0. Содержание

Monday, June 4, 2018 15:19

терминах функций распределения и плотностей.

20. Условные распределения. Абсолютно непрерывный и дискретный случаи. Примеры вычисления. Вычисление распределений сумм с использованием условных распределений. Формула полной вероятности. Формула свертки.
21. Числовые характеристики случайных величин. Мат. ожидание, дисперсия (вероятностный смысл), моменты, квантили (медиана, квартили).
22. Свойства мат. ожидания и примеры вычисления мат. ожиданий. Примеры распределений с несуществующим мат. ожиданием.
23. Дисперсия и ее свойства. Примеры вычисления дисперсии.
24. Числовые характеристики случайных векторов. Вектор мат. ожиданий. Ковариация и коэффициент корреляции. Матрица ковариации. Свойства. Примеры вычисления.
25. Условные числовые характеристики. Свойства условных мат. ожиданий. Примеры вычисления.
26. Неравенства для моментов (часть 1). Неравенства Гельдера и Минковского. Неравенство Коши-Буняковского как простое следствие неравенства Гельдера.
27. Неравенства для математических ожиданий (часть 2) (в т.ч. неравенства Ляпунова и Чебышева)
28. Законы больших чисел. Теорема Маркова как следствие неравенства Чебышева. Законы больших чисел в форме в форме Чебышева. Закон больших чисел в форме Хинчина*. Закон больших чисел в форме Бернулли (для схемы Бернулли).
29. Виды сходимости в теории вероятностей. Сходимость по вероятности, с вероятностью 1, в среднем порядка d. Сходимость по распределению (слабая сходимость). Связь между различными видами сходимости. Формулировка закона больших чисел.
30. Характеристические функции. Определение и основные свойства. Характеристическая функция стандартного нормального распределения. Использование характеристических функций для доказательства ЗБЧ в форме Хинчина.
31. Суммы независимых одинаково распределенных случайных величин. Центральная предельная теорема Леви. Интегральная теорема Муавра-Лапласа как частный случай теоремы Леви.
32. Марковское свойство. Примеры Марковских последовательностей. Определение цепи Маркова. Однородные цепи Маркова. Уравнения Маркова.
33. Матрицы вероятностей перехода и начальное распределение вероятностей. Существенные и несущественные состояния. Замкнутые классы состояний. Период неприводимой цепи Маркова. Возвратность. Критерий возвратности. Финальные вероятности в эргодической цепи Маркова (система уравнений).

Преподаватель - Малов Сергей Васильевич

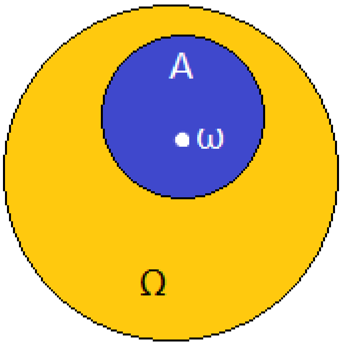
1. Вероятностный эксперимент. Аксиомы Колмогорова

Вероятностный эксперимент - тройка $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$, где

Ω — **множество исходов эксперимента**

$\mathcal{T}$ — **множество событий**

P — **вероятности**



$\omega \in \Omega$ — **результат**

$A \subset \Omega$ — **события**

$A \in \mathcal{T}$. Если $\omega \in A$, то событие произошло.

Аксиомы множества событий

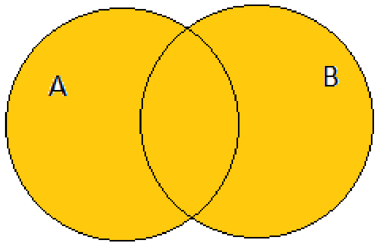
AC1. $\emptyset \in \mathcal{T}, \Omega \in \mathcal{T}$

AC2. $A, B \in \mathcal{T}, A \cup B \in \mathcal{T}, A \cap B \in \mathcal{T}, A \backslash \mathrm{B} \in \mathcal{T}$

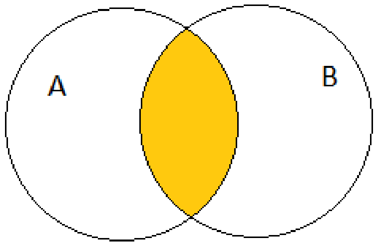
AC3. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{T}$

Множество событий - σ — алгебра.

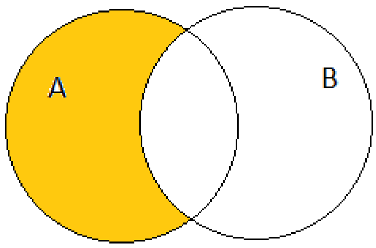
$A \cup B$



$A \cap B$



$A \setminus B$



Вероятность: $P: \mathcal{T} \to [0,1]$

Аксиомы вероятности

АВ1. $P(\Omega) = 1$

АВ2. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

АВ3. $A_1, A_2, \ldots ; A_i \cap A_j = \emptyset \ \text{ при } i \neq j$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Вероятность - неотрицательная счётно-аддитивная функция событий, удовлетворяющая условию $P(\Omega) = 1$. Вероятность - **мера**.

2. Классическое и геометрическое определение вероятности

Thursday, February 8, 2018 09:00

2. Классическое и геометрическое определение вероятности

Классическое определение

Ω – конечное множество исходов

$\mathcal{T}$ – все возможные подмножества Ω

$\mathrm{A} = (\omega_{\sigma_1}, \dots, \omega_{\sigma_s}); P(A) = \frac{S}{n}$

S – **число событий**

n – **число исходов**

$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$ – условие, которому должно удовлетворять **элементарное событие**. Элементарные события равновозможны. Если события неравновозможны, классическое определение неприменимо.

Пример 1. Бросается монета.

$\Omega = \{O, P\}$

$\mathcal{T} = \{\emptyset, O, P, \Omega\}$

$P(\emptyset) = 0$

$P(O) = \frac{1}{2}$

$P(P) = \frac{1}{2}$

$P(\Omega) = 1$

Пример 2. Бросается кубик

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_6\}$

$\mathcal{T}$ – все возможные сочетания Ω. $|T| = 2^6 = 64$

A –результат четный, B – результат нечетный, C – результат 5

$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}; B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}; C = \{\omega_5\}$

$P(A) = P(B) = \frac{3}{6}; P(C) = \frac{1}{6}$

Пример 3. Два кубика.

Найти вероятность, что сумма - 9

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11

6	7	8	9	10	11	12

$P = \frac{4}{64}$

Пример 4. Задача Демере.
Два игрока играют в справедливую игру до 6 побед. Первый игрок выиграл 3, второй выиграл 5. Как разделить ставку пропорционально вероятности выигрыша?
ω_1 — в 9-й выиграл второй игрок
ω_2 — в 9-й выиграл первый, в 10-й второй
ω_3 — в 9,10 - 1, 11 - 2
ω_4 — в 9,10,11 - 1.

Проблема в том, что события не равновероятные. Решение - продолжить игру до 9, 10, 11 вне зависимости от результата

9	10	11	Выиграл
0	0	0	1-й
0	0	1	2-й
0	1	0	2-й
0	1	1	2-й
1	0	0	2-й
1	0	1	2-й
1	1	0	2-й
1	1	1	2-й

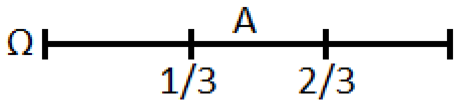
Получается, что на самом деле $P(A) = \frac{1}{8}$ и правильно разделить ставку 1 к 7

15-Feb-18

Геометрическое определение

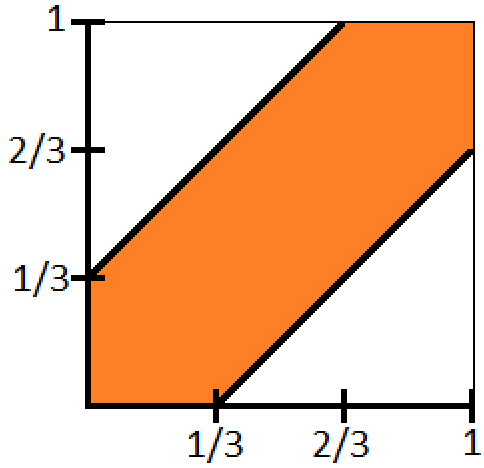
$\Omega = G \in \mathbb{R}^d; V_d(G) < \infty$
$\mathcal{T}$ — множество событий
$A = (a_1 b_1] \times (a_2 b_2] \times \cdots \times (a_n b_n]$
$a_i \subset \mathbb{R}, b_i \subset \mathbb{R}, A \subseteq G$
$P = \frac{V_d(A)}{V_d(G)} = \frac{V_d(A \cap G)}{V_d(G)}$
$G = [0,1]$
$\mathcal{T} = B_i \cap G$ - всевозможные счётные объединения и пересечения интервалов
V_d — какая-то мера
$V_1(B_i)$ — длина интервала

Пример 1
$G = [0,1]$
A — точка лежит на расстоянии больше чем 1/3 от грани



$P(A) = \frac{1}{3}/1$

Пример 2. Двое договорились встретится в определенном месте с 12 до 13, не оговорив точное время. Каждый ждет 20 минут и уходит. Какова вероятность встречи?
$\omega = (t_1 t_2)$ — время прихода первого и второго
$(\mathrm{t}_1 \mathrm{t}_2) = [0,1]^2$



Точка наугад бросается в $[0,1] \times [0,1]$. $(t_1 t_2)$: $|t_1 - t_2| \le \frac{1}{3}$
$V_2(\Omega) = 1$
$V_2(A) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$
$P(A) = \frac{V_2(A)}{V_2(\Omega)} = \frac{5}{9}$

Свойства вероятности

Thursday, February 15, 2018 08:30

Свойства вероятности

1. $P(\emptyset) = 0$
   Сумма, в которой нет слагаемых, равна 0
2. $A \in \mathcal{T};\ \bar{A} = \Omega \backslash \mathrm{A}$
   $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
   $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
   Доказательство
   $A \cup \bar{A} = \Omega \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \bar{A}) = P(A) \cup P(\bar{A}) = 1; A \cap \bar{A} = \emptyset\blacksquare$
3. $B \subset A\ (A, B \in \mathcal{T})$
   $P(A \backslash \mathrm{B}) = P(A) - P(B)$
   Доказательство
   $\begin{cases}(A\backslash \mathrm{B}) \cap B = \emptyset \\ (A\backslash \mathrm{B}) \cup B = A\end{cases} \Rightarrow [\mathrm{AB2}] \Rightarrow P(A\backslash B) + P(B) = P(A)\blacksquare$
4. $A, B \in \mathcal{T}$
   $P(A) \cup P(B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
   Доказательство
   $\begin{cases}A \cup B = A \cup (B\backslash \mathrm{AB}) \\ \quad A \cap (B\backslash \mathrm{AB}) = \emptyset\end{cases} \Rightarrow [\mathrm{AB2}] \Rightarrow P\big(A \cup (B\backslash \mathrm{AB})\big)$
   $= P(A) + P(B) - P(AB)\blacksquare$
5. Формула включения-исключения
   $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i \le j_1 \le \cdots \le j_n \le n}^{\square} (-1)^{|G|} P(A_{j_1}, \dots, A_{j_s})$$
   $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$
   $$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P\big(A_i A_j\big) + \sum_{i<j<m} P\big(A_i A_j A_m\big) - \cdots$$
   $$+ (-1)^n P(A_1 A_2 \dots A_n)$$
   Для трёх:
   $P(A_1) \cup P(A_2) \cup P(A_3)$
   $= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3)$
   $+ P(A_1A_2A_3)$
   Доказательство
   Рассмотрим $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Пусть $x \in \bigcap_{j=1}^{t} A_{i_j}$. Найдем число вхождений x в правую часть формулы. Пусть:

$$k = (-1)^{t+1}C_t^t + (-1)^t C_t^{t-1} + \dots + (-1)^2 C_t^1 = -\sum_{j=1}^{t}(-1)^j \cdot C_t^j$$

$$= C_t^0 - \sum_{j=0}^{t}(-1)^j \cdot C_t^j$$

Нужно доказать, что $\sum_{j=0}^{t}(-1)^j \cdot C_t^j = 0$

$$\left(1 + (-1)\right)^t = C_t^0 1^t (-1)^0 + C_t^0 1^{t-1}(-1)^1 + \dots + C_t^t 1^0 (-1)^t$$

$$= \sum_{j=0}^{t}(-1)^j \cdot C_t^j = 0$$

Равенство доказано. Значит $k = C_t^0 - \sum_{j=0}^{t}(-1)^j \cdot C_t^j = 1$ и каждый элемент подсчитан в правой части ровно один раз.

6. Непрерывность

$A_1, A_2 \dots \in \mathcal{T}$

$A_1 \subset A_2 \subset \cdots$

$$A_\infty = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$P(A_\infty) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Доказательство

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i\,;$$

$B_i = A_i \backslash A_{i-1}; i \geq 2$

$B_1 = A_1$

$B_i \cap B_j = \emptyset; i \neq j$

$$P(A_n) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \blacksquare$$

7. $\mathrm{A}_1 \dots \mathrm{A}_n \in \mathcal{T}; A_1 \supset A_2 \supset \cdots$

$$A_\infty = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow P(A^\infty) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Доказательство через 6-е переходом к сопряженному

Пример 1

Имеется N писем, которые наугад раскладывают по N конвертам. Определить вероятность, что хотя бы одно письмо попало в свой конверт.

A_i — письмо попало в свой конверт.

