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \\ \sin(x+iy) &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y. \end{aligned}$$

Estas relaciones muestran que  $\cos z$  y  $\sin z$  no sólo toma valores reales sobre el eje real, sino en todo un sistema de rectas verticales en el plano, ya que:

$$\sin(k\pi + iy) = i(-1)^k \sinh y,$$

$$\cos(k\pi + iy) = (-1)^k \cosh y,$$

$$\sin\left([2k+1]\frac{\pi}{2} + iy\right) = (-1)^k \cosh y,$$

$$\cos\left([2k+1]\frac{\pi}{2} + iy\right) = i(-1)^k \sinh y,$$

Lo cual determina todas las posibilidades en que las funciones  $\sin z$  y  $\cos z$  toman valores reales, o imaginarios puros para un valor complejo  $z$ .

Además, las fórmulas de adición muestran que  $\cos z$  y  $\sin z$  no pueden tener ceros distintos a los que conocemos en el caso real, esto es:

$$\cos z = 0 \quad \text{si, y sólo si} \quad z = \frac{(2k+1)\pi}{2},$$

y

$$\sin z = 0 \quad \text{si, y sólo si} \quad z = k\pi.$$

Aún más, como consecuencia de estas fórmulas, si  $c$  es un periodo para  $\cos z$  y  $\sin z$ , entonces  $\cos(p+0) = \cos(0) = 1$  y  $\sin(p+0) = \sin 0 = 0$ , por lo que  $p = 2k\pi$ . Por lo que, el menor periodo para estas funciones es  $2\pi$ .

Las funciones trigonométricas tienen bandas periódicas verticales. Una elección conveniente es:

$$(2k-1)\pi < x \leq (2k+1)\pi, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Si definimos la función tangente como

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

tenemos que esta función es  $\mathbb{C}$ -diferenciable si  $\sin z \neq 0$ , es decir, cuando  $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Nótese que

$$\lim_{z \rightarrow \frac{(2k+1)\pi}{2}} \tan z = \infty.$$

En este caso, las fórmulas de adición nos dicen que

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

en particular

$$\tan(x + iy) = \frac{\tan x(1 - \tanh^2 y)}{1 + \tan^2 x \tanh^2 y} + i \frac{(1 + \tan^2 x) \tanh y}{1 + \tan^2 x \tanh^2 y}.$$

Esta última fórmula muestra que  $\tan z \in \mathbb{R}$  si, y sólo si  $z \in \mathbb{R}$ . Mientras que  $\tan z$  tiene parte real cero si  $x$  es múltiplo de  $\pi/2$ . Los únicos ceros de la función tangente son de la forma  $z = k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , y  $\tan z$  es una función periódica de periodo  $\pi$ .

Las bandas

$$\frac{(2k-1)\pi}{2} < x \leq \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

es una banda periódica. La imagen de dicha banda bajo la función tangente es  $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ .

Finalmente,

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \tan(x \pm iy) = \pm i.$$

Las otras funciones trigonométricas, al igual que en variable real, están definidas en términos de las funciones cos y sin, y se deja como ejercicio dar su expresión en términos de la función exponencial, así como verificar sus principales propiedades.

## Capítulo 4

# Aplicaciones Conformes

Una aplicación conforme es aquella que preserva ángulos en cada punto de su dominio. Las aplicaciones conformes han sido utilizadas por matemáticos, cartógrafos y físicos para deformar regiones en forma tal que se la forma de las regiones se preserva a pequeña escala. En la presente sección, estudiaremos el comportamiento general de las aplicaciones conformes  $\mathbb{C}$ -valuadas definidas sobre un abierto  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , así como una familia especial de este tipo de aplicaciones, conocidas como las transformaciones de Möbius.

### 4.1. Introducción.

La cartografía estudia el problema de transferir las distancias medidas sobre la superficie de la tierra, la cual es una superficie con curvatura, en un mapa, el cual resulta ser una superficie plana. Los métodos que se utilizan para realizar este trabajo se denominan proyecciones. Algunas proyecciones son tales que, los ángulos y consecuentemente las formas, son tan cercanas a la realidad como sea posible. Las aplicaciones que preservan ángulos se denominan *conformes*.

Historicamente, la proyección desarrollada en 1569 por Gerhardus Mercator, es una proyección cilíndrica conforme. Este tipo de transformaciones produce considerables distorsiones en latitudes grandes, pero tiene la ventaja que las rutas del compas son consistentes en todos los puntos del mapa, cualquier trayectoria a lo largo de una dirección del compas aparece como una línea recta en la proyección de Mercator, lo cual sigue utilizandose como la base de las cartas de navegación. En particular este hecho mostraba que las aplicaciones conformes definidas sobre superficies son aplicaciones más

flexibles que las isometrías, o las aplicaciones lineales.

Gauss confirmó este hecho en su trabajo *A general solution to the problem of mapping parts of a given surface onto another surface such that the image and the mapped parts are similar in the smallest part*. En esencia este resultado nos habla de la existencia de coordenadas isotermas en el caso analítico. Cabe recalcar que este estudio precede y es en parte motivado por el trabajo de Gauss en el que se desarrolla la noción de curvatura de una superficie. Otro hecho importante es la conexión que hay entre las coordenadas isotermas y las funciones holomorfas en una variable compleja, por ejemplo, la proyección de Mercator básicamente está dada como  $z \mapsto \log z$ , la cual es holomorfa. El aspecto global de ésta teoría lo constituyen las superficies de Riemann. La relación entre lo local y lo global es uno de los principales objetivos de la geometría conforme: a saber, poder entender la geometría diferencial desde un punto de vista clásico, es decir, separar los aspectos analíticos de los topológicos para entenderlos de la mejor forma posible, y relacionarlos con las nociones primitivas de la geometría tales como ángulo, distancia, área, líneas rectas (geodésicas), etcétera. Las aplicaciones conformes también han sido utilizadas para estudiar problemas de fluidos en dos dimensiones. La idea que se encuentra detrás del análisis del alerón por transformaciones conformes consiste en relacionar el flujo de un campo alrededor de una región conocida al campo del flujo de un alerón. La figura conocida más usada es el círculo, así el problema consiste en encontrar una función analítica que relacione cada punto del disco con un punto correspondiente del alerón. Por ejemplo, Jaukowski notó que la aplicación  $z \mapsto z + 1/z$  transforma el círculo unitario en una especie de ala. Tomando el origen en diversos puntos del disco se pueden producir distintos tipos de alerones.

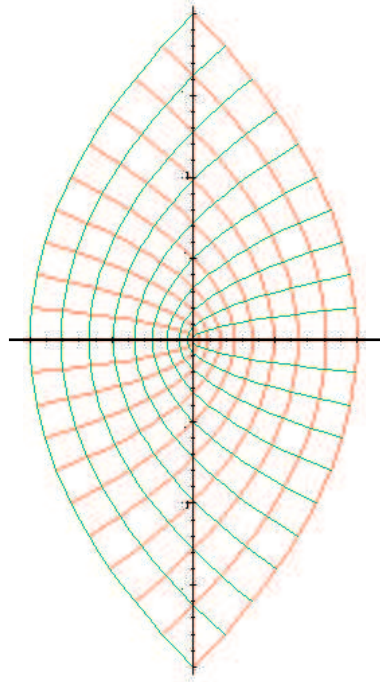
## 4.2. Aplicaciones Conformes

Consideremos la función analítica  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = z^2$ , identificando  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$  via  $\mu^{-1}(x, y) = x + iy = z$  nos permite ver a  $f$  como  $u(x, y) + iv(x, y)$ , donde  $u(x, y) = x^2 - y^2$ ,  $v(x, y) = 2xy$ , si consideramos las líneas  $x = c$  ( $y$  arbitraria), tenemos que  $u = c^2 - y^2$  y  $v = 2cy$ , de donde  $v^2 = 4c^2y^2 = 4c^2(c^2 - u)$ , mientras que las líneas  $y = d$  ( $x$  arbitraria) se transforman en las parábolas  $v^2 = 4d^2(u + d^2)$ .

Estas parábolas se intersectan ortogonalmente en los puntos  $(c^2 - d^2, \pm|2cd|)$ , como se muestra en la Figura (??)

Este ejemplo se generó utilizando el programa “maple” dando los sigu-



Figura 4.1: Geometría de la función  $f(z) = z^2$ 

ientes comandos:

```
> with(plots);
> conformal(z^2, z=0..2+2*I);
```

El hecho que se preserven los ángulos, no es un fenómeno exclusivo de las líneas que elegimos, o de la función en si, el hecho de que se preserven los ángulos es una propiedad, denominada *conforme*, que exploraremos de manera general en la presente sección.

Cabe notar que cuando  $c$  tiende a cero, la parábola  $v^2 = -4c^2(u - c^2)$  tiende al eje real negativo, unión el cero. Esto se debe a que la función  $g(z) = z^{1/2}$  transforma el conjunto abierto  $\mathbb{G} := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\}$  sobre el conjunto  $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0\}$ , y en particular las líneas  $x = \pm c$  se transforman en la misma parábola.

Podemos examinar con más detalle esta función, por ejemplo, del capítulo anterior sabemos que  $f$  transforma el círculo con centro en el origen y radio  $r > 0$  en el círculo con centro en el origen y radio  $r^2$ . Aún más, si consideramos la expresión polar de un punto  $z_0 = r \exp(i\theta) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  la recta que va del origen a  $z_0$  bajo  $f$  se transforma en la recta que pasa por

el origen y el punto  $z_1 = r^2 \exp(2i\theta)$ .

Luego entonces, si tomamos el sector  $S(\alpha, \beta) := \{z \in \mathbb{C}; \alpha < \arg(z) < \beta\}$  con  $\alpha < \beta$  y  $\beta - \alpha < \pi$ , como consecuencia de lo anterior vemos que, bajo  $f$ , este sector se transforma en el sector  $S(2\alpha, 2\beta)$ , por lo que en este caso particular, a diferencia del anterior, no se preservó el ángulo  $\beta - \alpha$ , esto se debe a que la función  $f$  deja de ser *conforme* en el origen.

Esta pequeña discusión nos da una idea de la naturaleza de la función  $f(z) = z^2$ , y nos orienta sobre el comportamiento general de la teoría de las transformaciones analíticas.

**Definición 20.** Una **trayectoria** (o curva) en una región  $\Omega \subset \mathbb{C}$  es una función continua  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ , para algún intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , con interior no vacío, es decir  $a < b$ .

Diremos que  $\gamma$  es una trayectoria cerrada si  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

Diremos que  $\gamma$  es una curva simple si  $\gamma$  es inyectiva, esto es, si  $s, t \in [a, b]$  con  $s \neq t$ , entonces  $\gamma(s) \neq \gamma(t)$ .

Diremos que  $\gamma$  es una curva cerrada simple si  $\gamma$  si  $s, t \in (a, b)$  con  $s \neq t$ , entonces  $\gamma(s) \neq \gamma(t)$  y  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Una curva cerrada simple también se denomina curva de Jordan.

Decimos que  $\gamma$  es una **trayectoria suave** si  $\gamma'(t)$  existe y es continua, para cada  $t$  en el interior del intervalo  $I$ .

Finalmente, se dice que  $\gamma$  es una **trayectoria suave por partes** si  $\gamma$  es continua y existe una partición  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  del intervalo  $I = [t_0, t_n]$ , tal que  $\gamma$  es suave sobre cada subintervalo  $(t_{i-1}; t_i)$ , con  $1 < i < n$ .

Una curva cerrada simple es homeomorfa a una circunferencia, esto es, hay una función biyectiva y bicontinua de uno en otro. Como una circunferencia separa el plano, esta propiedad se hereda a las curvas de Jordan.

**Teorema 8 (Teorema de la curva de Jordan).** Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es una curva cerrada simple, el complemento de  $\gamma$  es la unión de dos conjuntos abiertos conexos mutuamente excluyentes, y cada punto de  $\gamma$  es un punto frontera de cada dominio.

Uno de los dominios determinado por  $\gamma$  es acotado, y se denomina el interior de la curva, el otro, es no acotado, y se denomina el exterior de la curva.

Recordamos que, dada una trayectoria suave  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , y  $t_0 \in (a, b)$ , un punto tal que  $\gamma'(t_0) \neq 0$ , entonces  $\gamma$  tiene una línea tangente en el punto  $z_0 = \gamma(t_0)$ , a saber, la línea que pasa por el punto  $z_0$  con vector de dirección  $\gamma'(t_0)$ , o equivalentemente, con pendiente  $\tan(\arg(\gamma'(t_0)))$ .

**Definición 21.** Si  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  son dos trayectorias suaves en  $\mathbb{C}$  que pasan por el punto  $z_0$ , es decir  $\gamma_1(t_1) = z_0 = \gamma_2(t_2)$  con  $t_1 \in (a, b)$ ,  $t_2 \in (c, d)$ , y  $\gamma'_k(t_k) \neq 0$  para  $k = 1, 2$ , definimos el ángulo entre las trayectorias  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  en el punto  $z_0$  como

$$\arg(\gamma'_2(t_2)) - \arg(\gamma'_1(t_1))$$

Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  es una trayectoria suave, con  $\Omega \subset \mathbb{C}$  abierto, y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es una función  $\mathbb{C}$ -diferenciable definida en  $\Omega$ , entonces  $\sigma := f \circ \gamma$  también es una trayectoria suave, y como consecuencia de la regla de la cadena  $\sigma'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$ . Si para  $t_0 \in (a, b)$  denotamos  $\gamma(t_0) = z_0$ , y suponemos que  $\gamma'(t_0) \neq 0$  y  $f'(z_0) \neq 0$ , entonces  $\sigma'(t_0) \neq 0$ , aún más,  $\arg[\sigma'(t_0)] = \arg[f'(z_0)] + \arg[\gamma'(t_0)]$ .

Luengo entonces, si  $\gamma_1, \gamma_2$  son dos trayectorias suaves que pasan por  $z_0 = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ , y  $\gamma_k(t_k) \neq 0$  para  $k = 1, 2$  y  $\sigma_k = f \circ \gamma_k$ , y si suponemos además que  $\gamma_1(t_1) \neq \gamma_2(t_2)$ , entonces

$$\arg[f'(z_0)] = \arg[\sigma'_1(t_1)] - \arg[\gamma'_1(t_1)] = \arg[\sigma'_2(t_2)] - \arg[\gamma'_2(t_2)],$$

o equivalentemente

$$\arg[\sigma'_2(t_2)] - \arg[\sigma'_1(t_1)] = \arg[\gamma'_2(t_2)] - \arg[\gamma'_1(t_1)]$$

Esto significa que,  $f$  transforma cualesquiera dos trayectorias que pasen por  $z_0$  en dos trayectorias que pasan por  $f(z_0)$  y, cuando  $f'(z_0) \neq 0$ , los ángulos de las trayectorias se preservan en magnitud y dirección, esto es:

**Teorema 9.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un conjunto abierto, y  $f$  una función  $\mathbb{C}$ -diferenciable definida en  $\Omega$ . Entonces  $f$  preserva ángulos en cada punto  $z_0 \in \Omega$  donde  $f'(z_0) \neq 0$ .

Así, la función  $f(z) = z^2$  preserva ángulos, en magnitud y dirección, si  $z_0 \neq 0$ . aplicación  $f(z) = z + 1/z$  preserva ángulos si  $f'(z) = 1 - 1/z^2 \neq 0$ , esto es, si  $z_0 \neq \pm 1$ .

**Definición 22.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un conjunto abierto,  $z_0 \in \Omega$ , y  $f$  una función  $\mathbb{C}$ -valuada definida en  $\Omega$ . Diremos que  $f$  es una aplicación conforme en  $z_0$  si,  $f$  tiene la propiedad de preservar ángulos, en magnitud y dirección, en el punto  $z_0$ , y además existe el siguiente límite:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$$

Diremos que  $f$  es conforme en  $\Omega$ , si  $f$  es conforme en  $z$  para cada  $z \in \Omega$ .

En particular, si  $f$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable y  $f'(z) \neq 0$  para cada  $z$ , entonces es conforme.

La función exponencial es conforme en todo  $\mathbb{C}$ . Si consideramos las rectas verticales  $z = a + iy$  con  $a \in \mathbb{R}$  fijo, entonces  $f(z) = e^a e^{iy}$  son circunferencias con centro en el origen y radio  $e^a$ .

Mientras que, la imagen de la recta horizontal  $z = x + ib$  está dada como  $f(x) = e^x e^{ib}$  la semirecta que forma un ángulo  $b$  con el eje real positivo. En ?? mostramos el comportamiento de una familia de rectas.

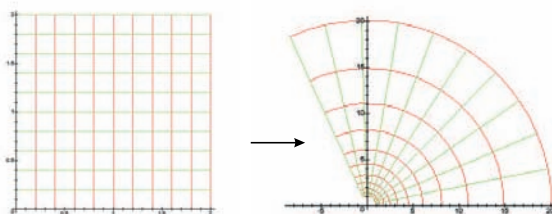


Figura 4.2: Geometría de la función  $f(z) = \exp z$

Cuando  $f'(z_0) = 0$ , no necesariamente se preservan los ángulos. Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es una función  $\mathbb{C}$ -diferenciable, un punto  $z_0 \in \Omega$  donde  $f'(z_0) = 0$  se denomina un *punto singular*. La conducta de una función  $\mathbb{C}$ -diferenciable en una vecindad de un punto singular es un tema muy interesante, y se estudiará posteriormente.

**Proposición 18.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un conjunto abierto no vacío,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función, y denotemos por  $\Omega' = \text{Im} f$ . Si  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  es conforme y biyectiva, entonces  $f^{-1} : \Omega' \rightarrow \Omega$  también es conforme.

*Demostración.* Como  $f$  es biyectiva,  $f^{-1}$  existe. Como consecuencia del teorema de la función inversa,  $f^{-1}$  es analítica, y

$$\frac{df^{-1}(w)}{dw} = \frac{1}{\frac{df(z)}{dz}} \quad \text{donde} \quad w = f(z).$$

Como  $f$  es conforme  $f'(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , se sigue que  $\frac{df^{-1}(w)}{dw} \neq 0$ , consecuentemente,  $f^{-1}$  es conforme.  $\square$

**Proposición 19.** Sean  $\Omega_k \subset \mathbb{C}$ , abiertos no vacíos para  $k = 1, 2, 3$ , y sean  $f_k : \Omega_k \rightarrow \Omega_{k+1}$  funciones  $\mathbb{C}$ -diferenciables, si  $k = 1, 2$ . Supongamos que  $f_1$  y  $f_2$  son conformes y biyectivas, entonces  $f_2 \circ f_1 : \Omega_1 \rightarrow \Omega_3$  es conforme y biyectiva.

*Demostración.* Como  $f_1$  y  $f_2$  son biyectivas y  $\mathbb{C}$ -diferenciables, entonces  $f_2 \circ f_1$  es biyectiva y  $\mathbb{C}$ -diferenciables. Como consecuencia de la regla de la cadena  $(f_2 \circ f_1)'(z) = f_2'(f_1(z)) \cdot f_1'(z) \neq 0$ , lo cual implica que  $f_2 \circ f_1$  es conforme.  $\square$

**Corolario 8.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un conjunto abierto no vacío. El conjunto de las transformaciones  $\mathbb{C}$ -diferenciables, conformes y biyectivas,  $f : \Omega \rightarrow \Omega$ , constituye un grupo bajo la composición de funciones.

Uno de los resultados básicos referentes a la teoría de las aplicaciones conformes es el teorema de la aplicación abierta de Riemann, el cual no demostramos en la presente sección, simplemente lo enunciaremos, y daremos una referencia donde puede leerse su demostración.

Riemann enunció, alrededor de 1900, el teorema de la aplicación abierta en su disertación *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*. *Collected Works*, 3-45, para lo que actualmente conocemos como superficies de Riemann compactas con frontera, siendo dicho teorema más general que la versión usual que enunciamos en la presente sección. El basa su demostración en el principio variacional de la ecuación  $\Delta u = 0$ , aunque según observo Weierstrass, Riemann no justifica su principio, siendo Hilbert quien en 1904 da la justificación del mismo en su artículo *Über das Dirichletsche Prinzip*. *Math. Annalen* 59 (1904), 161-186. *Collected Works*, vol. 3, pp. 15-37.

La versión que a continuación enunciamos es un caso especial del teorema de la aplicación abierta de Riemann, la cual fue demostrada por Osgood en 1900.

**Teorema 10 (Teorema de la aplicación abierta de Riemann).** Si  $\Omega$  es un subconjunto abierto, simplemente conexo de  $\mathbb{C}$ , y si  $\Omega \neq \mathbb{C}$ , existe una aplicación conforme y biyectiva  $f : \Omega \rightarrow \Delta$ , donde  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  denota el disco unitario. Además, para cada  $z_0 \in \Omega$ , fijo, podemos encontrar una única  $f$  tal que  $f(z_0) = 0$  y  $f'(z_0) > 0$ . [?, Chap. 6, pg. 229-235]

**Definición 23.** Si  $\Omega_k \subsetneq \mathbb{C}$  son abiertos y conexos,  $k = 1, 2$ . Diremos que  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  son conformes si, existe una transformación conforme y biyectiva de  $\Omega_1$  en  $\Omega_2$ .

El teorema de la aplicación abierta de Riemann implica que dos regiones simplemente conexas, propiamente contenidas en  $\mathbb{C}$ , son conformes.

En la Figura (??) mostramos el efecto de algunas aplicaciones conformes sobre determinadas regiones en el plano.

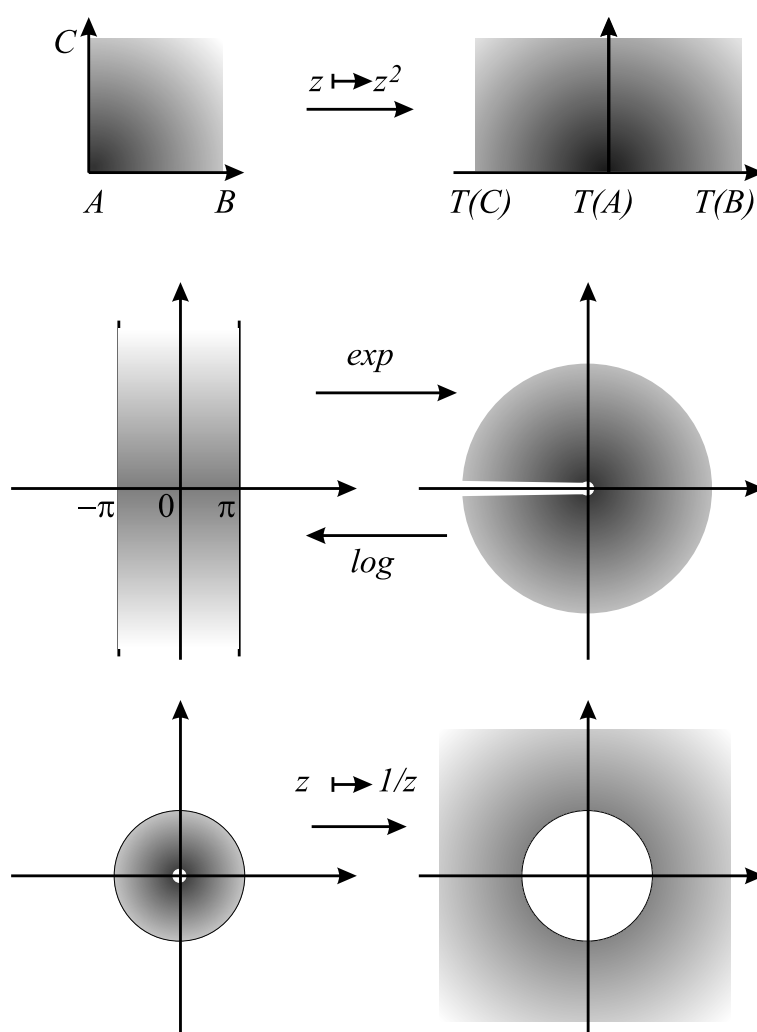


Figura 4.3: Geometría de transformaciones conformes

### 4.3. Transformaciones de Möbius.

En la presente sección estudiamos una familia especial de aplicaciones conformes, así como la forma de obtener aplicaciones conformes específicas entre dos regiones dadas.

Uno de los ejemplos más simples, y útiles, de aplicaciones conformes que discutiremos son las fraccionales lineales, esto es aplicaciones de la forma:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

con  $a, b, c$  y  $d$  números complejos tales que  $ad - bc \neq 0$ . Este tipo de aplicaciones fueron utilizadas por Möbius en 1853 para estudiar una clase de aplicaciones geométricas la cual denominó Kreisverwandtschaften. Este tipo de aplicaciones también se denominan homografías.

**Definición 24.** Una aplicación fraccional lineal

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

es una aplicación de Möbius si los números complejos  $a, b, c$  y  $d$  satisfacen la condición adicional  $ad - bc \neq 0$

La condición  $ad - bc \neq 0$  simplemente nos dice que la aplicación  $T$  no es constante.

