

Análisis Matemático en Variable Compleja

Gerardo Rossini

Introducción

La asignatura Matemáticas Especiales I de la Facultad de Ciencias Exactas, UNLP, contiene el estudio del Análisis Matemático en Variable Compleja y algunas de sus aplicaciones. El curso tiene entre sus objetivos

- brindar los contenidos técnicos del análisis de variable compleja, en particular de las llamadas funciones analíticas.
- establecer un marco integral de los conceptos de análisis matemático, incluyendo los cursos correlativos anteriores y proyectándolos hacia casos más generales que la variable compleja.
- establecer un lenguaje lógico riguroso para formalizar la demostración de resultados del análisis matemático.
- brindar algunas aplicaciones a la solución de problemas planteados en variable real.

El reglamento de cursada y examen final es el siguiente:

- Se evalúa el curso por temas. Se divide el curso en dos partes, con cuatro temas cada una. Para aprobar la cursada se deben aprobar al menos tres temas de cada parte.
- Por cada parte tomamos un pre-parcial (con dos temas), un parcial completo y un recuperatorio. Para cerrar, habrá una fecha flotante para quienes hayan aprobado al menos cuatro temas entre los ocho planteados.
- Finales: durante un año a partir del flotante se tomará práctica sólo de los temas no aprobados durante la cursada, y teoría. Luego, práctica y teoría completas.

Bibliografía

- R.V.Churchill, J.W.Brown y R.F.Verhey, *Variables complejas y sus aplicaciones*, McGraw Hill, New York, 1970.
- I. Stewart, D. Tall, *Complex Analysis*, Cambridge University Press, London, 1983.
- L.V.Alfohrs, *Análisis Complejo: introducción a la teoría de funciones analíticas*, McGraw Hill, New York, 1979.
- M. R. Spiegel, *Variable Compleja*, (Serie Schaum), Mc Graw Hill, New York.

El plano complejo

1.1. Números complejos

Los números complejos se construyen como

$$(1.1.1) \quad \mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, *) ,$$

es decir pares ordenados de reales (x, y) con una suma y un producto definidos por

$$(1.1.2) \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(1.1.3) \quad (x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

La suma y el producto son cerrados en C .

La suma es asociativa, conmutativa, existe el elemento neutro $(0, 0)$ y para cada complejo (x, y) existe y es único el opuesto $-(x, y) = (-x, -y)$. Por estas propiedades $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +)$ forma un *grupo abeliano*.

El producto es asociativo, conmutativo, distributivo respecto de la suma, existe el elemento neutro $(1, 0)$ y para cada complejo $(x, y) \neq (0, 0)$ existe y es único el inverso multiplicativo $(x, y)^{-1} = (x/(x^2 + y^2), -y/(x^2 + y^2))$. Por estas propiedades $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, *)$ forma un *cuerpo*. Como en todo cuerpo, la resta se define como la suma del opuesto, y el cociente se define como la multiplicación por el inverso.

El subconjunto de los números complejos

$$(1.1.4) \quad R = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

es cerrado ante la suma, resta, multiplicación y división

$$\begin{aligned} (x_1, 0) + (x_2, 0) &= (x_1 + x_2, 0), \\ -(x_1, 0) &= (-x_1, 0), \\ (x_1, 0) * (x_2, 0) &= (x_1 x_2, 0), \\ (x_1, 0)^{-1} &= (x_1^{-1}, 0), \end{aligned}$$

se corresponde biunívocamente con \mathbb{R} y respeta sus operaciones. Por esto se *identifica* $R \equiv \mathbb{R}$ y se considera a los números reales como subconjunto de los números complejos, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Se anota

$$x = (x, 0) \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

En particular, $0 = (0, 0)$.

La multiplicación de un real α por un complejo (x, y) resulta, según 1.1.3,

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

En consecuencia \mathbb{C} , con la suma de complejos y el producto por reales, tiene estructura de *espacio vectorial* de dimensión 2 sobre \mathbb{R} , naturalmente isomorfo a \mathbb{R}^2 . La base canónica se anota

$$\begin{aligned} 1 &= (1, 0), \\ i &= (0, 1), \end{aligned}$$

por lo cual todo complejo $z = (x, y)$ puede escribirse en forma binómica

$$z = x + iy.$$

El número complejo i tiene la conocida particularidad $i^2 = -1$, que permite calcular raíces cuadradas de reales negativos.

1.1.1. Conjugación. Se define el conjugado de un complejo $z = x + iy$ como

$$\bar{z} = x - iy.$$

Geométricamente expresa la reflexión respecto del eje real. Permite escribir

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= \frac{1}{2}(\bar{z} + z), \\ \operatorname{Im}(z) &= \frac{1}{2i}(\bar{z} - z), \\ z^{-1} &= \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}, \end{aligned}$$

donde $z\bar{z} \in \mathbb{R}$.

1.2. Módulo y argumento

Los números complejos se grafican en el plano $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, y se pueden visualizar tanto como puntos como por vectores. La suma y el producto por reales se deben visualizar como las correspondientes operaciones vectoriales en \mathbb{R}^2 .

El módulo de un complejo z se define como su distancia euclídea al punto 0, origen del plano,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}.$$

Nótese que $|z|^2 = z\bar{z}$.

Dado $z \neq 0$, se puede representar en forma polar. Para eso se define el argumento

$$\arg(z) = \varphi \in \mathbb{R} \text{ tal que } z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

es decir como el ángulo que forma el vector z con el semieje real positivo, siguiendo las convenciones trigonométricas usuales. Es importante notar que $\arg(z)$ es una *relación multivaluada*: a cada complejo no nulo le corresponden

infinitos argumentos reales, congruentes entre sí módulo 2π . Si ϕ_0 es un argumento de $z \neq 0$, entonces

$$\{\varphi_k = \phi_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{R}\}$$

es el conjunto de todos los argumentos posibles de z . El complejo 0 no tiene argumento.

1.2.1. Fórmula de Euler. Se define la exponencial compleja para $z = x + iy$ como

$$\exp(z) \equiv e^z = e^x (\cos y + i \sin y).$$

En particular, queda expresado

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

expresión conocida como fórmula de Euler. La notación polar standard de un complejo $z \neq 0$, llamando $r = |z|$ y $\varphi = \arg(z)$, es

$$(1.2.1) \quad z = r e^{i\varphi}.$$

1.2.2. Producto y cociente en forma polar. El producto y el cociente tienen una expresión compacta en notación polar,

$$(1.2.2) \quad r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = (r_1 r_2) e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$(1.2.3) \quad \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right) e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

1.2.3. Potencias y raíces. Las potencias naturales se expresan con la fórmula de De Moivre. Dado $z = r e^{i\varphi}$ y $n \in \mathbb{N}$

$$z^n = r^n e^{in\varphi}.$$

Las potencias enteras se completan definiendo

$$z^{-n} \equiv \frac{1}{z^n} = r^{-n} e^{-in\varphi}.$$

La raíz n -ésima se define como la operación inversa de la potencia n -ésima,

$$w = \sqrt[n]{z} \iff w^n = z.$$

Si $z \neq 0$ se escribe $z = r e^{i\varphi}$, resulta $w = \sqrt[n]{r} e^{i\varphi/n}$. Los infinitos valores de $\varphi = \arg(z)$ dan lugar a n valores *distintos*

$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\phi_0 + 2k\pi)/n}, \quad \text{con } k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Cabe notar que $w_k = w_0 e^{ik(2\pi/n)}$.