Ω — перестановка чисел от 1 до n. $|\Omega| = n!$

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Событию A_i благоприятны все перестановки писем, за исключением $i -$ го письма, лежащего там где надо. Получается, что

$$P(A_i) = \frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N}$$

Аналогично:

$$P\left(A_i A_j\right) = \frac{(N-2)!}{N!}$$

…

$$P(A_{i1} \dots A_{is}) = \frac{(N-S)!}{N!}$$

…

$$P(A_1 \dots A_n) = \frac{1}{N!}$$

Нужно применить свойство 5. В k-й сумме элементов C_n^k.

$$P(A) = \sum_{S=1}^{N} \sum_{1 \le j_1 \le \cdots \le j_S \le N} (-1)^{1+S} \cdot \frac{(N-S)!}{N!} = \sum_{S=1}^{N} (-1)^{1+S} \cdot C_N^S \cdot \frac{(N-S)!}{N!} =$$

$$= \sum_{S=1}^{N} (-1)^{1+S} \cdot \frac{N!}{(N-S)!\,S!} \cdot \frac{(N-S)!}{N!} = \sum_{S=1}^{N} (-1)^{1+S} \cdot \frac{1}{S!} =$$

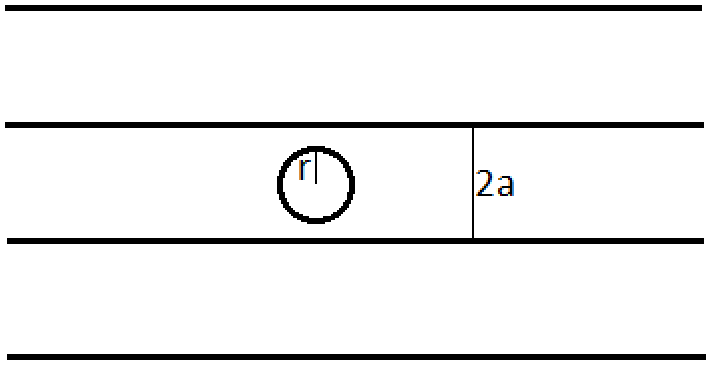
$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{N+1}}{N!} \xrightarrow[N \to \infty]{} 1 - e^{-1}$$

Некорректная постановка задачи

Thursday, February 15, 2018 09:00

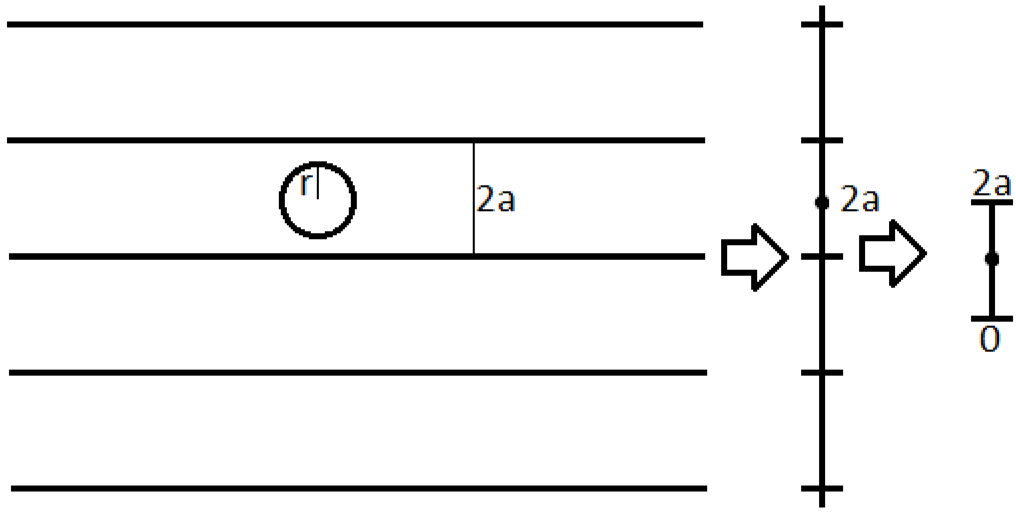
Некорректная постановка задачи

Задача. На плоскость, разделенную прямыми с расстоянием a бросается монета радиуса $r < a$. Определить вероятность, что монета не пересечется ни одной из прямых



$\omega -$ координаты центра. Проблема в том, что $V_2(\mathbb{R}^2) = \infty$.

Задачу можно преобразовать в корректную, если ограничить плоскость



Фиксируется полоса, фиксируются координаты центра.

$\omega \in \Omega^* = [0,2a]$

$A = (r, 2a - r)$

$|A| = 2a - 2r$

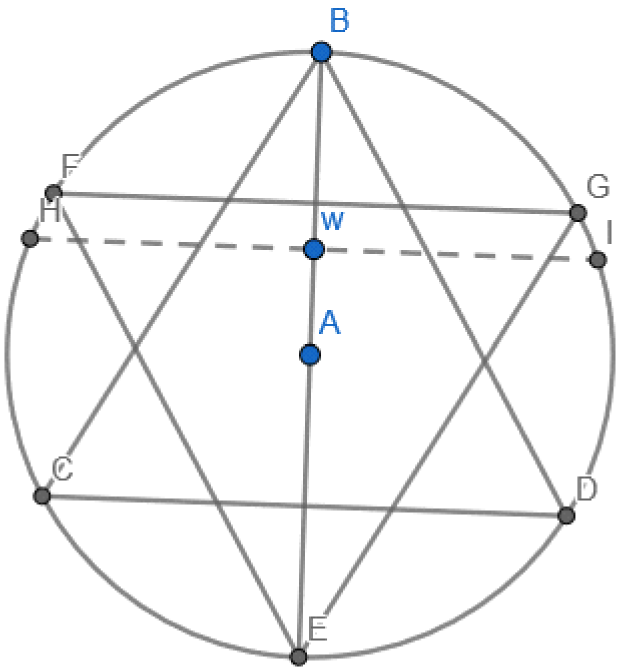
$|\Omega^*| = 2a$

$$P(A) = \frac{2a - 2r}{2a} = 1 - \frac{r}{a}$$

Парадоксы Бертрана

На окружность бросается хорда. Определить вероятность, что длина хорды превышает длину стороны вписанного треугольника.

1) Можно зафиксировать диаметр

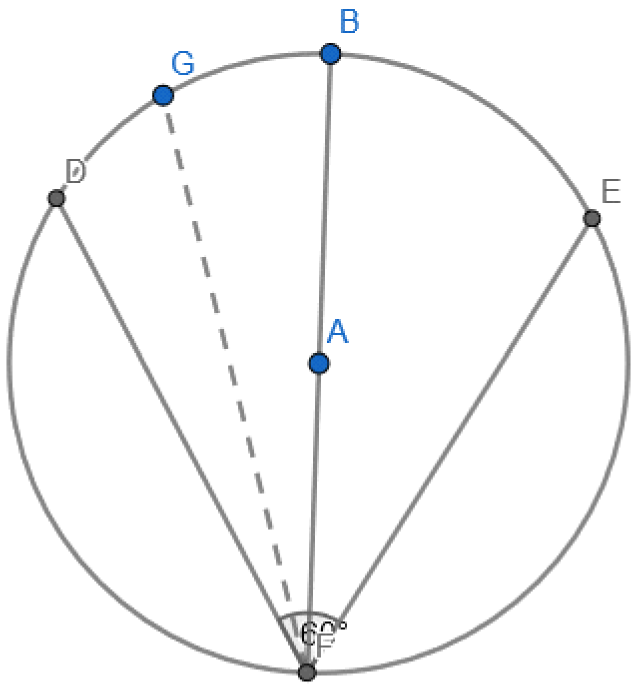


$\omega = [0,2r]$

$A = \left[0, \frac{r}{2}\right] \cap \left[\frac{3r}{2}, 2r\right]$

$P(A) = \frac{1}{2}$

2) Можно зафиксировать конец хорды



Элемент случайности: $\varphi = \Omega$

$\varphi \in [0, \pi]$

$\mathrm{A} = \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cap \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$

$P(A) = \frac{2}{3}$

3. Можно зафиксировать середину хорды

3. Независимость событий, условные вероятности

Thursday, February 22, 2018 08:00

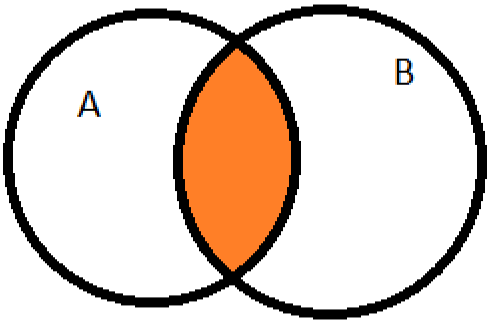
Пусть $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ — вероятностный эксперимент. События A и B называются **независимыми**, если $P(AB) = P(A)P(B)$

Несовместные события - $P(AB) = 0$

Условная вероятность A при условии определяется:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}}$$

Замечание. Если события независимы, то $P(A|B) = P(A)$, если $P(B) > 0$



Событие B произошло. Условная вероятность определяет, какая вероятность, что произошло ещё и A.

Пример. Есть колода карт (52 или 54 карты). В каждом из случаев вытаскивается одна карта

A — вытащена червовая карта

B — вытащен туз

Для 52 карт:

$$P(AB) = \frac{1}{52}$$

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$P(AB) = P(A)P(B)$ — события независимы

Для 54 карт:

$$P(AB) = \frac{1}{54}$$

$$P(A) = \frac{13}{54}$$

$$P(B) = \frac{4}{54}$$

$P(AB) \neq P(A)P(B)$ — события зависимы

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{54} \cdot \frac{54}{4} = \frac{1}{4}$
Если $P(B)$, то карта точно не джокер.

События $A_1 \dots A_n$ называются **независимыми**, если $\forall \{\sigma_1 \dots \sigma_s\} \subseteq \{1 \dots n\}$
$P\left(A_{\sigma_1} \dots A_{\sigma_s}\right) = P\left(A_{\sigma_1}\right) \dots P\left(A_{\sigma_s}\right)$
События $A_1 \dots A_n$ называются **попарно независимыми**, если $\forall i, j \ (i \neq j) \ P\left(A_i A_j\right) = P(A_i) P\left(A_j\right)$
Из независимости следуют попарная независимость. Обратное неверно.

Пример Бернштейна (Доказательство)
Бросается правильный тетраэдр, грани которого окрашены в К, С, Ж, КСЖ цвета.
События:
A — на нижней грани выпал К
B — на нижней грани выпал С
C — на нижней грани выпал Ж

$\omega_1 - A, \omega_2 - B, \omega_3 - C, \omega_4 - A, B, C$
$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$
$P(AB) = P(A)P(B)$
$P(BC) = P(B)P(C)$
$P(AC) = P(A)P(C)$
$P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C)$ — события попарно не зависимы, но зависимы в совокупности. Построен контрпример к обратному ■

Контрпример
$P(A), P(B), P(C); P(C) = 0$

Контрпример 2
А - первым выпал орёл, В - 3-м выпала решка, С - орлов выпало больше, чем решек

ω_1	O	O	O	A		C
ω_2	O	O	P	A	B	C
ω_3	O	P	O	A		C
ω_4	O	P	P	A	B	
ω_5	P	O	O			C
ω_6	P	O	P		B	
ω_7	P	P	O			
ω_8	P	P	P		B	

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$
$$P(AB) = \frac{1}{4}$$
$$P(AC) = \frac{3}{8}$$
$$P(BC) = \frac{1}{8}$$
$$P(ABC) = \frac{1}{8}$$
$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C); P(AB) = P(A)P(B); P(AC) \neq P(A)P(C); P(BC) \neq P(B)P(C)$$

Т.е. события не являются независимыми и не являются попарно независимыми.

Пересечение событий

$$P(A_1 \dots A_n) = P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1 \dots A_{n-2}) \dots P(A_2|A_1)P(A_1) = \prod_{i=2}^{n} P(A_i|A_1 \dots A_{i-1}) \cdot P(A_1)$$

4. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Thursday, February 22, 2018 09:00

$(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ — вероятностный эксперимент

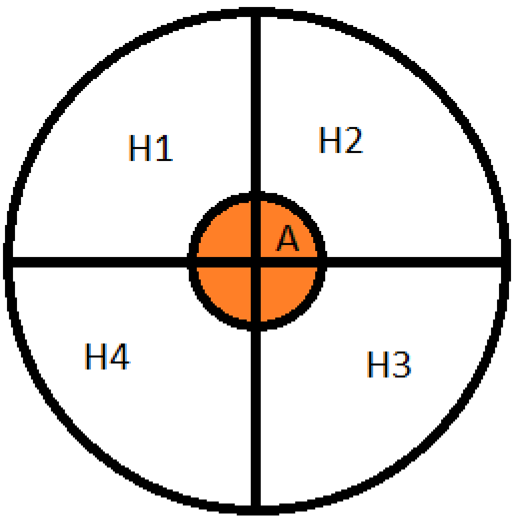
$H_1 \dots H_n$ — **полная группа событий**, т.е:

1. $\forall i = (1 \dots n)\colon\ P(H_i) > 0$
2. $H_i \cap H_j = \emptyset;\, i \neq j \Leftrightarrow P(H_i)P(H_j) = 0$
3. $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega \Leftrightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i\right) = 1$

Формула полной вероятности

$A \in \mathcal{T}$

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)}$$



$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3) + P(A|H_4)P(H_4)$$

Формула Байеса

Формула полной вероятности дает априорную оценку событиям, формула Байеса - апостериорную. Т.е. мы знаем, что произошло А - какая тогда вероятность, что произошло событие H_i?

$$\boxed{P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|H_j)P(H_j)}}$$

Доказательство

$P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Входные данные в формулу Байеса - исключительно априорные.

Обыденное событие - событие с большой вероятностью. Если A — обыденное событие, серьезного изменения в апостериорной оценке H по сравнению с априорной не будет.

Замечательное событие - событие с маленькой вероятностью

Пример. Прибор работает в нормальном и экстремальном режимах. Вероятность, что прибор работает в нормальном режиме - 0,8. Вероятность выхода из строя в нормальном - 0,1, в экстремальном - 0,7.
A — прибор вышел из строя
H_1 — прибор был в нормальном режиме
H_2 — прибор был в экстремальном режиме.

	1	2
$P(H_i)$	0,8	0,2
$P(A\|H_i)$	0,1	0,7

$P(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}22$

Пусть A — произошло. Какие в этом случае вероятности H_i?

$$P(H_1|A) = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}1}{0{,}22} = \frac{4}{11}$$

$$P(H_2|A) = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}2}{0{,}22} = \frac{7}{11} = 1 - \frac{4}{11}$$

Пример 2. Вероятность наличия скрытого дефекта в автомобиле - 0,1. Перед поступлением в магазин автомобиль проходит тех. контроль, обнаруживающий дефект с $0{,}8$ и бракующий исправный автомобиль с $0{,}1$. Какая вероятность наличия скрытого дефекта?
A — автомобиль прошел контроль
H_1 — дефект есть
H_2 — дефекта нет

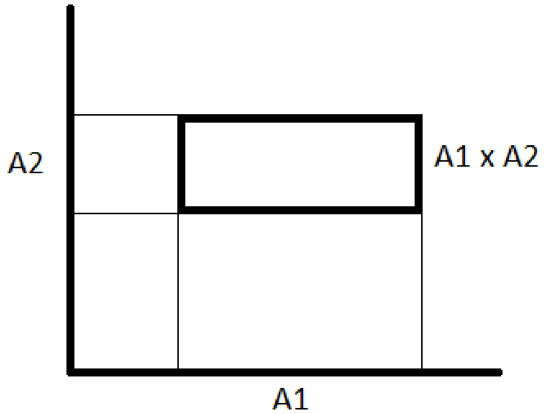
	1	2
$P(H_i)$	0,1	0,9
$P(A\|H_i)$	0,2	0,9

$$P(H_1|A) = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}2}{0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}9 \cdot 0{,}8} = \frac{2}{83}$$

5. Независимые эксперименты. Испытания Бернулли

Thursday, February 22, 2018 09:30

Пусть $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, P_1) \dots (\Omega_n, \mathcal{T}_n, P_n)$ — вероятностные эксперименты
$\omega_i \in \Omega_i$ — исход i — го эксперимента
$(\omega_1 \dots \omega_n), \omega_1 \in \Omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega_n$ — исход набора экспериментов
$\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$
$A_1 \times \dots \times A_n \in \mathcal{T}$
$\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{T}_1 \times \dots \times \mathcal{T}_n)$ — наименьшая σ — алгебра, содержащая событие вида $A_1 \times \dots \times A_n$



$A_1 \in \mathcal{T}_1 \leftrightarrow A_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$
$P(A_1) = P(A_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n)$

<u>Независимость</u>

$$P(A_1 \times \dots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} P_i(A_i), \forall A_i \in \mathcal{T}_i; i = 1 \dots n$$

- эксперименты независимы.

Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n, \mathcal{T} = \sigma(\mathcal{T}_1 \times \dots \times \mathcal{T}_n)$. $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ — вероятностный эксперимент.
Эксперимент $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, P_1) \dots (\Omega_n, \mathcal{T}_n, P_n)$ называется **независимым,** если $P(A_1 \times \dots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} P_i(A_i)$

$A = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_{\mathrm{i}-1} \times \mathrm{A_i} \times \Omega_{\mathrm{i}+1} \times \dots \times \Omega_{\mathrm{n}}$
Любые события, связанные с различными экспериментами, независимы в совокупности

01-Mar-18

<u>Испытание Бернулли</u>

- схема (набор) независимых экспериментов, каждый эксперимент имеет два исхода $(0,1)$, $P(1)$ в каждом эксперименте одна и та же
$(\Omega_i, \mathcal{T}_i, P_i); \Omega_i = \{0,1\}$
$\mathcal{T}_i$ — все подмножества Ω_i
$P_i(\{1\}) = 1 - P_i(\{0\}) = p; \forall i \in [1, n]$

Простейший пример - бросание монеты.
$\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$
$\mathcal{T} = \sigma(\Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_{\mathrm{n}})$
$P = P_1 \vee \cdots \vee P_n$
Элементарное событие - $\{\omega_1 \dots \omega_n\}$
$P(\{\omega_1 \dots \omega_n\}) = p^k(1-p)^{n-k}$
$k -$ число успехов в наборе $(\omega_1 \dots \omega_n)$
$p(\{1,0,1,0,0\}) = p^2(1-p)^3$

Рассмотрим:
$\mu_n -$ число успехов в n испытании Бернулли
$\nu_n -$ число успехов до первой неудачи

Формула Бернулли
$\boxed{P(\mu_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}; k \in [0, n] \in \mathbb{Z}$

Пример 1. Два игрока играют в честную игру. Что более вероятно: выиграть 3 из 6 или 2 из 4?

$$P(\mu_4 = 2) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{2^4}$$
$$P(\mu_6 = 3) = C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{2^4}$$
$$P(\mu_6 = 3) < P(\mu_4 = 2)$$

Пример 2. Вероятность выиграть в каждой игре у команды А - $1/3$. Что более выгодно - сыграть серию из 3-х или 5 игр?

$$P(\mu_3 \geq 2) = P(\mu_3 = 2) + P(\mu_3 = 3) = C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) + C_3^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{3 \cdot 2 + 1}{3^3} = \frac{7}{3^3} = \frac{21}{3^4}$$
$$P(\mu_5 \geq 3) = P(\mu_5 = 3) + P(\mu_5 = 4) + P(\mu_5 = 5)$$
$$= C_5^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + C_5^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right) + C_5^5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{10 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 1}{3^5} = \frac{51}{3^5} = \frac{17}{3^4}$$
$$P(\mu_5 \geq 3) < P(\mu_3 \geq 2)$$

Максимальная вероятность
Обозначим $P(n,k) = P(\mu_n = k)$. Найдём $\max_k$ ⬚.
Пусть максимум - k_0. Если k в середине, то
$P\big(\mu_n = (k_0 - 1)\big) \leq P(\mu_n = k)$
$P\big(\mu_n = (k_0 + 1)\big) \leq P(\mu_n = k)$
Рассмотрим первое отношение:
$C_n^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1} \leq C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$$\frac{\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}}{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}p^{k}(1-p)^{n-k}} \le 1$$

$$\frac{k}{n-k+1}\cdot\frac{1-p}{p} \le 1$$

$$k - pk \le pn - pk + p$$

$$k \le np + p$$

Рассмотрим второе отношение:

$$C_n^{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1} \le C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\frac{\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}p^{k}(1-p)^{n-k}} \le 1$$

$$\frac{k+1}{n-k}\cdot\frac{1-p}{p} \le 1$$

$$(k+1)(1-p) \le (n-k)p$$

$$k - pk - p + 1 \le np - pk$$

$$k \ge np - (1-p)$$

В итоге получается:

$$np - (1-p) \le k_0 \le np + p$$

$np + p \in \mathbb{Z}$ – две точки максимума

$np + p \notin \mathbb{Z}$ – единственный максимум

Схема Пуассона, Муавра-Лапласа

Thursday, March 1, 2018 08:00

$P(\mu_{1000} = 500) = C_{1000}^{500} p^{500} (1-p)^{500}$
C_{1000}^{500} — очень большое число, а $p^{500}(1-p)^{500}$ — очень маленькое.
Для эффективного вычисления таких вероятностей используются приближенные вычисления.

Схема Пуассона

Интерес представляют вероятности в окрестности точки максимума
$k_0 : p(\mu_n = k) \to \max_k ; k_0 \approx np$
Нужно научится вычислять вероятности $p(n, k); k \approx np$

Рассматриваем последовательность серий испытаний Бернулли.
Серия испытаний Бернулли, $n \to \infty; k$ – фиксировано
P_n — вероятность успеха в n-й в серии
$n \cdot P_n = \lambda$
$P_n \to 0 \ (n \to \infty)$

Теорема Пуассона в схеме Пуассона.

$$\boxed{P(\mu_n = k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \ (n \to \infty; \lambda = np)}$$

Доказательство

$$P_n(\mu_n = k) = C_n^k P_n^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$
$$= \frac{\lambda^k}{k!} \left(\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k \to (*)$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k \left(\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\right)$$
$$= e^{-\lambda} \cdot 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = e^{-\lambda}$$
$$(*) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \blacksquare$$

Схема Муавра-Лапласа

$n \to \infty, p$ — фиксировано. $k = kn \to \infty \ (n \to \infty)$

Локальная теорема Муавра-Лапласа

В схеме Муавра-Лапласа

$$\left| \sqrt{np(1-p)} \cdot P(\mu_n = k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_n^2}{2}} \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$x_n = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

$$\boxed{P(\mu_0 = k) = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}+o(1)}}$$

Доказательство

Формула Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\Theta n}$$

При больших n $e^{\Theta n} \to 1$

Разложение логарифма по Тейлору:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + o(z^2)$$

Сначала подстановка формулы Стирлинга в формулу Бернулли. Считаем, что $n \to \infty$

$$P(\mu_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k \cdot \sqrt{2\pi(n-k)}\left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi} \cdot k^{k+\frac{1}{2}} \cdot (n-k)^{(n-k)+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{e^k e^{n-k}}{e^n} \cdot p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \frac{n^{k+(n-k)+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi} \cdot k^{k+\frac{1}{2}} \cdot (n-k)^{(n-k)+\frac{1}{2}}} \cdot p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \frac{n^{k+\frac{1}{2}} n^{(n-k)+\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi} \cdot k^{k+\frac{1}{2}} \cdot (n-k)^{(n-k)+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{p^{k+\frac{1}{2}}(1-p)^{n-k+\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}(1-p)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \cdot \left(\frac{np}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{n(1-p)}{n-k}\right)^{n-k+\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2\pi np(1-p)} \cdot P(\mu_n = k) = \left(\frac{np}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{n(1-p)}{n-k}\right)^{n-k+\frac{1}{2}}$$

Теперь логарифмирование правой части:

$$-\ln\left(\left(\frac{np}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{n(1-p)}{n-k}\right)^{n-k+\frac{1}{2}}\right) = \left(k+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{k}{np}\right) + \left(n-k+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n-k}{n(1-p)}\right) = (*)$$

Подстановка: $x_n = \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}} \Rightarrow k = np + x_n\sqrt{np(1-p)}; n-k = n(1-p) - x_n\sqrt{np(1-p)}$

$$(*) = \left(k+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{np + x_n\sqrt{np(1-p)}}{np}\right) + \left(n-k+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n(1-p) - x_n\sqrt{np(1-p)}}{n(1-p)}\right) =$$

$$= \left(np + x_n\sqrt{np(1-p)} + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + x_n\sqrt{\frac{1-p}{np}}\right) +$$

$$+\left(n(1-p) - x_n\sqrt{np(1-p)} + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - x_n\sqrt{\frac{p}{n(1-p)}}\right) =$$

$$= \left(np + x_n\sqrt{np(1-p)} + \frac{1}{2}\right)\left(x_n\sqrt{\frac{1-p}{np}} - \frac{x_n^2(1-p)}{2np} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) +$$

$$+\left(n(1-p) - x_n\sqrt{np(1-p)} + \frac{1}{2}\right)\left(-x_n\sqrt{\frac{p}{n(1-p)}} - \frac{x_n^2 p}{2n(1-p)} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= x_n\sqrt{np(1-p)} - \frac{x_n^2(1-p)}{2} + x_n^2(1-p) - \frac{x_n^3(1-p)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{np}} + \frac{x_n\sqrt{1-p}}{2\sqrt{np}} - \frac{x_n^2 p}{4n(1-p)} -$$

$$-x_n\sqrt{np(1-p)} - \frac{x_n^2 p}{2} + x_n^2 p + \frac{x_n^3 p^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{n(1-p)}} - \frac{x_n\sqrt{p}}{2\sqrt{n(1-p)}} - \frac{x_n^2 p}{4n(1-p)} =$$

$$= x_n\left(\sqrt{np(1-p)} + \frac{\sqrt{1-p}}{2\sqrt{np}} - x_n\sqrt{np(1-p)} - \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{n(1-p)}}\right) +$$

$$+x_n^2\left(-\frac{1-p}{2} + (1-p) - \frac{p}{4n(1-p)} - \frac{p}{2} + p - \frac{p}{4n(1-p)}\right) + x_n^3\left(-\frac{(1-p)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{np}} + \frac{p^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{n(1-p)}}\right)$$

$$= x_n \cdot \frac{\sqrt{1-p}\cdot\sqrt{1-p} - \sqrt{p}\cdot\sqrt{p}}{2\sqrt{np(1-p)}} + x_n^2 \cdot \left(\frac{1-p+p}{2} - \frac{p}{2n(1-p)}\right) + x_n^3\left(\frac{-(1-p)^2 + p^2}{2\sqrt{np(1-p)}}\right) =$$

$$= x_n \cdot \frac{1-2p}{2\sqrt{np(1-p)}} + x_n^2 \cdot \frac{n(1-p) - p}{2n(1-p)} + x_n^3 \cdot \frac{2p-1}{2\sqrt{np(1-p)}} + O(1) = (n \to \infty)$$

$$= 0 + \frac{x_n^2}{2} + 0 + O(1) = \frac{x_n^2}{2} + O(1)$$

$$-\ln\left(\sqrt{2\pi np(1-p)} \cdot P(\mu_n = k)\right) = \frac{x_n^2}{2} + O(1)$$

$$P(\mu_n = k) \cdot \sqrt{np(1-p)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_n^2}{2} + O(1)} \blacksquare$$

15-Mar-18

<u>Интегральная теорема Муавра-Лапласа</u>

В схеме Бернулли

$$\sup_{-\infty \le a \le b \le \infty}\left|P\left(\frac{(\mu_\mathrm{n} - np)}{\sqrt{np(1-p)}} \in [a, b]\right) - \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right| \to 0$$

$$\boxed{P\left(a \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b\right) = P\left(np + a\sqrt{np(1-p)} \le \mu_n \le np + b\sqrt{np(1-p)}\right) =}$$

$$\boxed{= \sum_{L\in[np+a\sqrt{np(1-p)},np+b\sqrt{np(1-p)})} P(\mu_0 = i)}$$

Доказательство

По локальной теореме Муавра-Лапласа

$$P(\mu_n = i)\cdot\sqrt{np(1-p)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_n^2}{2}+O(1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\frac{i-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)^2}{2}+O(1)}$$

$$P(a \le \mu_n \le b) = \sum_i\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\cdot e^{-\frac{\left(\frac{i-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)^2}{2}}\right) \to (n\to\infty) \to (*)$$

Сумма Римана:

$$\Delta i = \frac{i-np}{\sqrt{np(1-p)}} - \frac{i-1-np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$$

$$(*) \to \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\cdot e^{-\frac{\left(\frac{i-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)^2}{2}}\,di = (**)$$

$$t = \frac{i-np}{\sqrt{np(1-p)}};\ dt = d\left(\frac{i-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \frac{di}{\sqrt{np(1-p)}}$$

$$(**) = \int_{a'}^{b'}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\blacksquare$$

Следствие

$$\boxed{P(k_1 \le \mu_n \le k_2) \approx \int_{\frac{k_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}}^{\frac{k_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}$$

Для вычислений по этой формуле обычно вводят функцию Ф, считающуюся численными методами

$$\boxed{\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}$$

$$\boxed{P\left(a \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b\right) \approx \Phi(b) - \Phi(a)}$$

Примеры

1. Монета бросается 10^3 раз найти вероятность того, что орлов 500 и $[450{,}550]$
   Если np велико - выбирается схема Пуассона, иначе - Муавра-Лапласса.
   В данном случае $np = 1000\cdot\frac{1}{2} = 500$
   1) $P(\mu_{1000} = 500)$

$$x_{500} = \frac{500 - 1000 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = 0$$

$$P(\mu_{1000} = 500) = \frac{1}{5\sqrt{10} \cdot \sqrt{2\pi}} = \frac{1}{10\sqrt{5\pi}}$$

2) $P(\mu_n \in [450,550]) = \int_{\frac{450-500}{\sqrt{250}}}^{\frac{550-500}{\sqrt{250}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \approx \int_{-\sqrt{10}}^{\sqrt{10}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$= \Phi(\sqrt{10}) - \Phi(-\sqrt{10})$

2. $P(\mu_n \in [500 - i, 500 + i]) \geq 0{,}9$

   $\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{250}}\right) - \Phi\left(\frac{-x}{\sqrt{250}}\right) = (*)$

   Свойство: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

   $(*) = 2\Phi\left(\frac{x}{5\sqrt{10}}\right) - 1 = 0.9$

   $\Phi\left(\frac{x}{5\sqrt{10}}\right) = 0{,}95$

   $y = \Phi^{-1}(0{,}95) \approx 1{,}64$

   $x = y \cdot 5\sqrt{10} \approx 26$

6. Теория меры. Интеграл Лебега

Thursday, March 15, 2018 09:00

<u>Мера</u>

Пусть X — множество.