**Proposición 20.** Si  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  es una aplicación de Möbius, entonces  $T$  es conforme y biyectiva de  $A = \{z \in \mathbb{C}; cz + d \neq 0\}$  sobre  $B = \{w \in \mathbb{C}; w \neq \frac{a}{c}\}$ .

*Demostración.* Claramente  $T$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable si  $cz + d \neq 0$ , y si definimos  $S(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$ , podemos ver fácilmente que  $T \circ S(z) = S \circ T(z) = z$ . Por lo que  $S = T^{-1}$  es la aplicación inversa de  $T$ , y es claro que  $\text{Dom}(S) = \{w \in \mathbb{C}; a - cw \neq 0\}$ , y que  $T^{-1}$  también es una aplicación de Möbius.  $\square$

Nótese que

$$\lim_{z \rightarrow \frac{d}{c}} \left| \frac{az + b}{cz + d} \right| = \infty, \text{ y } \lim_{w \rightarrow \frac{a}{c}} \left| \frac{-dw + b}{cw - a} \right| = \infty$$

Esto nos permite considerar la aplicación  $T$  definida sobre el plano extendido  $\mathbb{C}_\infty$ , definiendo

$$T(\infty) = \frac{a}{c}, \quad T\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty$$

obteniéndose así que  $T$  es conforme y biyectiva de  $\mathbb{C}_\infty$  en  $\mathbb{C}_\infty$ .

Es claro que el conjunto de las aplicaciones de Möbius  $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  constituye un grupo bajo la composición, el cual denotaremos  $Möb$ . Por otra parte, si  $GL(2, \mathbb{C})$  denota el grupo de matrices invertibles,  $2 \times 2$  con coeficientes complejos, tenemos un homomorfismo de grupos  $\psi : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow Möb$ , dado como:

$$\psi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{az + b}{cz + d}$$

Además, si  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  es una aplicación de Möbius, y  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , entonces

$$T(z) = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d}$$

esto es, los coeficientes  $a, b, c$  y  $d$  no son únicos.

A nivel de grupos esto significa que el homomorfismo  $\psi$  no es inyectivo, y tiene núcleo  $\ker \psi = \{\lambda \cdot I \in GL(2, \mathbb{C}); \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$ , donde  $I$  denota la matriz identidad. Consecuentemente, el grupo Möb es isomorfo al grupo  $GL(2, \mathbb{C}) / \ker \psi$ .

Podemos destacar algunos casos especiales de aplicaciones de Möbius, a saber:

**Definición 25.** Si  $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  es una aplicación de Möbius, entonces:

1. Si  $T(z) = z + b$ ,  $T$  se denomina una *traslación*;
2. Si  $T(z) = az$ , con  $a > 0$ , y  $a \neq 1$ , entonces  $T$  se denomina una *dilatación*;
3. Si  $T(z) = e^{i\theta}z$ , con  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $T$  se denomina una *rotación*;
4. Si  $T(z) = az$ , con  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $T$  se denomina una *homotecia*, en particular, una *homotecia* es una composición de rotaciones y dilataciones; finalmente
5. Si  $T(z) = 1/z$ ,  $T$  se denomina una *inversión*.

Geométricamente hablando: Una traslación mueve un punto  $z \in \mathbb{C}$  una distancia  $|b|$  en la dirección  $\arg b$ , sólo el punto al infinito permanece invariante bajo traslaciones.

Una dilatación expande el plano si  $a > 1$ , y lo contrae si  $a < 1$ . Solo el origen y el punto al infinito permanecen invariantes bajo dilataciones.



Una rotación por un ángulo  $\theta$ , gira todo punto  $z$  alrededor del origen un ángulo  $\theta$ , y sólo deja invariantes el origen y el punto al infinito.

Una inversión es la composición de dos reflexiones, la primera sobre el eje real y la segunda sobre la circunferencia unitaria, aunque ninguna de estas aplicaciones sea una transformación de Möbius. Los puntos  $z = \pm 1$  son sus únicos puntos fijos.

**Proposición 21.** *Si  $T$  es una aplicación de Möbius, entonces  $T$  es la composición de traslaciones, homotecias e inversiones.*

*Demostración.* Si  $c = 0$ , entonces  $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ , definamos  $T_1(z) = \frac{a}{d}z$  y  $T_2(z) = z + \frac{b}{d}$ . Claramente  $T = T_2 \circ T_1$ .

Si  $c \neq 0$ , definamos:

$$T_1(z) = z + \frac{d}{c}, \quad T_2(z) = \frac{1}{z}, \quad T_3(z) = \frac{bc - ad}{c^2}z \quad \text{y} \quad T_4(z) = z + \frac{b}{d},$$

entonces  $T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$ . □

Notamos además que, si  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  es una aplicación de Möbius, entonces  $T(z) = z$  si, y sólo si,  $az + b = z(cz + d)$ , lo cual implica  $cz^2 + (d - a)z - b = 0$ , como esta ecuación es cuadrática, concluimos que: *una transformación de Möbius, distinta de la identidad, tiene a lo más dos puntos fijos*, o equivalentemente, si una transformación de Möbius fija al menos tres puntos, entonces es la identidad  $Id(z) = z$ .

Si  $T$  es una aplicación de Möbius,  $a, b, c \in \mathbb{C}_\infty$  son tres puntos distintos con  $\alpha = T(a)$ ,  $\beta = T(b)$ ,  $\gamma = T(c)$  y  $S$  es otra aplicación de Möbius tal que  $\alpha = S(a)$ ,  $\beta = S(b)$ ,  $\gamma = S(c)$ , entonces  $S^{-1} \circ T$  fija los puntos  $a, b$  y  $c$ , por ende  $S^{-1} \circ T = Id$ , de donde  $S = T$ . En resumen:

**Proposición 22.** *Una aplicación de Möbius esta determinada, en forma única, por su acción sobre cualesquiera tres puntos distintos en  $\mathbb{C}_\infty$ .*

*Si  $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$  y  $k \neq l$ , definamos  $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  como:*

$$T(Z) = \begin{cases} \frac{(z - z_3)(z_2 - z_4)}{(z - z_4)(z_2 - z_3)} & \text{si } z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \\ \frac{z - z_3}{z - z_4} & \text{si } z_2 = \infty \\ \frac{z_2 - z_4}{z - z_4} & \text{si } z_3 = \infty \\ \frac{z - z_3}{z_2 - z_3} & \text{si } z_4 = \infty \end{cases}$$

En cualquiera de estos casos  $T(z_2) = 1$ ,  $T(z_3) = 0$  y  $T(z_4) = \infty$ , además  $T$  es la única aplicación de Möbius con esta propiedad.

**Definición 26.** Si  $z_1 \in \mathbb{C}_\infty$ , entonces  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$ , la razón cruzada de  $z_1, z_2, z_3$  y  $z_4$ , es la imagen de  $z_1$  bajo la única aplicación de Möbius que transforma  $z_2$  en 1,  $z_3$  en 0 y  $z_4$  en  $\infty$ .

Por ejemplo  $(z_2, z_2, z_3, z_4) = 1$ ;  $(z_3, z_2, z_3, z_4) = 0$  y  $(z, 1, 0, \infty) = z$ . Además, si  $T$  es cualquier aplicación de Möbius y  $w_2, w_3$  y  $w_4$  son puntos tales que  $T(w_2) = 1, T(w_3) = 0$  y  $T(w_4) = \infty$ , entonces  $T(z) = (z, w_2, w_3, w_4)$ .

**Proposición 23.** Si  $z_2, z_3, z_4$  son puntos distintos en  $\mathbb{C}_\infty$ , y  $T$  es cualquier aplicación de Möbius, entonces

$$(z, z_2, z_3, z_4) = (T(z), T(z_2), T(z_3), T(z_4))$$

para cada  $z \in \mathbb{C}_\infty$ .

*Demostración.* Sea  $S(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$ , la razón cruzada de  $z, z_2, z_3$  y  $z_4$ , entonces  $S$  es una transformación de Möbius, tal que  $S(z_2) = 1$ ,  $S(z_3) = 0$  y  $S(z_4) = \infty$ . Si  $U = S \circ T^{-1}$ , entonces  $U(T(z_k)) = (S \circ T^{-1})(T(z_k)) = S(z_k)$ , donde  $U(z) = (z, T(z_2), T(z_3), T(z_4))$  para toda  $z \in \mathbb{C}_\infty$ . En particular, si  $z = T(z_1)$  tenemos  $(z, z_2, z_3, z_4) = (T(z), T(z_2), T(z_3), T(z_4))$ .  $\square$

**Corolario 9.** Si  $z_2, z_3, z_4$  son puntos distintos en  $\mathbb{C}_\infty$ , y  $w_2, w_3, w_4$  también son puntos distintos en  $\mathbb{C}_\infty$ , entonces existe una única aplicación de Möbius  $T$  tal que  $T(z_k) = w_k$ , para  $k = 2, 3, 4$ .

Si pensamos  $\mathbb{C}_\infty$  como la compactificación de  $\mathbb{C}$  por medio de la proyección estereográfica, podemos ver que las líneas rectas en  $\mathbb{C}$  corresponden a círculos en  $\mathbb{C}_\infty$  que pasan por  $\infty$ .

**Proposición 24.** *Una aplicación de Möbius manda circunferencias en circunferencias.*

*Demostración.* De acuerdo con la proposición ??, podemos escribir  $T$  como una composición de traslaciones, homotecias e inversiones, concretamente,  $T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$ , con  $T_1(z) = z + \frac{d}{c}$ ,  $T_2(z) = \frac{1}{z}$ ,  $T_3(z) = \frac{bc - ad}{c^2}z$  y  $T_4(z) = z + \frac{b}{d}$ , recordamos que las traslaciones ( $T_1$  y  $T_4$ ), y las homotecias ( $T_3$ ) transforman circunferencias en circunferencias, por lo que bastará ver que las inversiones transforman circunferencias en circunferencias. De geometría analítica básica sabemos que una circunferencia, o línea, tienen ecuación

$$Ax + By + C(x^2 + y^2) = D$$

con  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ , constantes, no todas cero. Sea  $z = x + iy$ , y supongamos  $z \neq 0$ , sea  $1/z = u + iv$ , entonces  $u = x/(x^2 + y^2)$ , y  $v = -y/(x^2 + y^2)$ , la ecuación de la circunferencia es equivalente a:

$$Au - Bv - D(u^2 + v^2) = -C,$$

la cual también es una línea o una circunferencia.  $\square$

**Proposición 25.** *Si  $z_1, z_2, z_3, z_4$  son cuatro puntos distintos en  $\mathbb{C}_\infty$ , entonces  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  es un número real si, y solamente si, los cuatro puntos están en una circunferencia.*

*Demostración.* Si  $T(z) = \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  es la aplicación  $T(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$ ; entonces  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ ; si  $z = x \in \mathbb{R}$ , y  $w = T^{-1}(x) \neq 1$ , entonces  $x = T(w)$ , de donde  $T(w) = \overline{T(w)}$ , es decir

$$\frac{aw + b}{cw + d} = \frac{\overline{aw + b}}{\overline{cw + d}}$$

lo cual implica

$$(a\bar{c} - \bar{a}c)|w|^2 + (a\bar{d} - \bar{a}d)w + (b\bar{c} - \bar{b}c)\bar{w} + (b\bar{d} - \bar{b}d) = 0.$$

Si  $a\bar{c} \in \mathbb{R}$ , entonces  $a\bar{c} - \bar{a}c = 0$ ; sean  $\alpha = 2(a\bar{d} - \bar{a}d)$ ,  $\beta = i(b\bar{d} - \bar{b}d)$ , y multiplicando la ecuación anterior por  $i$  tenemos

$$0 = \text{Im}(\alpha w) - \beta = \text{Im}(\alpha w - \beta)$$

pues  $\beta \in \mathbb{R}$ . Esto es,  $w$  está en la línea determinada por la ecuación anterior. Si  $a\bar{c}$  no es real, la ecuación

$$(a\bar{c} - \bar{a}c)|w|^2 + (a\bar{d} - \bar{b}c)w + (b\bar{c} - d\bar{a})\bar{w} + (d\bar{d} - \bar{b}d) = 0,$$

se transforma en

$$|w|2 + \bar{\gamma}w + \gamma\bar{w} - \delta = 0$$

para algunas constantes  $\gamma \in \mathbb{C}$ ,  $\delta \in \mathbb{R}$ . En particular  $|w + \gamma| = \lambda$ , donde

$$\lambda = (|\gamma|^2 + \delta)^{1/2} = \frac{|ad - bc|}{|\bar{a}c - a\bar{c}|} > 0.$$

Como  $\gamma$  y  $\lambda$  son independientes de  $x$  y como la ecuación  $|w + \gamma| = \lambda$  es la ecuación de una circunferencia, concluimos que  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  es un número real si, y solamente si, los cuatro puntos están en una circunferencia.  $\square$

**Corolario 10.** *Dadas dos circunferencias  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$  en  $\mathbb{C}_\infty$ , existe una aplicación de Möbius tal que  $T(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ .*

En particular, si  $\Delta = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ , denota el disco unitario, podemos ver que:

**Proposición 26.** *Cualquier transformación de la forma*

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

con  $z_0 \in \Delta$ , y  $\theta \in [0, 2\pi)$  fijos; es conforme y biyectiva de  $\Delta$  en  $\Delta$ .

*Demostración.* Verificaremos que, si  $T(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$ , entonces  $T(\Delta) = \Delta$ . Primeramente veremos que, si  $|z| = 1$ , entonces  $|T(z)| = 1$ . Como  $|z| = 1$ , entonces  $\bar{z}z = 1$ , entonces:

$$|T(z)| = \left| e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| = \left| \frac{z - z_0}{\bar{z}z - \bar{z}_0 z} \right| = \frac{1}{|z|} \frac{|z - z_0|}{|\bar{z} - \bar{z}_0|} = 1.$$

Además  $z \mapsto \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $\mathbb{C} \setminus \{\bar{z}_0^{-1}\}$ , y como  $|z_0| < 1$ , entonces  $|\bar{z}_0^{-1}| > 1$ , es decir,  $\bar{z}_0 \notin \Delta$ .

Como  $T(z_0) = 0 \in \Delta$ , por continuidad  $T$  transforma el interior de  $\Delta$  en el interior de  $\Delta$ . Y como  $T$  es la restricción a  $\Delta$  de una transformación conforme,  $T$  es conforme de  $\Delta$  en  $\Delta$ .  $\square$

Posteriormente, cuando estudiemos el teorema del módulo máximo, demostraremos que toda aplicación conforme y biyectiva de  $\Delta$  sobre  $\Delta$  es de la forma descrita en la proposición anterior.

## 4.4. Simetría.

Recordamos que dado un punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , el punto  $(x, -y)$  es simétrico a  $(x, y)$  con respecto al eje  $x$ , la aplicación  $\varrho(x, y) = (-y, x)$  es una aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal, que preserva normas.

De manera más general, puede definirse simetría con respecto a cualquier otra línea  $y = mx$ , como:

$$\varrho_\theta(x, y) = (R_\theta \circ \varrho \circ R_{-\theta})(x, y)$$

donde  $m = \tan \theta$ , y  $R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$  es la rotación que gira el plano un ángulo  $\theta$  en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

Finalmente, si deseamos reflejar con respecto a cualquier línea  $y = mx + b$ , con  $b \neq 0$  bastará considerar, de manera adicional, la traslación  $t_b(x, y) = (x, y - b)$ , y considerar la composición  $t_{-b} \circ \varrho_\theta \circ t_b$  para obtener el simétrico de un punto con respecto a una recta. Ahora bien, podemos generalizar esta idea, y considerar el simétrico de un punto con respecto a una circunferencia como sigue:

**Definición 27.** Sea  $\mathcal{C}$  una circunferencia en  $\mathbb{C}_\infty$  que pase por los puntos  $z_2, z_3$  y  $z_4$ . Dados  $z, z^* \in \infty$ , diremos que  $z^*$  es el punto simétrico a  $z$  con respecto a  $\mathcal{C}$  si, y sólo si,  $(z^*, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z, z_2, z_3, z_4)}$

Cabe notar que, de manera similar al caso de las rectas en  $\mathbb{R}^2$ :

- La definición sólo depende de  $\mathcal{C}$ , y no de los puntos  $z_2, z_3$  y  $z_4$ .
- $z$  es el punto simétrico a  $z^*$  con respecto a  $\mathcal{C}$ .
- Los puntos de  $\mathcal{C}$  son los únicos que son simétricos a ellos mismos.
- La transformación  $z \mapsto z^*$  es biyectiva, y se denomina la reflexión con respecto a  $\mathcal{C}$ .

Para ver que esto realmente es una generalización del caso descrito anteriormente, supongamos  $z_4 = \infty$ , así  $\mathcal{C}$  corresponde a una recta en  $\mathbb{C}$ , y

$$\frac{z^* - z_3}{z_2 - z_3} = (z^*, z_2, z_3, \infty) = \overline{(z, z_2, z_3, \infty)} = \overline{\frac{z - z_3}{z_2 - z_3}} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_3},$$

esto implica

$$\left| \frac{z^* - z_3}{z_2 - z_3} \right| = \left| \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_3} \right|$$

de donde  $|z^* - z_3| = |z - z_3|$ , por lo cual  $z$  y  $z^*$  equidistan de cada punto de  $\mathcal{C}$ . Además

$$\operatorname{Im} \frac{z^* - z_3}{z_2 - z_3} = \operatorname{Im} \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_3} = -\operatorname{Im} \frac{z - z_3}{z_2 - z_3}$$

Por ende, y a menos que  $z \in \mathcal{C}$ ,  $z$  y  $z^*$  están en distintos semiplanos determinados por  $\mathcal{C}$ . Además, la recta que une  $z$  y  $z^*$  es perpendicular a la recta  $\mathcal{C}$ .

Por otra parte, si  $\infty \notin \mathcal{C}$ , podemos suponer

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| = R\}, \quad 0 < R < \infty$$

aplicando sistemáticamente la invariancia de la razón cruzada para una aplicación de Möbius (Prop. ??), podemos concluir que:

$$\begin{aligned} (z^*, z_2, z_3, z_4) &= \overline{(z, z_2, z_3, z_4)} \\ &= \overline{(z - a, z_2 - a, z_3 - a, z_4 - a)} \\ &= \left( \bar{z} - \bar{a}, \frac{R^2}{z_2 - a}, \frac{R^2}{z_3 - a}, \frac{R^2}{z_4 - a} \right) \\ &= \left( \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a, z^2, z^3, z^4 \right) \end{aligned}$$

Esta ecuación muestra que el punto simétrico de  $z$  es  $z^* = a + R^2(\bar{z} - \bar{a})^{-1}$ , o equivalentemente  $z$  y  $z^*$  satisfacen la relación

$$(z^* - a)(\bar{z} - \bar{a}) = R^2$$

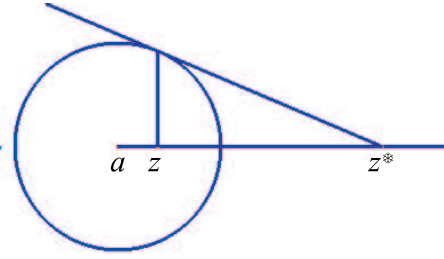
Consecuentemente, el producto de las distancias de  $z$  y  $z^*$  al centro es  $R^2$ , esto es,  $|z - a| \cdot |z^* - a| = R^2$ . Además,

$$\frac{z^* - a}{z - a} = \frac{R^2}{|z - a|^2} > 0,$$

lo cual significa que  $z$  y  $z^*$  están en la misma semi-recta con punto inicial  $a$ .

Dado  $z \notin \mathcal{C}$ , hay una constricción geométrica muy simple para  $z^*$ , la cual describimos en la Figura (??):

- Sea  $L$  la semi-recta que pasa por  $z$  e inicia en  $a$ .
- Considere la perpendicular  $L'$  a  $L$  que pasa por  $z$ .
- Sea  $p$  el punto de intersección de  $L'$  con  $\mathcal{C}$ .

Figura 4.4: El punto  $z^*$  es el simétrico de  $z$ 

- Considere la recta tangente a  $\mathcal{C}$  en  $p$ ,  $T_p\mathcal{C}$
- $z^*$  es el punto de intersección de  $L$  con  $T_p\mathcal{C}$

En particular, los puntos  $a$  e  $\infty$  son simétricos con respecto a  $\mathcal{C}$ .

**Proposición 27 (El principio de simetría.).** *Si una aplicación de Möbius manda la circunferencia  $\mathcal{C}_1$  sobre la circunferencia  $\mathcal{C}_2$ , entonces cualquier par de puntos simétricos con respecto a  $\mathcal{C}_1$  se transforman bajo  $T$  en un par de puntos simétricos con respecto a  $\mathcal{C}_2$ .*

*Demostración.* Si  $z_2, z_3$  y  $z_4$  son tres puntos distintos en  $\mathcal{C}_1$ , si  $z$  y  $z^*$  son simétricos con respecto a  $\mathcal{C}_1$ , y sea  $T$  una aplicación de Möbius que transforme  $\mathcal{C}_1$  en  $\mathcal{C}_2$ . Entonces

$$(z^*, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z, z_2, z_3, z_4)}$$

Como consecuencia de la proposición ?? tenemos que:

$$\begin{aligned} (T(z^*), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) &= (z^*, z_2, z_3, z_4) \\ &= \overline{(z, z_2, z_3, z_4)} \\ &= \overline{(T(z), T(z_2), T(z_3), T(z_4))} \end{aligned}$$

Luego entonces  $T(z)$  y  $T(z^*)$  son simétricos con respecto a  $\mathcal{C}_2$ . □

## 4.5. Ejercicios

1. Obtenga la imagen del primer cuadrante bajo la aplicación  $T(z) = z^3$ .

## Capítulo 5

# Integral de Línea.

En esta sección veremos que la generalización inmediata de una integral real a los números complejos es definir la integral de una función compleja sobre un intervalo real, esto nos conducirá al concepto de integral de línea. Este concepto nos permitirá estudiar una serie de propiedades fundamentales en el análisis de funciones de variable compleja, las cuales son muy complicadas de demostrar sin el uso de la integración compleja, propiedades mediante las cuales iniciaremos la distinción fundamental entre las funciones reales de variable real y las funciones holomorfas. Estos resultados son el objetivo principal de la siguiente sección.

Demostrar que una función  $\mathbb{C}$ -diferenciable es holomorfa puede demostrarse sin utilizar integración a lo largo de curvas, aunque las demostraciones suelen ser mas complicadas, R. L. Plunket demostró la continuidad de la derivada en *A topological proof of the continuity of the derivate of a function of a complex variable*. Bull. Amer. Math. Soc. **65**, (1959); 1-4. Mientras que E.H. Connel y P. Porcelli demostraron la existencia de todas las derivadas en *A proof of the power series expansion without Cauchy's formula*. Bull. Amer. Math. Soc. **67**, (1961); 177-181. Ambos artículos basan sus demostraciones en una demostración topológica del teorema de la aplicación abierta, pues este se encuentra muy relacionado con la estructura de las funciones holomorfas, según demuestra Stoilow, cuya disertación puede encontrarse en el libro de C. T. Whyburn *Topologycal analysis*, 2nd ed. Princeton. 1964.

### 5.1. Integración Compleja

Como mencionamos anteriormente, las demostraciones clásicas donde se prueba que las funciones  $\mathbb{C}$ -diferenciables son holomorfas se basan en la



integración a lo largo de curvas, por lo cual iniciamos la presente sección recordando algunas definiciones y propiedades fundamentales de curvas e integración.

