

1. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S все ребра равны 5. На ребрах SA , AB , BC взяты точки K , M , N соответственно, причем $KA = AM = NC = 2$.

- Докажите, что плоскость KNM перпендикулярна ребру SD .
- Найдите расстояние от вершины D до плоскости KNM .

2. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, длина диагонали которого равна 3. На луче $A_1 C$ отмечена точка P так, что $A_1 P = 4$.

- Докажите, что многогранник $DBPC_1$ — правильный тетраэдр.
- Найдите длину отрезка AP .

3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Через прямую BD_1 параллельно прямой AC проведена плоскость π , причем сечение параллелепипеда плоскостью π представляет собой ромб.

- Докажите, что $ABCD$ — квадрат.
- Найдите угол между плоскостью π и плоскостью (BCC_1) , если $AD = 4$ и $AA_1 = 6$.

4. На ребрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причем $AM : MB = CN : NB = 4 : 1$. Точки P и Q — середины ребер DA и DC соответственно.

- Докажите, что точки P , Q , M и N лежат в одной плоскости.
- Найдите, в каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды $ABCD$.

5. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ является прямоугольный треугольник ABC , причем $\angle C = 90^\circ$. Диагонали боковых граней $AA_1 B_1 B$ и $BB_1 C_1 C$ равны соответственно 26 и 10, $AB = 25$.

- Докажите, что $\triangle BA_1 C_1$ — прямоугольный.
- Найдите объем пирамиды $AA_1 C_1 B$.

6. Дана четырехугольная пирамида $PABCD$, в основании которой лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Известно, что сумма углов BAD и CDA равна 90° . Грани PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания. K — точка пересечения прямых AB и CD .

- Докажите, что грани PAB и PCD перпендикулярны.
- Найдите объем пирамиды $PBCK$, если известно, что $AB = BC = CD = 2$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 12.

7. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причем $AB = 3\sqrt{2}$, $BC = 6$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB .

- Докажите, что P — середина отрезка BQ .
- Найдите угол между гранями SBA и SBC , если $SD = 9$.

8. В треугольной пирамиде $SABC$ боковые ребра SA и SB равны. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC .

- Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
- Найдите объем пирамиды $SABC$, если $SA = SB = 17$, $SC = 5\sqrt{10}$, а высота пирамиды равна 15.

9. Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, при этом $AB = AA_1$.

- а) Докажите, что прямые $A_1 C$ и BD перпендикулярны.
- б) Найдите объем призмы, если $A_1 C = BD = 2$.

10. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка H — центр грани ABC , а точка M — середина ребра CD .

- а) Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны.
- б) Найдите угол между прямыми DH и BM .

11. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки K и M — середины рёбер AB и CD соответственно. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой AD .

- а) Докажите, что сечение тетраэдра плоскостью α — квадрат.
- б) Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью α , если $AB = 2\sqrt{3}$.

12. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 1 : 5$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой BC .

- а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA .
- б) Найдите угол между плоскостями α и (SBC) .

13. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 5. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 5 : 1$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна SA .

- а) Докажите, что сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α — прямоугольник.
- б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка A , а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α .

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 2. Точка M — середина ребра $A_1 C_1$, а точка O — точка пересечения диагоналей боковой грани $ABB_1 A_1$.

- а) Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника, являющегося сечением призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ плоскостью (AMB) , лежит на отрезке OC_1 .
- б) Найдите угол между прямой OC_1 и плоскостью (AMB) .

Ответы

1. б) 3,5
2. б) $\sqrt{11}$
3. б) $\operatorname{arctg} \frac{5}{3}$
4. б) 8 : 17
5. б) $28\sqrt{51}$
6. б) 4
7. б) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{34}}{68} \right)$
8. б) $50\sqrt{39}$
9. б) $\frac{4\sqrt{6}}{5}$
10. б) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$
11. б) 3
12. б) $\arccos \frac{31\sqrt{10}}{140}$
13. б) $\frac{25\sqrt{39}}{36}$
14. б) $\arccos \frac{8\sqrt{91}}{91}$