Система подмножеств C множества X называется **алгеброй**, если:

1) $\forall A, B \in C$ определены операции $A \cup B$ и $A \setminus \mathrm{B}$ (с аксиомами)
2) $\forall A, B \in C \Rightarrow A \setminus \mathrm{B} \in C; A \cup B \in C$
3) $\emptyset \in \mathrm{C}$

Система подмножеств называется **σ-алгеброй,** если выполнено:

4) Для любого счётного набора $(A_1, A_2, \ldots) \in C$
$$\bigcup_{\iota=1}^{\infty} A_i \in C$$

(X, C) — **измеримое пространство**, если X — множество, C — σ-алгебра подмножества X.

Мера - функция $\mu: C \to [0, \infty]$ со следующими свойствами:

1) $\forall a, b \in C: a \cap b = \emptyset \Rightarrow \mu(a \cup b) = \mu(a) + \mu(b)$
2) $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}: A_k \in C, A_k \cap A_{k_1} = \emptyset, k \neq k_1 \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$

Мера - неотрицательная счётно-аддитивная функция множеств.

Примеры

1. **Мера Лебега**
   $X = \mathbb{R}; C = \mathfrak{B}_1$
   $\mathfrak{B}_1$ - **Борелевская σ-алгебра** - наименьшая σ-алгебра, содержащая все интервалы $(a, b], a, b \in \mathbb{R}, b > a$
   μ_1 — **мера Лебега**, определённая на интервалах $\mu\big((a, b]\big) = b - a;\ b > a$
   По свойствам меры μ_1 продолжается единственным образом на $\mathfrak{B}_1$
2. **Считающая мера**
   $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_1)$ — измеримое пространство
   $A = \{a_i\}_i$ — не более чем счётное множество
   $B \in \mathfrak{B}_1$
   $\nu(B) = \#(B \cap A)$ — число элементов $B \cap A$
3. **Вероятность**
   $(\Omega, \mathcal{T})$ — измеримое пространство
   Ω — множество исходов, $\mathcal{T}$ — σ-алгебра событий
   $P: \mathcal{T} \to [0,1]$

22-Mar-18

<u>Свойства меры</u>

(X, C, μ) — **измеримое пространство с мерой**

1. $\mu(x) < \infty \Rightarrow \mu(\emptyset) = 0$
2. $A, B \in C, B \geq A \Rightarrow \mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$ — **монотонность**

2'. $A, B \in C; B \supseteq A \Rightarrow \mu(B) \geq \mu(A)$

3. $A, B \in C \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
4. $A_1 \dots A_n \in C \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_s \leq n} \mu\left(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_s}\right)$

4'. $A_1 \dots A_n \in C \Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum \mu(A_i)$

5. $A_1, \dots, A_n \in C, A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

5'. $A_1, A_2, \dots \in C;\ A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$
$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Интеграл Лебега

Пусть (X, C, μ) — измеримое пространство с мерой.

Набор множеств $\{I_j\}_{j=1}^{n}$, называется **конечноизмеримым разбиением (КИР)**, если:

1. $I_j \in C$
2. $I_i \cap I_j = \emptyset; i \neq j$
3. $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j = X$

Пусть есть функция $f: X \to \mathbb{R}$. Функция называется **простой**, если существует конечноизмеримое разбиение $\{I_j\}_{j=1}^{n}$, такое, что $\forall x \in I_j$: $f(x) = C_j$

Здесь $\{C_j\}_{j=1}^{n}$ — набор констант.

Свойства простых функций

$f: X \to \mathbb{R}; g: X \to \mathbb{R}$ — простые. Тогда:

- $f + g$ — простая
- $f \cdot g$ — простая
- $|f|$ — простая
- Если $\forall x \in X$ определена $f \backslash g$ то тоже простая

Функция f называеся **измеримой**, если $\forall B \in \mathfrak{B}_1: f^{-1}(B) = \{x \in X: f(x) \in B\} \in C$

Свойства:

1. Любая простая функция является измеримой

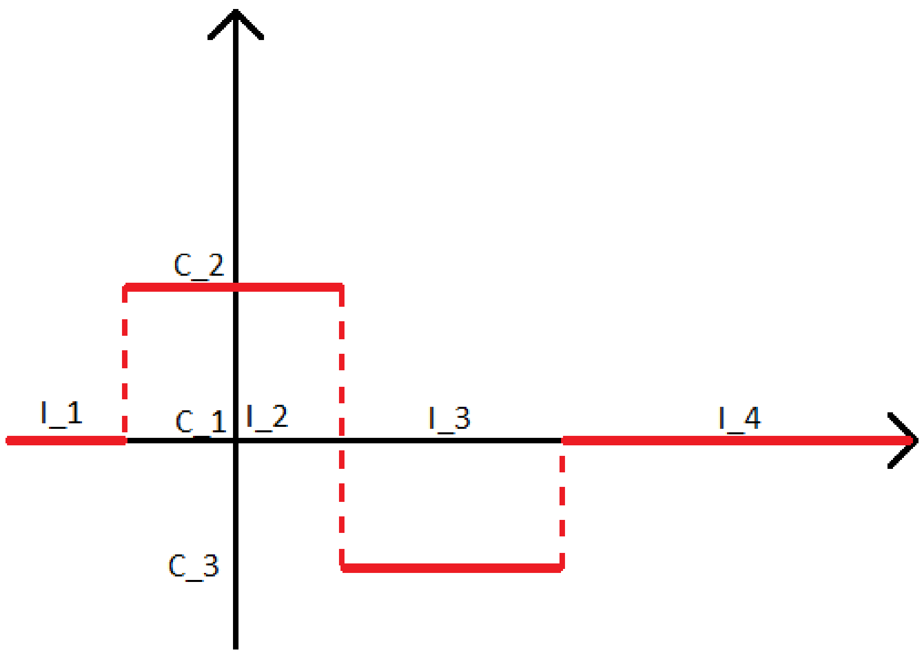
2. Если f, g — измеримые, то и $f+g, f \cdot g, |f|$ — тоже измеримые
   Если f/g определен в любой точке, то f/g — тоже измерима
3. $f_1, f_2, \dots$ — последовательность измеримых функций, таких, что
   $\forall x \in X\colon \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \Rightarrow f(x)$ — измерима

Пример
$(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_1, \mu_1)$; $f\colon \mathbb{R} \to \{-1,0,1\}$; $f(x) = sign(x)$ — простая, т.к. принимает конечное число значений:
$I_1 = \{\dots, -2, -1\}$; $I_2 = \{0\}$; $I_3 = \{1,2,\dots\}$
$C_1 = -1$; $C_2 = 0$; $C_3 = 1$
$j = 1,2,3\colon \forall x \in I_j\colon f(x) = C_j$

<u>Интеграл от простой функции</u>
f — простая функция по отношению к КИР $\{I_j\}_{j=1}^n$
$f(x) = C_j, x \in I_j$
Интегралом от функции f по мере μ называется

$$\boxed{I(f) = \sum_{j=1}^{n} C_j \mu(I_j)}$$

Пример
Пусть $\mu = \mu_1$ — мера Лебега



$I(f) = C_2\mu(I_2) + C_3\mu(I_3)$

<u>Интеграл от неотрицательной функции</u>
$f\colon X \to [0, \infty)$
Пусть $\exists$ последовательность $\omega_1(x) \le \omega_2(x) \le \cdots$
$\omega_i\colon X \to [0,\infty)$ — простые функции
$\forall x\colon \omega_i(x) \le \omega_{i+1}(x)$ - монотонная последовательность функций, таких, что

$\forall x \in X: |\omega_i(x) - f(x)| \to_{i\to\infty} 0$ (равномерная сходимость к f)
Тогда

$$\boxed{I(f) = \int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f(x)\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} I(\omega_n)}$$

В более общем случае можно говорить о внутреннем интеграле

$$\boxed{I^*(f) = \sup_{\omega:\, \omega \le f} I(\omega)}$$

Если f — измеримая, то
a) $I(f)$ — определён
b) $I^*(f) = I(f)$

Интеграл от измеримой функции

Если f — измерима

$$\begin{aligned} f_+(x) &= \max(f(x), 0) \\ f_-(x) &= -\min(-f(x), 0) \end{aligned}$$ — неотрицательное измерение

$$\boxed{I(f) = \int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f(x)\mu(dx) = \int\limits_X f_+ d\mu - \int\limits_{\mathrm{X}} f_- d\mu}$$

- если соответствующая разность определена

Основные свойства интеграла от измеримой функции

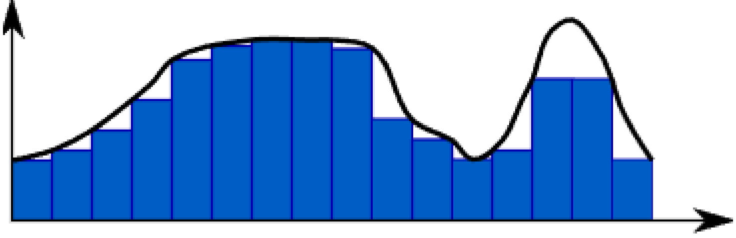
1. **Монотонность**
   f, g — измеримы, $\forall x: f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_X f d\mu \le \int_X g d\mu$
2. **Линейность**
   f, g — измеримы, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha f + \beta g$ — измерима:
   $$\int\limits_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int\limits_X f d\mu + \beta \int\limits_X g d\mu$$
3. **Аддитивность**
   f — измерима, $A, B \in C$
   $\Delta_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$ - индикатор
   Если $A \cap B = \emptyset$
   $$\int\limits_{\mathrm{X}} f \Delta_{A\cup B} d\mu = \int\limits_X f \Delta_A d\mu + \int\limits_X f \Delta_B d\mu$$
   $$\int\limits_{\mathrm{A}} f d\mu = \int\limits_X f \Delta_A d\mu$$
4. Если f — непрерывна, то $\breve{I}(f) = I(f)$, где $\breve{I}(f)$ - интеграл по Риману

Интеграл Лебега и интеграл Римана

Интеграл Лебега - более общий, чем интеграл Римана.

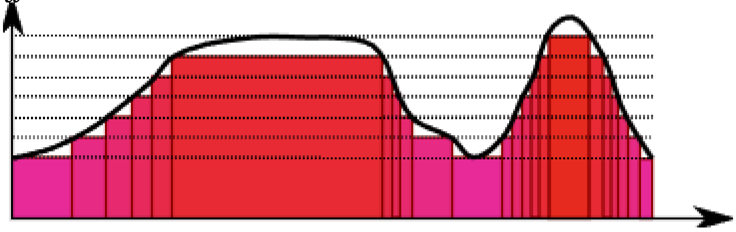
В интеграле Римана происходило разбиение области определения функции на интервалы и составление интегральной суммы:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{(\{x_k\})\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\, f(\widetilde{x_k})$$



В интеграле Лебега разбивается область значений функции:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|C_{j+1} - C_j|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} C_j \mu(I_j)$$



Пример

$f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ - функция Дирихле

По Риману функция не интегрируема. Однако, т.к. функция принимает только два значения, то является простой функцией и для неё определён интеграл Лебега. Рассмотрим промежуток $[0,1]$

$$\int_{[0,1]} f(x)\mu(dx) = 1 \cdot \mu\left(\mathbb{Q}_{[0,1]}\right) + 0 \cdot \mu([0,1]\backslash\mathbb{Q})$$

Мера Лебега отрезка $[0,1]$ равна 1, а мера множества рациональных числел равна 0, т.к. это множество счётно. Значит

$$\int_{[0,1]} f(x)\mu(dx) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot (1 - 0) = 0$$

7. Плотности. Теорема Радона-Никодима

Thursday, March 22, 2018 09:00

Плотности. Теорема Радона-Никодима

Пусть (X, C) — измеримое пространство, μ, ν — меры.
Меры μ, ν — **сингулярны**, если $\exists A, B \in C: A \cup B = X, A \cap B = \emptyset: \mu(A) = 0, \nu(B) = 0$. Обозначается $\mu \perp \nu$
ν — **абсолютно непрерывна** по отношению к μ (μ **доминирует** ν), если $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$. Обозначается $\nu \ll \mu$

Пример
μ — мера Лебега, ν — считающая мера на $\mathbb{Z}$
μ и ν — сингулярны
$A = \mathbb{Z} \Rightarrow \mu(A) = 0; B = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z} \Rightarrow \nu(B) = 0$

Теорема Радона-Никодима
Пусть μ и ν — σ-конечные меры в (X, C). Тогда
1. $\exists! \, \nu^{\perp}: \nu^{\perp} \perp \nu, p$ — измеримая функция, такая что
$$\boxed{\mu(A) = \nu^{\perp}(A) + \int\limits_A p d\nu, \forall A \in C}$$
Интеграл понимается в смысле Лебега.
2. Если $\mu \ll \nu$
$$\boxed{\mu(A) = \int\limits_A p d\nu, \forall A \in C}$$

Если $\mu \ll \nu$, то $p = \frac{d\mu}{d\nu}$ - **производная Радона-Никодима** меры μ по мере ν или **плотность** меры μ по мере ν.