**Definición 28.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico.

1. Una curva (o trayectoria) en  $X$  es una transformación continua  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  donde  $[a, b]$  denota el intervalo cerrado  $\{t \in \mathbb{R}; a \leq t \leq b\}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ .
2. Los puntos  $\gamma(a)$ ,  $\gamma(b)$  se denominan los extremos de la curva,  $\gamma(a)$  se denomina el punto inicial, y  $\gamma(b)$  se denomina el punto final. También se suele decir que  $\gamma$  inicia en  $\gamma(a)$  y termina en  $\gamma(b)$ .
3. Dados  $x_0, x_1 \in X$ , diremos que una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  une  $x_0$  con  $x_1$  si:  $\gamma(a) = x_0$  y  $\gamma(b) = x_1$ . En este caso también decimos que  $\gamma$  es una curva de  $x_0$  a  $x_1$ .
4. Diremos que una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  es una curva cerrada si  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Si  $x_0 = \gamma(a) = \gamma(b)$ , en este caso también decimos que  $\gamma$  es un lazo en  $x_0$ .
5. Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  es una curva, denotamos la imagen de  $\gamma$  como  $\text{im}(\gamma)$ , esto es  $\text{im}(\gamma) = \{\gamma(t); t \in [a, b]\}$ . La imagen de  $\gamma$  también se denomina la traza, o soporte de la curva.
6. Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  es una curva en  $X$ , definimos la curva  $-\gamma$  (también se suele denotar  $\gamma^{-1}$ ) como  $-\gamma : [a, b] \rightarrow X$ ,  $-\gamma(t) = \gamma(b + a - t)$ . Note que  $-\gamma(a) = \gamma(b)$ ,  $-\gamma(b) = \gamma(a)$ , y  $\text{im}(-\gamma) = \text{im}(\gamma)$ . La curva  $-\gamma$  se denomina la curva inversa de  $\gamma$ , y es la curva que recorre la traza de  $\gamma$  en sentido opuesto.
7. Si  $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow X$ ,  $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow X$  son dos curvas tales que el punto inicial de  $\gamma_2$  coincide con el punto final de  $\gamma_1$ , esto es,  $\gamma_2(a_2) = \gamma_1(b_1)$ , definimos la curva  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  como sigue:

$$\gamma : [a, b] \rightarrow X, \quad \text{con} \quad a = a_1, \quad b = b_1 + b_2 - a_2$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } a \leq t \leq b_1 \\ \gamma_2(t + a_2 - b_1) & \text{si } b_1 \leq t \leq b_1 + b_2 - a_2 \end{cases}$$

Como  $\gamma_2(b_1 + a_2 - b_1) = \gamma_2(a_2) = \gamma_1(b_1)$ , esta función está bien definida y es continua. Nótese que  $\text{im}(\gamma_1 + \gamma_2) = \text{im}(\gamma_1) \cup \text{im}(\gamma_2)$ . Esta curva se obtiene recorriendo primero  $\gamma_1$  y posteriormente  $\gamma_2$ .

8. Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un conjunto abierto, no vacío, y  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  una curva. Diremos que  $\gamma$  es suave por partes si existe una partición  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$  del intervalo  $[a, b]$  tal que  $\gamma|_{[a_j, a_{j+1}]}$  es una función continuamente diferenciable para  $j = 0, 1, \dots, n-1$ .

Recordamos que la restricción de  $\gamma$  al intervalo  $[a_j, a_{j+1}]$  es continuamente diferenciable si existe un intervalo abierto  $I_j \in \mathbb{R}$ , con  $[a_j, a_{j+1}]$ , tal que  $\gamma$  es continua y diferenciable en  $I_j$ .

Nótese que, en este caso, hay un subconjunto finito  $S \subset [a, b]$  tal que  $d\gamma/dt$  existe y es continua en  $[a, b] \setminus S$ ; además  $d\gamma/dt$  es acotado en este conjunto.

Podemos notar que, si  $\gamma$  es una curva diferenciable por partes en  $\Omega$ , entonces  $\gamma^{-1}$  también lo es. Si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son curvas diferenciables por partes en  $\Omega$ , y el punto final de  $\gamma_1$  coincide con el punto inicial de  $\gamma_2$ , entonces  $\gamma_1 + \gamma_2$  es una curva diferenciable por partes.

**Definición 29.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico.

Si  $\gamma_k : [a_k, b_k] \rightarrow X$ ,  $k = 1, 2$  son dos curvas en  $X$ , diremos que  $\gamma_2$  es una reparametrización de  $\gamma_1$ , (o que  $\gamma_2$  se obtiene de  $\gamma_1$  por medio de una reparametrización), si existe una función continua, sobre, y estrictamente creciente  $h : [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1]$  tal que  $\gamma_1 \circ h = \gamma_2$ .

En este caso  $\text{im}(\gamma_1) = \text{im}(\gamma_2)$ . Si  $X$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{C}$ , y si  $\gamma_k$  son curvas suaves por partes, se pedirá adicionalmente que  $h$  sea diferenciable.

Procediendo de manera similar a lo realizado en los capítulos anteriores, podemos identificar nuevamente  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$ , tomar  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , considerar una curva suave  $\gamma$  en  $\Omega$  y una función  $f$   $\mathbb{R}^2$ -valuada definida en  $\Omega$ , tomando en cuenta que lo que sabemos hacer es realizar integración de funciones real valuadas de variable real, al evaluar  $f$  a lo largo de  $\gamma$  y realizar el producto punto con  $\dot{\gamma}$  obtenemos una función real valuada de variable real  $h(t) = f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$ , y podemos realizar la integral de  $h(t)$  sobre el intervalo de definición de  $\gamma$ , obteniéndose así un valor real, esto es:

**Definición 30 (Definición Preliminar).** Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un conjunto abierto no vacío,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  una curva suave en  $\Omega$ , y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función  $\mathbb{C}$ -valuada, y continua definida en  $\Omega$ . Se define la integral de línea a lo largo de  $\gamma$ , la cual denotamos  $\int_{\gamma} f dz$ , por la fórmula:

$$\int_{\gamma} f dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt,$$

donde  $f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)dt$  denota el producto punto de  $f(\gamma(t))$  y  $\dot{\gamma}(t)$  como vectores en  $\mathbb{R}^2$ .

Si identificamos nuevamente  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$  vía  $z = x + iy \mapsto (x, y)$ , podemos escribir la función continua  $f$  en términos de sus partes real e imaginaria como  $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ , con  $u, v$  funciones  $\mathbb{R}$ -valuadas definidas en  $\Omega$ , y  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , entonces

$$\int_{\gamma} f dz = \int_a^b \left[ u(x(t), y(t)) \frac{dx(t)}{dt} + v(x(t), y(t)) \frac{dy(t)}{dt} \right] dt$$

### Ejemplo 10.

Evaluemos  $\int_{\gamma} f dz$  donde  $f(x + iy) = iy \equiv (0, y)$ , y  $\gamma[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  es la curva que une 0 con  $i$ . Podemos ver que  $\gamma$  está dada por  $\gamma(t) = (0, t)$ , de donde  $\dot{\gamma}(t) = (0, 1)$ , y por definición

$$\int_{\gamma} f dz = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Desde luego, si  $\gamma$  es una trayectoria que une los puntos  $z_0$  y  $z_1$ , la pregunta natural que nos hacemos cuando estudiamos cálculo es, si  $\sigma$  es otra curva que une a  $z_0$  con  $z_1$ ,  $\int_{\gamma} f = \int_{\sigma} f$ ?

Como consecuencia del teorema fundamental del cálculo, sabemos que si  $u = \partial g / \partial x$  y  $v = \partial g / \partial y$ , para alguna función suave  $g$  definida sobre un conjunto abierto que contenga a la curva  $\gamma$ , entonces

$$\int_{\gamma} (u dx + v dy) = g(\gamma(a)) - g(\gamma(b)),$$

es decir, la integral no depende de la curva  $\gamma$ . Aún más, sabemos que  $u dx + v dy$  no es de la forma  $\partial g / \partial x$  y  $v = \partial g / \partial y$ , para alguna función suave  $g$ , a menos que  $\partial v / \partial x = \partial u / \partial y$ . Obteniéndose así una condición necesaria, pero no suficiente. Como consecuencia de las propiedades de integración de funciones de variable real, sabemos que  $\int_{\gamma} f$  no depende de la reparametrización de  $\gamma$ . Por otra parte, las propiedades del producto punto en  $\mathbb{R}^2$  nos dicen que  $\int_{\gamma} (f + cg) = \int_{\gamma} f + c \int_{\gamma} g$  para todo  $c \in \mathbb{R}$ ,  $f$  y  $g$  funciones  $\mathbb{R}^2$ -valuadas definidas en un abierto  $\Omega$  que contenga a  $\gamma$ , es decir,  $\int_{\gamma} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función  $\mathbb{R}$ -lineal, donde  $\mathcal{C}$  es el  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de

las funciones  $\mathbb{R}^2$  – *valuadas* definidas en un abierto  $\Omega$  que contenga a  $\gamma$ . Desde luego, nos gustaría que la  $\mathbb{R}$ –linealidad de la integral se extendiera al campo complejo, es decir, que fuese  $\mathbb{C}$ –lineal, desafortunadamente esto no sucede, como podemos ver en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 11.**

Evaluemos  $\int_{\gamma} \imath f dz$ , donde  $f(x + \imath y) = \imath y \equiv (0, y)$ , y  $\gamma[0, 1] \rightarrow$  es la curva  $\gamma(t) = \imath t \equiv (0, t)$ , que une 0 con  $\imath$ .

Como vimos en el ejemplo anterior

$$\int_{\gamma} f dz = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

de donde  $\imath \int_{\gamma} f dz = \frac{\imath}{2}$ .

Sin embargo  $\imath f(x + \imath y) = \imath(\imath y) = -y \equiv (-y, 0)$ , y como  $f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = (-t, 0) \cdot (0, 1) = 0$ , entonces  $\int_{\gamma} \imath f = 0$ .

Desde luego, lo que deseamos hacer es generalizar la integral de línea real al caso complejo, es decir, deseamos que esta integral siga siendo independiente de las reparametrizaciones y que sea  $\mathbb{C}$ –lineal, para lo cual, debemos modificar nuestra definición anterior de manera que  $\int_{\gamma} f$  de un número complejo.

**Definición 31 (Definición de Integral de Línea).** Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un conjunto abierto no vacío,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  una curva suave en  $\Omega$ , y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función  $\mathbb{C}$ –valuada, y continua definida en  $\Omega$ . Se define la integral de línea a lo largo de  $\gamma$ , la cual denotamos  $\int_{\gamma} f dz$ , por la fórmula:

$$\int_{\gamma} f dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt,$$

donde ahora el producto  $f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)$  es como números complejos.

Nuevamente, podemos escribir la función continua  $f$  en términos de sus partes real e imaginaria como  $f(z) = u(z) + \imath v(z)$ , con  $u, v$  funciones  $\mathbb{R}$ –valuadas definidas en  $\Omega$ , y  $\gamma(t) = (x(t) + \imath y(t))$ , entonces

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) &= [u(\gamma(t)) + \imath v(\gamma(t))] [\dot{x}(t) + \imath \dot{y}(t)] \\ &= [u(\gamma(t)) \dot{x}(t) - v(\gamma(t)) \dot{y}(t)] + \imath [u(\gamma(t)) \dot{y}(t) + v(\gamma(t)) \dot{x}(t)] \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f dz &= \int_a^b \left[ u(x(t), y(t)) \frac{dx(t)}{dt} - v(x(t), y(t)) \frac{dy(t)}{dt} \right] dt \\ &+ i \int_a^b \left[ u(x(t), y(t)) \frac{dy(t)}{dt} + v(x(t), y(t)) \frac{dx(t)}{dt} \right] dt\end{aligned}$$

La cual resulta más fácil de recordar si escribieramos formalmente

$$\int_{\gamma} f dz = \int_a^b [u dx - v dy] + i \int_a^b [u dy + v dx]$$

o bien

$$\int_{\gamma} f dz = \int_a^b [u \dot{x} - v \dot{y}] + i \int_a^b [u \dot{y} + v \dot{x}] dt$$

Desde luego, aún debemos verificar que, con esta definición, se extienden las propiedades de la integral de línea, y que la integral, en este caso, resulta  $\mathbb{C}$ -lineal. Y al igual que en el caso anterior, si  $\gamma$  es una curva de  $z_0$  a  $z_1$ , nuevamente podemos preguntarnos si  $\int_{\gamma} f$  depende, o no, de la curva  $\gamma$ . En esta sección trataremos de dar respuesta a estas preguntas, pero antes, veremos algunos ejemplos.

### Ejemplo 12.

1. Evaluemos ahora  $\int_{\gamma} e^z dz$ , donde  $\gamma(t) = e^{it}$ , con  $t \in [0, 2\pi/2]$ . En este caso

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} e^z dz &= \int_0^{\pi/2} e^{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} e^{(\cos t + i \sin t)} \cdot (-\sin t + i \cos t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} -e^{\cos t} [\cos(\sin t) \cdot \sin t + \sin(\sin t) \cdot \cos t] dt \\ &+ i \int_0^{\pi/2} -e^{\cos t} [\sin(\sin t) \cdot \sin t - \cos(\sin t) \cdot \cos t] dt \\ &= e^{\cos t} \cos(\sin t) \Big|_0^{\pi/2} + i e^{\cos t} \sin(\sin t) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= e^{\cos t + i \sin t} \Big|_0^{\pi/2} \\ &= e^i - e\end{aligned}$$

2. Ahora evaluaremos  $\int_{\gamma} f dz$ , donde  $f(z) = (z-a)^{-1}$ , y  $\gamma(t) = re^{2\pi i t} + a$ , con  $t \in [0, n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz &= \int_0^n \frac{1}{(re^{2\pi i t} + a) - a} \cdot 2\pi r i t \cdot e^{2\pi i t} dt \\ &= \int_0^n i dz \\ &= 2\pi n i \end{aligned}$$

Esta fórmula posteriormente nos será muy útil.

**Proposición 28.** Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva suave, si  $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  es una reparametrización de  $\gamma$ , entonces

$$\int_{\gamma} f = \int_{\sigma} f,$$

para toda función continua  $f$  definida sobre un conjunto abierto que contenga a la imagen de la curva  $\gamma$ .

*Demostración.* Como  $\sigma$  es una reparametrización de  $\gamma$ , existe una función  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ , continua, diferenciable y creciente tal que  $\sigma(t) = (\gamma \circ h)(t)$ .

Como consecuencia de la regla de la cadena tenemos:

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{d(\gamma \circ h)(t)}{dt} = \frac{d\gamma(h(t))}{ds} \frac{dh(t)}{dt} = \frac{d\gamma(s)}{ds} \frac{ds}{dt}$$

con  $s = h(t)$ , de donde

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} f &= \int_c^d f(\sigma(t)) \dot{\sigma} dt \\ &= \int_c^d f(\sigma(t)) \frac{d\gamma(h(t))}{ds} \frac{dh(t)}{ds} \\ &= \int_a^b f(\gamma(s)) \frac{d\gamma(s)}{ds} ds \\ &= \int_{\gamma} f \end{aligned}$$

□

**Proposición 29.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un conjunto abierto, no vacío,  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  funciones continuas,  $\lambda$  una constante compleja, y sean  $\gamma, \gamma_1$  y  $\gamma_2$  curvas, tales que el punto final de  $\gamma_1$  coincide con el punto inicial de  $\gamma_2$ . Entonces:

1.  $\int_{\gamma} \lambda f = \lambda \int_{\gamma} f.$
2.  $\int_{\gamma} (f + g) = \int_{\gamma} f + \int_{\gamma} g.$
3.  $\int_{-\gamma} f = - \int_{\gamma} f.$
4.  $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$

*Demostración.* (1) Si  $f = u + v$ , con  $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  funciones  $\mathbb{R}$ -valuadas, continuas definidas en  $\Omega$ ,  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$ , con  $\lambda_k \in \mathbb{R}$ , y  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ , con  $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ , entonces:  $\lambda f = (\lambda_1 u - \lambda_2 v) + i(\lambda_1 v + \lambda_2 u)$ , de donde

$$\begin{aligned}
 \int_{\sigma} \lambda f &= \int_a^b [(\lambda_1 u - \lambda_2 v)\dot{x} + (\lambda_1 v + \lambda_2 u)\dot{y}]dt \\
 &+ i \int_a^b [(\lambda_1 u - \lambda_2 v)\dot{y} + (\lambda_1 v + \lambda_2 u)\dot{x}]dt \\
 &= \lambda_1 \int_a^b (u\dot{x} - v\dot{y})dt - \lambda_2 \int_a^b (u\dot{y} + v\dot{x})dt \\
 &+ i \left( \lambda_1 \int_a^b (u\dot{y} + v\dot{x})dt + \lambda_2 \int_a^b (u\dot{x} - v\dot{y})dt \right) \\
 &= \lambda \int_a^b f
 \end{aligned}$$

(2) Si  $f = u_1 + iv_1$ ,  $g = u_2 + iv_2$ ,  $\gamma$  como antes, entonces:

$$\begin{aligned}
 \int_{\sigma} (f + g) &= \int_a^b [(u_1 + u_2)\dot{x} - (v_1 + v_2)\dot{y}]dt \\
 &+ i \int_a^b [(u_1 + u_2)\dot{y} + (v_1 + v_2)\dot{x}]dt \\
 &= \int_a^b [u_1\dot{x} - v_1\dot{y}]dt + i \int_a^b [u_1\dot{y} + v_1\dot{x}]dt \\
 &+ \int_a^b [u_2\dot{x} - v_2\dot{y}]dt + i \int_a^b [u_2\dot{y} + v_2\dot{x}]dt \\
 &= \int_{\gamma} f + \int_{\gamma} g
 \end{aligned}$$

(3) Si  $f$  y  $\gamma$  son como el inciso (1), entonces:  $-\gamma(t) = \gamma(b-t)$ , y como consecuencia de la regla de la cadena

$$\frac{d(-\gamma)(t)}{dt} = \frac{d\gamma(t)}{dt} \frac{d(b-t)}{dt} = -\frac{d\gamma(t)}{dt},$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_{-\sigma} f &= \int_a^b f(-\gamma(t)) \frac{d(-\gamma)(t)}{dt} dt \\ &+ \int_a^b f(\gamma(b-t)) (-\dot{\gamma}(t)) dt \\ &= - \int_a^b f(\gamma(s)) \dot{\gamma}(s) ds \\ &= - \int_{\gamma} f. \end{aligned}$$

(4) Finalmente, sea  $f$  como en el inciso (1),  $\gamma_1(t) = x_1(t) + \imath y_1(t)$ , si  $t \in [a, b]$  y  $\gamma_2(t) = x_2(t) + \imath y_2(t)$ , si  $t \in [b, c]$ , con  $\gamma_1(b) = \gamma_2(a)$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f &= \int_a^b f(\gamma_1(t)) \dot{\gamma}_1(t) dt + \int_b^c f(\gamma_2(t)) \dot{\gamma}_2(t) dt \\ &= \int_a^b (u\dot{x}_1 - v\dot{y}_1) dt + \imath \int_a^b (u\dot{y}_1 + v\dot{x}_1) dt \\ &+ \int_b^c (u\dot{x}_2 - v\dot{y}_2) dt + \imath \int_b^c (u\dot{y}_2 + v\dot{x}_2) dt \\ &= \int_a^b (u\dot{x}_1 - v\dot{y}_1) dt + \int_b^c (u\dot{x}_2 - v\dot{y}_2) dt \\ &+ \imath \left( \int_a^b (u\dot{y}_1 + v\dot{x}_1) dt + \int_b^c (u\dot{y}_2 + v\dot{x}_2) dt \right) \end{aligned}$$

Aplicando que estamos integrando funciones real valuadas, tenemos que

$$\int_a^b (u\dot{x}_1 - v\dot{y}_1) dt + \int_b^c (u\dot{x}_2 - v\dot{y}_2) dt = \int_a^c (u\dot{x} - v\dot{y}) dt$$

y que

$$\int_a^b (u\dot{y}_1 + v\dot{x}_1) dt + \int_b^c (u\dot{y}_2 + v\dot{x}_2) dt = \int_a^c (u\dot{y} + v\dot{x}) dt$$



donde  $x(t) = x_1(t)$  si  $t \in [a, b]$  y  $x(t) = x_2(t)$  si  $t \in [b, c]$ , procedemos en forma análoga para  $y(t)$ . De donde:

$$\int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_1 + \gamma_2} f$$

como deseabamos mostrar.  $\square$

**Definición 32.** . Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  es una curva suave por partes, y  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ , es una partición de  $[a, b]$  tal que  $\gamma_k = \gamma|_{[a_k, a_{k+1}]}$  es diferenciable para  $k = 0, \dots, n-1$ . Definimos  $\int_{\gamma} f dz$  como

$$\int_{\gamma} f dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\gamma_k} f dz.$$

Podemos notar, como consecuencia de la proposición anterior, que el valor de la integral de  $f$  a lo largo de  $\gamma$  no depende de la partición utilizada.

**Definición 33 (Longitud de Arco).** Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  una curva suave la longitud de arco de  $\gamma$  se define como:

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt.$$

La longitud de arco también es independiente de la parametrización.

**Ejemplo 13.**

Si  $\gamma(t) = \exp(it)$ , con  $t \in [0, 2\pi]$ , es una parametrización del círculo unitario, entonces

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

La siguiente propiedad nos permite obtener una estimación de las integrales.

**Proposición 30.** Si  $\Omega$  es un subconjunto abierto no vacío de  $\mathbb{C}$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  es una función continua, tal que existe una constante real  $M \geq 0$  con  $|f(z)| \leq M$  para toda  $z \in \text{im}(\gamma)$ , entonces

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq M \ell(\gamma).$$

En forma más general tenemos:

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq \int_{\gamma} |f| |dz|,$$

donde, por definición,

$$\int_{\gamma} |f| := \int_a^b |f(\gamma(t))| |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

*Demostración.* Como

$$\left| \int_{\gamma} f \right| = \left| \int_{\gamma} f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt \right|$$

entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)| dt \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\dot{\gamma}(t)| dt \\ &\leq \int_a^b M |\dot{\gamma}(t)| dt \\ &= M \ell(\gamma) \end{aligned}$$

pues, por hipótesis,  $|f(\gamma(t))| \leq M$  para toda  $t \in [a, b]$ .  $\square$

**Teorema 11. (El Teorema Fundamental del Cálculo para Integrales de Línea).** Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es una curva suave, y  $f$  es una función  $\mathbb{C}$ -diferenciable en un abierto  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , tal que  $\text{im}(\gamma) \subset \Omega$ . Entonces

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

En particular, si  $\gamma$  es una curva cerrada, es decir,  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , entonces

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = 0.$$

*Demostración.* Si  $f$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable, entonces

$$f(\gamma(t)) = u(t) + \imath v(t),$$

con  $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciables, entonces

$$\frac{d(f(\gamma(t)))}{dt} = \frac{du}{dt}(t) + \imath \frac{dv}{dt}(t),$$

de donde

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = \int_a^b \frac{du}{dt} dt + \imath \int_a^b \frac{dv}{dt} dt$$

Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo a las funciones reales de variable real  $u', v'$ , tenemos

$$\int_a^b \frac{du}{dt} dt = u(b) - u(a), \text{ y } \int_a^b \frac{dv}{dt} dt = v(b) - v(a),$$

y como

$$(u(b) - u(a)) + \imath (v(b) - v(a)) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

podemos concluir que

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

□

**Corolario 11.** Si  $f$  es un polinomio en  $z$ , y  $\gamma$  es cualquier curva cerrada en  $\mathbb{C}$ , suave por partes, entonces

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

**Ejemplo 14.**

Si  $z_0 = 1$ ,  $z_1 = e^{\imath\alpha}$  para algún  $\alpha \in (0, \pi]$ , y  $f(z) = 1/z$ , sabemos que  $\frac{d \log z}{dz} = \frac{1}{z}$ , donde  $\log$  está definido en la rama principal, esto es, si  $z \in \mathbb{C} \setminus \{z; \operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) < 0\}$ .

Como  $\log(z_1) = \imath\alpha$ , y  $\log(1) = 0$ , entonces  $\int_{\gamma} f = \imath\alpha$ .

**Proposición 31.** Si  $\Omega$  es un subconjunto abierto no vacío en  $\mathbb{C}$ ,  $R$  un rectángulo cerrado contenido en  $\Omega$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es una función  $\mathbb{C}$ -diferenciable, y  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ , entonces

$$\int \int_R \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy = \frac{1}{2i} \int_{\partial R} f dz.$$

*Demostración.* Si  $R = \{x + iy \in \mathbb{C}; (x, y) \in [a, b] \times [c, d]\}$ , es un rectángulo cerrado contenido en  $\Omega$ , con vértices  $v_1 = a + ic$ ,  $v_2 = b + ic$ ,  $v_3 = b + id$ , y  $v_4 = a + id$ ,  $\gamma_1, \dots, \gamma_4$  los lados de  $R$ , estos los podemos parametrizar como  $\gamma_1(t) = t + ic$ , con  $a \leq t \leq b$ ,  $\gamma_2(t) = b + it$ , con  $c \leq t \leq d$ , etc. Entonces

$$\int \int_R \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy = \frac{1}{2} \int \int_R \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy$$

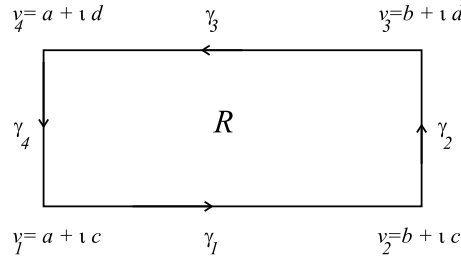


Figura 5.1: Rectángulo cerrado en  $\Omega$ .