1.3. Topología métrica del plano complejo

1.3.1. Espacios métricos. Dado un conjunto M , se llama distancia en M a toda función

$$dist : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que se verifican las propiedades

1. positividad: $\forall z_1, z_2 \in M, dist(z_1, z_2) \geq 0$, y $dist(z_1, z_2) = 0 \implies z_1 = z_2$.
2. simetría: $\forall z_1, z_2 \in M, dist(z_1, z_2) = dist(z_2, z_1)$.
3. desigualdad triangular: $\forall z_1, z_2, z_3 \in M, dist(z_1, z_2) \leq dist(z_1, z_3) + dist(z_3, z_2)$.

Se llama espacio métrico a un conjunto con una distancia $(M, dist)$.

En el plano complejo se define la distancia entre dos números $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ como la distancia euclídea de los correspondientes puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ de \mathbb{R}^2 . Es decir,

$$dist(z_1, z_2) = |z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Como en toda distancia, se verifican las propiedades de positividad, simetría y desigualdad triangular. La correspondencia $z = x + iy \in \mathbb{C} \leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$ preserva la distancia, por definición. El plano complejo, con la distancia euclídea, es entonces un espacio métrico isométrico a \mathbb{R}^2 . En particular, la desigualdad triangular se expresa

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, |z_3 - z_1| \geq |z_3 - z_2| + |z_2 - z_1|$$

En general, en todo espacio vectorial con producto interno la distancia canónica se define como la norma de la diferencia,

$$dist(v_1, v_2) = \|v_2 - v_1\| = \sqrt{(v_2, v_1)}.$$

Tal es el caso de \mathbb{R}, \mathbb{R}^n y \mathbb{C} .

1.3.2. Topología métrica. Dado un conjunto M , se llama topología a la caracterización de conjuntos abiertos en M . Esto lleva a la caracterización de nociones como convergencia, continuidad, conectividad, etc. En un espacio métrico, se caracteriza naturalmente la topología a partir de la distancia.

Manejaremos en general las siguientes definiciones, donde M es un espacio métrico (y en particular nos interesa $M = \mathbb{C}$):

Entorno. Se llama entorno de centro z_0 y radio r al conjunto

$$\Delta(z_0, r) = \{z \in M : dist(z, z_0) < r\}$$

Entorno reducido. Se llama entorno reducido de centro z_0 y radio r al conjunto

$$\Delta_0(z_0, r) = \{z \in M : 0 < dist(z, z_0) < r\}$$

Punto interior a un conjunto. Dado un conjunto $A \subset M$, se dice que z_0 es interior a A si y sólo si

$$\exists r > 0, \Delta(z_0, r) \subset A$$

Conjunto abierto. Se dice que $A \subset M$ es abierto si y sólo si

$$\forall z \in A, z \text{ es interior a } A$$

Punto exterior a un conjunto. Dado un conjunto $A \subset M$, se dice que z_0 es exterior a A si y sólo si

$$\exists r > 0, \Delta(z_0, r) \cap A = \emptyset$$

Equivalentemente, z_0 es exterior a A si y sólo si z_0 es interior al complemento de A en M (que anotaremos A^c).

Punto de frontera. Dado un conjunto $A \subset M$, se dice que z_0 es punto de frontera de A si y sólo si z_0 no es interior ni exterior a A .

Equivalentemente, z_0 es punto de frontera de A si y sólo si

$$\exists r > 0, \Delta(z_0, r) \cap A \neq \emptyset \wedge \Delta(z_0, r) \cap A^c \neq \emptyset$$

Frontera de un conjunto. Se llama frontera de un conjunto $A \subset M$ a

$$\partial A = \{z \in M : z \text{ es punto de frontera de } A\}$$

Conjunto cerrado. Dado un conjunto $A \subset M$, se dice que A es cerrado si y sólo si $\partial A \subset A$. Es decir, un conjunto es cerrado si contiene a todos sus puntos de frontera.

Entorno cerrado. Se llama entorno cerrado de centro z_0 y radio r al conjunto

$$\overline{\Delta(z_0, r)} = \{z \in M : \text{dist}(z, z_0) \leq r\}$$

Conjunto acotado. Se dice que $A \subset M$ es acotado si y sólo si

$$\exists z_0 \in M, r > 0 : A \subset \overline{\Delta(z_0, r)},$$

es decir si A puede ser encerrado en un entorno cerrado de radio finito.

Clausura de un conjunto. Se llama clausura de un conjunto $A \subset M$ a la unión del conjunto con su frontera. Se anota

$$\bar{A} = A \cup \partial A$$

Punto de acumulación. Dado un conjunto $A \subset M$, se dice que z_0 es punto de acumulación (o de adherencia) de A si y sólo si

$$\forall r > 0, \Delta_0(z_0, r) \cap A \neq \emptyset$$

Punto aislado. Dado un conjunto $A \subset M$ y un punto $z_0 \in A$, se dice que z_0 es un punto aislado de A si y sólo si

$$\exists r > 0, \Delta(z_0, r) \cap A = \{z_0\}$$

Propiedades. Se sugiere demostrar las siguientes propiedades:

- Un entorno es un conjunto abierto
- Un entorno reducido es un conjunto abierto
- Un entorno cerrado es un conjunto cerrado, clausura del correspondiente entorno abierto: $\overline{\Delta(z_0, r)} = \Delta(z_0, r) \cup \partial\Delta(z_0, r)$
- \mathbb{C} es abierto en \mathbb{C}
- \mathbb{C} es cerrado en \mathbb{C}
- etc.

Mencionamos otras caracterizaciones topológicas que tienen que ver con curvas continuas y familias continuas de curvas continuas. La noción de continuidad se repasa en la Clase 5.

Conjunto conexo. Dado un conjunto $A \subset M$, se dice que A es conexo por arcos (o conexo) si y sólo si

$\forall z_1, z_2 \in A, \exists$ una curva continua $\gamma \subset A$ que comienza en z_1 y termina en z_2

Conjunto simplemente conexo. Dado un conjunto $A \subset M$, conexo, se dice que es simplemente conexo si y sólo si todas las curvas que unen dos puntos dados $z_1, z_2 \in A$ son continuamente deformables entre sí dentro de A

Conjunto múltiplemente conexo. Dado un conjunto $A \subset M$, conexo, se dice que es múltiplemente conexo si y sólo si no es simplemente conexo. Es decir, dados $z_1, z_2 \in A$ existen al menos dos curvas que los unen y que no son continuamente deformables entre sí dentro de A

Sucesiones y funciones complejas

En esta clase presentamos sucesiones de números complejos, funciones de variable real a valores complejos y funciones de variable compleja a valores complejos, con el objetivo de familiarizar al alumno con su estructura, notación y representación gráfica. En particular se establece su relación con sucesiones y funciones reales, buscando repasar el manejo de las últimas.

Las sucesiones y series de números o funciones complejas, las funciones de una variable real a valores complejos y las funciones de una variable compleja a valores complejos serán objeto de estudio a lo largo de todo el curso.

Sucesiones a valores complejos

Una sucesión a valores complejos es una función de \mathbb{N} en \mathbb{C} ,

$$z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$$

que a cada $n \in \mathbb{N}$ le hace corresponder un valor $z_n \in \mathbb{C}$,

$$n \rightarrow z_n$$

Usaremos la notación $\{z_n\}$ para referirnos a dicha sucesión. También consideramos sucesiones a funciones de $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, es decir que comienzan con índice n_0 .