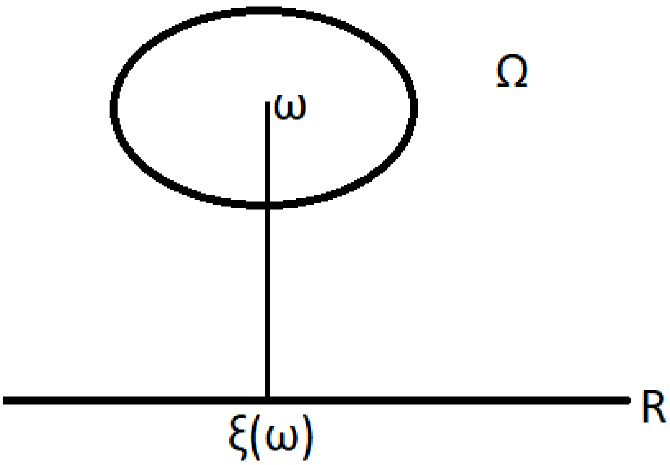
Примеры
1. ν — мера, $\mu(A) = \int_A f d\nu, f$ — измерима. Тогда
$\mu \ll \nu$ и $f = \frac{d\mu}{d\nu}$ — с точностью до множеств нулевой меры ν
2. V — объем в $\mathbb{R}^3$, M — масса: $M(A)$ — масса вещества в множестве A.
$M \ll V$
$M(A) = \int_A \rho dV$, где ρ — плотность вещества

8. Случайные величины и их распределение

Thursday, March 29, 2018 08:00

Случайные величины и их распределение

Пусть $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ — вероятностный эксперимент. Измеримая функция $\xi: \Omega \to \mathbb{R}$ называется **случайной величиной**, если
$\forall B \in \mathfrak{B}_1: \xi^{-1}(B) \in \mathcal{T}$



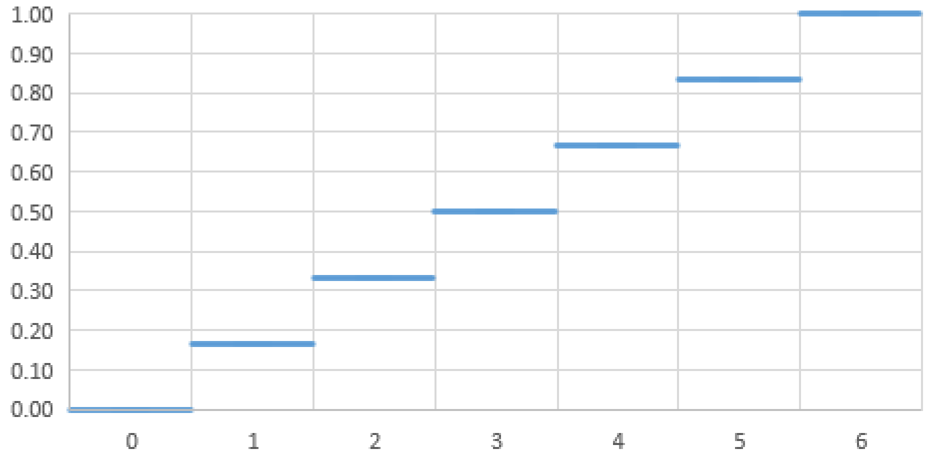
Т.е. случайная величина сопоставляет какому-либо исходу эксперимента число.

Пусть имеется измеримое пространство $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_1)$. Функция
$\mathcal{P}_\xi(B) = P\big(\xi^{-1}(B)\big) = P(\omega: \xi(\omega) \in B)$ называется **распределением** случайной величины ξ.
Распределение ξ — вероятность на множестве $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_1)$, т.е. удовлетворяет АВ1-АВ3, и $\left(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_1, \mathcal{P}_\xi\right)$ — тоже вероятностный эксперимент.

Функция распределения случайной величины ξ
$F_\xi: \mathbb{R} \to [0,1]$, такая, что $F_\xi(x) = P(\omega: \xi(\omega) < x) = \mathcal{P}_\xi(-\infty, x)$

Пример 1. Кубик
ξ — число очков, выпавших на верхней грани кубика

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le 1 \\ \frac{1}{6}, x \in (1,2] \\ \frac{1}{3}, x \in (2,3] \\ \frac{1}{2}, x \in (3,4] \\ \frac{2}{3}, x \in (4,5] \\ \frac{5}{6}, x \in (5,6] \end{cases}$$

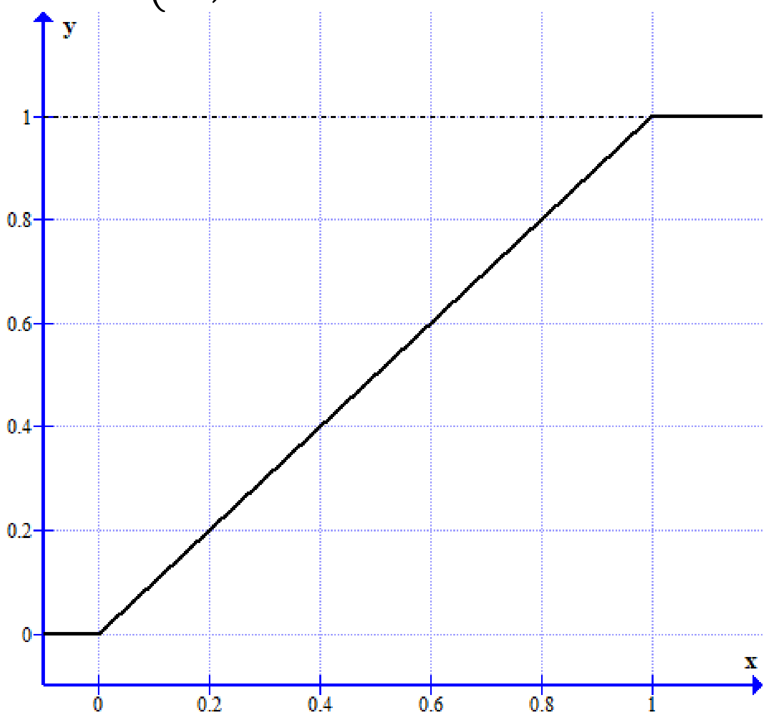


Пример 2. Наугад брошенная точка

Точка наугад брошена в интервал $[0,1]$. ξ — координата точки

Это непрерывна величина

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ x, x \in [0,1] \\ 1, x > 1 \end{cases}$$

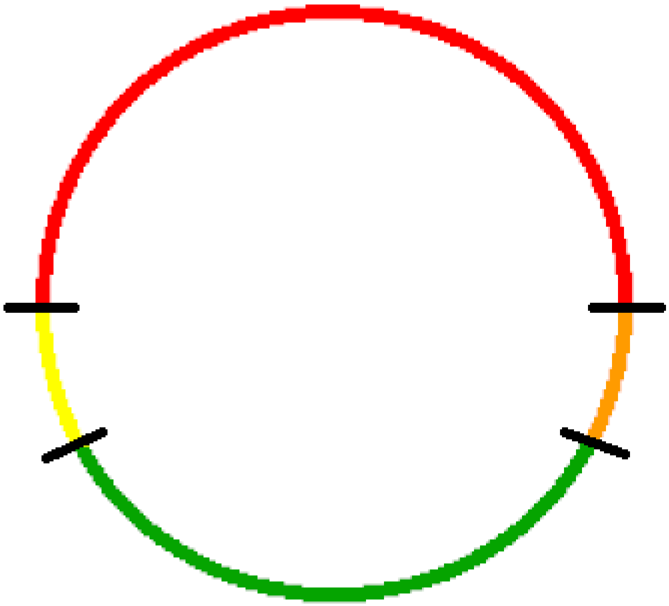


Пример 3. Светофор

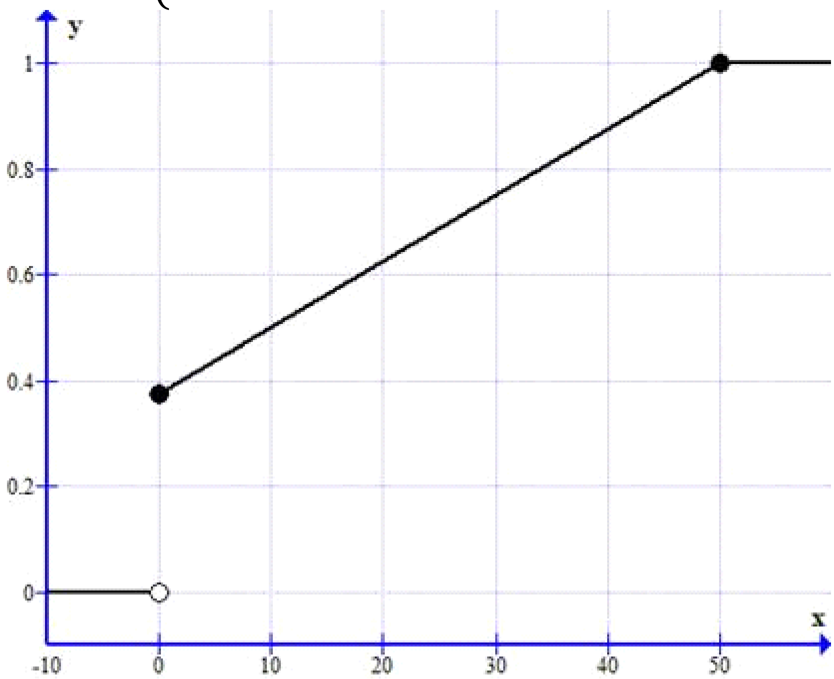
К – 40 с, К/Ж – 5 с, З – 30 с, Ж – 5 с. Время ожидания зеленого сигнала

ξ — время ожидания зеленого сигнала.

Точка бросается на окружность –



$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \dfrac{x+30}{80}; x \in [0,50] \\ 1, x > 50 \end{cases}$$



<u>Основные свойства функции распределения</u>

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$
   $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$
2. $\forall x, y: x \le y \Rightarrow F_\xi(x) \le F_\xi(y)$
3. $\forall x$: $\lim_{y \to x_-} F_\xi(y) = F_\xi(x)$ – непрерывность слева
4. $\exists \lim\limits_{y \to x_+} F_\xi(y)$
5. $P\big(\xi \in [a,b)\big) = P(\xi \in [a,b]) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$
   $P(\xi \in (a,b)) = P(\xi \in (a,b]) = F_\xi(b) - F_\xi(a_+) = F_\xi(b) - \lim\limits_{x \to a_+} F_\xi(x)$

9. Типы случайных величин (распределений)

Thursday, March 29, 2018 08:30

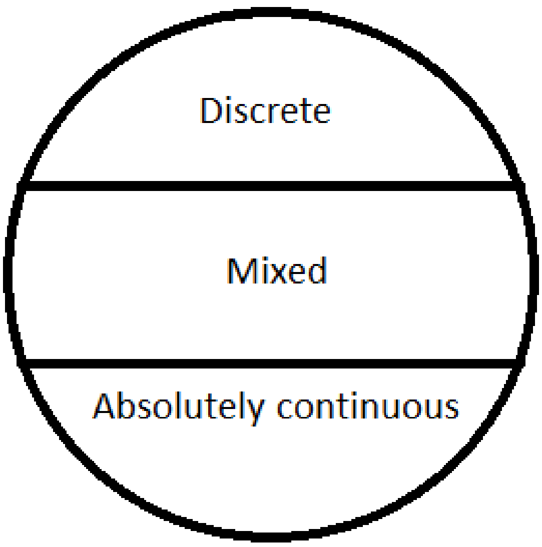
Типы случайных величин (распределений)

Основная характеристика случайной величины ξ — распределение $\xi \leftrightarrow$ функция распределения F_ξ

- Случайная величина ξ называется **дискретной**, если $\exists\{a_i\}_i$ - не более чем счётное множество, такое, что $P(\xi \in \{a_i\}_i) = 1$
- Случайная величина ξ называется **непрерывной**, если F_ξ — непрерывная функция
- Случайная величина ξ называется **абсолютно непрерывной**, если $\exists p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ - измеримая функция, такая, что

$$\boxed{F_\xi = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt\,, \forall x \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{P(\xi \in A) = \int_A p_\xi(t)dt\,, \forall A \in \mathfrak{B}_1}$$



$\forall \xi$ с функцией распределения F_ξ: $\begin{matrix} \exists F_\xi^c - \text{непр.} \\ \exists F_\xi^d - \text{диск.} \end{matrix}$, т.ч. $F_\xi = aF_\xi^c + (1-\alpha)F_\xi$

Пример 1 - дискретная величина:
$\{a_i\}_i = \{1 \dots 6\}$

Пример 2 - абсолютно непрерывная величина:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ x, x \in [0,1] \\ 1, x > 1 \end{cases}; p_\xi = \begin{cases} 1, x \in [0,1] \\ 0, x \notin [0,1] \end{cases} = \Delta_{[0,1]}$$

Пример 3 - смешанная величина:

$$F_\xi^d(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$$

$$F_\xi^c(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \frac{x}{50}, x \in [0,50 \\ 1, x > 50 \end{cases}$$

$$F_\xi(x) = \frac{3}{8}F_\xi^d(x) + \frac{5}{8}F_\xi^c(x)$$

Дискретное распределение

Пусть $A = \{a_i\}_i$ — не более чем счётное множество, такое, что $P(\xi \in A) = 1$.

Пусть $p_i = P(\xi = a_i), a_i \in A$

Значения $\{p_i\}_i$ однозначно определяются распределение.

В *примере 1*:

$$p_i = P(\xi = i) = \frac{1}{6}; i = 1, \dots, 6$$

Таблица распределения:

Значение ξ	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Пусть ν_A — считающая мера на A

$p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_T, \mathcal{P}_\xi \ll \nu_A, p = \frac{d\mathcal{P}_\xi}{d\nu_A}$ - производная Радона-Никодима по ν_A.

- плотность по отношению к считающей мере - **дискретная плотность**

$p(i) = p_i, i = 1, \dots 6, p(x)$ — произвольна при $x \notin \{1, \dots, 6\}$

Пример 4. Испытание Бернулли

μ_n — число орлов на монетке ($P = 1/2$).

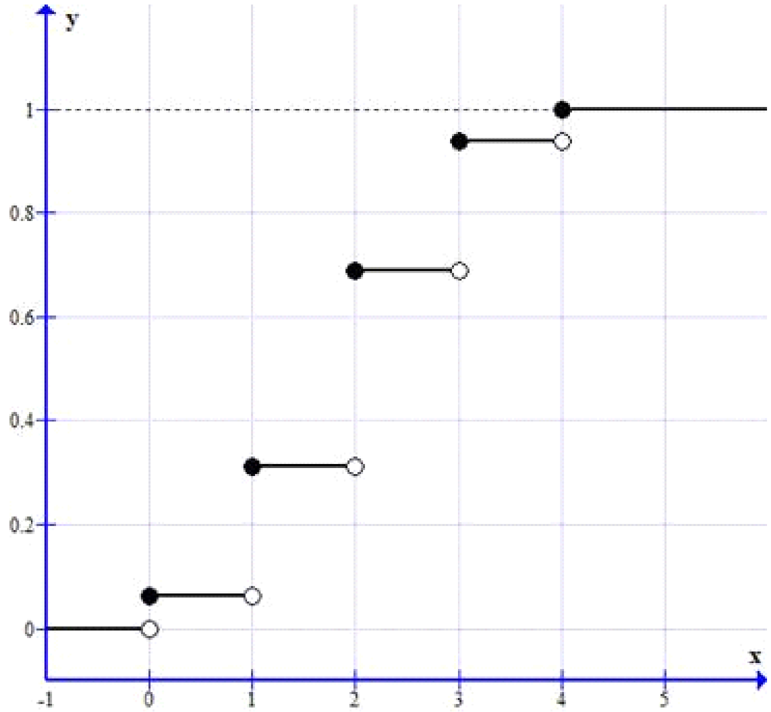
$$p_k = P(\mu_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

- дискретное распределение.