Como

$$\begin{aligned} \int \int_R \frac{\partial f}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \left( \int_c^d \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \int_a^b [f(x, d) - f(x, c)] dx \\ &= \int_{-\gamma_3} f dz - \int_{\gamma_1} f dz \end{aligned}$$

de manera similar obtenemos:

$$\int \int_R \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = -i \left( \int_{\gamma_2} f dz + \int_{\gamma_4} f dz \right).$$

Sumando las integrales anteriores obtenemos:

$$\int \int_R \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \int_{\gamma_k} f dz = \frac{1}{2i} \int_{\partial R} f dz.$$

□

**Corolario 12.** Si  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ , y  $f$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $\Omega$ , entonces para cada rectángulo cerrado  $R \subset \Omega$  tenemos

$$\int_{\partial R} f dz = 0$$

A diferencia de este corolario, el siguiente resultado no pide que la función  $f$  sea de clase  $\mathcal{C}^1$ , y es un resultado que juega un papel fundamental en nuestro estudio de las funciones  $\mathbb{C}$ -diferenciables, en particular, nos permitirá ver que estas funciones son analíticas.

**Teorema 12 (El teorema de Cauchy-Goursat).** Si  $\Omega$  es un conjunto abierto en  $\mathbb{C}$ , y  $f$  es una función  $\mathbb{C}$ -diferenciable definida en  $\Omega$ . Entonces, para cualquier rectángulo cerrado  $R \subset \Omega$ ,

$$\int_{\partial R} f dz = 0$$

*Demostración.* Identificando nuevamente  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$  consideremos un rectángulo cerrado  $R = \{x + iy \in \mathbb{C}; (x, y) \in [a, b] \times [c, d]\}$  contenido en  $\Omega$ , donde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , con  $a < b$  y  $c < d$ , y denotemos por  $v_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$  los vértices de  $R$ , esto es  $v_1 = a + ic$ ;  $v_2 = b + ic$ ,  $v_3 = b + id$  y  $v_4 = a + id$ . Y consideremos los siguientes puntos auxiliares:

$$v_0 := \frac{1}{4}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4), w_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2), w_2 = \frac{1}{2}(v_2 + v_3),$$

$$w_3 = \frac{1}{2}(v_3 + v_4), w_4 = \frac{1}{2}(v_1 + v_4)$$

Esto es,  $v_0$  es el centro del rectángulo  $R$ , y los puntos  $w_k$  son los puntos medios de cada uno de los lados de  $R$ .

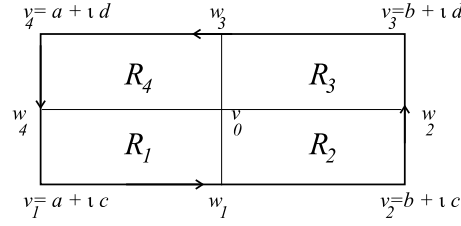
Dividamos  $R$  en cuatro rectángulos cerrados  $R_1, R_2, R_3$  y  $R_4$ , donde  $R_1$  tiene vértices  $v_1, w_1, v_0$  y  $w_4$ ; los vértices de  $R_2$  son  $w_1, v_2, w_2$  y  $v_0$ ;  $R_3$  tiene vértices  $v_0, w_2, v_3, w_3$ , y finalmente, los vértices de  $R_4$  son  $w_4, v_0, w_3$  y  $v_4$ , en este orden, como muestra la figura (??).

Como consecuencia de la proposición ??, tenemos que

$$\int_{\partial R} f dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial R_k} f dz.$$

Denotemos por

$$A := \left| \int_{\partial R} f dz \right|,$$

Figura 5.2: Rectángulos cerrados en  $\Omega$ .

entonces

$$A := \left| \sum_{k=1}^4 \int_{\partial R_k} f dz \right| \leq \sum_{k=1}^4 \left| \int_{\partial R_k} f dz \right|,$$

En particular, existe  $\nu_1 \in \{1, 2, 3, 4\}$  tal que

$$\left| \int_{\partial R_{\nu_1}} f dz \right| \geq \frac{1}{4} A.$$

Además,  $\ell(\partial R_{\nu_1}) = \frac{1}{2} \ell(\partial R)$ , y el diámetro de  $R_{\nu_1}$  es la mitad del diámetro de  $R$ , es decir:  $\text{diam}(R_{\nu_1}) = \frac{1}{2} \text{diam}(R)$ . De manera similar a la anterior, ahora dividamos  $R_{\nu_1}$  en cuatro rectángulos  $R_{\nu_1, \mu}$ , con  $\mu = 1, \dots, 4$ , introduciendo el centro, y los puntos medios de los lados de  $R_{\nu_1}$ , tenemos

$$\int_{R_{\nu_1}} f dz = \sum_{\mu=1}^4 \int_{\partial R_{\nu_1, \mu}} f dz,$$

luego entonces, existe  $\nu_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$  tal que

$$\left| \int_{\partial R_{\nu_1, \nu_2}} f dz \right| \geq \left| \int_{\partial R_{\nu_1}} f dz \right| \geq \frac{1}{4^2} A,$$

además,

$$\ell(\partial R_{\nu_1, \nu_2}) = \frac{1}{2} \ell(\partial R_{\nu_1}) = \frac{1}{2^2} \ell(\partial R),$$

y

$$\text{diam}(\partial R_{\nu_1, \nu_2}) = \frac{1}{2} \text{diam}(\partial R_{\nu_1}) = \frac{1}{2^2} \text{diam}(R)$$

Iterando este proceso, encontramos una sucesión de rectángulos cerrados  $\{R_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k} : k \in \mathbb{N}\}$  que satisfacen las siguientes propiedades:

1.  $R_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k, \nu_{k+1}} \subset R_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k}$ ,

2.  $\ell(\partial R_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k}) = \frac{1}{2^k} \ell(\partial R),$
3.  $\text{diam}(R_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k}) = \frac{1}{2^k} \text{diam} \ell(R),$  y
4.  $\left| \int_{\partial R_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k}} f dz \right| \geq \frac{1}{4^k} A.$

El inciso (1) nos dice que tenemos una sucesión  $\{R_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k} : k \in \mathbb{N}\}$  de compactos anidados, aunado esto al inciso (2) tenemos que

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} R_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k} = \{\alpha\}$$

para un único punto  $\alpha \in R$ .

Definimos  $\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , por  $\varepsilon(z) = f(z) - [f(\alpha) + f'(\alpha)(z - \alpha)]$ .

Como  $f$  es una función  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $\Omega$ , entonces  $\varepsilon$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $\alpha$ , y  $\varepsilon(\alpha) = 0$ . Luego entonces

$$\lim_{z \rightarrow \alpha, z \neq \alpha} \frac{\varepsilon(z)}{z - \alpha} = \lim_{z \rightarrow \alpha, z \neq \alpha} \frac{\varepsilon(z) - \varepsilon(\alpha)}{z - \alpha} = 0.$$

Luego entonces, dada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|z - \alpha| < \delta$  implica  $|\varepsilon(z)| < \epsilon |z - \alpha|$ .

Como  $f(\alpha) + (z - \alpha)f'(\alpha)$  es un polinomio en la variable  $z$ , como consecuencia del corolario anterior,

$$\int_{\partial R_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k}} f(\alpha) + (z - \alpha)f'(\alpha) = 0.$$

Luego entonces

$$\int_{\partial R_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k}} \varepsilon dz = \int_{\partial R_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k}} f dz.$$

Por otra parte, como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(R_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n}) = 0$ , existe  $k > 0$  tal que  $\text{diam}(R_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k}) < \delta$ . En particular  $|z - \alpha| < \delta$ , si  $z \in R_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k}$ . De quí se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^k} A &\leq \left| \int_{\partial R_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k}} f dz \right| = \left| \int_{\partial R_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k}} \varepsilon dz \right| \\ &\leq \delta \text{diam}(R_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k}) \ell(R_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k}) = \epsilon \frac{1}{2^k} \text{diam}(R) \frac{1}{2^k} \ell(R), \end{aligned}$$

es decir,  $A < \epsilon \text{diam}(R) \ell(\partial R)$ .

Como  $\epsilon$  es arbitraria, entonces  $A = 0$ . □

Para poder aplicar este teorema necesitamos una versión más fuerte.

**Teorema 13.** Si  $\Omega$  es un abierto en  $\mathbb{C}$ ,  $f$  una función  $\mathbb{C}$ -valuada y continua en  $\Omega$ ,  $a \in \Omega$ , y  $f$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $\Omega \setminus \{a\}$ , entonces para cualquier rectángulo cerrado  $R \subset \Omega$

$$\int_{\partial R} f dz = 0.$$

*Demostración.* Si  $a \notin R$ , aplicamos el teorema anterior. Si  $a \in \partial R$ , sea  $R_\epsilon$  un rectángulo cerrado contenido en el interior de  $R$ , y cuyos vértices convergen a  $R$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Esto es, si  $R = \{x + iy \in \mathbb{C}; (x, y) \in [a, b] \times [c, d]\}$ , y  $0 < \epsilon$  un número suficientemente pequeño, entonces  $R_\epsilon = [a + \epsilon, b - \epsilon] \times [c + \epsilon, d - \epsilon]$ .

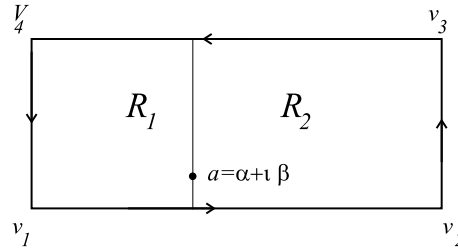


Figura 5.3:

Como  $f$  es continua en  $\Omega$  y  $R$  es compacto, entonces  $f$  es uniformemente continua en  $R$ , luego entonces

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial R_\epsilon} f dz = \int_{\partial R} f dz$$

Pero, como consecuencia del teorema de Cauchy-Goursat  $\int_{\partial R_\epsilon} f dz = 0$ , de donde  $\int_{\partial R} f dz = 0$ . Finalmente, supongamos que  $a \in \text{Int}(R) = (a, b) \times (c, d)$ , digamos  $a = \alpha + i\beta$ . Sea  $R_1$  el rectángulo con vértices  $v_1 = a + ic$ ,  $w_2 = \alpha + ic$ ,  $w_3 = \alpha + id$  y  $v_4 = a + id$ ,  $R_2$  el rectángulo con vértices  $w_2, v_2 = b + ic$ ,  $v_3 = b + id$ ,  $w_3$ .

Entonces

$$\int_{\partial R} f dz = \int_{\partial R_1} f dz + \int_{\partial R_2} f dz.$$

Como  $a \in \partial R_1$  y  $a \in \partial R_2$ , en el caso anterior mostramos que  $\int_{\partial R_k} f dz = 0$ ,

para  $k = 1, 2$ , de donde  $\int_{\partial R} f dz = 0$ .  $\square$



## 5.2. El Teorema de Cauchy

**Lema 5.** Si  $R$  es un rectángulo cerrado en  $\mathbb{C}$ , y  $a \in R \setminus \partial R$  es un punto en el interior de  $R$ , entonces

$$\int_{\partial R} \frac{1}{z-a} dz = 2\pi i.$$

*Demostración.* Dado  $t \in [0, 1]$ , existe un único  $\rho(t)$  tal que en la frontera de  $R$  tenemos el punto  $a + \rho(t)e^{2\pi i t}$ . Consideremos la curva suave por partes  $r(t) = a + \rho(t)e^{2\pi i t}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} \frac{1}{z-a} dz &= \int_0^1 \frac{1}{\rho(t)e^{2\pi i t}} \frac{d\rho(t)e^{2\pi i t}}{dt} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} dt + \int_0^1 2\pi i dt \\ &= \ln(\rho(1)) - \ln(\rho(0)) + 2\pi i \\ &= 2\pi i \end{aligned}$$

donde el logaritmo es el logaritmo real de un número positivo, y como  $\rho(0) = \rho(1)$ , entonces  $\ln(\rho(1)) - \ln(\rho(0)) = 0$ .  $\square$

**Teorema 14 (El teorema de Cauchy para rectángulos).** Si  $\Omega \subset \mathbb{C}$  es abierto no vacío,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $\Omega$ ,  $R \subset \Omega$  un rectángulo cerrado, a un punto en el interior de  $R$ , entonces

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

*Demostración.* Para  $z \in \Omega$ , definamos la función

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} & \text{si } z \in \Omega \setminus \{a\} \\ f'(a) & \text{si } z = a \end{cases}$$

Claramente  $g$  es continua en  $\Omega$ , y  $g$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $\Omega \setminus \{a\}$ , como consecuencia del teorema ??,  $0 = \int_{\partial R} g dz$ , y como

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} g dz &= \int_{\partial R} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz \\ &= \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-a} dz - f(a) \int_{\partial R} \frac{1}{z-a} dz \\ &= \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-a} dz - 2\pi f(a) \end{aligned}$$

de donde  $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-a} dz$ .  $\square$

**Teorema 15.** Si  $\Omega \subset \mathbb{C}$  es un abierto no vacío, y  $f$  es una función  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $\Omega$ , entonces  $f$  es analítica en  $\Omega$ , es decir, dado  $a \in \Omega$ , existe  $r > 0$ , la cual depende de  $a$  y  $\Omega$ , y existe una sucesión de números complejos  $\{c_n\}_{n \geq 0}$  tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

converge a  $f(z)$  para toda  $z$  tal que  $|z-a| < r$ .

*Demostración.* Sea  $a \in \Omega$ , y sea  $R \subset \Omega$  un rectángulo cerrado tal que  $a \in R \setminus \partial R$ , y tomemos  $r > 0$  tal que  $B(a; r) \subset \text{int}(R)$ , es decir, la bola cerrada con centro en  $a$  y radio  $r$  este contenida en el interior del rectángulo  $R$ . Como consecuencia del teorema de Cauchy para rectángulos tenemos:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-w} dz.$$

Por otra parte

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-a} \left(1 - \frac{w-a}{z-a}\right)^{-1} = \frac{1}{z-a} \sum_0^{\infty} \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n$$

si  $|w-a| < |z-a|$ .

Si  $w \in B(a, r)$  y  $z \in \partial R$ , entonces  $|w-a| \leq \tau |z-a|$ , con  $0 < \tau < 1$ , y  $\tau$  sólo depende de  $r$  y  $R$ . Luego entonces

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} f(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}} dz,$$

y como la serie converge uniformemente para  $w \in B(a, r)$ , y  $z \in \partial R$ , podemos intercambiar la suma con la integral, de donde

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{\partial R} f(z) \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}} dz \right) (w-a)^n,$$

o equivalentemente

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (w-a)^n,$$

con

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

Es decir, toda función  $\mathbb{C}$ -diferenciable es analítica.  $\square$

**Nota:** En vista de esto, y del corolario ?? de la proposición ??, los conceptos  $\mathbb{C}$ -diferenciable, holomorfo y analítico, son equivalentes, y los usaremos indistintamente a partir de este momento.

Aún más, como  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n$ , entonces  $c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$ , y el valor

$c_k$  es independiente de  $\partial R$ , además la identidad  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ , se satisface para  $|z-a| < \rho$ , donde  $\rho$  es el radio de convergencia de la serie.

**Corolario 13.** Si  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ , y  $\partial f / \partial \bar{z} = 0$  en  $\Omega$ , entonces  $f$  es analítica.

**Corolario 14.** Toda función  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $\Omega$  es infinitamente diferenciable.

**Corolario 15.** Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es analítica, entonces  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ , si  $|z-a| < \rho$ , donde  $\rho$  es la distancia del punto  $a$  a la frontera de  $\Omega$ , esto es,  $\rho = d(a, \partial\Omega)$

**Corolario 16.** Si  $\Omega \subset \mathbb{C}$  es abierto no vacío,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en  $\Omega$ ,  $R \subset \Omega$  un rectángulo cerrado, a un punto en el interior de  $R$ , entonces

$$f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz.$$

*Demostración.* Como mencionamos anteriormente

$$f^{(k)}(a) = k!c_k = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz.$$

$\square$

**Teorema 16 (El Teorema de Morera).** Si  $\Omega \subset \mathbb{C}$  es un abierto no vacío,  $f$  una función continua en  $\Omega$ , y si  $\int_{\partial R} f dz = 0$  para todo rectángulo cerrado  $R \subset \Omega$ . Entonces  $f$  es holomorfa en  $\Omega$ .

*Demostración.* Dado  $a = \alpha + \imath\beta \in \Omega$ , consideremos  $r > 0$  tal que  $B = B(a, r) \subset \Omega$ .

Si  $z \in B$ , entonces  $z = x + \imath y$ , ( $x, y \in \mathbb{R}$ ), sea  $z' = x + \imath\beta$ , y se  $\gamma_z = \gamma_1 + \gamma_2$ , donde  $\gamma_1$  es el segmento de línea que une  $a$  con  $z'$ , el cual podemos parametrizar como,  $\gamma_1(t) = t + \imath\beta$ , con  $t \in [\alpha, x]$ ; y sea  $\gamma_2$  es el segmento que une  $z'$  con  $z$ , parametrizado por  $\gamma_2(t) = x + \imath t$  con  $t \in [\beta, y]$ .

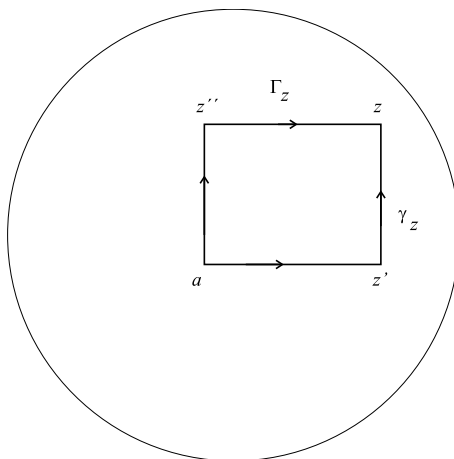


Figura 5.4:

Definimos  $F(z) = \int_{\gamma_z} f(w) dw$ .

Si  $h \neq 0$  es un número real tal que  $z + \imath h \in B(a, r)$ , entonces

$$\frac{F(z + \imath h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\lambda} f(w) dw,$$

donde  $\lambda$  es el segmento de línea que une  $z$  con el punto  $z + \imath h$ , por ende,  $\lambda(t) = x + \imath t$ , con  $y \leq t \leq y + h$ , y  $\dot{\lambda}(t) = \imath$ . Entonces

$$\frac{F(z + \imath h) - F(z)}{h} = \frac{\imath}{h} \int_y^{y+h} f(x + \imath t) dt.$$

De donde, para cada  $z \in B(a, r)$  tenemos

$$\frac{\partial F}{\partial y}(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z + \imath h) - F(z)}{h} = \imath f(z).$$

Por otra parte, si  $z'' = \alpha + \imath y$ , y  $\Gamma_z$  es la curva  $\Gamma_1 + \Gamma_2$ , donde  $\Gamma_1$  es el segmento de línea que une  $a$  con  $z''$ , y  $\Gamma_2$  el segmento que une  $z''$  con  $z$ , si  $h \neq 0$  es un número real suficientemente pequeño, entonces:

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_L f(w) dw,$$

donde  $L$  es el segmento de línea que une  $z$  con el punto  $z+h$ , por ende,  $\lambda(t) = t + iy$ , con  $x \leq t \leq x+h$ , y  $\dot{\lambda}(t) = 1$ , y procediendo de manera similar a la realizada en el párrafo anterior, tenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z).$$

Afirmamos que:

$$\int_{\gamma_z} f = \int_{\Gamma_z} f.$$

Si  $x \neq \alpha$  y  $y \neq \beta$ , y consideramos el rectángulo  $R$  con vértices  $a, z', z, z''$ , su frontera  $\partial R$ , está dada por  $\gamma_z - \Gamma_z$ , y por hipótesis  $\int_{\partial R} f = 0$ , luego entonces:

$$0 = \int_{\partial R} f = \int_{\gamma_z} f - \int_{\Gamma_z} f.$$

Por otra parte, si  $x = \alpha$ , entonces  $z' = a$  y  $z'' = z$ , de donde

$$\int_{\gamma_z} f = \int_{\vec{az}} f = \int_{\vec{az}} f$$

ya que  $az'$  se reduce a un punto  $\int_{\vec{az'}} f = 0$ , análogamente  $\int_{\Gamma_z} f = \int_{\vec{az}} f$ .

Cuando  $y = \beta$  se procede de manera similar a la anterior.

Como  $\partial F/\partial x = f$ , y  $\partial F/\partial y = if$ , existen, son continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann  $\partial F/\partial x = f = -i(if) = -i(\partial F/\partial y)$ , entonces  $F$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable en  $z$ , para cada  $z \in B(a, r)$ , y como  $a$  es un punto arbitrario de  $\Omega$ , entonces  $F$  es holomorfa en  $\Omega$ .  $\square$

Como consecuencia del teorema Fundamental del Cálculo, si tenemos una función holomorfa  $F$ , definida en un abierto conexo no vacío  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , tal que  $F' = f$ , entonces  $\int_{\gamma} f dz = 0$  para cualquier curva cerrada, suave por partes contenida en  $\Omega$ . Recíprocamente, el resultado anterior nos dice que, si  $f$  satisface la condición  $\int_{\partial R} f = 0$ , para cualquier rectángulo cerrado contenido en  $\Omega$ , entonces  $f$  es holomorfa, lo cual proporciona otra caracterización de las funciones holomorfas.

**Definición 34.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un conjunto abierto, no vacío,  $f$  una función holomorfa en  $\Omega$ . Una primitiva de  $f$  sobre  $\Omega$  es una función  $F$ , holomorfa en  $\Omega$ , cuya derivada es  $f$ , es decir,  $F' = f$ .

Como consecuencia de que toda función holomorfa admite un desarrollo en serie de potencias, tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 32.** Si  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  converge a  $f(z)$  si  $z \in B(a, r) = \{z; |z-a| < r\}$ , entonces  $f$  tiene una primitiva en  $B(a, r)$ .

*Demostración.* Definamos  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z-a)^{n+1}$ , claramente  $F' = f$  y como consecuencia de la proposición ??, el radio de convergencia de  $F$  coincide con el de  $f$ . Por tanto,  $F$  es una primitiva de  $f$  en  $B(a, r)$ .  $\square$

**Proposición 33.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un conjunto abierto, conexo, y sea  $f$  una función holomorfa en  $\Omega$ . Si  $F$  y  $G$  son dos primitivas de  $f$  en  $\Omega$ , entonces  $F - G$  es constante.

*Demostración.* Como  $F$  y  $G$  son primitivas de  $f$  en  $\Omega$ , entonces  $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$ , y como  $\Omega$  es conexo, tenemos que la función  $F - G$  es constante.  $\square$

### 5.3. Ejercicios

1. Evalúe

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 - 1}$$

donde la circunferencia está recorrida en sentido positivo.

2. Evalúe

$$\int_{|z|=1} |z-1| \cdot |dz|$$

3. Suponga que  $f(z)$  es analítica en una región que contiene a la curva cerrada  $\gamma$ . Demuestre que

$$\int_{\gamma} \overline{f(z)} f'(z) dz$$

tiene parte real cero.

4. Suponga que  $f(z)$  es analítica y satisface la desigualdad  $|f(z) - 1| < 1$  en una región  $\Omega$ . Demuestre que

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

para cada curva cerrada en  $\Omega$ .

5. Si  $P(z)$  es un polinomio y  $C$  denota la circunferencia  $|z - a| = R$ , obtenga el valor de  $\int_C P(z) d\bar{z}$ .

## Capítulo 6

# Funciones holomorfas.

En la presente sección, analizaremos el comportamiento de las funciones holomorfas, en particular veremos como ciertas condiciones locales determinan el comportamiento global de la función.

**Teorema 17.** *(El principio de continuación analítica). Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un subconjunto abierto no vacío, y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa. Si existe un subconjunto abierto no vacío  $U$  contenido en  $\Omega$  tal que  $f(z) = 0$  para cada  $z \in U$ , entonces  $f(z) = 0$  para toda  $z \in \Omega$ .*

*Demostración.* Denotemos por  $f^{(n)}$  la  $n$ -ésima derivada de  $f$ , si  $n \geq 1$ , y  $f^{(0)} = f$ . Y denotemos por  $E_n$  el conjunto de puntos  $z \in \Omega$  cuya  $n$ -ésima derivada es cero, esto es,

$$E = \bigcap_{n \geq 0} E_n$$

Queremos demostrar que  $E = \Omega$ , para lo cual demostraremos que  $E$  es un conjunto no vacío, cerrado y abierto en  $\Omega$ , y como  $\Omega$  es conexo, entonces  $E$  debe coincidir con  $\Omega$ .

Como  $f(z) = 0$  para toda  $z \in U$ , entonces  $U \subset E$ , por ende  $E \neq \emptyset$ .

Como  $f^{(n)}$  es continua, y  $E_n$  es la imagen inversa de un punto, que en particular es un conjunto cerrado, entonces  $E_n$  es cerrado. Por otra parte, como intersección arbitraria de cerrados es cerrado, entonces  $E$  es un conjunto cerrado en  $\Omega$ .