Escribiendo en forma binómica $z_n = x_n + iy_n$, la sucesión $\{z_n\}$ determina unívocamente dos sucesiones en \mathbb{R} , $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$. Escribiendo en forma de par ordenado $z_n = (x_n, y_n)$, la sucesión $\{z_n\}$ determina unívocamente una sucesión en \mathbb{R}^2 , $\{(x_n, y_n)\}$. En notación vectorial, $\vec{r}_n = (x_n, y_n)$ y la sucesión se puede anotar $\{\vec{r}_n\}$.

Una sucesión $\{z_n\}$ compleja se representa como un conjunto infinito de puntos en el plano, manteniendo la noción del orden con que aparecen en la sucesión. Conviene pensarla como una historia en el tiempo, o un camino que se recorre.

En base a cursos anteriores, podemos estudiar la existencia de los límites en \mathbb{R}

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

y del límite en \mathbb{R}^2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n)$$

Veremos que estos límites están íntimamente relacionados con la noción de $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ en \mathbb{C} .

Funciones de variable real y valores complejos

Una función de $I \subset \mathbb{R}$ en \mathbb{C} ,

$$z : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

asigna a cada valor $t \in I$ un valor complejo $z(t)$,

$$t \rightarrow z(t)$$

En particular manejaremos el caso en que $I = [a, b]$ es un intervalo cerrado.

Escribiendo en forma binómica $z(t) = x(t) + iy(t)$, la función $z(t)$ determina unívocamente dos funciones en \mathbb{R} , $x(t)$ y $y(t)$. Escribiendo en forma de par ordenado $z(t) = (x(t) + iy(t))$, la función $z(t)$ determina unívocamente una función en $\mathbb{R}^2, \{(x(t), y(t))\}$. En notación vectorial, $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$.

Una función compleja de variable real $z(t) = x(t) + iy(t)$ se representa como una curva orientada en el plano. En base a cursos anteriores, podemos estudiar límite, continuidad y derivada de $\vec{r}(t)$ (en términos de límite, continuidad y derivadas de $x(t)$ y $y(t)$). Con estos conceptos sabremos caracterizar dirección tangente, velocidad, longitud de arco, etc. Veremos que estos conceptos están íntimamente relacionados con sus correspondientes en la función $z(t)$.

Funciones de variable compleja y valores complejos

Consideremos un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ y una función

$$f : A \rightarrow \mathbb{C}$$

que asigna a cada $z \in A$ un y sólo un valor $w \in \mathbb{C}$,

$$z \rightarrow w(z)$$

La anotaremos

$$w = f(z)$$

Para visualizar este tipo de funciones, a las cuales dedicaremos este curso, corresponde ir a la noción básica de función, graficando por separado el conjunto dominio, el conjunto codominio, y flechas que describen la asignación $z \rightarrow w(z)$. Es decir, graficar un plano complejo (z) para dibujar el dominio y otro plano complejo (w) para los valores que toma la función.

En este sentido, una función $w = f(z)$ implementa un *mapeo* (o transformación) de una región del plano en otra región del plano.

Como conjunto de puntos representativos del dominio se sugiere considerar distintas curvas parametrizadas

$$\gamma : z(t), \quad t \in [a, b]$$

y sus imágenes

$$f(\gamma) : w(t) = f(z(t)), \quad t \in [a, b]$$

Mejor aún si se considera una familia de curvas γ_α caracterizada por algún parámetro α , como un conjunto de rectas paralelas, un haz de rectas, circunferencias concéntricas, etc. Se observará que la elección más conveniente de curvas depende de cada función en particular.

Para trabajar en coordenadas reales (es decir, representar los complejos en forma binómica o de par ordenado) usaremos las siguientes notaciones para distinguir parte real e imaginaria:

$$z = x + iy$$

$$w = u + iv$$

de forma tal que

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

En otras palabras, la función $w = f(z)$ determina unívocamente dos funciones reales u y v de dos variables reales x y y . El mapeo descrito por $w = f(z)$ se escribe en variables reales como

$$\pi_f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

donde

$$\pi_f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

Cabe insistir en que cada punto $(x, y) \in A$ en el plano dominio se mapea a un punto (u, v) del plano imagen.

Una vez establecida la correspondencia de $w = f(z)$ con $u(x, y)$, $v(x, y)$, es claro que los conceptos de Análisis Matemático II serán de utilidad: para cada función $u(x, y)$, $v(x, y)$ se debe recordar límite en dos variables, diferenciabilidad, derivadas parciales y direccionales, gradiente, curvas de nivel, etc. En particular para el mapeo π_f se debe recordar el significado de la matriz Jacobiana y las condiciones de invertibilidad (definiendo implícitamente x y y como funciones de u y v).

Límite de sucesiones de números complejos

Límite de sucesiones complejas. Unicidad. Relación con los límites de parte real e imaginaria. Álgebra de límites.

Límite infinito. Punto en infinito, plano complejo extendido y entornos de infinito. Esfera de Riemann.

Sucesión adherente a un conjunto.

Sucesiones fundamentales (o de Cauchy). Completitud de \mathbb{R} , \mathbb{R}^n , \mathbb{C} .

Anexo - propiedades de \mathbb{R} , \mathbb{R}^n : existencia de ínfimo y supremo de conjuntos acotados, principio de encaje de intervalos, existencia de máximo y mínimo de funciones continuas en dominios compactos, lema de separación entre un conjunto compacto y la frontera de un abierto que lo incluya.

Límite de sucesiones

Dada una sucesión $\{z_n\}$ en un espacio métrico M , se tiene una noción intuitiva de límite: se dice que la sucesión tiene límite $l \in M$ si se observa que los elementos z_n de la sucesión se mantienen arbitrariamente cerca de l cuando sus índices son suficientemente grandes. De esta manera el límite no se calcula, sino que se intuye. El concepto de límite se formaliza con la siguiente

Definición: Dada una sucesión $\{z_n\}$ en un espacio métrico M ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l \in M \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n > N \implies z_n \in \Delta(l, \varepsilon)$$

Ejemplo: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1+in} = -i$.

Propiedad. Dada una sucesión $\{z_n\}$ en un espacio métrico M , si el límite existe es único.

Demostración en clase. Basta suponer dos límites distintos y llegar a un absurdo contradiciendo la desigualdad triangular.

Sucesiones en \mathbb{C} y en \mathbb{R}^m

En \mathbb{C} , y en general en \mathbb{R}^m usamos la distancia euclídea $\text{dist}(z, z') = |z - z'|$.

Propiedad. Dada una sucesión $\{z_n\}$ en \mathbb{C} , con $z_n = x_n + iy_n$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l = l_x + il_y \in \mathbb{C} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l_x \in \mathbb{R} \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l_y \in \mathbb{R}$$

Demostración en clase. Basta usar $|x_n - l_x| \leq |z_n - l|$ y $|y_n - l_y| \leq |z_n - l|$, $|z_n - l| \leq |x_n - l_x| + |y_n - l_y|$. Se hace en \mathbb{C} y se comenta en \mathbb{R}^m

Algebra de límites. Sea que en M está definida una suma, que forma grupo, y $\text{dist}(z, z') = |z - z'|$ (por ejemplo, cualquier espacio vectorial normado). Se verifica la siguiente propiedad:

Si dos sucesiones tienen límite en M , $\{z_n\} \rightarrow l$, $\{w_n\} \rightarrow m$, entonces la sucesión suma tiene límite en M ,

$$\{z_n + w_n\} \rightarrow l + m$$

Sea que en M está definido además un producto, distributivo con respecto a la suma (por ejemplo un espacio de matrices). Se verifica la siguiente propiedad:

Si dos sucesiones tienen límite en M , $\{z_n\} \rightarrow l$, $\{w_n\} \rightarrow m$, entonces la sucesión producto tiene límite en M ,

$$\{z_n w_n\} \rightarrow l m$$

Sea que en M es un cuerpo ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Se verifica la siguiente propiedad:

Si dos sucesiones tienen límite en M , $\{z_n\} \rightarrow l$, $\{w_n\} \rightarrow m$, y $m \neq 0$, entonces la sucesión cociente tiene límite en M ,

$$\{z_n/w_n\} \rightarrow l/m$$

Estas propiedades se demuestran como ejercicios de práctica. Basta conocer la prueba en \mathbb{R} y repetirla.