Пусть n = 3.

k	0	1	2	3	4
P	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16
F	1/16	5/16	11/16	15/16	1

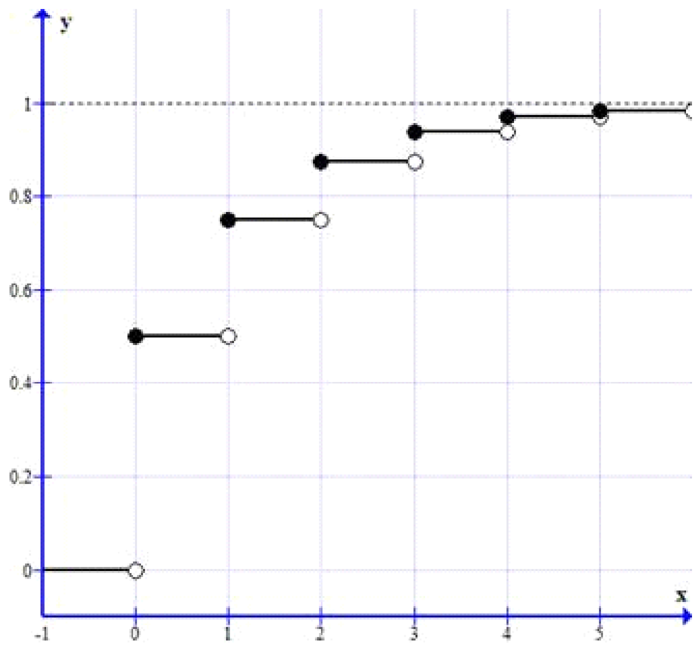


Пример 5. Монета бросается до выпадения орла

ξ — число решек до 1-го выпадения орла.

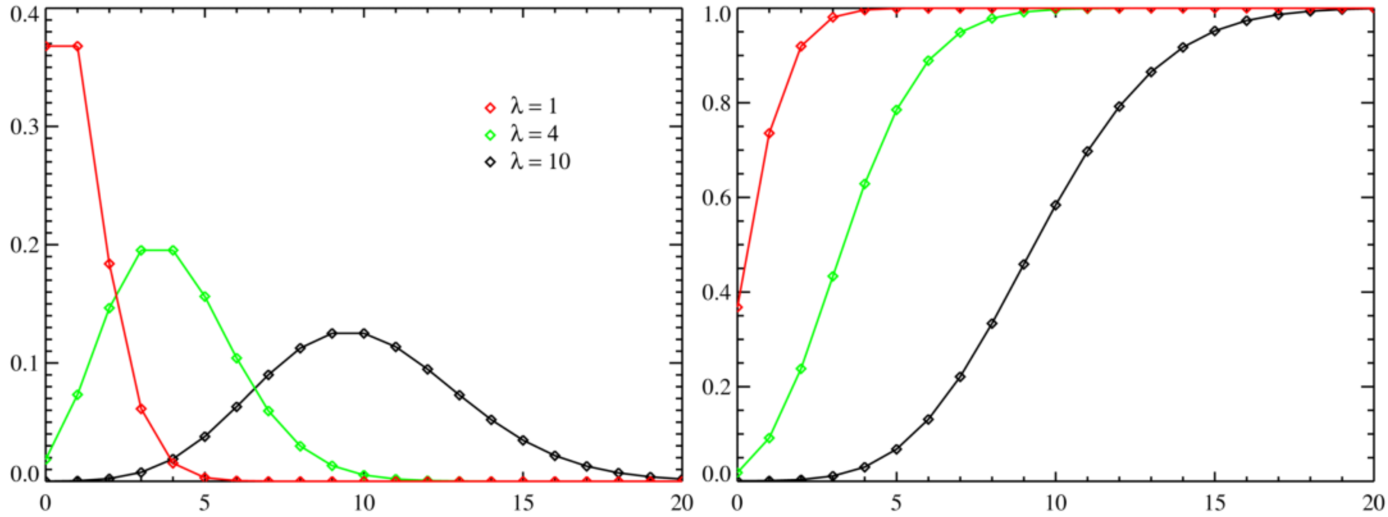
$$p_k \coloneqq P(\xi = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{k+1}}$$

	0	1	2	…	k	…
	1/2	1/4	1/8	…	$1/2^{k+1}$	…



Пример 6. Распределение Пуассона

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda > 0 - \text{фикс.}$$



$E\xi = \lambda, D\xi = \lambda$

05-Apr-18

Абсолютно непрерывное распределение

$\exists p(x)$ — плотность распределения

$$P(\xi \in B) = \int\limits_B p_\xi(x)dx$$

$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} P_\xi(t)dt$ - функция распределения

Если F_ξ — кусочно-дифференцируема и ξ — абсолютно непрерывная, то $p_\xi(x) = F'_\xi(x)$ в точках, где $\exists F'_\xi(x)$
Кусочная дифференцируемость не гарантирует, что ξ — абсолютно непрерывная.

Если F_ξ — кусочно-дифференцируема и верно следующее:

1) $\forall x\colon \exists F'_\xi(x) = p_\xi(x)$
2) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = 1$

Тогда ξ — абсолютно непрерывная и p её плотность.

Пример 2

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ x, x \in [0,1] \\ 1, x > 1 \end{cases}; F'_\xi(x) = \begin{cases} 1, x \in [0,1] \\ 0, x \notin [0,1] \end{cases}$$

$F_\xi(x)$ — непрерывна, но в точках 0,1 не существует.

$\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = \int_0^1 1dx = 1 \Rightarrow p_\xi(x)$ — плотность распределения

Свойства плотности распределения

1) $p_\xi(x) \ge 0$ — с точностью до множеств нулевой меры Лебега

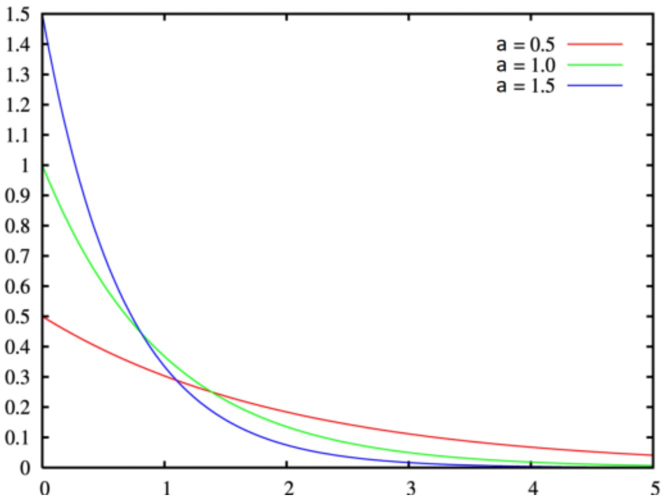
2) $\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = 1$

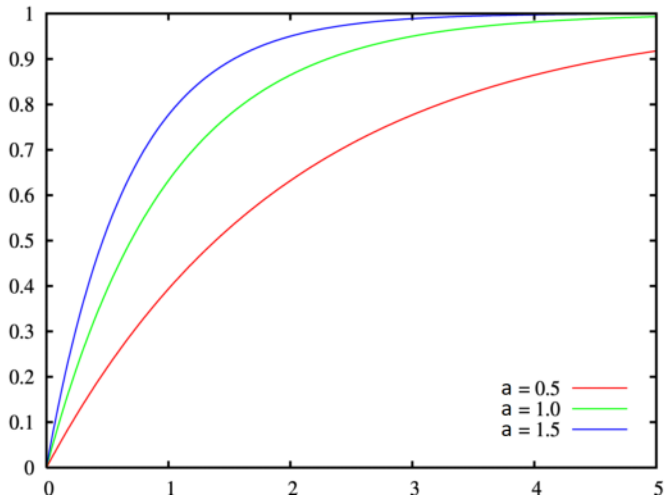
Пример 7. Показательное распределение

Дана функция $p_\xi(x) = \begin{cases} ae^{-ax}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$; $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\int_{0}^{\infty} ae^{-ax}\,dx = 1$$

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(x)dx = 1 - e^{-ax}, x > 0$$





Пример 8. Гауссово (нормальное) распределение

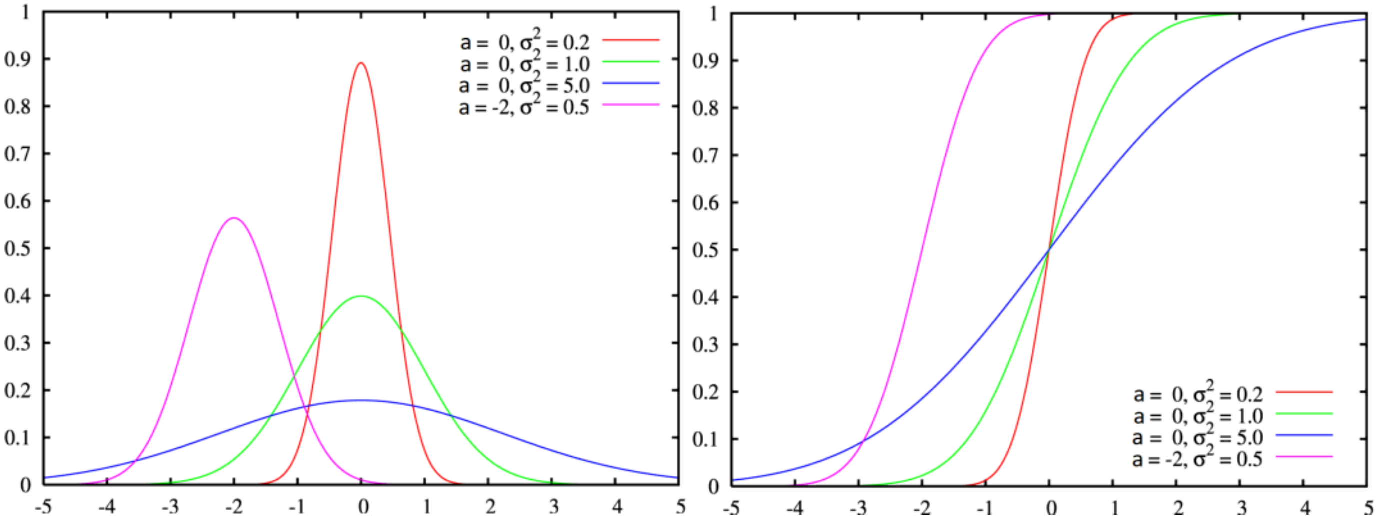
$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}; x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \left| \begin{matrix} y = \dfrac{x-a}{\sigma} \\ dy = \dfrac{dx}{\sigma} \end{matrix} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1$$

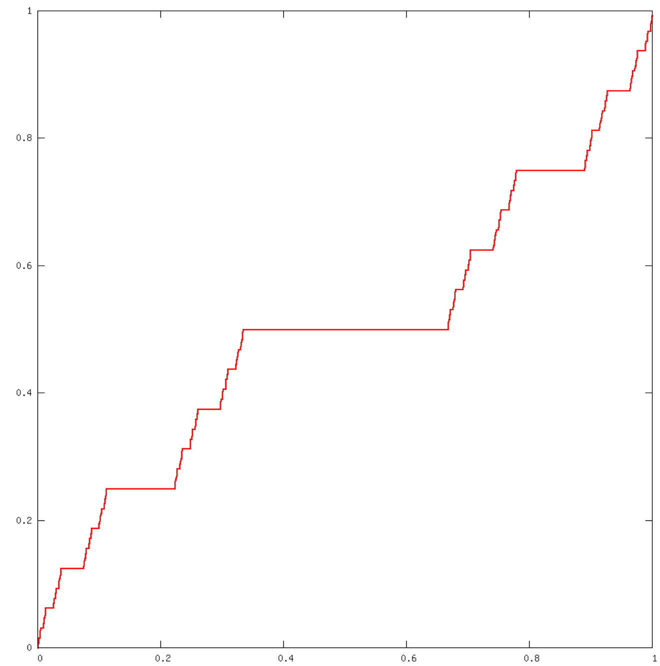
$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\,dt = \left| \begin{matrix} y = \dfrac{t-a}{\sigma} \\ dy = \dfrac{dt}{\sigma} \end{matrix} \right| = \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$ – **функция Гаусса**

Для нормального распределения $E\xi = a; D\xi = \sigma^2$. Нормальное распределение при $(a = 0, \sigma^2 = 1)$ записывается как $\mathcal{N}(0,1)$



Сингулярное распределение



Канторова лестница - функция непрерывна и принимает любое значение от 0 до 1. Производная функции определена и равна на каждой точке, за исключением некоторого множества, называемого **канторовым множеством**.

Такое распределение непрерывно, но не абсолютно.

10. Преобразование распределений

Thursday, April 5, 2018 09:00

Значение функции от случайной величины. Преобразование распределений

Пусть $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ — вероятностный эксперимент.
$\xi: \Omega \to \mathbb{R}$ — случайная величина (измеримая функция).