Ahora demostraremos que  $E$  es abierto, sea  $a \in E$ , como  $f$  es holomorfa en  $\Omega$ , existe  $r > 0$  y una sucesión de números complejos  $\{c_n\}_{n \geq 0}$  tales que



$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ , para toda  $z \in B(a, r) = \{z; |z-a| = r\}$  y como consecuencia de la proposición ?? y el corolario ?? tenemos

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) c_n(z-a)^{n-k}, \quad \text{donde } c_k = f^{(k)}(a)/k!.$$

Como  $a \in E$ , entonces  $f^{(k)}(a) = 0$  para toda  $k \geq 0$ , de donde  $c_k = 0$  para toda  $k \geq 0$ , por lo que  $f(z) = 0$  para toda  $z \in B(a, r)$ , es decir  $B(a, r) \subset E$ . Por tanto,  $E$  es abierto.  $\square$

**Teorema 18 (El Teorema de Independencia de Trayectorias).** *Si  $f$  es una función continua sobre un conjunto abierto conexo  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. (Independencia de la trayectoria) Si  $z_0$  y  $z_1$  son dos puntos en  $\Omega$ , y las curvas  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  son trayectorias en  $\Omega$  de  $z_0$  a  $z_1$ , entonces  $\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$ .
2. Si  $\gamma$  es una curva cerrada contenida en  $\Omega$ , entonces  $\int_{\gamma} f = 0$ .
3. Existe una primitiva (global) de  $f$  en  $\Omega$ .

*Demostración.* Es claro que las condiciones 1 y 2 son equivalentes.

$3 \Rightarrow 1$  es consecuencia del teorema fundamental del cálculo para integrales de línea.

$1 \Rightarrow 3$  Como consecuencia del teorema de Morera,  $f$  es holomorfa en  $\Omega$ , de donde,  $f$  es analítica en  $\Omega$ , y como consecuencia del principio de continuación analítica,  $f$  tiene primitiva en  $\Omega$   $\square$

**Teorema 19 (El Teorema de Cauchy-Goursat para bolas).** *Si  $f$  es holomorfa en la bola con centro en  $z_0$  y radio  $\rho$ , entonces  $f$  tiene una primitiva en  $B(a, \rho)$ . Además, para cada curva cerrada  $\gamma$  contenida en  $B(a, \rho)$  tenemos que  $\int_{\gamma} f = 0$*

*Demostración.* Como consecuencia de la proposición ??, la función  $f$  tiene primitiva en  $B(a, \rho)$ .

Y como consecuencia del teorema de independencia de las trayectorias, tenemos que para cualquier curva cerrada  $\gamma$  contenida en  $B(a, \rho)$  se tiene que  $\int_{\gamma} f = 0$ .  $\square$

**Definición 35 (Serie de Taylor).** Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un abierto no vacío,  $f$  una función holomorfa en  $\Omega$ , y  $a \in \Omega$ . La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n$$

se denomina la serie de Taylor de  $f$  en  $a$ .

Como consecuencia del teorema anterior tenemos que, la serie de Taylor de  $f$  en  $a$  converge a  $f$  en una vecindad de  $a$ , además de que es la única serie  $\sum c_n (z - a)^n$  con esta propiedad.

**Ejemplo 15.**

1. Consideremos la función  $f(z) = (1 - z)^{-1}$ , claramente  $f$  es holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ , en particular en el punto  $z = 0$ . Por lo que, podemos obtener la serie de Taylor de  $f$  en  $z = 0$ .

Como  $f(z) = (1 - z)^{-1}$ , podemos ver que  $f'(z) = (1 - z)^{-2}$ , y en general  $f^{(n)}(z) = n!(1 - z)^{-(n+1)}$ , por tanto,  $f^{(n)}(0) = n!$  los coeficientes de la serie de Taylor de  $f$  están dados como  $c_n = f^{(n)}(0) = n! = 1$ , para  $n \geq 0$ .

Luego entonces la serie de Taylor de  $f$  alrededor de  $z = 0$  esta dada por la serie geométrica:  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ , la cual tiene radio de convergencia  $r = 1$ .

2. Como consecuencia de esto, la serie de Taylor de la función  $g(z) = (1 - z)^{-2}$  está dado como  $\sum_{n=1}^{\infty} (-n)z^{n-1}g(z) = -f'(z)$ , pues  $g = -f'$ .

3. Consideremos ahora la función,  $\log(z + 1) = \ln|z + 1| + i \arg(z + 1)$ , con  $-\pi < \arg(z + 1) < \pi$ .

En particular  $z = 0$  está en el dominio de analiticidad de  $\log(z + 1)$ .

1). Como  $\frac{d \log(z + 1)}{dz} = \frac{1}{z + 1}$  y la  $n$ -ésima derivada de  $\log(z + 1)$  está dada como  $\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} (z + 1)^{-n}$  si  $n \geq 1$ . Por ende, los coeficientes

de su serie de Taylor alrededor de  $z = 0$  están dados por  $c_0 = \log(1) = 0$ , y  $c_n = \left( \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \right) / n! = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ .

Por tanto, la serie de Taylor de  $\log(z+1)$  esta dada por  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ , y la expresión es válida si  $|z| < 1$ .

4. Si  $f(z) = 1/(z-1)(z-2)$ , aplicando fracciones parciales podemos encontrar números complejos  $A$  y  $B$ , tales que

$$\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)},$$

a saber  $A = -1$  y  $B = 1$ , es decir:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z-2},$$

Como vimos anteriormente, la función  $1/(1-z)$  en  $z = 0$  tiene serie de Taylor  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ , por otra parte, procediendo de manera análoga al primer ejemplo, tenemos que la serie de Taylor de  $1/(z-2)$  está dada por  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2^{n+1}} z^n$ , la cual tiene radio de convergencia 2.

Por lo que, la serie de Taylor de  $f(z)$  en  $z = 0$  está dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2^{n+1}} z^n,$$

y la serie es válida si  $|z| < 1$ .

5. La serie de Taylor de  $e^z$  alrededor de  $z = 0$  está dada por  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ , y tiene radio de convergencia infinito, es decir, la expresión es válida para toda  $z$ . Esto es consecuencia de la definición de la función exponencial, y de la unicidad de la serie de Taylor.

De manera similar, podemos demostrar que:

6. La serie de Taylor de  $e^{z^2}$  alrededor de  $z = 0$  está dada por  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$ , y tiene radio de convergencia infinito, es decir, la expresión es válida para toda  $z$ .
7. La serie de Taylor de  $\sin z$  está dada por  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} z^{2n-1}$ , y esta expresión es válida para toda  $z$ .
8. La serie de Taylor de  $\cos z$  está dada por  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ , y esta expresión es válida para toda  $z$ .
9. A continuación procederemos a obtener los primeros términos de la serie de Taylor para la función  $\tan z$ , alrededor de  $z = 0$ .

Como  $\tan z = \sin z / \cos z$  y  $\cos 0 = 1$ , tenemos que  $\tan z$  es holomorfa en una vecindad de  $z = 0$ , luego entonces, existe  $r > 0$  y una sucesión de números complejos  $c_n$  tales que

$$\tan z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

y la expresión es válida si  $|z| < r$ .

En particular

$$\sin z = \tan z \cos z = \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right) \cos z$$

Sustituyendo las expresiones en serie de Taylor de  $\sin z$  y  $\cos z$  en  $z = 0$  obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} z^{2n-1} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \right)$$

Usando ahora el hecho de,  $\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} b_m \right) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n$ , con:

$$d_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}, \text{ tenemos que:}$$

$$\begin{aligned}
z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots &= c_0 + c_1 z + (c_2 - \frac{c_0}{2!})z^2 + (c_3 - \frac{c_1}{2!})z^3 \\
&+ (c_4 - \frac{c_2}{2!} + \frac{c_0}{4!})z^4 + (c_5 - \frac{c_3}{2!} + \frac{c_1}{4!})z^5 \\
&+ (c_6 - \frac{c_4}{2!} + \frac{c_2}{4!} - \frac{c_0}{6!})z^6 + \dots
\end{aligned}$$

Comparando término a término, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
0 &= c_0 & 1 &= c_1 \\
0 &= c_2 - \frac{c_0}{2!} & -\frac{1}{3!} &= c_3 - \frac{c_1}{2!} \\
0 &= c_4 - \frac{c_2}{2!} + \frac{c_0}{4!} & \frac{1}{5!} &= c_5 - \frac{c_3}{2!} + \frac{c_1}{4!} \\
0 &= c_6 - \frac{c_4}{2!} + \frac{c_2}{4!} - \frac{c_0}{6!} \dots
\end{aligned}$$

de donde, podemos deducir:

$$0 = c_0 = c_2 = c_4 = c_6 = \dots$$

y

$$c_1 = 1, \quad c_3 = \frac{c_1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{3}, \quad c_5 = \frac{1}{5!} + \frac{c_3}{2!} - \frac{c_1}{4!} = \frac{2}{15}, \dots$$

Por ende, la serie de Taylor de  $\tan z$  en  $z = 0$  está dada por:

$$z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \dots, \text{ y es válida si } |z| < \pi/2.$$

## Capítulo 7

# Homotopía y el Teorema de Cauchy.

Para extender el teorema de Cauchy-Goursat a regiones más generales que rectángulos, necesitamos demostrar algunos teoremas de deformación, por lo cual, necesitamos introducir el concepto de homotopía, y dar condiciones que garanticen la independencia de  $\int_{\gamma}$  de las trayectorias que consideramos, por lo cual, trabajaremos dos tipos de problemas, el primero, en el que las curvas tengan los mismos extremos, y en el segundo, consideraremos curvas cerradas. Para simplificar nuestra notación, todas las curvas que consideremos estarán parametrizadas por el intervalo  $[0, 1]$ .

**Definición 36.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $x_0, x_1 \in X$ . Sean  $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$ , son dos curvas de  $x_0$  a  $x_1$ . Diremos que  $\gamma_0$  es homotópica a  $\gamma_1$  en  $X$  con puntos extremos fijos, si existe una función continua  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  que satisface las siguientes condiciones:

1.  $H(0, t) = \gamma_0(t)$  si  $0 \leq t \leq 1$ ;
2.  $H(1, t) = \gamma_1(t)$  si  $0 \leq t \leq 1$ ;
3.  $H(s, 0) = x_0$  si  $0 \leq s \leq 1$ , y
4.  $H(s, 1) = x_1$  si  $0 \leq s \leq 1$

La idea de la definición es muy simple, pues cuando  $s$  varía de 0 a 1, tenemos una familia de curvas que se deforman continuamente de  $\gamma_0$  a  $\gamma_1$

Para  $s_0 \in [0, 1]$  definimos  $\gamma_{s_0}(t) = H(s_0, t)$ , cada  $\gamma_s$  es una curva en  $X$  con extremos  $x_0$  y  $x_1$ .

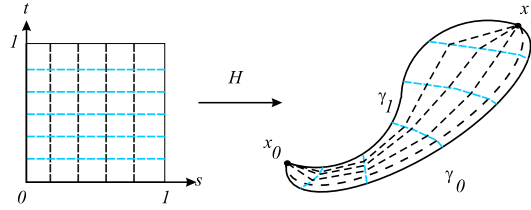


Figura 7.1: Homotopía

Y se puede verificar fácilmente que ser homotópicas es una relación de equivalencia.

**Ejemplo 16.**

Si  $\gamma_0(t) = t(1 + i)$ , y  $\gamma_1(t) = t + it^2$ , entonces  $\gamma_0$  es homotópica a  $\gamma_1$ , y una posible homotopía está dada por,  $H(s, t) = t + it^{1+s}$ .

**Definición 37.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Si  $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow X$ , y  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$  son dos curvas cerradas en  $X$ . Diremos que  $\gamma_0$  es homotópica como curva cerrada a  $\gamma_1$  en  $X$ , si existe una función continua  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  que satisface las siguientes condiciones:

1.  $H(0, t) = \gamma_0(t)$  si  $0 \leq t \leq 1$ ;
2.  $H(1, t) = \gamma_1(t)$  si  $0 \leq t \leq 1$ ;
3.  $H(s, 0) = H(s, 1)$  si  $0 \leq s \leq 1$ , y

Nuevamente, si  $\gamma_s(t) = H(s, t)$ , cada  $\gamma_s$  es una curva cerrada en  $X$ .

**Ejemplo 17.**

Si  $\gamma_0(t) = \cos t + i \sin t$ , y  $\gamma_1(t) = 2 \cos t + i \sin t$ , entonces  $\gamma_0$  es homotópica, como curva cerrada, a  $\gamma_1$ , y una posible homotopía está dada por,  $H(s, t) = (1 + s) \cos t + i \sin t$ .

**Definición 38.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $\Omega \subset X$ . Decimos que  $\Omega$  es simplemente conexo si, toda curva cerrada en  $\Omega$  es homotópica a un punto, esto es, a una curva constante.

**Ejemplo 18.**

Si  $\gamma_0(t) = \cos t + i \sin t$ , y  $\gamma_1(t) = 0$ , entonces  $\gamma_0$  es homotópica, como curva cerrada, a  $\gamma_1$ , y una posible homotopía está dada por,

$$H(s, t) = (1 - s) \cos t + i \sin t.$$

**Definición 39.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , decimos que  $\Omega$  es convexo si, para toda  $z_0, z_1 \in \Omega$ , se tiene que  $\lambda z_0 + (1 - \lambda)z_1 \in \Omega$ , para todo  $\lambda \in [0, 1]$ .

Esto es, un conjunto es convexo si contiene todos los segmentos de línea que pueden construirse entre una pareja arbitraria de puntos en  $\Omega$ .

**Ejemplo 19.**

1. Si  $a \in \mathbb{C}$  y  $r > 0$ , claramente  $B(a, r) = \{z; |z - a| < r\}$  es un conjunto convexo.
2. Si  $a \in \mathbb{C}$  y  $r > 0$ , claramente  $B(a, r) \setminus \{a\} = \{z; 0 < |z - a| < r\}$  no es un conjunto convexo, pues el segmento de recta que une  $-1/2$  con  $1/2$  no está contenido en  $a$ .

**Proposición 34.** Si  $\Omega$  es un conjunto abierto y convexo en  $\mathbb{C}$ , entonces cualesquiera dos curvas cerradas en  $\Omega$  son homotópicas como curvas cerradas en  $\Omega$ , y cualesquiera dos curvas con los mismos puntos extremos fijos son homotópicas con puntos extremos fijos.

*Demostración.* Sean  $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow \Omega$  y  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \Omega$  dos curvas cerradas en  $\Omega$ , definamos  $H(s, t) = s\gamma_1(t) + (1 - s)\gamma_0(t)$ , claramente  $H$  es continua,  $H(0, t) = \gamma_0(t)$ ,  $H(1, t) = \gamma_1(t)$  y si  $\gamma_k(0) = \gamma_k(1)$ , entonces  $H(s, 0) = s\gamma(0) + (1 - s)\gamma_1(0) = s\gamma(1) + (1 - s)\gamma_1(1) = H(s, 1)$ .

Por otra parte, si  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = z_0$  y  $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = z_1$ , entonces  $H(s, 0) = s\gamma_1(0) + (1 - s)\gamma_0(0) = sz_0 + (1 - s)z_0 = z_0$ , y  $H(s, 1) = s\gamma_1(1) + (1 - s)\gamma_0(1) = sz_1 + (1 - s)z_1 = z_1$ , por lo cual  $H$  es una homotopía con puntos extremos fijos.  $\square$

**Corolario 17.** Un conjunto convexo es simplemente conexo.

**Teorema 20 (El Teorema de deformación).** Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un conjunto abierto no vacío, y suponga que  $f$  es una función holomorfa sobre  $\Omega$ , y que  $\gamma_k : [0, 1] \rightarrow \Omega$ ,  $k = 0, 1$ , son dos curvas suaves por partes en  $\Omega$ .

1. Si  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = z_0$ ,  $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = z_1$ , y  $\gamma(0)$  es homotópica a  $\gamma(1)$  en  $\Omega$ , entonces

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$



2. Si  $\gamma(0)$  y  $\gamma(1)$  son homotópicas como curvas cerradas en  $\Omega$ , entonces

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

*Demostración.* Como  $\gamma_0$  es homotópica a  $\gamma_1$ , existe una función continua  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$  tal que

1.  $H(0, t) = \gamma_0(t)$  si  $0 \leq t \leq 1$ ;
2.  $H(1, t) = \gamma_1(t)$  si  $0 \leq t \leq 1$ ;
3.  $H(s, 0) = z_0$  si  $0 \leq s \leq 1$ , y
4.  $H(s, 1) = z_1$  si  $0 \leq s \leq 1$

Para cada valor de  $s$  fijo, la función  $\gamma_s(t) = H(s, t)$  es una curva intermedia que se obtiene durante el proceso de deformación. Análogamente, para cada valor fijo  $t$ , la curva  $\Gamma_t(s) = H(s, t)$  es una curva que con extremos  $\Gamma_0(t) = H(0, t)$  y  $\Gamma_1(t) = H(1, t)$ . Luego entonces, las líneas horizontales y verticales en el cuadrado corresponden a una red de curvas en  $\Omega$ , donde el lado izquierdo del cuadrado corresponde a la curva  $\gamma_0$ , y el derecho a la curva  $\gamma_1$ . Por otro lado, los lados superior e inferior del cuadrado corresponden a los puntos extremos de la curva, esto es  $\Gamma_0(s) = z_0$  y  $\Gamma_1(s) = z_1$ . Como muestra la figura ??:

Sean  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$ , y  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  particiones de  $[0, 1]$ .

Como  $H$  es continua en  $\Omega$  y  $K = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{C}$  es compacto, su imagen  $H(K)$  es un subconjunto compacto de  $\Omega$ . Sea  $\rho = d(H(K), \mathbb{C} \setminus \Omega)$ . Luego entonces,  $z \in \Omega$  si,  $|H(s, t) - z| < \rho$ . Como  $H$  es uniformemente continua en  $K$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|H(s, t) - H(s', t')| < \rho$  si  $d((s, t), (s', t')) < \delta$ .

Si elegimos las particiones de  $[0, 1]$  regulares de longitud  $1/n$ , para  $n < \sqrt{2}/\delta$  tal que cada subcuadrado tenga longitud menor que  $\delta$ . Si  $R_{kj}$  denota el rectángulo con esquinas  $(s_{k-1}, t_{j-1}), (s_k, t_{j-1}), (s_k, t_j), (s_{k-1}, t_j)$ , entonces la imagen bajo  $H$  del rectángulo  $R_{kj}$  esta contenida dentro de la bola con centro  $B_{kj} = B(H(s_{k-1}, t_{j-1}), \rho)$ , el cual, por construcción, está contenido en  $\Omega$ . Y denotemos por  $\Gamma_{kj} = H(\partial R_{kj})$  orientada en levógiro.

Entonces

$$\sum_{j,k=1}^n \int_{\Gamma_{kj}} f = \int_{\Gamma_0} f + \int_{\gamma_1} f - \int_{\Gamma_1} f - \int_{\gamma_0} f$$

Como  $\Gamma_{jk}$  es una curva cerrada contenida completamente en la bola  $B_{kj}$ , sobre el cual la función  $f$  es holomorfa. El teorema de Cauchy para bolas implica que, cada integral en la suma del lado izquierdo es cero, por ende,

$$0 = \int_{\Gamma_0} f + \int_{\gamma_1} f - \int_{\Gamma_1} f - \int_{\gamma_0} f$$

Como  $\Gamma_0(s) = z_0$  y  $\Gamma_1(s) = z_1$ , entonces  $\int_{\Gamma_0} f = \int_{\Gamma_1} f = 0$ , de donde,

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

Cuando las curvas  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  son cerradas, se procede de manera similar, y se aplica el hecho que  $\Gamma_0(s) = H(s, 0) = H(s, 1) = \Gamma_1(s)$ .

Como consecuencia del teorema de deformación podemos generalizar el teorema de Cauchy-Goursat:

**Teorema 21 (El Teorema de Cauchy).** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un conjunto abierto conexo. Si  $f$  es una función holomorfa en  $\Omega$ , entonces*

$$\int_{\gamma} f = 0$$

*para cualesquier curva cerrada  $\gamma$ , la cual es homotópica a un punto en  $\Omega$ .*

**Corolario 18.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un conjunto abierto, simplemente conexo. Si  $f$  es una función holomorfa en  $\Omega$ , entonces*

$$\int_{\gamma} f = 0$$

*para cualesquier curva cerrada  $\gamma$  en  $\Omega$ .*

**Corolario 19.** *Si  $\Omega \subset \mathbb{C}$  es simplemente conexo, y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa, entonces  $f$  tiene una primitiva en  $\Omega$ .*

*Demostración.* Como consecuencia del corolario anterior  $\int_{\gamma} f = 0$  para toda curva cerrada  $\gamma$  en  $\Omega$ . Aplicando el teorema de Independencia de trayectorias, esto es equivalente a que  $f$  admita una primitiva global en  $\Omega$ .  $\square$

**Corolario 20.** *Si  $\Omega \subset \mathbb{C}$  es simplemente conexo,  $\Omega \neq \mathbb{C}$ , y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa nunca nula, es decir,  $f(z) \neq 0$  si  $z \in \Omega$ . Entonces, existe una función holomorfa  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f(z) = \exp(g(z))$ . Además, si  $z_0 \in \Omega$  y  $e^{w_0} = f(z_0)$ , podemos elegir  $g$  tal que  $g(z_0) = w_0$ .*

*Demostración.* Como  $f$  es nunca nula, entonces  $f'/f$  es holomorfa en  $\Omega$ , como consecuencia del corolario anterior,  $f'/f$  admite una primitiva  $g$ , esto es,  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa tal que  $g' = f'/f$ . Consideremos la función  $h(z) = \exp(g(z))$ , entonces  $h$  es holomorfa y nunca nula en  $\Omega$ , además

$$\left(\frac{f}{h}\right)'(z) = \frac{h(z)f'(z) - h'(z)f(z)}{h(z)^2}.$$

Por otra parte, sabemos que  $h' = g'f$ , de donde  $hf' - fh' = 0$ , lo cual implica que la derivada de  $f/h$  es cero, y como  $\Omega$  es simplemente conexo,  $f/h$  es constante en  $\Omega$ , esto es, existe una constante  $c \in \mathbb{C}$  tal que

$$f(z) = c \exp(g(z)) = \exp(g(z) + c_1),$$

donde  $\exp(c_1) = c$ . En particular, como  $\exp(w) = \exp(x + e\pi i k)$  para  $k \in \mathbb{Z}$ , entonces  $f(z) = \exp(g(z) + c_1 + 2\pi i k)$ , y para un valor apropiado de  $k$  obtenemos  $g(z_0) = w_0$ .  $\square$

Es decir, en un subconjunto propio, y simplemente conexo del plano complejo, que no contenga al origen, siempre podemos definir ramas de logaritmo.

**Corolario 21.** Si  $\Omega \subset \mathbb{C}$  es un conjunto abierto,  $a \in \Omega$ , y  $r > 0$  es un número real tal que  $\overline{B(a, r)} \subset \Omega$ , dada  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa, entonces

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz,$$

donde  $\gamma(t) = a + re^{2\pi i t}$  con  $0 \leq t \leq 1$ .

**Corolario 22 (Las desigualdades de Cauchy).** Sean  $a \in \mathbb{C}$ , y  $R \in \mathbb{R}$ ,  $R > 0$ . Si  $f$  es una función holomorfa en  $B(a, R)$ , tal que  $|f(z)| \leq M$  para toda  $z \in B(a, R)$ , entonces

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}$$

*Demostración.* Como consecuencia del corolario anterior

$$|f^{(n)}(a)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} \ell(\gamma) = \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{n!M}{r^n}$$

Como  $r < R$  es arbitraria, tomando el límite por la izquierda cuando  $r$  tiende a  $R$  tenemos el resultado deseado.  $\square$

**Definición 40.** Diremos que una función es entera, si la función está definida y es holomorfa en todo el plano complejo  $\mathbb{C}$ .

**Ejemplo 20.**

1. Si  $c \in \mathbb{C}$ , y  $f(z) = c$  para toda  $z \in \mathbb{C}$ , entonces  $f$  es entera.
2. Si  $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$  es un polinomio, entonces  $f$  es entera.
3.  $f(z) = ae^{bz}$ , con  $a, b \in \mathbb{C}$  fijos, es una función entera.
4. La suma, el producto, y la composición de funciones enteras, es entera.

Dejamos como ejercicio mostrar el siguiente resultado.

**Proposición 35.** Si  $f$  es una función entera, entonces  $f$  tiene una representación en serie de potencias  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ , con radio de convergencia infinito.

