Feuille d'exercices : Inférence

Exercice 1 (Intégrale de Cauchy)
Démontrez la formule d'intégration de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi \boldsymbol{i}} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-w} dz = \begin{cases} f(w), & w \in \Gamma \\ 0, & w \in \bar{\Gamma}^c \end{cases}$$

pour f analytique sur le disque unité ouvert Γ délimité par le cercle γ. On pourra commencer par prendre $w = 0$ et $f(z) = 1$, puis généraliser à $w \in \Gamma$, puis $w \in \bar{\Gamma}^c$.

Exercice 2 (Zéros de la transformée de Stieltjes empirique)
Considérons le spectre limite $\tilde{\mathcal{F}}$ d'un modèle $\Sigma_n^* \Sigma_n$, $\Sigma_n = \frac{1}{\sqrt{n}} R_N^{\frac{1}{2}} X_N$, de spectre empirique $\tilde{L}_N$ avec $X_N \in \mathbb{C}^{N \times n}$ d'entrées i.i.d. de moyenne nulle, de variance unité et de moment d'ordre 4 fini, et $R_N = \operatorname{diag}(\lambda_1^R I_{N_1}, \ldots, \lambda_K^R I_{N_K})$ où $N_i/N \to 1/K$, $\lambda_1^R < \ldots < \lambda_K^R$. On suppose que le support de $\tilde{\mathcal{F}}$ se décompose en K clusters exactement. On veut montrer que le nombre de zéros de $\tilde{g}_n(z) = \frac{1}{n} \operatorname{tr}(\Sigma_n^* \Sigma_n - z I_n)^{-1}$ dans tout compact contenant le cluster k est presque surement égal pour tout N large à N_k.

1. Avec la méthode vue en cours, donnez l'expression de $0 = \frac{1}{2\pi \boldsymbol{i}} \int_{\mathcal{C}_k} \frac{1}{w} dw$ comme une intégrale complexe mettant en jeu $\tilde{t}(z)$, limite presque sure de $\tilde{g}_n(z)$, où $\mathcal{C}_k$ est un contour complexe entourant λ_k^R.
2. A l'aide d'un calcul de résidus, évaluez cette intégrale. Attention à bien identifier les pôles contenus uniquement à l'intérieur du contour final $\mathcal{C}_k^{\mathcal{S}}$.
3. Conclure sur le nombre de zéros réels de $\tilde{g}_n(x)$ dans l'ensemble délimité par $\mathcal{C}_k^{\mathcal{S}}$.

Exercice 3 (Expression explicite des zéros de la transformée de Stieltjes)

1. Pour $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $a \in \mathbb{R}^n$, et $\eta \in \mathbb{R}$ montrez que
$$\det(\Lambda - aa^* - \eta I_n) = \det(\Lambda - \eta I_n)(1 - a^*(\Lambda - \eta I_n)^{-1} a).$$
2. En prenant $a = 1/\sqrt{n}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})^T$, prouvez alors que les valeurs propres de $\Lambda - aa^*$ sont les zéros de $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i - \eta}$.
3. Conclure sur l'expression des zéros de $\tilde{g}_n(x)$ vus en cours.

Exercice 4 (Inférence de valeurs propres isolées ou rassemblées)
Nous nous plaçons dans le cadre de l'Exercice 2.

1. Supposons qu'il existe autant de clusters dans $\tilde{\mathcal{F}}$ que de valeurs propres distinctes dans L_∞^R (à savoir K). A l'aide des méthodes d'inférence vues en cours et des changements de contours, trouvez un estimateur pour chacun des λ_i^R.
2. Supposons a contrario qu'à deux valeurs de λ_i^R, disons λ_1^R et λ_2^R, soit associé un seul cluster dans $\tilde{\mathcal{F}}$. Proposez une méthode en deux étapes permettant de déterminer les valeurs de chacun de ces λ_i^R et utilisant deux intégrations complexes. Résoudre le problème.

Exercice 5 (Bords du spectre et critère de séparabilité)
Nous nous plaçons dans le cadre des Exercices 2 et 4 et allons déterminer un critère de séparabilité des clusters de $\tilde{\mathcal{F}}$.

1. En utilisant la caractérisation des bords du support de $\tilde{\mathcal{F}}$ via les extrema de $x(\tilde{t})$, expliciter toutes les valeurs des bords du support comme solutions d'une équation à point fixe. Ces solutions sont-elles exhaustives ?
2. Montrez que la courbe $x(\tilde{t})$, $\tilde{t} \in D = \mathbb{R}^* \setminus \{-1/\mathrm{supp}(L_\infty^R)\}$, admet un point d'inflexion unique dans chaque intervalle maximal de D.
3. Déterminez la valeur du couple $(\tilde{t}, x(\tilde{t}))$ en ce point d'inflexion.
4. Donnez un critère, lié au point d'inflexion, permettant de décider de la séparabilité de clusters successifs dans la spectre de $\tilde{\mathcal{F}}$.
5. Analysez (et confirmez la validité de) ce critère dans le cas où $c \to 0$, $c \to \infty$, et $\lambda_{i+1}^R - \lambda_i^R \to 0$ ou $\lambda_{i+1}^R - \lambda_i^R \to \infty$.