Пусть $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - измеримая функция
$\eta: \Omega \to \mathbb{R}, \eta(\omega) = g \circ \xi(\omega) = g\big(\xi(\omega)\big)$

$$\left.\begin{array}{l} \xi - \text{ измерима } \Rightarrow \forall B \in \mathfrak{B}_1: \xi^{-1}(B) \in \mathcal{T} \\ g - \text{ измерима } \Rightarrow \forall A \in \mathfrak{B}_1: g^{-1}(A) \in \mathfrak{B}_1 \end{array}\right. \Rightarrow \eta - \text{измерима}$$

η — случайная величина

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{P}_\eta(A) = P(\omega: \eta(\omega) \in A) = P\big(\omega: g\big(\xi(\omega)\big) \in A\big) = \\ = P\big(\omega: \xi(\omega) \in g^{-1}(A)\big) = \mathcal{P}_\xi\big(g^{-1}(A)\big) \end{aligned}}$$

- **распределение η**

$\boxed{g^{-1}(A) = \{y \in \mathbb{R}: g(y) \in A\} -}$ **прообраз A**

Пример 8(а). Преобразование Гауссова распределения

$$\mathcal{P}_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$$

Пусть $\eta = \xi^2$
S_η: $P\big(S_\eta = 1\big)$ — **носитель распределения**
$S_\eta = [0, \infty]$

$$F_\eta(y) = P(\xi^2 < y) = P(|\xi| < \sqrt{y}) = p(-\sqrt{y} < |\xi| < \sqrt{y}) =$$

$$= \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2 \int\limits_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2\Phi(\sqrt{y}), y > 0$$

$$F'_\eta(y) = \begin{cases} 0, y < 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{y}} \Phi'(\sqrt{y}), y > 0 \end{cases}$$

$$P_\eta = \begin{cases} 0, y \le 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}, y > 0 \end{cases}$$

- **χ^2 с одной степенью свободы**

Преобразование дискретного распределения

Пусть ξ – дискретное распределение, $p_i = P(\xi = a_i), \Sigma p_i = 1$

$A = \{a_i\}_i$ – носитель распределения ξ ($P(\xi \in a) = 1$)

$\eta = g(\xi), B = g(A) \Rightarrow \mathrm{P}(\eta \in B) = 1 \Rightarrow \eta$ – случайная величина (B – не более чем счётное)

Пусть $b_i = g(a_i) \nRightarrow a_i = g^{-1}(b_i)$

$$\boxed{P(\eta = b_j) = P\left(\xi \in g^{-1}(\{b_j\})\right) = \sum_{i:g(a_i)=b_j} P(\xi = a_i) = \sum_{i:g(a_i)=b_j} p_i}$$

Пример 9

ξ	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

$\eta = \xi^2; S_\eta = \{0,1\}$

$$P(\eta = 0) = P(\xi = 0) = \frac{1}{3}$$

$$P(\eta = 1) = P(\xi = 1) + P(\xi = -1) = \frac{2}{3}$$

Пример 5(а)

$$p_i = \frac{1}{2^{i+1}}; i = 0,1, \dots$$

$$\eta = \cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)$$

$S_\xi = \{0,1, \dots\}$ – носитель ξ

$S_\eta = \{-1,0,1\}$ – носитель η

$$P(\eta = 0) = P\left(\cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) = 0\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\frac{\pi\xi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi + 1 = 2k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(\eta = 1) = P\left(\cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) = 1\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\frac{\pi\xi}{2} = 2\pi k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = 4k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{1+4k}} = \frac{8}{15}$$

$$P(\eta = -1) = \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\frac{\pi\xi}{2} = \pi + 2\pi k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = 2 + 4k) = \frac{1}{2^{3+4k}} = \frac{2}{15}$$

-1	0	1	Σ
2/15	1/3	8/15	1

<u>Преобразование абсолютно непрерывных распределений</u>

Формула преобразования плотностей

Пусть ξ — абсолютно непрерывное распределение. p_ξ - плотность распределения.

g — монотонна

a. g — строго возрастает и дифференцируема
   $\eta = g(\xi), \exists g^{-1}$ — обратный
   $F_\eta(g) = P(\eta < y) = P(g(\xi) < y) = P\left(\xi < g^{-1}(y)\right) = F_\xi\left(g^{-1}(y)\right)$
   $$\boxed{p_\eta = \left(g^{-1}(y)\right)' p_\xi\left(g^{-1}(y)\right) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(y)\right)} p_\xi\left(g^{-1}(y)\right)}$$
b. g — строго убывает и дифференцируема
   $$\boxed{p_\eta = -\frac{1}{g'\left(g^{-1}(y)\right)} p_\xi\left(g^{-1}(y)\right)}$$
c. Общий случай
   $$\boxed{p_\eta = \frac{1}{\left|g'\left(g^{-1}(y)\right)\right|} p_\xi\left(g^{-1}(y)\right)}$$

<u>Пример 7(a). Преобразование показательного распределения</u>

$$p_\xi(x) = \begin{cases} ae^{-ax}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}; a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$g(t) = e^t$

$g^{-1}(y) = \ln y$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} 0, y \leq 1 \\ \frac{1}{e^{\ln y}} e^{-\ln y}, y > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, y \leq 1 \\ \frac{1}{y^2}, y > 1 \end{cases}$$

$S_\eta = [1, \infty]$

$$\int_1^\infty \frac{1}{y^2} dy = -\frac{1}{y}\bigg|_1^\infty = 1$$

12-Apr-18

<u>Линейное преобразование</u>

$\xi \curvearrowright \beta$ — плотность распределения ξ

$\eta = a\xi + b; a \neq 0$ (при $a = 0$: $P(\eta = b) = 1$)

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(a\xi + b < x) = P(a\xi < x - b)$$

$$= \begin{cases} F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right), a > 0 \\ 1 - F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right), a < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{p_\eta(x) = \frac{1}{|a|} p_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)}$$

Преобразование Смирнова

Пусть ξ — непрерывная F_ξ — функция распределения ξ. Задача: имея выборку из стандартного непрерывного равномерного распределения, получить выборку распределения из F_ξ

$\eta = F_\xi(\xi) \sim U(0,1)$, т.е.

η — абсолютно непрерывная и $p_\eta(x) = \begin{cases} 1, x \in [0,1] \\ 0, x \notin [0,1] \end{cases}$

Пусть F_ξ — строго возрастает ($\exists F_\xi^{-1}$)

$$P(\eta < x) = P\big(F_\xi(\xi) < x\big) = P\left(\xi < F_\xi^{-1}(x)\right) = F_\xi\left(F_\xi^{-1}(x)\right) = x; x \in [0,1]$$

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ x, x \in [0,1] \\ 1, x > 1 \end{cases}; \ p_\eta(x) = \begin{cases} 1, x \in [0,1] \\ 0, x \notin [0,1] \end{cases}$$

Получается, что случайная величина η имеет равномерное распределение на $[0,1]$, и у случайной величины $F_\xi^{-1}(\eta)$ такое же распределение, как и у ξ.

Так что если есть выборка $U_1, \dots, U_n \sim U(0,1)$, то интересующая нас выборка - $X_1, \dots, X_n$ — имеет члены вида $X_i = F_\xi^{-1}(U_i); i = 1, \dots, n$

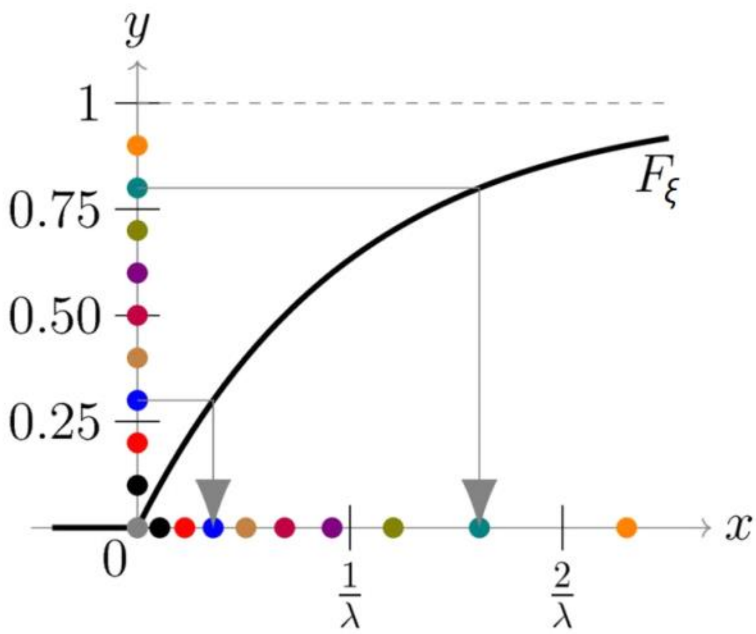
Пример 7(b)

Пусть $F_\xi(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ — показательное распределение.

$$F_\xi^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - x)$$

Значит, если $U_1, \dots, U_n$ — выборка из стандартного непрерывного равномерного распределения, то искомая выборка из показательного распределения:

$$X_1, \dots, X_n; X_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - U_i)\,; i = 1, \dots, n$$


y
1
0.75
0.50
0.25
0
x
F_ξ
$\frac{1}{\lambda}$
$\frac{2}{\lambda}$

11. Случайные векторы

Thursday, April 12, 2018 08:30

Случайные векторы

Пусть $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ – вероятностный эксперимент.
Набор случайных величин $(\xi_1 \dots \xi_n)$ – **случайный вектор**.

Пример

$$\xi_1, \xi_2 \sim U(-1,1); p_{\xi_1}(x) = p_{\xi_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}; x \in [-1,1] \\ 0, x \notin [-1,1] \end{cases}$$

Рассмотрим два вектора вида (ξ_1, ξ_2), где

a) $\xi_1 = \xi_2$
b) $\xi_1 = -\xi_2$

Плотность распределения у случайных величин равна, но тем не менее, это разные векторы. Значит, плотность распределения не полностью характеризует вектор.

Эквивалентные определения

Измеримая функция $\vec{\xi}: \Omega \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ называется **случайным вектором**
Измеримая функция $\vec{\xi}: \Omega \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ означает, что $\forall B \in \mathfrak{B}_n: \xi^{-1}(B) \in \mathcal{T}$
В частности, $B = B_1 \times \cdots B_n; B_i \in \mathfrak{B}_1$

Распределение случайного вектора - функция $\mathcal{P}_\xi: \mathfrak{B}_n \to [0,1]$, такая, что
$\mathcal{P}_\xi(B) = P(\omega: \vec{\xi}(\omega) \in B)$
Функция распределения $F_\xi: \mathbb{R}^n \to [0,1]$
$F_\xi(x_1, \dots, x_n) = P(\omega: \xi_1(\omega) < x_1, \dots, \xi_n(\omega) < x_n)$
$= \mathcal{P}_\xi\big((-\infty, x_1) \times \cdots \times (x_n, \infty)\big)$

Свойства функции распределения

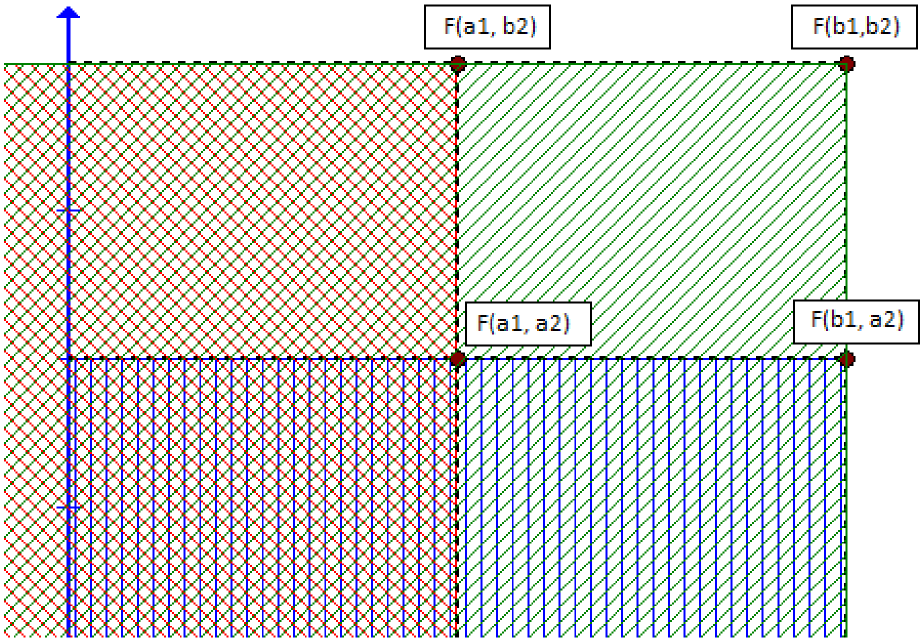
1. $\lim\limits_{x_i \to -\infty} F_\xi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0, \forall i = 1, \dots n$
   $\lim\limits_{\{x_i\}_i \to +\infty} F_\xi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = 1, \forall i = 1, \dots n$
   В первом случае к бесконечности стремится только один x_i, во втором - все x_i
2. F_ξ неубывает по каждой координате, т.е. $\forall y_1, y_2: y_1 \le y_2$, $\forall (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n)$:
   $F_\xi(x_1, \dots, x_{i-1}, y_1, x_{i+1}, \dots, x_n) \le F_\xi(x_1, \dots, , x_{i-1}, y_2, x_{i+1}, \dots, x_n)$
3. F_ξ непрерывна по каждой координате
4. $A = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)$
   $a_1 \le b_1; a_n \le b_n$
   $$\mathcal{P}_\xi(A) = \sum_{v \in V_A} (-1)^{|V|} F_\xi(v) \ge 0$$

$v = (v_1, \dots, v_n); v_i \in \{a_i, b_i\}$ — варианты параллелепипеда A

$|v| =$ число a_i в записи v

4'. В частности $(n = 2)$

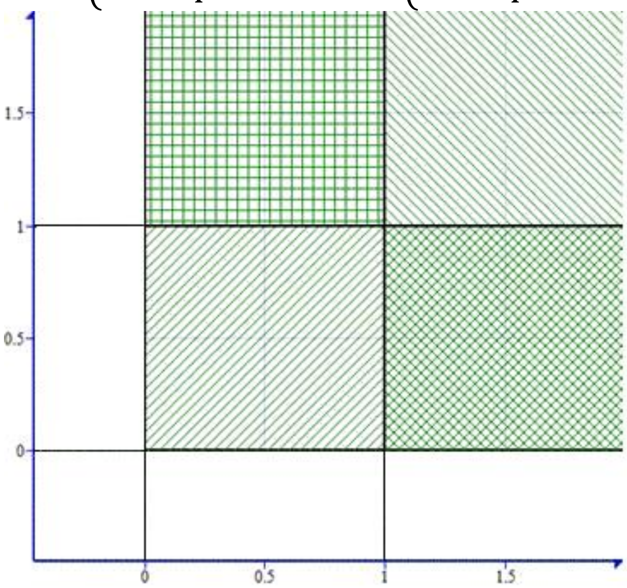
$$\mathcal{P}_\xi\big([a_1, b_1) \times [a_2, b_2)\big)$$
$$= F_\xi(b_1, b_2) - F_\xi(a_1, b_2) - F_\xi(b_1, a_2) + F_\xi(a_1, a_2)$$



<u>Пример 1</u>

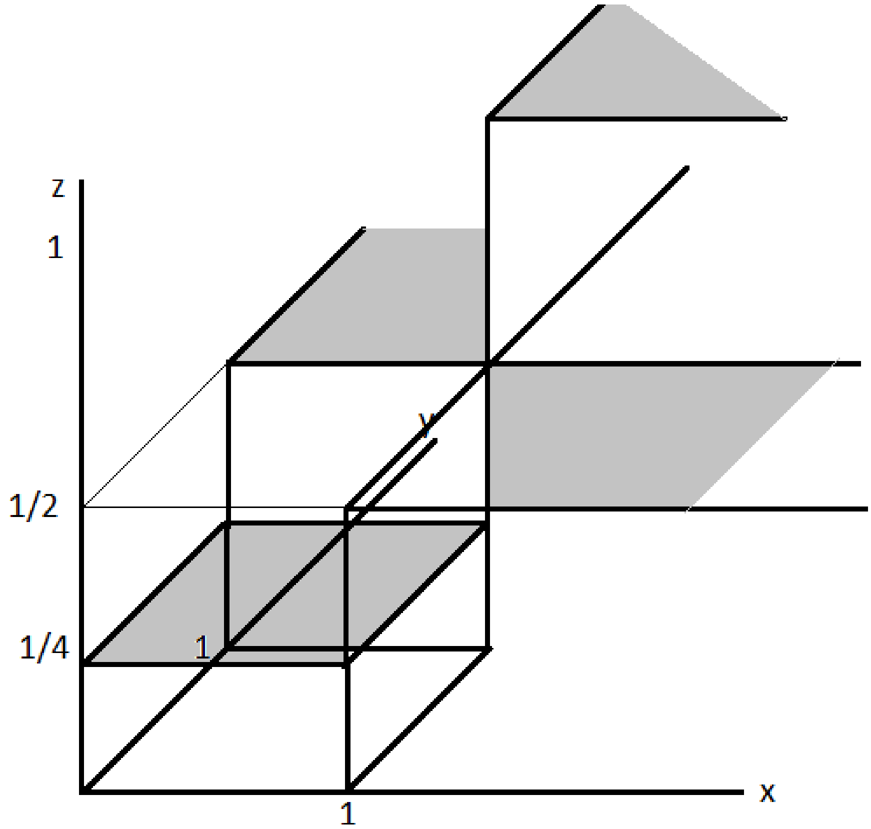
Бросаются две монеты.