**Teorema 22.** Si  $f$  es una función entera y acotada, entonces  $f$  es constante.

*Demostración.* Supongamos que, existe  $M > 0$  tal que  $|f(z)| < M$  para toda  $z \in \mathbb{C}$ , como  $f$  es entera, en particular es analítica en  $B(a, R)$ , para toda  $a \in \mathbb{C}$ , y  $R > 0$ . Aplicando las desigualdades de Cauchy para  $n = 1$  tenemos:

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R}$$

Como  $R$  es arbitraria, tomando el límite cuando  $R$  tiende a  $\infty$  tenemos  $f'(z) = 0$ , y como  $\mathbb{C}$  es conexo, entonces  $f$  es constante.  $\square$

Si  $p(z)$  y  $q(z)$  son polinomios con coeficientes complejos, el algoritmo de la división nos dice que, podemos encontrar dos polinomios  $s(z)$  y  $r(z)$  tales que  $p(z) = s(z)q(z) + r(z)$ , donde el grado de  $r(z)$  es menor que el grado de  $q(z)$  (si  $r(z) = 0$  diremos que  $r(z)$  tiene grado  $-\infty$ ).

En particular, si  $a$  es un número complejo tal que  $p(z) = 0$ , entonces  $p(z) = (z-a)q(z)$ , si  $s(a) = 0$ , podemos factorizar nuevamente  $z-a$  de  $s(z)$ , continuando con este proceso tenemos  $p(z) = (z-a)^m t(z)$ , con  $1 \leq m \leq$  grado de  $p(z)$ , y  $t(z)$  es un polinomio tal que  $t(a) \neq 0$ .

**Definición 41.** Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa, y  $a \in \Omega$  es un punto que satisface  $f(a) = 0$ , diremos que  $a$  es un cero de multiplicidad  $m \geq 1$  si, existe una vecindad  $B(a, r) \subset \Omega$  del punto  $a$ , y una función holomorfa  $g : B(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$ , tal que  $f(z) = (z - a)^m g(z)$  para toda  $z \in B(a, r)$  y  $g(a) \neq 0$ .

**Teorema 23 (El Teorema Fundamental del Álgebra.).** Si  $p(z)$  es un polinomio no constante, con coeficientes en  $\mathbb{C}$ , entonces existe un número complejo  $a$  tal que  $p(a) = 0$ .

*Demostración.* Supongamos que  $p(z) \neq 0$  para toda  $z \in \mathbb{C}$ , entonces  $f(z) = 1/p(z)$  es una función entera.

Como  $p(z)$  no es constante, entonces  $\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = \infty$ , de donde:  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ . En particular, existe  $R > 0$  tal que  $|f(z)| < 1$  si  $|z| > R$ .

Por otra parte, como  $f$  es continua, en particular, existe  $M > 0$  tal que  $|f(z)| < M$  si  $|z| \leq R$ . Sea  $N = \max\{1, M\}$ , entonces  $|f(z)| \leq N$  para toda  $z \in \mathbb{C}$ .

Es decir,  $f$  es entera y acotada, y como consecuencia del teorema de Liouville,  $f$  es constante, lo cual implica que  $p$  también es constante, lo cual contradice nuestra hipótesis.  $\square$

**Corolario 23.** Si  $p(z)$  es un polinomio no constante, y  $a_1, \dots, a_m$  son sus ceros, tal que  $a_j$  tiene multiplicidad  $k_j$ , entonces

$$p(z) = c(z - a_1)^{k_1} \cdots (z - a_m)^{k_m},$$

para alguna constante  $c$ , además  $k_1 + \dots + k_m$  es el grado de  $p(z)$ .

**Teorema 24 (El Teorema del Módulo Máximo).** Si  $\Omega \subset \mathbb{C}$  es un conjunto abierto, conexo, no vacío, y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa, y existe un punto  $a \in \Omega$  tal que  $|f(a)| > |f(z)|$  para toda  $z \in \Omega$ , entonces  $f$  es constante.

*Demostración.* Sea  $r > 0$  tal que  $B(a, r) \subset \Omega$ , y consideremos la curva  $\gamma(t) = a + re^{2\pi i t}$  con  $0 \leq t \leq 1$ . Como consecuencia de la fórmula integral de Cauchy tenemos:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 f(a + re^{2\pi i t}) 2\pi i t dt$$

De donde

$$|f(a)| \leq \int_0^1 |f(a + re^{2\pi i t})| dt$$

y como  $|f(z)| \leq |f(a)|$  para toda  $z \in \Omega$ , entonces

$$\int_0^1 |f(a + re^{2\pi i t})| dt \leq |f(a)|$$

Luego entonces

$$\int_0^1 (|f(a + re^{2\pi i t})| - |f(a)|) dt = 0$$

y como el integrando es no negativo, entonces  $|f(a + re^{2\pi i t})| - |f(a)| = 0$  para toda  $t$ . Y como  $r$  es arbitraria,  $|f|$  es constante, aplicando las ecuaciones de Cauchy-Riemann tenemos que  $f$  es constante.  $\square$

Es decir, las funciones holomorfas alcanzan su módulo máximo en la frontera.

En particular, podemos aplicar el teorema del módulo máximo para estudiar el comportamiento de las funciones holomorfas, por ejemplo:

**Lema 6 (El lema de Schwarz).** *Si  $f$  es una función holomorfa definida sobre  $\Delta$  y  $|f(z)| \leq 1$  para toda  $z \in \Delta$  y  $f(0) = 0$ , entonces  $|f(z)| \leq |z|$  para toda  $z \in \Delta$  y  $|f'(0)| \leq 1$ . Si  $|f(z_0)| = |z_0|$  para algún  $z_0 \in \Delta \setminus \{0\}$ , entonces  $f(z) = cz$  para alguna constante  $c$ ,  $|c| = 1$ .*

*Demostración.* Si definimos la función  $g : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$  como  $g(z) = f(z)/z$  si  $z \neq 0$ , y  $g(z) = f'(0)$  si  $z = 0$ , como hemos visto en otras ocasiones,  $g$  es continua, y holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , y como consecuencia del teorema de Morera  $g$  es holomorfa en  $\Delta$ . Si  $\Delta_r = \overline{B(0, r)}$  para  $0 < r < 1$ , por el principio del módulo máximo  $|g(z)| \leq 1/r$ , para toda  $z \in \Delta_r$ , de donde  $|f(z)| \leq |z|/r$ , para  $z \in \Delta$  fija, consideremos  $r \rightarrow 1$ , entonces  $|f(z)| \leq |z|$ . Claramente  $|g(0)| \leq 1$ ; es decir,  $|f'(0)| \leq 1$ .

Si  $|f(z_0)| = |z_0|$ , y  $z_0 \neq 0$ , entonces  $|g(z_0)| = 1$  es máximo en  $\Delta_r$ , donde  $|z_0| < r < 1$ , y así  $g$  es constante en  $\Delta_r$ , y como la constante es independiente de  $r$ , entonces  $f(z) = cz$ , para alguna constante de módulo uno  $c$ .  $\square$



## Capítulo 8

# El Índice de una curva

Podemos ver facilmente que  $\int_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz = 2\pi i n$  si  $\gamma(t) = a + re^{2\pi i t}$ , con  $0 \leq t \leq 1$ , este resultado lo generalizaremos en la siguiente proposición:

**Proposición 36.** Si  $a \in \mathbb{C}$ , y  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  es una curva cerrada, suave por partes que no pasa por  $a$ , es decir,  $a \notin \text{im}(\gamma)$ , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$$

es un entero.

*Demostración.* Bastará demostrar este resultado en el caso en que  $\gamma$  sea una curva suave.

Definimos  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  como

$$g(t) = \int_0^t \frac{\dot{\gamma}(s)}{\gamma(s) - a} ds.$$

Claramente  $g(0) = 0$ , y  $g(1) = \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$

Además

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t) - a}, \text{ si } 0 \leq t \leq 1$$

Consecuentemente



$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(e^{-g(t)}[\gamma(t) - a]) &= e^{-g(t)}\dot{\gamma}(t) - \dot{g}(t)e^{g(t)}(\gamma(t) - a) \\
&= e^{-g(t)} \left[ \dot{\gamma}(t) - \frac{\dot{g}(t)}{(\gamma(t) - a)}(\gamma(t) - a) \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Luego entonces  $e^g(\gamma - a)$  es constante, y como  $\gamma$  es una curva cerrada, en particular

$$e^{-g(0)}(\gamma(0) - a) = \gamma(0) - a = \gamma(1) - a = e^{-g(1)}(\gamma(1) - a)$$

lo cual implica que,  $1 = e^{-g(0)} = e^{-g(1)}$ , pues  $a \notin \text{im}\gamma$ . Entonces  $g(1) = 2\pi i k$ , para algún entero  $k$ .  $\square$

**Definición 42.** Si  $\gamma$  es una curva cerrada, suave por partes en  $\mathbb{C}$ , para cada  $a \notin \text{im}\gamma$ , el índice de  $\gamma$  con respecto al punto  $a$ , se define como

$$n(\gamma, a) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a}.$$

Este número también se denomina el número de vueltas de  $\gamma$  alrededor de  $a$ .

Como consecuencia de la proposición anterior, el índice de una curva con respecto a un punto es un número entero.

Recordamos que, si  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  es una curva suave por partes, la curva  $-\gamma$  definida como  $-\gamma(t) = \gamma(1 - t)$  es una reparametrización, que cambia la orientación, de la curva inicial, y si  $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  es otra curva tal que  $\gamma(1) = \sigma(0)$ , entonces  $\gamma + \sigma$  es la curva definida como  $(\gamma + \sigma)(t) = \gamma(2t)$  si  $0 \leq t \leq 1/2$ , y  $(\gamma + \sigma)(t) = \sigma(2t - 1)$  si  $1/2 \leq t \leq 1$ .

**Proposición 37.** Si  $\gamma$  y  $\sigma$  son dos curvas cerradas, suaves por partes, con los mismos puntos iniciales, entonces:

1.  $n(\gamma, a) = -n(-\gamma, a)$ , si  $a \notin \text{im}\gamma$ .
2.  $n(\gamma + \sigma, a) = n(\gamma, a) + n(\sigma, a)$ , si  $a \notin \text{im}(\gamma + \sigma)$ .
3. Si  $a \notin \text{im}\gamma \cup \text{im}\sigma$  y si  $\gamma$  es homotópica a  $\sigma$  en  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ , entonces  $n(\gamma, a) = n(\sigma, a)$ .

*Demostración.* 1 y 2 son consecuencia de la proposición (7.2). mientras que 3 es consecuencia del teorema de deformación (10.0.15)

□

**Teorema 25.** *Sea  $\gamma$  una curva suave por partes en  $\mathbb{C}$ . Entonces  $n(\gamma, a)$  es localmente constante, esto es para cada componente conexa  $U$  de  $\Omega = \mathbb{C} \setminus im\gamma$ , existe una constante  $c_U \in \mathbb{C}$  tal que  $n(\gamma, a) = c_U$  para cada  $z \in U$ .*

*Además,  $n(\gamma, a) = 0$  si  $a$  pertenece a la componente no acotada de  $\Omega$ .*

*Demostración.* Definamos  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  como  $f(a) = n(\gamma, a)$ , a continuación demostraremos que  $f$  es continua. Como  $\Omega$  es abierto las componentes conexas de  $\Omega$  son conjuntos abiertos. Sea  $a \in \Omega$ , y definamos  $r = d(a, im\gamma)$ , la distancia de la curva  $\gamma$  al punto  $a$ , como  $\Omega$  es abierto,  $r > 0$ . Si  $|a - b| < \delta < r/2$  entonces

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} - \int_{\gamma} \frac{dz}{z-b} \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{a-b}{(z-a)(z-b)} dz \right| \\ &= \geq \frac{|a-b|}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z-a||z-b|} \end{aligned}$$

pues  $|z-a| < r/2$ . Como  $z \in im\gamma$ , entonces  $|z-a| \geq r > r/2$ , y  $|z-b| \geq r > r/2$ , por lo que

$$\frac{r}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z-a||z-b|} < \frac{\delta}{2\pi} \left( \frac{4}{r^2} \ell(\gamma) \right)$$

Luego entonces, dada  $\epsilon > 0$ , definimos  $\delta < \min\{r/2, (\pi r^2 \epsilon)/2\ell(\gamma)\}$ , si  $|z-a| < \delta$  entonces  $|f(b) - f(a)| < \epsilon$ , es decir,  $f$  es continua en  $\Omega$ .

Como consecuencia de la proposición 13.1,  $im(f) \subset \mathbb{Z}$ , y para cada componente conexa  $U \subset \Omega$ , se tiene que  $f(U)$  es un punto, en particular  $f$  es constante en  $U$ .

Si ahora  $U_0$  denota la componente no acotada de  $\Omega$ , existe  $R > 0$  tal que  $U_0 \supset \{z : |z| > R\}$ . Si  $\epsilon > 0$ , elegimos  $a$  con  $|a| > R$  y  $|z-a| > (2\pi\epsilon)^{-1}\ell(\gamma)$ , uniformemente para  $z \in im(\gamma)$ , consecuentemente  $|n(\gamma, a)| < \epsilon$ , en particular  $\lim_{z \rightarrow \infty} n(\gamma, a) = 0$ , y como  $n(\gamma, a)$  es constante en  $U_0$ , entonces  $n(\gamma, a) = 0$  para cada  $a \in U_0$ .

□

Como consecuencia de esto, el interior de una curva  $\gamma$  puede definirse como  $\{z : n(\gamma, z) \neq 0\}$ , y esta definición debería coincidir con el interior definido por el teorema de la curva de Jordan.<sup>4</sup>

**Proposición 38.** *(La fórmula integral de Cauchy). Sea  $f$  una función holomorfa definida en un abierto  $\Omega$ . Sea  $\gamma$  una curva cerrada en  $\Omega$  suave por partes, sea  $a$  un punto que no este sobre la imagen de la curva  $\gamma$ , y supongamos que  $\gamma$  es homotópica a un punto. Entonces*

$$f(a) \cdot n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz$$

4 Si  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  es una curva cerrada simple, entonces  $\mathbb{C} \setminus im\gamma$  puede escribirse en forma única como la unión disjunta de dos regiones  $Int(\gamma)$  y  $Out(\gamma)$ , tales que  $Int(\gamma)$  es acotada. La región  $Int(\gamma)$  se denomina el interior de  $\gamma$ , y  $Out(\gamma)$  se denomina el exterior de  $\gamma$ . La región  $Int(\gamma)$  es simplemente conexa, y  $\gamma$  es homotópica a cualquier punto en  $Int(\gamma) \cup im\gamma$ . La frontera de cada una de estas regiones es la imagen de  $\gamma$ .

*Demostración.* La demostración es análoga a la del teorema de Cauchy para rectángulos. Para  $z \in \Omega$ , definamos la función:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}, & \text{si } z \in \Omega \setminus \{a\}; \\ f'(a), & \text{si } z = a \end{cases}$$

Claramente  $g$  es continua en  $\Omega$ , y  $g$  es holomorfa en  $\Omega \setminus \{a\}$ , como consecuencia del teorema de Cauchy (12.2)  $0 = \int_{\gamma} g dz$ , y como

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} g dz &= \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz - f(a) \int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz - 2\pi i n(\gamma, a) f(a), \end{aligned}$$

$$\text{de donde } n(\gamma, a) f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz. \quad \square$$

**Corolario 24.** *(La fórmula integral de Cauchy para derivadas). Sea  $f$  una función holomorfa definida en un abierto  $\Omega$ . Sea  $\gamma$  una curva cerrada en  $\Omega$ , suave por partes. Sea  $a$  un punto que no este sobre la imagen de la curva  $\gamma$ , y supongamos que  $\gamma$  es homotópica a un punto. Entonces*

$$n(\gamma, a) f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - a)^{k+1}} dz$$

*Demostración.* Si  $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$ , derivando  $F$  con respecto a  $z$  tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dF(z)}{dz} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz} \left( \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} \right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta \end{aligned}$$

procediendo inductivamente, se obtiene el resultado deseado.  $\square$

$\square$

A continuación aplicaremos la fórmula integral de Cauchy para obtener  $\int_{\gamma} f$ , donde  $\gamma$  es una curva cerrada, y  $f$  es una función holomorfa en un abierto que contiene a la cerradura de la región acotada por  $\gamma$ , salvo quizá, un número finito de puntos, ninguno de los cuales está sobre la traza de la curva  $\gamma$ .

### Ejemplos:

1.  $\int_{\gamma} \frac{z^2}{z-1} dz$ , donde  $\gamma(t) = 2e^{2\pi i t}$ , con  $0 \leq t \leq k$ .

Como  $f(z) = z^2$  es entera,  $1 \notin \text{im}\gamma$ , y  $n(\gamma, 1) = 1$ , aplicando la fórmula integral de Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^2}{z-1} dz = f(1)n(\gamma, 1) = 1 \cdot k = k,$$

despejando obtenemos que  $2\pi i k$  es el valor deseado.

2.  $\int_{\gamma} \frac{z^2-1}{z^2+1} dz$  donde  $\gamma(t) = (t) = 2e^{2\pi i t}$ , con  $0 \leq t \leq 1$ .

Para poder aplicar la fórmula integral de Cauchy, necesitamos que el denominador sea de la forma  $(z-a)^k$  para alguna  $k \geq 0$ , para esto, notamos que  $n(\gamma, \pm i) = 1$ , y

$$\frac{z^2-1}{z^2+1} = (z^2+1) \frac{1}{(z+i)(z-i)} = -\frac{i}{2} \frac{z^2-1}{z+i} + \frac{i}{2} \frac{z^2-1}{z-i}$$

de donde

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} &= \int_{\gamma} \left( -\frac{i}{2} \frac{z^2 - 1}{z + i} + \frac{i}{2} \frac{z^2 - 1}{z - i} \right) dz \\ &= -\frac{i}{2} \int_{\gamma} \frac{z^2 - 1}{z + i} + \frac{i}{2} \int_{\gamma} \frac{z^2 - 1}{z - i} dz\end{aligned}$$

Aplicando la fórmula integral de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^2 - 1}{z + i} dz = (i^2 - 1)n(\gamma, i) = i^2 - 1 = -2$$

y

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^2 - 1}{z - i} dz = ((-i)^2 - 1)n(\gamma, i) = i^2 - 1 = -2$$

de donde

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} dz = -\frac{i}{2}(-4\pi i) + \frac{i}{2}(-4\pi i) = 0$$

3.  $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^4} dz$ , donde  $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$ , si  $0 \leq t \leq 1$ .

Aplicando la fórmula integral de Cauchy para derivadas, si  $f(z) = \sin z$  entonces:

$$f^{(3)}(0)n(\gamma, 0) = \frac{3!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^4} dz$$

Como  $n(\gamma, 0) = 1$ , y  $f^{(3)}(z) = -\cos z$ , entonces  $f^{(3)}(0) = -1$ , luego entonces  $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{3!}(-1) = -\frac{\pi i}{3}$ .

4.  $\int_{\gamma} \left( \frac{z}{z-1} \right)^n dz$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $\gamma(t) = 1 + 2^{2\pi i t}$ , con  $0 \leq t \leq 1$ .

Nótese que  $\left( \frac{z}{z-1} \right)^n = \frac{z^n}{(z-1)^n}$ , por lo que, si  $f(z) = z^n$ , como consecuencia de la fórmula integral de Cauchy para derivadas

$$f^{(n)}(1)n(\gamma, 1) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z_n}{(z-1)^n} dz.$$

Como  $f^{(n)}(z) = n!$ , y  $n(\gamma, 1) = 1$ , entonces  $\int_{\gamma} \left( \frac{z}{z-1} \right)^n = 2\pi i$ .

También podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy para obtener integrales de la forma  $\int_{\gamma} \frac{f'}{f}$ , si  $f$  es holomorfa en una región  $\Omega$  que contenga en su interior la región acotada por la curva  $\gamma$ , y que admita sólo un número finito de ceros en  $\Omega$ . Recordamos que, si  $a$  es un cero de la función holomorfa  $f$ , existe un entero positivo  $m$ , y una función holomorfa  $g(z)$ , tal que  $f(z) = (z-a)^m g(z)$ , con  $g(a) \neq 0$ . De donde, si  $a_1, \dots, a_s$  son los ceros de  $f$ ,  $a_j \neq a_k$  si  $j \neq k$ , entonces existen enteros positivos  $m_1, \dots, m_s$ , y una función holomorfa  $g$  tal que  $f(z) = (z-a_1)^{m_1} \dots (z-a_s)^{m_s} g(z)$  con  $g(a_j) \neq 0$ , en particular

$$\begin{aligned} f'(z) &= m_1(z-a_1)^{m_1-1}(z-a_2)^{m_2} \dots (z-a_s)^{m_s} g(z) + \dots \\ &\quad + m_j(z-a_1)^{m_1} \dots (z-a_j)^{m_j-1} \dots (z-a_s)^{m_s} g(z) + \dots \\ &\quad + m_n(z-a_1)^{m_1} (z-a_2)^{m_2} \dots (z-a_s)^{m_s-1} g(z) \\ &\quad + (z-a_1)^{m_1} (z-a_2)^{m_2} \dots (z-a_s)^{m_s} g'(z) \end{aligned}$$

Consecuentemente

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_1}{z-a_1} + \dots + \frac{m_s}{z-a_s} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \int_{\gamma} \left( \frac{m_1}{z-a_1} + \dots + \frac{m_s}{z-a_s} + \frac{g'(z)}{g(z)} \right) dz \\ &= \int_{\gamma} \frac{m_1}{z-a_1} dz + \dots + \int_{\gamma} \frac{m_s}{z-a_s} dz + \int_{\gamma} \frac{g'}{g} dz \end{aligned}$$

Como  $g$  no se anula en  $\Omega$ , entonces  $g'/g$  es holomorfa en  $\Omega$ , de donde  $\int_{\gamma} g'/g = 0$ , y por la definición del índice  $n(\gamma, a_k) = 2\pi i \int_{\gamma} dz/(z-a_k)$ , de donde

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=0}^s m_k n(\gamma, a_k).$$

Esto lo podemos aplicar para calcular integrales como la siguiente:

$$\int_{\gamma} \frac{2z-1}{z^2+z+1} dz, \text{ donde } \gamma(t) = 2e^{2\pi i t}, \text{ con } 0 \leq t \leq 1.$$

Como  $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$ , los ceros de  $z^2+z+1$  son las raíces cúbicas de la unidad  $\zeta_k$ ,  $k = 0, 1, 2$  con  $\zeta_0 = 1$ . Claramente  $|\zeta_k| = 1$ , y por ende, se encuentran en el interior de  $\gamma$ , además  $n(\gamma, \zeta_k) = 1$ , de donde

$$\int_{\gamma} \frac{2z-1}{z^2+z+1} dz = 2\pi i (n(\gamma, \zeta_1) + n(\gamma, \zeta_2)) = 2\pi i (1+1) = 4\pi i.$$

En particular podemos ver que:

**Proposición 39.** Sea  $a \in \mathbb{C}$ ,  $R > 0$  y suponga que  $f$  es una función holomorfa en  $B(a, R)$ . Sea  $\alpha = f(a)$ . Si  $f(z) - a$  tiene un cero de orden  $m$  en  $z = a$ , entonces existe  $\epsilon > 0$  y  $\delta > 0$  tal que, si  $0 < |\zeta - \alpha| < \delta$ , entonces  $f(z) = \zeta$  tiene exactamente  $m$  soluciones en  $B(a, \epsilon)$ .

Esta proposición nos dice, en particular que,  $f(B(a, \epsilon)) \supset B(\alpha, \delta)$ . Además, el hecho que  $f(z) - \alpha$  tenga un cero de multiplicidad finita, garantiza que  $f$  no es constante.

*Demostración.* Como los ceros de una función analítica son aislados. Si  $m = 1$ , podemos escoger  $\epsilon > 0$  tal que  $\epsilon < R/2$ . De donde,  $f(z) = \alpha$  no tiene soluciones si  $0 < |z - a| < 2\epsilon$ , y  $f'(z) \neq 0$  si  $0 < |z - a| < 2\epsilon$ . (Si  $m \geq 2$ , entonces  $f'(a) = 0$ .)

Sea  $\gamma(t) = a + \epsilon e^{2\pi i t}$ , con  $0 \leq t \leq 1$ , y consideremos la curva  $\sigma = f \circ \gamma$ . Como  $\alpha \notin \text{im}(\sigma)$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $B(\alpha, \delta) \cap \text{im}(\sigma) = \emptyset$ .

De donde,  $B(\alpha, \delta)$  está contenida en alguna componente de  $\mathbb{C} \setminus \text{im}(\sigma)$ ; esto es,  $|\alpha - \zeta| < \delta$  implica  $n(\sigma, \alpha) = n(\sigma, \zeta) = \sum_{k=1}^p n(\gamma, z_k(\zeta))$ . Y como  $n(\gamma, z)$  debe ser cero, o uno, y tenemos exactamente  $m$  soluciones de la ecuación  $f(z) = \zeta$  en el interior de  $B(a, \epsilon)$ . Como  $f'(z) \neq 0$  para  $0 < |z - a| < \epsilon$ , cada una de las raíces debe ser simple.  $\square$

**Teorema 26.** (El teorema del mapeo abierto). Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  abierto y conexo, sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa no constante. Entonces,  $f(U) \subset \mathbb{C}$  es abierto, si  $U \subset \Omega$  es abierto.