Límite infinito en \mathbb{C} (o en \mathbb{R}^m)

Dada una sucesión $\{z_n\}$ en \mathbb{C} (o en \mathbb{R}^m), se tiene una noción intuitiva de límite infinito: se dice que la sucesión tiende a infinito si se observa que los elementos z_n de la sucesión se mantienen arbitrariamente lejos del origen (0) cuando sus índices son suficientemente grandes. El concepto de límite infinito se formaliza con la siguiente

Definición: Dada una sucesión $\{z_n\}$ en \mathbb{C} (o en \mathbb{R}^m),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty \iff \forall R > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n > N \implies \text{dist}(z_n, 0) > R$$

Ejemplo: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2/(n+i) = \infty$

Debe observarse que en esta definición no importa el argumento (o la dirección) de los elementos z_n , sólo su módulo.

Punto en infinito. Resulta conveniente introducir el punto en infinito como un elemento $\infty \notin \mathbb{C}$ que funciona como límite de las sucesiones tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$. Una vez introducido, se define la distancia entre ese elemento y los puntos del plano complejo

$$\forall z \in \mathbb{C}, \text{dist}(z, \infty) = \text{dist}(z, 0)^{-1},$$

de manera tal que cuanto más lejos esté z del origen, más cerca está de infinito.

Se llama plano complejo extendido a $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Tomando al plano complejo como conjunto abierto, $\infty \in \bar{\mathbb{C}}$ es un punto de frontera de $\mathbb{C} \subset \bar{\mathbb{C}}$, y $\bar{\mathbb{C}}$ es su clausura.

Se define un entorno reducido de infinito como

$$\begin{aligned} \Delta_0(\infty, r) &= \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, \infty) < r\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, 0) > 1/r\} \end{aligned}$$

De esta manera, se puede reescribir la definición de límite infinito en el mismo lenguaje que la de límite finito:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n > N \implies z_n \in \Delta_0(\infty, \varepsilon)$$

Esfera de Riemann. Es útil visualizar el plano complejo extendido como un plano compactificado: se piensa el plano dentro del espacio (3D) y se lo deforma envolviendo una esfera. El cero queda en el polo sur, mientras los puntos arbitrariamente lejanos al origen quedan arbitrariamente cerca del polo norte. Se interpreta que el polo norte representa el punto en infinito.

Técnicamente, se escribe el mapeo entre puntos del plano con puntos de la esfera mediante una proyección estereográfica.

Dibujos en clase.

Existencia del límite, nomenclatura. Dada una sucesión $\{z_n\}$ en \mathbb{C} (o en \mathbb{R}^m), en este curso diremos que el límite de la sucesión existe y es finito cuando $\{z_n\} \rightarrow l \in \mathbb{C}$ (ídem en \mathbb{R}^m) y que el límite de la sucesión existe pero es infinito cuando $\{z_n\} \rightarrow \infty$. En otros textos se dice que el límite existe sólo cuando es finito, mientras que cuando $\{z_n\} \rightarrow \infty$ se dice que no existe pero tiende a infinito.

Diremos además (como todos los textos) que la sucesión converge si y solo si tiene límite finito.

Sucesiones fundamentales. Completitud.

Hemos visto que la definición formal del concepto de límite requiere conocer el límite (antes de definirlo!). El concepto de sucesión fundamental describe la convergencia de una sucesión sin referirse al valor del límite.

Definición: Dada una sucesión $\{z_n\}$ en un espacio métrico M , se dice que la sucesión es fundamental (o de Cauchy) si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n, m > N \implies \text{dist}(z_n, z_m) < \varepsilon$$

Es decir, la sucesión es fundamental si basta considerar índices suficientemente altos para que sus elementos se mantengan arbitrariamente cercanos entre sí.

Propiedad: Dada una sucesión $\{z_n\}$ en un espacio métrico M ,

$$\{z_n\} \text{ converge} \implies \{z_n\} \text{ es fundamental}$$

Demostración en clase, basta usar la desigualdad triangular.

Es importante que no vale la recíproca. En general,

$$\{z_n\} \text{ fundamental} \not\Rightarrow \{z_n\} \text{ converge}$$

Ejemplo: Considerar un número irracional (por ejemplo π) y la sucesión en \mathbb{Q} formada por las sucesivas aproximaciones con desarrollo decimal finito al número irracional: $q_0 = 3$, $q_1 = 3,1$, $q_2 = 3,14$, \dots Esta sucesión es fundamental en \mathbb{Q} pero no converge, porque no encuentra límite dentro de \mathbb{Q} .

Por supuesto la misma sucesión es convergente en \mathbb{R} . Se observa que la falta de convergencia no es un problema de la sucesión en sí misma, sino del espacio métrico en que se la considera.

Definición: Dado un espacio métrico M , se dice que es completo si y sólo si todas las sucesiones fundamentales en M convergen en M .

Comentario: Dado un espacio métrico que no sea completo, se lo puede completar definiendo elementos externos al espacio que funcionen como límite de aquellas sucesiones fundamentales que no converjan.

Propiedad: \mathbb{R} es un conjunto completo.

La noción de completitud es la base de la definición de \mathbb{R} , como unión de los racionales y todos sus huecos. Los huecos se definen técnicamente como los límites de sucesiones racionales fundamentales no convergentes.

Distintos axiomas que caracterizan a \mathbb{R} , como la existencia del supremo de sucesiones acotadas por encima, etc., son equivalentes a la caracterización de completitud. Vale decir, la definición rigurosa de \mathbb{R} permite demostrar dichos axiomas.

No vamos a profundizar en la definición de \mathbb{R} . Usaremos sin demostración algunas caracterizaciones de conjuntos y distancias que se desprenden de la completitud.

Propiedad: \mathbb{C}, \mathbb{R}^m son conjuntos completos.

Demostración en clase, basta referirse a las componentes reales.

Sucesiones adherentes

Dado un conjunto $A \subset M$, M espacio métrico, y dado $z^* \in M$, se dice que $\{z_n\}$ es una sucesión en A adherente a z^* si y sólo si:

1. $\forall n, z_n \in A$
2. $\forall n, z_n \neq w$
3. $\{z_n\} \rightarrow w$

Es decir, la sucesión es un camino de puntos de A que se acercan a w sin tocarlo. Más adelante las usaremos como forma elemental de explorar límites de funciones, para z tendiendo a z^* .

Definición: Dado un espacio métrico M y un conjunto $A \subset M$, se dice que A es denso en M si y sólo si

$$\forall z \in M, \exists \{z_n\} \text{ en } A \text{ adherente a } z$$

Series de números complejos

Series de números complejos. Convergencia, convergencia absoluta. Criterios de comparación.

Series numéricas

Dada una sucesión $\{a_n\}$ en un espacio métrico M donde haya definida una suma, con $n \geq n_0$, se llama sucesión de sumas parciales de $\{a_n\}$ a una sucesión $\{S_k\}$ en M definida por

$$S_k = \sum_{n=n_0}^k a_n$$

La serie numérica simbolizada por

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$$

se define como el límite de la sucesión de sumas parciales

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k,$$

que puede existir o no. Más precisamente, si $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S$ y es finito, se dice que la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge en M y que su suma es S , y se anota

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k.$$

En el caso en que $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \infty$ se dice que la serie diverge. Nos referiremos formalmente a la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ antes de determinar si converge, pero usaremos el signo $=$ sólo cuando hayamos determinado que converge.