*Demostración.* Sea  $U \subset \Omega$  un conjunto abierto,  $U \neq \emptyset$ , y supongamos que  $a \in U$ , y sea  $\alpha = f(a)$ . Como vimos en la proposición anterior, podemos encontrar  $\epsilon > 0$  y  $\delta > 0$  tales que  $B(a, \epsilon) \subset U$  y  $f(B(a, \epsilon)) \supset B(\alpha, \delta)$ .  $\square$

**Corolario 25.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , abierto. Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa e inyectiva, denotemos  $G = f(\Omega)$ . Entonces  $f^{-1} : G \rightarrow \Omega$  es analítica y  $(f^{-1})'(w) = [f'(z)]^{-1}$ , donde  $w = f(z)$ .

*Demostración.* Como consecuencia del teorema del mapeo abierto,  $f^{-1}$  es continua y  $\Omega$  es abierto. Como  $z = f^{-1}(f(z))$  para cada  $z \in \Omega$ , como consecuencia de la regla de la cadena  $(f^{-1})'(w) = [f'(z)]^{-1}$ , donde  $w = f(z)$ .  $\square$

**Tarea.** Del libro de J. E. Marsden, Basic Complex Analysis, realice los siguientes ejercicios:

§2, 2 :

Ejercicio 7, Se satisface el teorema de Cauchy separadamente para las partes real e imaginaria de una función holomorfa  $f$  ? Si es así, demuestrelo; si no, de un contraejemplo.

Ejercicio 10, Evalúe  $\int_{\gamma} \sqrt{z}$  donde  $\gamma$  es la parte superior del círculo unitario: primero directamente, y posteriormente; usando el teorema fundamental.

§2, 3 :

Ejercicio 1, Muestre que  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  no es simplemente conexo.

§2, 4 :

1. Evalúe las siguientes integrales:

(a)  $\int_{\gamma} \frac{z^2}{z-1} dz$ , donde  $\gamma$  es el círculo de radio 2, centrado en 0.

(b)  $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2} dz$ , donde  $\gamma$  es el círculo de radio 1, centrado en 0.

3. Si  $f$  es entera, y  $|f(z)| \leq M|z|^n$  para  $|z|$  grande,  $M$  una constante, y  $n$  un entero, muestre que  $f$  es un polinomio de grado  $\leq n$ .



4. Sea  $f$  una función analítica en el interior y sobre una curva cerrada simple  $\gamma$ . Suponga que  $f = 0$  sobre  $\gamma$ . Muestre que  $f = 0$  en el interior de  $\gamma$ .

6. Sea  $f$  una función analítica sobre una región  $A$ , y sea  $\gamma$  una curva cerrada en  $A$ . Para  $z_0 \in A \setminus \text{im}(\gamma)$ , muestre que

$$\int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta$$

Puede generalizar este resultado ?

8. Suponga que  $f$  es entera y que  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z} = 0$ . Demuestre que  $f$  es constante.

13. Use el ejemplo 2.1.12 apropiadamente, y la fórmula integral de Cauchy para evaluar las siguientes integrales;  $\gamma$  es el círculo  $|z| = 2$  en cada caso.

$$(a) \frac{dz}{z^2 - 1} \quad (b) \frac{dz}{z^2 + z + 1} \quad (c) \frac{dz}{z^2 - 8} \quad (d) \frac{dz}{z^2 + 2z - 3}$$

14. Demuestre que  $\int_{\gamma} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta = \pi$  considerando  $\int_{\gamma} (e^z/z) dz$ , donde  $\gamma$  es el círculo unitario.

21. Sea  $f$  analítica en el interior y sobre el círculo  $|z - z_0| = R$ . Demuestre que

$$\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} - f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[ \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} - \frac{1}{(z - z_0)^2} \right] f(z) dz$$

para  $z_1, z_2$  en el interior de  $\gamma$ .

§2,5

1. Encuentre el máximo de  $|e^z|$  sobre  $|z| \leq 1$ .

13. Sea  $f$  una función analítica y sea  $f'(z) \neq 0$  sobre una región  $A$ . Sea  $z_0 \in A$  y suponga que  $f(z_0) \neq 0$ . Dado  $\epsilon > 0$ , muestre que existe  $z \in A$  y  $\zeta \in A$  tales que  $|z - z_0| < \epsilon$ ,  $|\zeta - z_0| < \epsilon$ , y

$$|f(z)| > |f(z_0)| \quad |f(\zeta)| < |f(z_0)|$$

Sugerencia: Aplique el teorema del módulo máximo.

§3, 2

5. Obtenga la serie de Taylor de las siguientes funciones ( De apropiadamente los primeros términos de la serie de Taylor)

$$(a) \quad (\sin z)/z, z_0 = 1. \quad (b) \quad z^2 e^z, z_0 = 0. \quad (c) \quad e^z \sin z, z_0 = 0.$$

7. Calcule la serie de Taylor de las siguientes funciones en los puntos indicados:

$$(a) \quad e^{z^2}, z_0 = 0 \quad (b) \quad 1/(z-1)(z-2), z_0 = 0$$

9. Obtenga los primeros términos de la serie de Taylor de  $\sqrt{z^2-1}$  alrededor de 0.

10. Sea  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , y  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  series convergentes para  $|z| < R$ . Sea  $\gamma$  un círculo de radio  $0 < r < R$  y defina

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta} g\left(\frac{z}{\zeta}\right) d\zeta$$

Muestre que  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ . (Sugerencia: Use el ejemplo 2.4.15.)



## Apéndice A

# Teoría Básica de las Series de Potencias.

La teoría de funciones de una variable compleja nos permite extender los conceptos fundamentales del cálculo al dominio complejo. Para esto, dotamos a los números complejos de la topología inducida por el plano real  $\mathbb{R}^2$ , por medio de la función  $\mu(x+yi) = (x, y)$  y la métrica inducida por el módulo en  $\mathbb{C}$ , esto es, si  $z, w \in \mathbb{C}$ , la distancia entre  $z$  y  $w$  será igual al módulo de su diferencia. Una vez dotado  $\mathbb{C}$  con esta topología, podemos introducir los conceptos de límite y continuidad. En esta sección daremos, a manera de repaso en la mayoría de los casos, las definiciones de los conceptos que utilizaremos a lo largo de estas notas.

### A.1. Introducción.

Al identificar  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$ , por medio de la función  $\mu(x+yi) = (x, y)$ , el módulo de  $z = x+yi$ , que denotamos  $|z|$  se define como el número real no negativo:

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

En particular, si  $z, w \in \mathbb{C}$ , entonces  $|z-w|$  corresponde a la distancia entre  $z$  y  $w$  (esto es, su distancia como puntos en  $\mathbb{R}^2$ ), una propiedad fundamental de la función distancia es que esta satisface la desigualdad del triángulo, es decir:

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$$

para cualesquiera números complejos  $z_1, z_2$  y  $z_3$ .

Sin embargo, esta no es la única forma de dotar a  $\mathbb{C}$  de una distancia, por ejemplo, podemos definir

$$\rho(z, w) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = w \\ 1 & \text{si } z \neq w. \end{cases}$$

Esta función, también satisface ser una función distancia, cabe notar que, los conceptos de convergencia de una sucesión, límites y continuidad dependen no sólo del conjunto dado, sino de la métrica (o distancia) de la que se dota al conjunto.

Recordamos que:

**Definición 43.** Sea  $X$  un conjunto no vacío, y  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  una función. La función  $d$  se denomina una función distancia (o métrica) en  $X$ , si  $d$  satisface las siguientes condiciones:

1.  $d(z, w) = 0$ , para toda  $z, w \in X$ .
2.  $d(z, w) = 0$  si, y sólo si  $z = w$
3.  $d(z, w) = d(w, z)$  para toda  $z, w \in X$ .
4.  $d(z, w) \leq d(z, u) + d(u, w)$  para toda  $z, u, w \in X$ .

En particular, un *espacio métrico* es una pareja  $(X, d)$ , donde  $X$  es un conjunto no vacío y  $d$  es una función distancia (o métrica) en  $X$ .

Luego entonces, podemos generalizar los conceptos de conjuntos abiertos (resp. cerrados) que hemos estudiado en  $\mathbb{R}^n$  a cualquier espacio métrico como sigue:

Dado un espacio métrico  $(X, d)$ , si  $x \in X$  y  $r \in \mathbb{R}$ ; con  $r > 0$ , definimos la bola abierta con centro en  $x$  y radio  $r$ , como el conjunto de puntos en  $X$  que distan de  $x$  menos que  $r$ , simbólicamente

$$B(x, r) = \{y \in X; d(x, y) < r\},$$

por otra parte, definimos la bola cerrada con centro en  $x$  y radio  $r$ , como el conjunto de puntos en  $X$  que distan de  $x$  a lo más  $r$ , es decir:

$$\overline{B(x, r)} = \{y \in X; d(x, y) \leq r\}.$$

Si  $X = \mathbb{R}^2$ , la bola  $B(x, r)$  se suele denominar el disco abierto con centro en  $x$  y radio  $r$ , y también se denota como  $D(x, r)$ .

**Ejemplo 21.**

1. Si  $X = \mathbb{C}$ , y  $z, w \in \mathbb{C}$ , definimos  $d_1(z, w) = |z - w|$ , entonces  $(\mathbb{C}, d_1)$  es un espacio métrico, y  $B(0, 1)$  corresponde al interior del disco unitario con centro en el origen, como se muestra en el lado izquierdo de la Figura (??).
2. Si  $X = \mathbb{C}$ , definimos  $d_2(x + iy, a + ib) = \max\{|x - a|, |y - b|\}$ , entonces  $(\mathbb{C}, d_2)$  es un espacio métrico, y  $B(0, 1)$  corresponde al cuadrado unitario con centro en el origen, como se muestra en la parte central de la Figura (??).
3. Si  $X = \mathbb{C}$ , definimos  $d_3(x + iy, a + ib) = |x - a| + |y - b|$ , entonces  $(\mathbb{C}, d_3)$  es un espacio métrico, y  $B(0, 1)$  corresponde al cuadrado con centro en el origen, como se muestra en el lado derecho de la Figura (??).
4. Si  $X = \mathbb{C}$ , definimos  $\rho(z, w) = 0$  si  $z = w$  y 1 si  $z \neq w$ , entonces  $(\mathbb{C}, \rho)$  es un espacio métrico, y  $B(0, 1) = \{0\}$ , mientras que  $\overline{B(0, 1)} = \mathbb{C}$ .

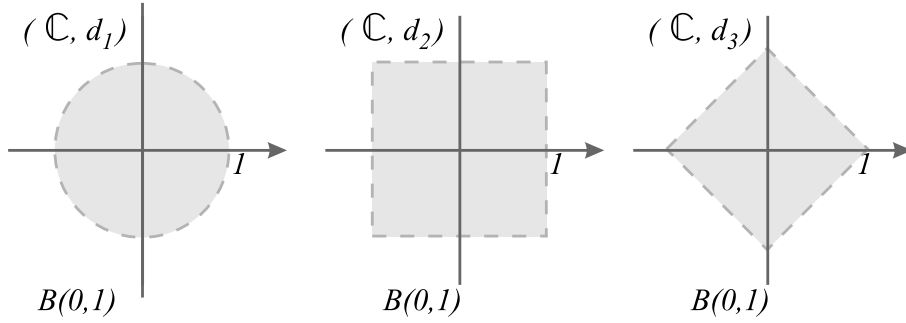


Figura A.1: La bola con centro en el origen y radio uno

**Definición 44.** Dado  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $\Omega \subset X$ , diremos que  $\Omega$  es un subconjunto abierto de  $X$  si, para cada punto  $x \in \Omega$  existe  $\epsilon = \epsilon_x > 0$  tal que  $B(x, \epsilon) \subset \Omega$ .

Cuando no haya lugar a confusiones, simplemente diremos que  $\Omega$  es abierto

En particular, si  $B(x, r) \subset X$  es una bola abierta en  $X$ , entonces  $B(x, r)$  es un subconjunto abierto de  $X$ .

**Proposición 40.** Si  $(X, d)$  es un espacio métrico, entonces:

1. Los conjuntos  $X$  y  $\emptyset$  son abiertos.
2. Si  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  son abiertos, entonces  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  es abierto.
3. Si  $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in I}$  es una familia arbitraria de subconjuntos abiertos, entonces  $\cup_{\alpha \in I} \Omega_\alpha$  es abierto.

*Demostración.* El inciso (1) es consecuencia inmediata de la definición.

Para demostrar (2), si  $x \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ , entonces  $x \in \Omega_k$ , para  $k = 1, 2$ . Como  $\Omega_k$  es abierto, existe  $r_k > 0$  tal que  $B(x, r_k) \subset \Omega_k$ . Definamos  $r$  como el menor valor entre  $r_1$  y  $r_2$ , esto es,  $r := \min\{r_1, r_2\}$ .

Entonces  $B(x, r) \subset B(x, r_k) \subset \Omega_k$ , para  $k = 1, 2$ . Así,  $B(x, r) \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$ , es decir,  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  es abierto.

(3) Finalmente, si  $x \in \cup_{\alpha \in I} \Omega_\alpha$ , existe  $\alpha_0 \in I$  tal que  $x \in \Omega_{\alpha_0}$ . Como  $\Omega_{\alpha_0}$  es abierto, existe  $r_{\alpha_0} > 0$  tal que  $B(x, r_{\alpha_0}) \subset \Omega_{\alpha_0} \subset \cup_{\alpha \in I} \Omega_\alpha$ , por lo que, uniones arbitrarias de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.  $\square$

**Corolario 26.** Si  $\Omega_1, \dots, \Omega_n$  son abiertos, entonces  $\cap_{k=1}^n \Omega_k$  es abierto.

Por lo que, intersecciones finitas de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

**Definición 45.** Dado  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $\Omega \subset X$ , diremos que  $\Omega$  es un subconjunto cerrado en  $X$ , si su complemento  $X \setminus \Omega$  es abierto.

Cuando no haya lugar a confusiones, simplemente diremos que  $\Omega$  es cerrado.

Como consecuencia de la definición de cerrado, las propiedades de complemento de un conjunto, y la proposición anterior tenemos:

**Proposición 41.** Si  $(X, d)$  es un espacio métrico, entonces:

1. Los conjuntos  $X$  y  $\emptyset$  son cerrados.
2. Si  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  son cerrados, entonces  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  es cerrado.
3. Si  $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in I}$  es una familia arbitraria de cerrados, entonces  $\cap_{\alpha \in I} \Omega_\alpha$  es cerrado.

**Cuidado:** Un conjunto es cerrado, si es el complemento de un abierto, este enunciado **no** significa que: si un conjunto no es abierto entonces es cerrado.

De cálculo básico sabemos que en  $\mathbb{R}$ , con la métrica  $d(x, y) = |x - y|$  el conjunto  $(0, 1] = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x \leq 1\}$  no es abierto, ni cerrado. Este ejemplo lo podemos generalizar como sigue: Si consideramos el espacio métrico  $\mathbb{C}$  con la métrica  $d(z, w) = |z - w|$ , entonces  $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0\} \cup \{0\}$  no es abierto, ni cerrado.

**Definición 46.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $\Omega \subset X$ .

1. El interior de  $\Omega$ , que denotaremos  $\Omega^\circ$ , se define como el máximo conjunto abierto contenido en  $\Omega$ , así:

$$\Omega^\circ := \bigcup_{\substack{G \subseteq \Omega \\ G \text{ es abierto}}} G$$

2. La cerradura de  $\Omega$ , que denotaremos  $\overline{\Omega}$ , se define como el mínimo subconjunto cerrado que contiene a  $\Omega$ , de donde:

$$\overline{\Omega} := \bigcap_{\substack{G \supseteq \Omega \\ G \text{ es cerrado}}} G$$

3. La frontera de  $\Omega$ , se denotará  $\partial\Omega$ , se define como:

$$\partial\Omega = \overline{\Omega} \cap \overline{(X \setminus \Omega)}.$$

**Ejemplo 22.**

Sea  $(\mathbb{R}, d)$  es el espacio métrico de los números reales dotados con la métrica usual  $d(x, y) = |x - y|$ , y consideremos  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  el subconjunto de los números racionales, entonces  $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$  y  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ .

En general, si consideramos  $(\mathbb{R}^n, d)$  con la métrica usual

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2},$$

entonces  $(\mathbb{Q}^n)^\circ = \emptyset$ , y  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}^n$ .

**Definición 47.** Dado un espacio métrico  $(X, d)$ , y  $\Omega \subset X$ , diremos que  $\Omega$  es un subconjunto denso de  $X$  si la cerradura de  $\Omega$  es un conjunto denso en  $X$ , esto es,  $\overline{\Omega} = X$ .



Como consecuencia del ejemplo anterior  $\mathbb{Q}$  es denso en  $\mathbb{R}$ , mientras que  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  es denso en  $\mathbb{R}^2$ , en particular  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  es denso en  $\mathbb{C}$ .

**Proposición 42.** *Dado un espacio métrico  $(X, d)$ , si  $A, B \subset X$ , entonces:*

1.  $A$  es abierto si, y sólo si  $A = A^\circ$ .
2.  $A$  es cerrado si, y sólo si  $A = \overline{A}$ .
3.  $A^\circ = X \setminus \overline{(X - A)}$ .
4.  $\overline{A} = X \setminus (X - A)^\circ$ .
5.  $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$ .
6.  $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .
7.  $a \in A^\circ$  si, y sólo si, existe  $r > 0$  tal que  $B(a, r) \subset A$ .
8.  $a \in \overline{A}$  si, y sólo si, para toda  $r > 0$ ,  $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$ .

**Definición 48.** *Un espacio métrico  $(X, d)$  es conexo si, los únicos subconjuntos de  $X$  que son tanto abiertos como cerrados son  $\emptyset$  y  $X$ . Si  $\Omega \subset X$ , entonces  $\Omega$  es un subconjunto conexo de  $X$  si el espacio métrico  $(\Omega, d|_\Omega)$  es conexo.*

### Ejemplo 23.

Si consideramos a  $\mathbb{R}$  con la métrica usual, entonces  $\Omega \subset \mathbb{R}$  es conexo si, y sólo si  $\Omega$  es un intervalo.

**Proposición 43.** *Un espacio métrico  $(X, d)$  no es conexo si, existen  $A$  y  $B$  subconjuntos propios de  $X$ , abiertos, disjuntos, no vacíos, tales que  $X = A \cup B$ .*

Una caracterización de conjuntos conexos de un espacio euclidiano, que utilizaremos a lo largo del presente curso, es la siguiente:

**Proposición 44.** *Si  $\Omega \subset \mathbb{C}$  es abierto y conexo, para cualesquiera  $a, b \in \Omega$ , existe una trayectoria de  $a$  en  $b$  completamente contenida en  $\Omega$ , es decir, podemos encontrar una función continua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ , tal que  $\gamma(0) = a$ ,  $\gamma(1) = b$ , y  $\gamma(t) \in \Omega$  para toda  $t \in [0, 1]$ .*

**Definición 49.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $K \subset X$ , diremos que  $K$  es compacto si, toda cubierta abierta de  $K$  tiene una subcubierta finita. Esto es, si  $\mathcal{G}$  es una familia arbitraria de conjuntos abiertos tal que:

$$K \subset \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G,$$

entonces existe un número finito de conjuntos  $G_1, \dots, G_n$  en  $\mathcal{G}$  tal que

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n G_k.$$

Claramente el conjunto vacío, y los subconjuntos finitos de  $X$  son compactos.

Por ejemplo, si  $D = \{x \in \mathbb{R}; x < 1\}$ , entonces  $D$  no es compacto, pues si  $G_n = \{x \in \mathbb{R}; x < 1 - 1/n\}$  para  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $D \subset \bigcup G_n$ , por lo que  $\{G_n; n \in \mathbb{N}\}$  es una cubierta abierta de  $D$ , sin embargo, esta cubierta, no tiene subcubierta finita. Un resultado que nos permite identificar los subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^n$  (con la métrica usual) es el siguiente:

**Teorema 27.** (Heine-Borel). Un subconjunto  $K$  de  $\mathbb{R}^n$  con  $n \geq 1$  es compacto si, y sólo si  $K$  es cerrado y acotado. [C, Theorem 4.10, pg. 23]

## A.2. Sucesiones y completos.

Uno de los conceptos más útiles que tenemos en un espacio métrico es el de convergencia de una sucesión, así podemos extender el papel que juega el cálculo en  $\mathbb{R}^n$  a espacios métricos  $(X, d)$ , aunque en el presente curso estamos interesados en analizar  $\mathbb{C}$  con la métrica inducida de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 50.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, una sucesión en  $X$  es una función  $s : \mathbb{N} \rightarrow X$ . A los valores  $s(n) \in X$  se les suele denotar  $s_n$ , y solemos denotar una sucesión como  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Diremos que una sucesión  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en un espacio métrico  $(X, d)$  converge a  $s$ , con  $s \in X$  si, para cada  $\epsilon > 0$  existe un entero positivo  $N = N_\epsilon$  tal que  $d(s_n, s) < \epsilon$  siempre y cuando  $n \geq N$ . Y denotamos esto como:  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  o bien,  $s_n \rightarrow s$  si  $n \rightarrow \infty$ .

En particular, varias de las propiedades enunciadas en la introducción pueden reenunciarse en términos de sucesiones, por ejemplo: Si  $(X, d)$  es un espacio métrico, y  $\Omega \subset X$ , entonces  $\Omega$  es cerrado si, y sólo si, toda sucesión convergente  $\{s_n\}$  en  $\Omega$  converge a un punto en  $\Omega$ , esto es, si  $\lim s_n = s$ , con

$s_n \in \Omega$ , entonces  $s \in \Omega$ . Y en este caso decimos que  $s$  es un punto límite de  $\Omega$ .

Por lo cual, podemos reenunciar nuevamente lo anterior como sigue: Si  $(X, d)$  es un espacio métrico, y  $\Omega \subset X$ , entonces  $\Omega$  es cerrado si, y sólo si,  $\Omega$  contiene a todos sus puntos límites. En particular  $\overline{\Omega} = \Omega \cup \{x \in X : x \text{ es un punto límite de } \Omega\}$ .

**Definición 51.** Diremos que una sucesión  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en un espacio métrico  $(X, d)$  es una sucesión  $\{s_n\}$  de Cauchy si, para cada  $\epsilon > 0$  existe un entero positivo  $N = N_\epsilon$  tal que, si  $n, m \geq N$ , entonces  $d(s_n, s_m) < \epsilon$ .

Diremos que  $X$  es un espacio métrico completo si  $(X, d)$  tiene la propiedad de que toda sucesión de Cauchy en  $X$  tiene punto límite en  $X$ .

Sabemos, de cursos anteriores, que  $\mathbb{R}$  es un espacio métrico completo. Esto nos implica que  $\mathbb{C}$ , es completo (estamos considerando a  $\mathbb{C}$  dotado de la métrica  $d(x, y) = |x - y|$ ).

### A.3. Continuidad

Una de las propiedades más elementales de una función, definida entre dos espacios métricos, es la continuidad. Ya que el propósito de este curso es el estudio de la teoría de funciones de variable compleja, las cuales posean derivada “en el sentido complejo”, la continuidad es una propiedad básica para nosotros, ya que esta se ha estudiado en cursos de cálculo previos, sólo enunciaremos las definiciones y resultados fundamentales.

**Definición 52.** Sean  $(X, d)$  y  $(Y, \rho)$  dos espacios métricos. Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función,  $a \in X$ ,  $b \in Y$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  si, para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta = \delta_{a, \epsilon} > 0$  tal que, si  $0 < d(x, a) < \delta$ , entonces  $\rho(f(x), b) < \epsilon$ .

La función  $f$  es continua en  $a$  si,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Diremos que  $f$  es continua en  $X$  si  $f$  es continua en  $a$  para cada  $a \in X$ .

**Proposición 45.** Sean  $(X, d)$  y  $(Y, \rho)$  dos espacios métricos, y  $f : X \rightarrow Y$  una función,  $a \in X$ ,  $b = f(a)$ . Los siguientes enunciados son equivalentes:

1.  $f$  es continua en  $a$ .
2. Si  $\Omega \subset Y$  es abierto, entonces  $f^{-1}(\Omega) \subset X$  es abierto.
3. Si  $\Omega \subset Y$  es cerrado, entonces  $f^{-1}(\Omega) \subset X$  es cerrado.

Otra definición que es de gran utilidad en este curso es la siguiente:

**Definición 53.** Sean  $(X, d)$  y  $(Y, \rho)$  dos espacios métricos, y  $f : X \longrightarrow Y$  una función, diremos que  $f$  es uniformemente continua en  $X$  si, para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta = \delta_\varepsilon > 0$  tal que  $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$  para todos los valores  $x, y \in X$  para los cuales  $d(x, y) < \delta$ .