Ejemplo importante: series geométricas.

Dado un número q en \mathbb{R} o en \mathbb{C} (llamado razón), consideramos la sucesión $\{a_n = q^n\}_{n \geq 0}$ y sus sumas parciales

$$S_k = \sum_{n=0}^k q^n$$

Es fácil calcular que

$$qS_k - S_k = q^{k+1} - 1$$

de donde se despeja, si $q \neq 1$,

$$S_k = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$$

El límite de la sucesión de sumas parciales es finito si y solo si $|q| < 1$, en cuyo caso

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$$

En la mayoría de los casos no es posible hallar una expresión cerrada para la sucesión de sumas parciales. Sin embargo, se puede determinar en muchos casos si la serie converge sin calcular su suma.

Criterios de convergencia

Condición necesaria de convergencia. Dada la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} z_n$, para que converja es necesario que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Demostración en clase. Basta ver que $\sim (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0)$ implica que la sucesión de sumas parciales no es fundamental, luego no puede ser convergente.

Criterio de comparación e series de términos no negativos. Dada una serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ con $a_n \geq 0$ (serie de términos reales no negativos), si existe otra serie de términos reales no negativos $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$, con $b_n \geq a_n$, convergente, entonces $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge.

Demostración en clase. Basta ver que la sucesión de sumas parciales de $\{S_k = \sum_{n=n_0}^k a_n\}$ es monótonamente creciente y acotada por encima por la suma $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$. Luego tiene supremo en \mathbb{R} , que resulta ser el límite buscado.

O bien que la sucesión de sumas parciales de $\{S_k = \sum_{n=n_0}^k a_n\}$ es fundamental, con $|S_k - S_l| = \sum_{n=l+1}^k a_n \leq \sum_{n=l+1}^k b_n < \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$ con solo tomar $k > l$ suficientemente grandes, ya que $\sum_{n=n_0}^k b_n$ es fundamental por ser convergente.

Convergencia absoluta. Dada una serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ con $a_n \in \mathbb{R}$ o $a_n \in \mathbb{C}$, se puede estudiar la serie de términos no negativos asociada $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$. Se dice que la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si y sólo si la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ converge.

Propiedad. La convergencia absoluta implica convergencia puntual. Es decir,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Demostración en clase. Basta ver que, dados $k \geq l$,

$$\left| \sum_{n=n_0}^k a_n - \sum_{n=n_0}^l a_n \right| = \left| \sum_{n=l+1}^k a_n \right| \leq \sum_{n=l+1}^k |a_n| < \varepsilon$$

para cualquier $\varepsilon > 0$ con solo tomar k, l suficientemente grandes, ya que $\sum_{n=n_0}^k |a_n|$ es fundamental por ser convergente.

Debe notarse que la convergencia absoluta puede ser probada con técnicas de series de términos reales no negativos (como comparación), y asegura la convergencia (sin módulo).

Otros criterios. Se pueden trabajar otros criterios de convergencia, como el del cociente o el de la raíz. También se conocen criterios de convergencia condicional, que prueban el caso en que la serie de módulos no converge pero la serie sin módulos sí converge.

Límites de funciones. Continuidad.

Límites de funciones (en general). Unicidad. Límites por caminos (camino=sucesión adherente). Continuidad.

Límites y continuidad de funciones complejas de variable real. Álgebra de límites.

Límites y continuidad de funciones complejas de variable compleja. Álgebra de límites.

Límite de funciones

Dada $f : \Omega \subset M \rightarrow M'$, con M, M' espacios métricos, y dado z_0 punto de acumulación de Ω , se dice que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \in M \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : z \in \Delta_0(z_0, \delta) \cap \Omega \Rightarrow f(z) \in \Delta_0(l, \varepsilon)$$

Se debe notar que z_0 puede no pertenecer a Ω , basta con que sea punto de acumulación de Ω para que $\Delta_0(z_0, \delta) \cap \Omega \neq \emptyset$. En el mejor de los casos, z_0 será interior a Ω y la intersección será $\Delta_0(z_0, \delta) \cap \Omega = \Delta_0(z_0, \delta)$.

Teorema. Dada $f : \Omega \subset M \rightarrow M'$,

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \in M \Leftrightarrow (\forall \{z_n\} \text{ en } M \text{ adherente a } z_0) \left(\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = l \in M \right)$$

Demostración en clase.

- \Rightarrow) dada $\{z_n\}$ en M adherente a z_0 , y dado $\varepsilon > 0$, basta que n sea suficientemente grande como para que $z_n \in \Delta_0(z_0, \delta)$.
- \Leftarrow) suponer que $\sim (\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \in M)$ y construir una $\{z_n\}$ en M adherente a z_0 tal que $\sim (\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = l)$. Abs!

Corolario. Dada $f : \Omega \subset M \rightarrow M'$, si existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ entonces es único.

Demostración en clase. Se suponen dos límites $l \neq m$, luego cada $\{z_n\}$ en M adherente a z_0 tendría dos límites. Abs!

Límite de funciones a valores complejos. Sea $f : \Omega \subset M \rightarrow \mathbb{C}$, y llamemos z a los puntos de $\Omega \subset M$, M espacio métrico. Quedan definidas

$$u : \Omega \subset M \rightarrow \mathbb{R}, u(z) = \operatorname{Re}(f(z))$$

$$v : \Omega \subset M \rightarrow \mathbb{R}, v(z) = \operatorname{Im}(f(z))$$

tales que

$$f(z) = u(z) + iv(z)$$

Teorema. Dada $f : \Omega \subset M \rightarrow \mathbb{C}$ y z_0 punto de acumulación de Ω ,

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l = a + ib \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \exists \lim_{z \rightarrow z_0} u(z) = a \in \mathbb{R} \wedge \exists \lim_{z \rightarrow z_0} v(z) = b \in \mathbb{R}$$

Demostración: basta explorar con sucesiones $\{z_n\}$ en M adherentes a z_0

Límite infinito. Dada $f : \Omega \subset M \rightarrow \mathbb{C}$ y z_0 punto de acumulación de Ω ,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : z \in \Delta_0(z_0, \delta) \cap \Omega \Rightarrow f(z) \in \Delta_0(\infty, \varepsilon)$$

Álgebra de límites en \mathbb{C} . Sean $f : \Omega_f \subset M \rightarrow \mathbb{C}$ y $g : \Omega_g \subset M \rightarrow \mathbb{C}$, con $\Omega_f \cap \Omega_g \neq \emptyset$, y sea z_0 punto de acumulación de $\Omega_f \cap \Omega_g$.

Si $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$ y $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = m$, entonces

- $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = l + m$
- $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)g(z)) = lm$
- si además $m \neq 0$, $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)/g(z)) = l/m$

Demostración: basta explorar con sucesiones $\{z_n\}$ en M adherentes a z_0

Límite de funciones de variable compleja. Dada $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow M'$, con Ω no acotado, se dice que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : z \in \Delta_0(\infty, \delta) \cap \Omega \Rightarrow f(z) \in \Delta(l, \varepsilon)$$

En el caso de $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, el límite l puede ser infinito sin cambiar la definición.