La continuidad uniforme es una propiedad de una función en un conjunto, mientras que la continuidad se puede definir en un solo punto; y no tiene sentido decir si una función es uniformemente continua en un punto, por otra parte, si  $f$  es continua en  $X$ , es posible encontrar para cada  $\varepsilon > 0$  y cada punto  $p \in X$ , un número  $\delta$  que posee la propiedad enunciada en la definición de continuidad, así  $\delta$  depende de  $\varepsilon$  y de  $p$ , mientras que, si  $f$  es uniformemente continua en  $X$  es posible encontrar, para cada  $\varepsilon > 0$ , un número  $\delta > 0$  que cumpla la condición dada en la definición para todos los puntos  $p$  de  $X$ .

**Proposición 46.** Sea  $f$  una aplicación continua de un espacio métrico compacto  $X$  en un espacio métrico  $Y$ , entonces  $f$  es uniformemente continua.

Por ejemplo, si  $X = Y = \mathbb{R}$  la función  $f(x) = x^2$  es continua, pero no uniformemente continua. Si  $X = Y = [0, 1]$ , la función  $g(x) = x^2$  es uniformemente continua.

## A.4. Convergencia uniforme. El criterio M de Weierstrass.

**Definición 54.** Sea  $X$  un conjunto,  $(Y, \rho)$  un espacio métrico, y supóngase que  $f, f_1, f_2, \dots$  son funciones de  $X$  en  $Y$ . Diremos que la sucesión  $\{f_n\}$  converge uniformemente a  $f$ , y lo denotaremos  $f = \lim f_n$  si, para cada  $\varepsilon > 0$  hay un entero positivo  $N$ , que sólo depende de  $\varepsilon$ , tal que si  $n \geq N$ , entonces  $\rho(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$  para toda  $x \in X$ .

En particular  $\sup\{\rho(f(x), f_n(x)); x \in X\} \leq \varepsilon$ , si  $n \geq N$ .

Además, toda sucesión uniformemente convergente es convergente. La diferencia básica entre los dos conceptos es la siguiente: si  $\{f_n\}$  converge en  $X$ , entonces hay una función  $f$  tal que, para todo  $\varepsilon > 0$  y toda  $x \in X$  hay un entero que depende de  $\varepsilon$  y de  $x$ , que cumple la condición  $\rho(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$  siempre que  $n \geq N$ ; si  $\{f_n\}$  converge uniformemente en  $X$ , es posible encontrar, para cada  $\varepsilon > 0$  un entero  $N$ , que satisface  $\rho(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$  para todo  $x \in X$ .

Una de las principales propiedades que tenemos es la siguiente:

**Proposición 47.** Sean  $(X, d)$  y  $(Y, \rho)$  dos espacios métricos, y supóngase que  $f_n : X \rightarrow Y$  es una función continua para cada  $n \in N$ . Si  $f = u - \lim f_n$ , entonces  $f$  es continua.

Consideremos el caso especial en que  $Y = \mathbb{C}$ .

**Definición 55.** Si  $u_n : X \rightarrow \mathbb{C}$  es una función, para cada  $x \in X$  definimos

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x).$$

Diremos que  $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  si, y sólo si,  $s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$  para cada  $x \in X$ .

Diremos que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge uniformemente a si, y sólo si,  $s = u - \lim s_n$ .

Criterios de convergencia de series

**Proposición 48.** 1. Serie geométrica: Si  $|r| < 1$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$  converge a  $\frac{1}{1-r}$ , y diverge si  $|r| \geq 1$ .

2.  $p$ -serie:  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$  converge si  $p > 1$  y tiende a  $\infty$  si  $p \leq 1$ .

3. De la razón: Supóngase que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  existe y es menor que uno, entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge absolutamente. Si el límite es mayor que uno, la serie diverge, y si el límite es uno, el criterio falla.

4. De la raíz: Supóngase que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  existe y es menor que uno, entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge absolutamente. Si el límite es mayor que uno, la serie diverge, y si el límite es uno, el criterio falla.

**Proposición 49.** (El criterio  $M$  de Weierstrass) Sea  $u_n : X \rightarrow \mathbb{C}$  una sucesión de funciones definidas en  $X$ , y supóngase que existe una sucesión de constantes reales  $M_n \geq 0$  tales que:

1.  $|u_n(x)| \leq M_n$  para cada  $x \in X$ .

2.  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$  converge.

Entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge uniformemente en  $X$ .

*Demostración.* Dada  $\epsilon > 0$ , como  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$  converge, entonces es de Cauchy, luego entonces existe  $N = N_{\epsilon} \in \mathbb{N}$  tal que, si  $n, m \geq N$  y  $m \geq n$ , entonces  $\sum_{k=n+1}^m M_k < \epsilon$ . Luego entonces, si  $s_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$  entonces, para  $n, m \geq N$  tenemos que

$$|s_n(x) - s_m(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^m u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m M_k < \epsilon$$

por tanto, la serie  $s_n(x)$  es de Cauchy, y por ende, converge. Para cada  $x \in X$  existe  $\zeta = \zeta_x \in \mathbb{C}$  tal que  $s(x) = \zeta$ , es decir, tenemos una función  $s : X \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$|s(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \epsilon$$

para toda  $x \in X$ , si  $n \geq N$ .

□

□

Por ejemplo,  $\sum_{k=n+1}^{\infty} z^n/n$  converge uniformemente en  $\overline{B(0, r)}$  si  $0 \leq r < 1$ , basta tomar  $M_n = r^n/n$  y aplicar el criterio  $M$  de Weierstrass.

## A.5. Series de Potencias.

**Definición 56.** Si  $c_n \in \mathbb{C}$  para cada entero no negativo  $n$ , diremos que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  converge a  $c$  si, y sólo si, para cada  $\epsilon > 0$  existe un entero positivo  $N = N_{\epsilon}$  tal que, si  $m \geq N$  entonces  $|\sum_{n=0}^m c_n - c| < \epsilon$ .

Diremos que la serie  $\sum c_n$  converge absolutamente si  $\sum |c_n|$  converge.

Como consecuencia de la desigualdad del triángulo, tenemos que, si una serie converge absolutamente, entonces converge.

**Definición 57.** Una serie de potencias alrededor del punto  $a$  es una serie de la forma  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$

Uno de los ejemplos más sencillos, y útiles lo constituye la serie geométrica  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ .

Como

$$1 + z + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

y ya que  $z^n \rightarrow 0$  si  $|z| < 1$  concluimos que la serie geométrica converge a  $1/(1 - z)$  si  $|z| < 1$ , mientras que  $|z^n| \geq 1$  si  $|z| > 1$ , por lo que, la serie diverge para  $|z| > 1$ .

## Apéndice A

# Sumas de Riemann-Stieltjes

En esta sección definimos la integral de Riemann-Stieltjes, con el fin de dar una definición formal de la integral de una función a lo largo de una trayectoria en  $\mathbb{C}$ , lo cual nos proporciona un argumento analítico que da lugar a la definición 7.4 (chechar).

**Definición 58.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $a < b$ , y sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una función. Diremos que  $\gamma$  es una función de variación acotada si, existe una constante  $M > 0$  tal que, para cualesquier partición  $\mathcal{P} = \{a = a_0 < a_1 < a_2 \dots < a_n = b\}$  del intervalo  $[a, b]$  se tiene que

$$\sum_{k=1}^n |\gamma(a_k) - \gamma(a_{k-1})| \leq M,$$

Denotaremos por  $v(\gamma; \mathcal{P})$  a la expresión dada en el lado izquierdo de la desigualdad anterior, esto es,  $v(\gamma; \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n |\gamma(a_k) - \gamma(a_{k-1})|$ . La variación total de  $\gamma$ , que denotaremos  $V(\gamma)$ , se define como:  $V(\gamma) = \sup\{v(\gamma; \mathcal{P}); \mathcal{P} \text{ es una partición del intervalo } [a, b]\}$ . Nótese que  $V(\gamma) \leq M < \infty$ .

Si  $\gamma$  es una función real valuada, continua y no decreciente, entonces  $\gamma$  es de variación acotada y  $V(\gamma) = \gamma(b) - \gamma(a)$ . Además una función complejo valuada es de variación acotada si, y sólo si, su parte real,  $Re(\gamma)$ , y su parte imaginaria,  $Im(\gamma)$ , son funciones de variación acotada. Como consecuencia de la desigualdad del triángulo tenemos que:

**Proposición 50.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $a < b$ , y sean  $\gamma, \sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  funciones de variación acotada. Entonces:

1. Si  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{L}$  son particiones de  $[a, b]$ , tales que  $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ , entonces  $v(\gamma; \mathcal{P}) \leq v(\gamma; \mathcal{L})$ .



2. Si  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , entonces  $\alpha\gamma + \beta\sigma$  es de variación acotada y  $V(\alpha\gamma + \beta\sigma) \leq |\alpha|V(\gamma) + |\beta|V(\sigma)$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{Q} = \{b_j \in [a, b]; a = b_0, b = b_m, \text{ y } b_j < b_{j+1} \text{ si } j = 0, \dots, m-1\}$ , y supongamos que  $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ , entonces

$$\begin{aligned} v(\gamma; \mathcal{Q}) &= \sum_{k=1}^m |\gamma(b_k) - \gamma(b_{k-1})| \\ &= \sum_{\{k; b_k \in \mathcal{P}\}} |\gamma(b_k) - \gamma(b_{k-1})| + \sum_{\{k; b_k \notin \mathcal{P}\}} |\gamma(b_k) - \gamma(b_{k-1})| \\ &\geq \sum_{\{k; b_k \in \mathcal{P}\}} |\gamma(b_k) - \gamma(b_{k-1})| \\ &= v(\gamma; \mathcal{P}) \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} v(\alpha\gamma + \beta\sigma; \mathcal{Q}) &= \sum_{k=1}^m |(\alpha\gamma + \beta\sigma)(b_k) - (\alpha\gamma + \beta\sigma)(b_{k-1})| \\ &\leq \left( \sum_{k=1}^m |\alpha| |\gamma(b_k) - \gamma(b_{k-1})| + \sum_{k=1}^m |\beta| |\sigma(b_k) - \sigma(b_{k-1})| \right) \\ &= |\alpha| \sum_{k=1}^m |\gamma(b_k) - \gamma(b_{k-1})| + |\beta| \sum_{k=1}^m |\sigma(b_k) - \sigma(b_{k-1})| \\ &= |\alpha| v(\gamma; \mathcal{Q}) + |\beta| v(\sigma; \mathcal{Q}) \end{aligned}$$

Tomando supremos sobre las particiones  $\mathcal{Q}$  a ambos lados de las desigualdades, se sigue que  $V(\alpha\gamma + \beta\sigma) \leq |\alpha|V(\gamma) + |\beta|V(\sigma)$ . □

**Proposición 51.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $a < b$ , y sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva suave por partes, entonces  $\gamma$  es de variación acotada, y  $V(\gamma)$  es igual a  $\ell(\gamma)$ , la longitud de arco de la curva  $\gamma$ .

*Demostración.* Bastará demostrar este resultado para curvas suaves. Si  $\gamma$  es suave, y  $\dot{\gamma}$  es continua, consideremos una partición  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$ , como en la

definición, entonces:

$$\begin{aligned}
 v(\gamma; \mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^m |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \\
 &= \sum_{k=1}^m \left| \int_a^b \dot{\gamma}(t) dt \right| \\
 &\leq \sum_{k=1}^m \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt \\
 &= \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt \\
 &= \ell(\gamma)
 \end{aligned}$$

Como esto es cierto para cualquier partición  $\mathcal{Q}$ , se sigue que  $\gamma$  es de variación acotada, y que  $V(\gamma) \leq \ell(\gamma)$ . A continuación mostraremos que  $V(\gamma) \geq \ell(\gamma)$ . Como  $\dot{\gamma}$  es uniformemente continua, dada  $\epsilon > 0$ , podemos elegir  $\delta_1 > 0$  tal que  $|s - t| < \delta_1$  implica  $|\dot{\gamma}(s) - \dot{\gamma}(t)| < \epsilon$ , por otra parte, podemos elegir  $\delta_2$  tal que, si  $\mathcal{P} = \{t_k \in [a, b]; t_0 = a < t_1 < \dots < t_m = b\}$ , y  $\|P\| = \max\{t_k - t_{k-1}; 1 \leq k \leq m\} < \delta_2$ , y si  $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$  es un punto arbitrario, entonces

$$\left| \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt - \sum_{k=1}^m |\dot{\gamma}(\tau_k)| (t_k - t_{k-1}) \right| < \epsilon$$

Luego entonces:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt &\leq \epsilon + \sum_{k=1}^m |\dot{\gamma}(\tau_k)| (t_k - t_{k-1}) \\
 &= \epsilon + \sum_{k=1}^m \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{\gamma}(\tau_k) dt \right| \\
 &\leq \epsilon + \sum_{k=1}^m \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\dot{\gamma}(\tau_k) - \dot{\gamma}(t)] dt \right| + \sum_{k=1}^m \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{\gamma}(t) dt \right|
 \end{aligned}$$

Sea  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , si  $\|P\| < \delta$ , entonces  $|\dot{\gamma}(\tau_k) - \dot{\gamma}(t)| < \epsilon$  si  $t \in [t_{k-1}, t_k]$ .

Además

$$\begin{aligned} \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt &\leq \epsilon + \epsilon(b-a) + \sum_{k=1}^m |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \\ &= \epsilon[1 + (b-a)] + v(\gamma; \mathcal{P}) \\ &\leq \epsilon[1 + (b-a)] + V(\gamma) \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando  $\epsilon$  tiende a cero, tenemos  $\ell(\gamma) \leq V(\gamma)$ , de donde  $\ell(\gamma) = V(\gamma)$ . □

**Teorema 28.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $a < b$ , y sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una función de variación acotada, y supóngase que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es una función continua. Entonces, existe un número complejo  $I$  tal que, para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, cuando  $\mathcal{P} = \{t_k \in [a, b]; a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$  es una partición de  $[a, b]$  con  $\|\mathcal{P}\| = \max\{t_k - t_{k-1}; 1 \leq k \leq m\} < \delta$ , entonces

$$\left| I - \sum_{k=1}^m f(\tau_k) [\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] \right| < \epsilon$$

para cualesquier elección de puntos  $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ .

*Demostración.* Como  $f$  es una función continua, y  $[a, b]$  es compacto, entonces es uniformemente continua; luego entonces, podemos encontrar, inductivamente, números positivos  $\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \dots$  tales que, si  $|s - t| < \delta_m$ , entonces  $|f(s) - f(t)| < 1/m$ . Para cada  $m \geq 1$ , considere  $\mathcal{P}_m$  la colección de todas las particiones  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$  con  $\|\mathcal{P}\| < \delta_m$ ; en particular  $\mathcal{P}_1 \supset \mathcal{P}_2 \supset \dots$ . Finalmente, denotemos por  $F_m$  la cerradura del siguiente conjunto:

$$\left\{ S(\mathcal{P}) := \sum_{k=1}^n f(\tau_k) [\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})]; \mathcal{P} \in \mathcal{P}_m, \text{ y } t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k \right\}.$$

Como  $\mathcal{P}_1 \supset \mathcal{P}_2 \supset \dots$ , entonces  $F_1 \supset F_2 \supset \dots$

Por otra parte, demostraremos que  $\text{diam}(F_m) \leq \frac{2}{m} V(\gamma)$

Una vez hecho esto, como consecuencia del teorema de Cantor, existe un único número complejo  $I$ , tal que  $I \in F_m$  para cada  $m \geq 1$ .<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>(**El Teorema de Cantor**). Un espacio métrico  $(X, d)$  es completo si, y sólo si, para toda sucesión  $\{F_n\}$  de conjuntos cerrados no vacíos  $\{F_n\}$  de conjuntos cerrados no vacíos con  $F_1 \supset F_2 \supset \dots$  tal que  $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$ , se tiene que  $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$  consta de un único punto. [C, pg. 19]

Si  $\epsilon > 0$  consideremos  $m > \frac{2}{\epsilon}V(\gamma)$ ; entonces  $\epsilon > m > \frac{2}{m}V(\gamma) \geq \text{diam}(F_m)$ . Como  $I \in F_m$ ,  $|F_m - I| < \epsilon$ , y tomando  $\delta = \delta_m$  se demuestra el teorema. Ahora demostraremos que  $\text{diam}(F_m) \leq \frac{2}{m}V(\gamma)$ .

Dado  $m \geq 1$ , si  $\mathcal{P} = \{t_k; a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$  es una partición en  $\mathcal{P} \in \mathcal{P}_m$ , mostraremos que, si  $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ , entonces  $|S(\mathcal{P}) - S(\mathcal{Q})| < \frac{1}{m}V(\gamma)$ . Sólo demostraremos el caso en que  $\mathcal{Q}$  se obtenga de  $\mathcal{P}$  agregando sólo un punto, el caso general se obtiene iterando este proceso.

Sea  $1 \leq p \leq m$  y sea  $t_{p-1} < t^* < t_p$ ; supóngase que  $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cup \{t^*\}$ . Si  $t_{p-1} \leq \sigma \leq t^*$ , y  $t^* \leq \sigma' \leq t_p$ , y

$$S(\mathcal{Q}) = \sum_{k \neq p} f((\sigma_k))[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] + f(\sigma)[\gamma(t^*) - \gamma(t_{p-1})] + f(\sigma')[\gamma(t_p) - \gamma(t^*)],$$

y como  $|f(\tau) - f(\sigma)| < 1/m$  si  $|\tau - \sigma| < \delta_m$ , entonces

$$\begin{aligned} |S(\mathcal{P}) - S(\mathcal{Q})| &= \left| \sum_{k \neq p} [f(\tau_k) - f((\sigma_k))][\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] - f(\tau_p)[\gamma(t_p) - \gamma(t_{p-1})] \right. \\ &\quad \left. - f(\sigma)[\gamma(t^*) - \gamma(t_{p-1})] + f(\sigma')[\gamma(t_p) - \gamma(t^*)] \right| \\ &\leq \frac{1}{m} \sum_{k \neq p} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| + |[f(\tau_p) - f(\sigma)][\gamma(t^*) - \gamma(t_{p-1})]| \\ &\quad + |[f(\tau_p) - f(\sigma')][\gamma(t_p) - \gamma(t^*)]| \\ &\leq \frac{1}{m} \sum_{k \neq p} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| + \frac{1}{m} |\gamma(t^*) - \gamma(t_{p-1})| \\ &\quad + \frac{1}{m} |\gamma(t_p) - \gamma(t^*)| \\ &\leq \frac{1}{m} V(\gamma) \end{aligned}$$

Para la parte final, considerese  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  dos particiones en  $\mathcal{P}_m$ , entonces  $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cup \mathcal{R}$  es una partición que contiene a  $\mathcal{P}$  y a  $\mathcal{R}$ , aplicando la parte anterior tenemos:

$$|S(\mathcal{P}) - S(\mathcal{R})| \leq |S(\mathcal{P}) - S(\mathcal{Q})| + |S(\mathcal{Q}) - S(\mathcal{R})| \leq \frac{2}{m}V(\gamma).$$

Consecuentemente,  $\text{diam}(F_m) \leq \frac{2}{m}V(\gamma)$ .

□

**Definición 59.** El número  $I$ , dado en el teorema anterior, se denomina la integral de Riemann-Stieltjes de  $f$  con respecto a  $\gamma$  sobre el intervalo  $[a, b]$ , y se denota por

$$I = \int_a^b f d\gamma$$

Una vez hecho esto, podemos formalizar, como mencionamos al inicio de esta sección, la definición de integral de línea de una función *—valuada*, de variable compleja,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , a lo largo de una curva suave  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ , considerando simplemente la restricción de  $f$  a la imagen de  $\gamma$ , pues  $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es una función continua, *—valuada*, de variable real.

**Tarea.**

1. Si  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , y  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es una función continua, escriba  $g(t) = u(t) + iv(t)$ , con  $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas. Defina  $\int_a^b g(t) dt := \int_a^b u dt + i \int_a^b v dt$ . Demuestre que
  - a)  $\operatorname{Re} \int_a^b g(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} g(t) dt$ .
  - b)  $\left| \int_a^b g(t) dt \right| \leq \int_a^b |g(t)| dt$ .
2. Evalúe lo siguiente:
  - a)  $\int_{\gamma} ze^{z^2} dz$ , donde  $\gamma$  es el círculo unitario.
  - b)  $\int_{\gamma} (z^2 + 2z + 3) dz$ , donde  $\gamma$  es el segmento de la recta que 1 con  $2 + i$ .
  - c)  $\int_{\gamma} \frac{1}{z-1}$ , donde  $\gamma$  es el círculo con radio 2 y centro en 1, recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj.
3. Demuestre, o de contraejemplo:  $\operatorname{Re} \left( \int_{\gamma} f dz \right) = \int_{\gamma} \operatorname{Re}(f) dz$ .
4. Evalúe  $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ , donde  $\gamma$  es el círculo unitario, recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj, una vez.

5. Evalúe  $\int_{\gamma} \bar{z}^2 dz$ , a lo largo de las dos trayectorias, que unen al 0 con  $1+i$ , descritas a continuación:
- a)  $\gamma$  es el segmento de línea recta que une 0 con  $1+i$ .
- b)  $\gamma$  es  $\gamma_1 + \gamma_2$ , donde  $\gamma_1$  es el segmento de que une 0 con 1 y  $\gamma_2$  es el segmento que une 1 con  $1+i$ .

En vista de lo anterior, y del teorema fundamental del cálculo, puede ser  $\bar{z}^2$  la derivada de alguna función *-diferenciable?*

6. Si  $\mathfrak{C}$  es el arco del círculo  $|z| = 2$  que se encuentra en el primer cuadrante, muestre que

$$\left| \int_{\mathfrak{C}} \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{\pi}{3}$$

7. Evalúe las siguientes integrales:

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z}; \int_{|z|=1} \frac{dz}{|z|}; \int_{|z|=1} \frac{|dz|}{z}; \int_{|z|=1} \left| \frac{dz}{z} \right|.$$

8. De algunas condiciones sobre una curva cerrada  $\gamma$  que garanticen que  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 0$ .
9. Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un subconjunto abierto, no vacío. Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  una curva suave contenida en  $\Omega$ , (es decir,  $\text{im}(\gamma) \subset \Omega$ ). Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es *-diferenciable*, y  $f'(z)$  es continua en  $\Omega$ . Demuestre o de contraejemplo:

$$\int_{\gamma} \overline{f(z)} f(z) dz$$

es imaginario.

10. Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un subconjunto abierto, no vacío. Suponga que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es *-diferenciable*, y satisface  $|f(z) - 1| < 1$  en  $\Omega$ . Demuestre que

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

para cada curva cerrada contenida en  $\Omega$ .

11. Si  $p(z)$  es un polinomio y  $\mathfrak{C}$  denota el círculo  $|z-a| = R$ , Evalúe  $\int_{\mathfrak{C}} p d\bar{z}$ . ([A, pg. 108])

### A.1. Fórmulas de Cauchy y sus principales consecuencias.

En la presente sección veremos que es posible representar una función holomorfa  $f(z)$  mediante una integral de línea en la cual la variable compleja  $z$  interviene como un parámetro. Esta representación se conoce como la fórmula integral de Cauchy, la cual tiene una gran cantidad de aplicaciones, en particular obtendremos que toda función holomorfa es  $C^\infty(\mathbb{C})$  – *diferenciable*, y en particular localmente puede expresarse como una serie de potencias formal, es decir, es analítica. (En variable compleja, estos conceptos son equivalentes, lo cual no sucede en variable real.) Además, el estudio de las propiedades locales de las funciones holomorfas nos permite realizar el estudio de algunas propiedades globales de estas funciones.

# Bibliografía

- [A] L.V. Ahlfors, Complex Analysis, Mc.Graw-Hill Book Co. 1966.
- [C] J. B. Conway, Functions of One Complex Variable I, Second Edition, Springer, New York, 1978.
- [Hi] E. Hille, Analytic function theory, Vol I, II. Chelsea Pub. Co. New York, N. Y. 1976.
- [H] R. W. Howell COMPLEX ANALYSIS: Mathematica 4.1 Cuadernos Jones and Bartlett Publicadores, Inc. 40. Paseo del Pino alto, Sudbury, MA 01776. USA. 2002. Internet: <http://www.jbpub.com>
- [M.H.] J. Marsden and M.J. Hoffman, Basic Complex Analysis. 2nd. Ed. Freeman Co. New York, 1987.
- [N] R. Narasimhan, Complex Analysis in One Variable, Birkhauser, Boston, 1985. John H. Mathews, y Russell
- [U] J. V. Uspensky, Theory of equations. T. M. H. Edition. 1948.
- [Z] F. Zaldivar, Fundamentos de Álgebra. UAM-I, México, 2003.