Continuidad

Definiciones. Dada $f : \Omega \subset M \rightarrow M'$, con M, M' espacios métricos, y dado $z_0 \in M$, se dice que f es continua en z_0 si y sólo si

1. $z_0 \in \Omega$
2. $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$
3. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

Dado $A \in M$, se dice que f es continua en A si y sólo si $\forall z \in A$, f es continua en z .

Se llama dominio de continuidad de f al mayor subconjunto del dominio Ω donde f sea continua.

Ejemplos. Probar que $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $z(t) = k$ es continua en \mathbb{R}

Probar que $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $z(t) = t$ es continua en \mathbb{R}

Probar que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $f(z) = k$ es continua en \mathbb{C}

Probar que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $f(z) = z$ es continua en \mathbb{C}

Propiedades. Sean $f : \Omega_f \subset M \rightarrow \mathbb{C}$ y $g : \Omega_g \subset M \rightarrow \mathbb{C}$, con $\Omega_f \cap \Omega_g \neq \emptyset$.

Si f y g son continuas en $z_0 \in M$, entonces

- $f + g$ es continua en z_0
- fg es continua en z_0
- si además $g(z_0) \neq 0$, f/g es continua en z_0

Demostración: basta revisar que z_0 esté en el dominio, y asegurar la existencia y valor de los límites correspondientes.

Propiedad. Dadas $f : \Omega \subset M \rightarrow M'$ continua en un punto z_0 interior a Ω y $\{z_n\}$ una sucesión en M ,

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(z_0)$$

Es decir, en este caso $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n)$.

Demostración: basta aplicar las definiciones correspondientes. Se debe notar que si f no es continua en z_0 el resultado no se verifica.

Corolario. Sean $f : \Omega_f \subset M \rightarrow M'$ y $g : \Omega_g \subset M' \rightarrow M''$. Si $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \in M'$ con l interior a Ω_g y si g es continua en l , entonces

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} g(f(z)) = g(z_0).$$

Es decir, en este caso $\lim_{z \rightarrow z_0} g(f(z)) = g(\lim_{z \rightarrow z_0} f(z))$.

Demostración: basta explorar con sucesiones en Ω_f adherentes a z_0 y utilizar la propiedad anterior. Se debe notar que si g no es continua en l el resultado no se verifica.

Corolario: continuidad de la función compuesta. Sean $f : \Omega_f \subset M \rightarrow M'$ y $g : \Omega_g \subset M' \rightarrow M''$. Si f es continua en $z_0 \in M$ y g es continua en $g(z_0)$ interior a Ω_g , entonces $g \circ f$ es continua en z_0 .

Observación: se llama función compuesta $g \circ f : \Omega \subset \Omega_f \rightarrow M''$ a la función dada por

$$g \circ f(z) = g(f(z)),$$

cuyo dominio es

$$\Omega = \{z \in \Omega_f : f(z) \in \Omega_g\}$$

Derivada.

Primera parte:

Derivada (en general, para funciones de una variable en un cuerpo a un espacio vectorial). Diferenciabilidad y diferenciales. Notación de Leibnitz y de Lagrange/Newton.

Derivada de la suma, del producto y el cociente (donde el producto y cociente existan). Derivada de la función compuesta.

Segunda parte:

Derivada de funciones complejas de variable real. Diferenciabilidad, diferencial y dirección tangente a curvas.

Derivada de funciones complejas de variable compleja. Interpretación geométrica con diferenciales.

Primera parte

Derivabilidad. La noción de derivada total se basa en el límite del cociente incremental. Para que este cociente tenga sentido se consideran funciones de *una* variable independiente z en un cuerpo \mathbb{K} y valores en un espacio vectorial V sobre \mathbb{K} . Además, las distancias en \mathbb{K} y en V se definen como el módulo de la diferencia.

Definición. Dada $f : \Omega \subset \mathbb{K} \rightarrow V$ y $z_0 \in \Omega$ punto de acumulación de Ω , se dice que f es derivable en z_0 si y sólo si

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

En ese caso se llama derivada de f respecto de z en z_0 a dicho límite.

Notación. La derivada se suele anotar como

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

(notación de Lagrange) o como

$$\frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

(notación de Leibnitz) o como

$$\dot{f}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

(notación de Newton)

Propiedades. Entre las propiedades más inmediatas destacamos:

- Si existe la derivada $f'(z_0)$, es única.
- Linealidad: si f y g son derivables en z_0 , punto de acumulación de la intersección de los dominios de f y g , para todo par de elementos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha f + \beta g$ es derivable en z_0 y

$$(\alpha f + \beta g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0)$$

Teorema. Si f es derivable en z_0 , entonces f es continua en z_0 .

Diferenciabilidad. Dada $f : \Omega \subset \mathbb{K} \rightarrow V$ y $z_0 \in \Omega$ punto de acumulación de Ω , se dice que f es diferenciable en z_0 si y sólo si

$$(\exists A \in V) (\forall z \in \Omega, f(z) - f(z_0) = A(z - z_0) + \epsilon(z)|z - z_0|)$$

con $\lim_{z \rightarrow z_0} \epsilon(z) = 0 \in V$.

Se llama diferencial de la variable independiente z en el punto z_0 al desplazamiento

$$dz = z - z_0$$

y diferencial de la variable dependiente f en el punto z_0 al desplazamiento en V dado por

$$df = A(z - z_0) = Adz$$

de manera tal que el diferencial df es la mejor aproximación lineal al incremento de la función

$$\Delta f = f(z) - f(z_0)$$

ante un desplazamiento dz de la variable independiente

Teorema. f es derivable en z_0 si y sólo si f es diferenciable en z_0 .

Demostración

- \Rightarrow) basta acomodar, para $z \neq z_0$,

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right] (z - z_0)$$

y observar que la expresión entre corchetes tiende a cero cuando $z \rightarrow z_0$.

- \Leftarrow) basta escribir el cociente incremental como

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = A + \epsilon(z) \frac{|z - z_0|}{z - z_0}$$

y observar que el último término tiende a cero cuando $z \rightarrow z_0$.

De este resultado se desprende que el vector constante A en la definición de diferenciabilidad coincide con la derivada de f en z_0 , $A = f'(z_0)$

Teorema.

- Sean $f : \Omega_f \subset \mathbb{K} \rightarrow V$ y $g : \Omega_g \subset \mathbb{K} \rightarrow V$, con $\Omega_f \cap \Omega_g \neq \emptyset$. Si f y g son derivables en $z_0 \in \Omega_f \cap \Omega_g$, entonces $f + g$ es derivable en z_0 y

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$

- Sean $f : \Omega_f \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ y $g : \Omega_g \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, con $\Omega_f \cap \Omega_g \neq \emptyset$. Si f y g son derivables en $z_0 \in \Omega_f \cap \Omega_g$, entonces fg es derivable en z_0 y

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

(regla de Leibnitz).

- Sean $f : \Omega_f \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ y $g : \Omega_g \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, con $\Omega_f \cap \Omega_g \neq \emptyset$. Si f y g son derivables en $z_0 \in \Omega_f \cap \Omega_g$ y $g(z_0) \neq 0$, entonces f/g es derivable en z_0 y

$$(f/g)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$$

Teorema. Sean $f : \Omega_f \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ y $g : \Omega_g \subset \mathbb{K} \rightarrow V$, con f derivable en z_0 y g derivable en $f(z_0)$, con $f(z_0)$ interior a Ω_g . En este caso la función compuesta $(g \circ f)(z_0) = g(f(z_0))$ es derivable en z_0 y

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$$

Demostración: analizar

$$h(z) = \begin{cases} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} & \text{si } f(z) \neq f(z_0) \\ g'(f(z_0)) & \text{si } f(z) = f(z_0) \end{cases}$$

para probar que es continua en z_0 . Luego para $z \neq z_0$ es seguro escribir

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = h(z) \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

y tomar el límite para $z \rightarrow z_0$.

Segunda parte: aplicación

Funciones complejas de variable real: curvas en el plano complejo. Consideramos

$$z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \text{ dada por } z = z(t)$$

Tomando parte real y parte imaginaria, queda definida

$$\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \text{ dada por } \vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$

con $x(t) = \operatorname{Re}(z(t))$, $y(t) = \operatorname{Im}(z(t))$. Tanto en complejas como reales, la función parametriza una curva γ en el plano.

De acuerdo a los resultados ya probados, se verifica que $z(t)$ es continua en $t_0 \in [a, b]$ si y sólo si $\vec{r}(t)$ es continua en $t_0 \in [a, b]$.

También se verifica que $z(t)$ es derivable en $t_0 \in [a, b]$ si y sólo si $\vec{r}(t)$ es derivable en $t_0 \in [a, b]$, siendo

$$\begin{aligned} z'(t_0) &= x'(t_0) + iy'(t_0) \\ \vec{r}'(t_0) &= (x'(t_0), y'(t_0)) \end{aligned}$$

La interpretación geométrica de la derivada en este tipo de funciones representa el vector velocidad con que la parametrización recorre la curva. Si $z'(t_0) \neq 0$, la curva admite vector tangente, y en particular $\arg(z'(t_0))$ da la orientación del vector tangente.

En términos de diferenciales, en el punto $z(t_0)$ o $\vec{r}(t_0)$ tenemos

$$\begin{aligned} dz &= z'(t_0)dt \\ d\vec{r} &= \vec{r}'(t_0)dt \end{aligned}$$

describiendo la recta tangente a la curva, con idéntica información geométrica en el plano en términos de coordenadas complejas o en términos de coordenadas reales.

Definimos el diferencial de longitud de arco en el punto $z(t_0)$ cuando $z(t)$ es derivable en t_0 , como

$$dl = |z'(t_0)|dt \equiv |\vec{r}'(t_0)|dt$$

Reparametrización de curvas. Dada una curva γ con parametrización $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, se puede describir la misma curva con una parametrización diferente. Consideremos una función

$$t : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b], \text{ dada por } t = t(s)$$

que sea continua en $[\alpha, \beta]$, monótona y suryectiva; la función compuesta

$$z : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}, \text{ dada por } z(s) = z(t(s))$$

parametriza la misma la curva γ . Si $t(s)$ es creciente, la parametrización conserva la orientación, en tanto que si $t(s)$ es decreciente la curva invierte su orientación.

La reparametrización $t(s)$ es invertible, definiendo

$$s : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta], \text{ dada por } s = s(t)$$

Si existe $t'(s) \neq 0$ en un punto s_0 , existe $s'(t) \neq 0$ en el correspondiente punto $t_0 = t(s_0)$, con $s'(t_0) = 1/t'(s_0)$.

Una buena reparametrización $t(s)$ debería cumplir la existencia y continuidad de $t'(s) \neq 0$ en $[a, b]$ para no introducir problemas en la descripción de una curva.

Clasificación de curvas. Sea una curva γ con parametrización $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $z = z(t)$. Por simplicidad anotaremos $\gamma : z(t)$, con $t \in [a, b]$.

Decimos que γ es continua si y sólo si la parametrización $z(t)$ es continua en $[a, b]$ o admite una reparametrización que lo sea.

Decimos que γ es suave si y sólo si la parametrización $z(t)$ es continua en $[a, b]$, con derivada continua en $[a, b]$ y derivada no nula en (a, b) , o admite una reparametrización que lo sea. En este caso, la curva admite vector

tangente en todo punto, y el vector tangente es continuo; se dibuja como una curva sin vértices.

Decimos que γ es suave a trozos si y sólo si es continua y el intervalo $[a, b]$ es unión de un número finito de subintervalos donde la parametrización sea suave. En este caso, la curva admite vector tangente, excepto en un número finito de puntos; en principio se dibuja con vértices. Se suele llamar contorno a una curva suave a trozos.

Decimos que γ es simple si la parametrización $z(t)$ es continua e inyectiva en $[a, b]$. En este caso, la curva no pasa dos veces por el mismo punto.

Decimos que γ es simple y cerrada si la parametrización $z(t)$ es continua $[a, b]$ e inyectiva en $[a, b)$, con $z(b) = z(a)$. En este caso, la curva no pasa dos veces por el mismo punto excepto el punto inicial y final, que coinciden.

Aceptaremos que una curva simple y cerrada en el plano define un conjunto $Int(\gamma)$ (interior de la curva), que es un conjunto abierto, y que la curva es su frontera, $\partial(Int(\gamma)) = \gamma$. Además, la orientación de la curva se puede caracterizar como antihoraria (o positiva) cuando el interior queda a la izquierda del vector tangente, u horaria (o negativa) en el caso contrario. La demostración de estas propiedades intuitivas corresponde a un curso de Topología.

Se suele llamar curva de Jordan a una curva suave a trozos, simple y cerrada.

Funciones complejas de variable compleja: mapeos en el plano.

Consideramos $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por una receta

$$w = f(z)$$

Tomando parte real $u = Re(w)$ y parte imaginaria $v = Im(w)$, con $z = x + iy$, quedan definidas

$$\begin{cases} u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & , \text{ dada por } u(x, y) = Re(f(z)) \\ v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & , \text{ dada por } v(x, y) = Im(f(z)) \end{cases}$$

Tanto en coordenadas complejas como en coordenadas reales, la función representa un mapeo del conjunto Ω en el plano en el plano. Se puede pensar como un mapeo del plano en si mismo, o como un mapeo del plano en una segunda copia del plano.

Interpretación geométrica de la derivada de funciones complejas de variable compleja. Sea f derivable en un punto $z_0 \in \Omega$. Como f es diferenciable en z_0 podemos escribir

$$dw = f'(z_0)dz$$

donde el producto se hace entre números complejos. Si $f'(z_0) \neq 0$ podemos leer la relación entre módulos y argumentos del incremento de la variable independiente dz y el diferencial dw como

$$\begin{aligned} arg(dw) &= arg(dz) + arg(f'(z_0)) \\ |dw| &= |f'(z_0)||dz| \end{aligned}$$

La primer ecuación indica que dw se halla rotado respecto de dz , con un ángulo de rotación $\arg(f'(z_0))$. Debe notarse que el ángulo de rotación $\arg(f'(z_0))$ es el mismo para todo dz que se trace a partir de z_0 .

La segunda ecuación indica que el desplazamiento dw se halla escaleado respecto de dz , con un factor de escala $|f'(z_0)|$. Si $|f'(z_0)| > 1$ se trata de una dilatación, si $|f'(z_0)| < 1$ se trata de una contracción. Debe notarse que el factor de escala $|f'(z_0)|$ es el mismo para todo dz que se trace a partir de z_0 .

Condiciones de Cauchy-Riemann. Analiticidad y singularidades.

Condiciones de Cauchy-Riemann

Definiciones de analiticidad, función entera, singularidades y clasificación de singularidades.

Teorema. Dada una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, escrita como $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y dado un punto $z_0 = x_0 + iy_0$ interior a su dominio, f es derivable respecto de z en z_0 si y sólo si u y v son diferenciables respecto de (x, y) en (x_0, y_0) y sus derivadas parciales cumplen las relaciones

$$(7.0.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x(x_0, y_0)} &= \frac{\partial v}{\partial y(x_0, y_0)} \\ \frac{\partial u}{\partial y(x_0, y_0)} &= -\frac{\partial v}{\partial x(x_0, y_0)} \end{aligned}$$

En ese caso, se verifica que

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x(x_0, y_0)} + i \frac{\partial v}{\partial x(x_0, y_0)}$$

Las relaciones (7.0.1) se conocen como relaciones de Cauchy y Riemann.

Demostración

- \Rightarrow) basta escribir el incremento

$$\Delta f = f'(z_0)dz + \epsilon(z)|dz|$$

sabiendo que $\lim_{z \rightarrow z_0} \epsilon(z) = 0$ y separar parte real e imaginaria para obtener los incrementos du y dv . De allí se reconoce que u y v son diferenciables y se leen las derivadas parciales.

- \Leftarrow) basta construir el incremento

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v$$

y usar que u y v son diferenciables para reconocer que f es diferenciable y leer su derivada.

Corolarios.

- Si u y v tienen derivadas parciales continuas en (x_0, y_0) y cumplen las condiciones (7.0.1) en (x_0, y_0) , entonces f es derivable en z_0 .

- Si u no es diferenciable, o v no es diferenciable, o no satisfacen las condiciones (7.0.1) en un punto (x_0, y_0) , entonces f no es derivable en ese punto z_0 .

Ejemplo. Estudio de la función exponencial, definida en todo el plano como

$$\exp(z) = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Resulta analítica en todo \mathbb{C} .

Definiciones.

- Dada una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, se dice que f es analítica en z_0 interior a Ω si y sólo si f es derivable en z_0 y en algún entorno abierto centrado en z_0 . Es decir,
 f es analítica en $z_0 \Leftrightarrow \exists r > 0 : f$ es analítica en $\Delta(z_0, r)$
- Se dice que f es analítica en $A \subset \Omega$ si y sólo si f es analítica en cada punto de A .
- Se dice que f es una función entera si y sólo si f es analítica en todo \mathbb{C} .
- Se llama dominio de analiticidad de f al mayor subconjunto de su dominio donde f es analítica.

Propiedad. Los dominios de analiticidad siempre son abiertos

Demostración: dado un punto z_0 donde f sea analítica, basta considerar el entorno donde es derivable para comprobar que en ese mismo entorno f es analítica.

Definición.

- Dada una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, se dice que f es singular en z_0 si y sólo si z_0 es un punto de frontera del dominio de analiticidad de f . Es decir, f no es analítica en z_0 pero todo entorno reducido $\Delta_0(z_0, r)$ contiene puntos z donde f sí es analítica.

Clasificación.

- Se dice que una singularidad z_0 de una función f es aislada si y sólo si existe un entorno reducido $\Delta_0(z_0, r)$ donde f es analítica.
- Se dice que una singularidad z_0 de una función f es no aislada si y sólo si en todo entorno reducido $\Delta_0(z_0, r)$ existen puntos donde f es analítica y puntos donde f no es analítica.
- Las singularidades aisladas se caracterizan por el límite de f :
 - si existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$ finito, se dice que la singularidad es evitable.
 - si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, se dice que la singularidad es polar.
 - si no existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ (ni finito ni infinito), se dice que la singularidad es esencial.

Mapectos. Transformaciones conformes.

Transformaciones conformes (contenido geométrico y caracterización por derivabilidad). Mapectos elementales: función lineal como traslación, rotación y dilatación. Inversión. Funciones bilineales.

Mapectos conformes

Mapectos o transformaciones en \mathbb{R}^n . Sea $\Pi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un mapecto descrito por funciones

$$\begin{cases} y_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

diferenciables y con Jacobiano no nulo en un punto (x_1^0, \dots, x_n^0) . Si una curva suave γ pasa por (x_1^0, \dots, x_n^0) entonces su imagen $\Pi(\gamma)$ será suave en el correspondiente punto $\Pi(x_1^0, \dots, x_n^0)$; es decir, si una curva admite vector tangente en (x_1^0, \dots, x_n^0) su imagen admite vector tangente en $\Pi(x_1^0, \dots, x_n^0)$.

Mapectos conformes en \mathbb{R}^n .

- Se dice que un mapecto Π es conforme en el punto (x_1^0, \dots, x_n^0) si y solo si Π es diferenciable en el punto (x_1^0, \dots, x_n^0) y para cada par de curvas suaves γ_1, γ_2 que pasen por (x_1^0, \dots, x_n^0) se verifica que los vectores tangentes a sus imágenes $\Pi(\gamma_1), \Pi(\gamma_2)$ en el punto $\Pi(x_1^0, \dots, x_n^0)$ forman el mismo ángulo que los vectores tangentes a γ_1, γ_2 en el punto (x_1^0, \dots, x_n^0) .
Más breve, un mapecto es conforme si y sólo si conserva los ángulos entre curvas suaves.
- Se dice que un mapecto Π es conforme en una región Ω si y sólo es conforme en cada punto de la región.
- Se dice que un mapecto Π es localmente conforme en un punto z_0 si y sólo existe un entorno $\Delta(z_0, r)$ donde Π es conforme.

Mapectos conformes en \mathbb{C} . Sea un mapecto $\Pi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ descrito en coordenadas reales por

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

o en coordenadas complejas por

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

y sea $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Se verifica el siguiente

Teorema. el mapeo $w = f(z)$ es conforme en el punto z_0 si y sólo si $f(z)$ es derivable en z_0 , con $f'(z_0) \neq 0$

Demostración

- \Rightarrow) en términos de diferenciales, basta transformar un incremento (dx, dy) mediante una rotación y dilatación para calcular

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix},$$

leer la diferenciabilidad y las derivadas parciales de u y v , verificar las condiciones de Cauchy y Riemann y calcular la derivada $f'(z_0)$.

La condición de Jacobiano no nulo implica $f'(z_0) \neq 0$.

- \Leftarrow) dadas dos curvas parametrizadas por $z_1(t)$, $z_2(t)$, suaves en $z_0 = z_1(t_0) = z_2(t_0)$ (es decir derivables con derivada no nula), basta parametrizar sus imágenes por

$$w_1(t) = f(z_1(t))$$

$$w_2(t) = f(z_2(t))$$

y calcular sus derivadas por regla de la cadena

$$w'_1(t_0) = f'(z_0) z'_1(t_0)$$

$$w'_2(t_0) = f'(z_0) z'_2(t_0)$$

y comparar sus argumentos para obtener

$$\arg(w'_2(t_0)) - \arg(w'_1(t_0)) = \arg(z'_2(t_0)) - \arg(z'_1(t_0))$$

Propiedades:

- Si un mapeo $w = f(z)$ es localmente conforme en z_0 , entonces es localmente invertible y la inversa es derivable en $w_0 = f(z_0)$, con

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

- Si un mapeo $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es localmente conforme en $z_0 = x_0 + iy_0$, entonces las curvas de nivel $u(x, y) = u(x_0, y_0)$ y $v(x, y) = v(x_0, y_0)$ son ortogonales en z_0 .

Mapeos elementales

Función lineal.

$$w = f(z) = az + b$$

con $a \neq 0$.

Inversión.

$$w = f(z) = 1/z$$

Transformaciones bilineales.

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

con $ad - bc \neq 0$.

Capítulo 9

Funciones trascendentes.

Exponencial, trigonométricas, trigonométricas hiperbólicas.

Capítulo 10

Funciones multivaluadas.

Invertibilidad local. Invertibilidad global. Funciones multivaluadas: cortes y superficies de Riemann.

Capítulo 11

Integración.

Integración de funciones complejas de variable real sobre intervalos.

Integración de funciones complejas de variable compleja sobre curvas.