$$\xi_1 = \begin{cases} 1,1 - \text{орёл} \\ 0{,}1 - \text{решка} \end{cases}; \xi_2 = \begin{cases} 1,2 - \text{орёл} \\ 0{,}2 - \text{решка} \end{cases}$$



$$F_{\xi_1,\xi_2}(x,y) = \begin{cases} 0, (x \le 0) \cup (y \le 0) \\ \frac{1}{4}, x \in (0,1], y \in (0,1] \\ \frac{1}{2}, x > 1, y \in (0,1] \\ \frac{1}{2}, x \in [0,1], y > 1 \\ 1, x > 1, y > 1 \end{cases}$$

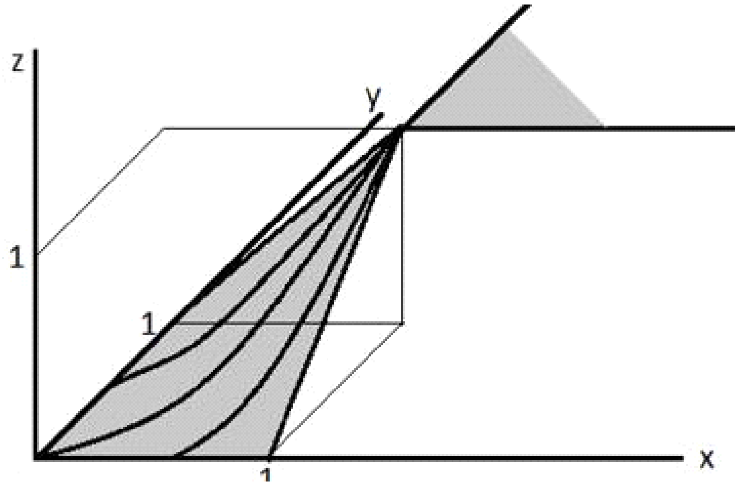
$$F_{\xi_1,\xi_2}(x,y)=\begin{cases}0,(x\le 0)\cup(y\le 0)\\ \frac{1}{4},x\in(0,1],y\in(0,1]\\ \frac{1}{2},x>1,y\in(0,1]\\ \frac{1}{2},x\in[0,1],y>1\\ 1,x>1,y>1\end{cases}$$



Пример 2.

Точка бросается в квадрат $[0,1]\times[0,1]$

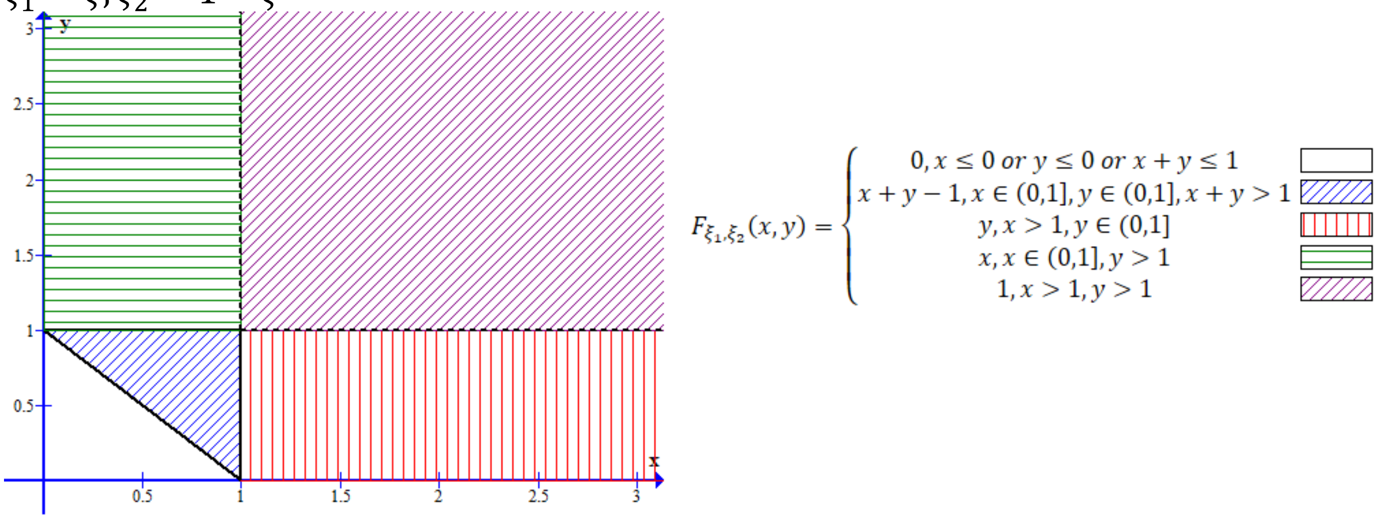
$$F_{\xi_1,\xi_2}(x,y)=\begin{cases}0,x\le 0\ or\ y\le 0\\ xy,x\in(0,1],y\in(0,1]\\ y,x>1,y\in(0,1]\\ x,x\in(0,1],y>1\\ 1,x>1,y>1\end{cases}$$



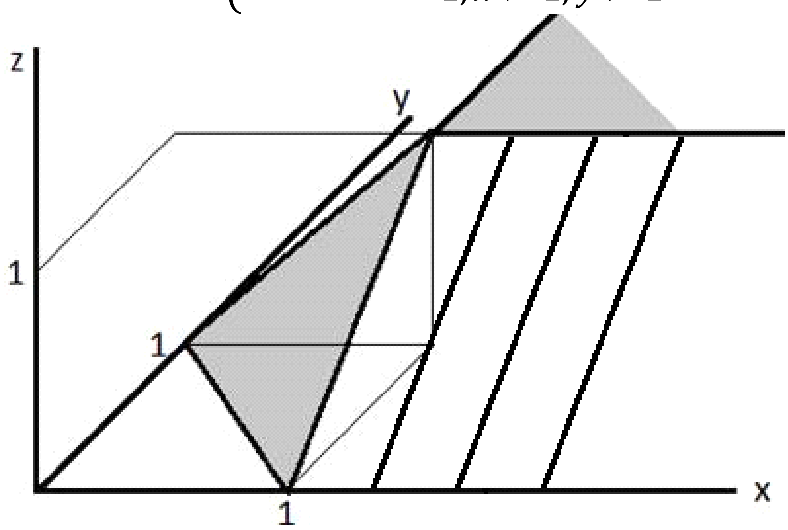
Пример 3

ξ – координата точки в $[0,1]$

$\xi_1 = \xi, \xi_2 = 1 - \xi$



$$F_{\xi_1,\xi_2}(x,y) = \begin{cases} 0, x \le 0 \text{ or } y \le 0 \text{ or } x+y \le 1 \\ x+y-1, x \in (0,1], y \in (0,1], x+y > 1 \\ y, x > 1, y \in (0,1] \\ x, x \in (0,1], y > 1 \\ 1, x > 1, y > 1 \end{cases}$$



Непрерывный и дискретный случайный вектор

Thursday, April 12, 2018 09:00

<u>Дискретные и непрерывные распределения</u>

Случайный вектор $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ называется **дискретным**, если $\exists A = \{\vec{a}_i\}_i, \vec{a_i} \in \mathbb{R}^n$ - не более чем счётное множество из $\vec{a_i} = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, таких, что

$$\sum_i P(\xi_1 = a_{i1}, \dots, \xi_n = a_{in}) = 1 \Leftrightarrow P(\vec{\xi} \in A) = 1$$

Случайный вектор $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ называется **непрерывным**, если $F_\xi -$ непрерывна.

Случайный вектор $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ называется **абсолютно непрерывным**, если $p_\xi : \mathbb{R}^n \to [0, \infty] -$ измеримая, такая, что

$$F_\xi(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_\xi(t) dt_1 \dots dt_n$$

Тогда

$$P(\vec{\xi} \in A) = \int_A p_\xi(t) dt_1 \dots dt_n, \forall A \in \mathfrak{B}_n$$

И p_ξ - **плотность распределения**

<u>Пример 1</u>

$A = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\} -$ дискретный

<u>Пример 2</u>

$$p_\xi(x, y) = \begin{cases} 1, (x \in [0,1] \wedge \ y \in [0,1]) \\ 0, (x \notin [0,1] \vee x \notin [0,1]) \end{cases} - \text{абсолютно непрерывный}$$

19-Apr-18

<u>Пример 3</u>

Здесь носитель случайной величины - отрезок $[(0,1), (1,0)] = I$.

$P((\xi_1, \xi_2) \in I) = 1$

$\mu_2(I) -$ мера Лебега для двумерного пространства - площадь. Очевидно, что $\mu_2(I) = 0$, т.к. $I -$ отрезок. Получается, что значение вероятности невозможно представить через интеграл по мере Лебега и вектор - не абсолютно непрерывен, но просто непрерывен.

<u>Дискретное распределение</u>

<u>Пример 4. Дискретное распределение</u>

$(\xi_1, \xi_2) -$ случайный вектор. Его **таблица распределения:**

$\xi_2 \backslash \xi_1$	-1	0	1	Вер. ξ_2

-1	0,1	0,3	0,1	0,5
1	0,2	0,1	0,2	0,5
Вер. ξ_1	0,3	0,4	0,3	1

ξ_1	-1	0	1	Σ
Вер. ξ_1	0,3	0,4	0,3	1

ξ_2	-1	1
Вер. ξ_2	0,5	0,5

$\xi_1 + \xi_2$	-2	-1	0	1	2
Вер. $\xi_1 + \xi_2$	0,1	0,3	0,3	0,1	0,2

Таблица распределения $(\xi_1\xi_2, \xi_1 + \xi_2)$

$\xi_1\xi_2 \backslash \xi_1 + \xi_2$	-2	-1	0	1	2	
-1	0	0	0,3	0	0	0,3
0	0	0,3	0	0,1	0	0,4
1	0,1	0	0	0	0,2	0,3
	0,1	0,3	0,3	0,1	0,2	

<u>Абсолютно непрерывный случайный вектор</u>

Функция распределения:

$$F_\xi(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_\xi(t) dt_1 \dots dt_n$$

Если есть F_ξ, но нужно получить p_ξ, то нужно продифференцировать F_ξ по каждому аргументу:

$$\boxed{p_\xi(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F_\xi(x_1, \dots, x_n)}$$

Случаи, когда функция F_ξ полностью дифференцируема - редки, поэтому допускается дифференцирование для "почти всех" x.

Свойства плотности

1. $p_\xi -$ измеримая функция
2. $\int_{\mathbb{R}^n} p_\xi(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = 1$
3. $p(x_1, \dots, x_n) \geq 0$

<u>*Пример 5*</u>

$$p_{\xi_1,\xi_2}(x,y)=\begin{cases}0,(x\le 0\vee y\le 0)\\ e^{-x-y},(x>0\wedge y>0)\end{cases}$$

$$p(x,y)\ge 0;\ \int\limits_{\mathbb{R}^2} p_{\xi_1,\xi_2}(x,y)dxdy=0+\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-x}e^{-y}\,dxdy$$

$$=\int\limits_0^\infty e^{-x}dx\cdot\int\limits_0^\infty e^{-y}dy=1$$

Рассмотрим компоненты $(\xi_1,\dots,\xi_n), p_\xi$ — плотность распределения ξ. Для получения плотности распределения по i-й компоненте нужно производить интегрирование по всем компонентам, кроме i-й

$$p_{\xi_i}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{\infty}p(t_1,\dots,x,t_{i+1},\dots,t_n)\,dt_1\dots dt_{i-1}dt_{i+1}\dots d_n$$

<u>Пример 5 (продолжение)</u>

$$p_{\xi_1}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_\xi(x,y)dy=\begin{cases}0,x\le 0\\ \int\limits_0^\infty e^{-x-y}\,dy=e^{-x}\int\limits_0^\infty e^{-y}dy=e^{-x},x>0\end{cases}$$

$$p_{\xi_2}(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_\xi(x,y)dx=\begin{cases}0,y\le 0\\ \int\limits_0^\infty e^{-x-y}\,dx=e^{-y}\int\limits_0^\infty e^{-x}dx=e^{-y},y>0\end{cases}$$

Пусть $\eta=\xi_1+\xi_2$

$$F_\eta(t)=P(\xi_1+\xi_2<t)=\begin{cases}0,t\le 0\\ \iint\limits_{x+y\le t}e^{-x-y}dxdy=\int\limits_0^t dy\int\limits_0^{t-y}e^{-x-y}dxdy\end{cases}$$

$$\int\limits_0^t e^{-y}dy\int\limits_0^{t-y}e^{-x}dx=\int\limits_0^t e^{-y}(1-e^{y-t})dy=\int\limits_0^t e^{-y}dy-\int\limits_0^t e^{-t}dy$$

$$=(1-e^{-t})-(te^{-t})$$

$$F_\eta(t)=\begin{cases}0,t\le 0\\ 1-e^{-t}-te^{-t},t>0\end{cases}$$

$$p_\eta(t)=(1-e^{-t}-te^{-t})'=e^{-t}-e^{-t}+te^{-t}=te^{-t}$$

12. Независимые случайные величины. Условные распределения

Thursday, April 19, 2018 08:30

Независимые случайные величины. Условные распределения

Пусть $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ — вероятностный эксперимент. $\xi_1 \dots \xi_n$ — случайные величины $\Rightarrow (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — случайный вектор.

Случайные величины $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ **независимы**, если

$F_\xi(x_1 \dots x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \dots F_{\xi_n}(x_n)$

$F_{\xi_i}(x_i) = \lim\limits_{\substack{x_j \to \infty \\ j \neq i}} F_\xi(x_1, \dots, x_n)$

Случайные величины $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ **независимы**, если

$P(\xi_1 \in A_1, \dots, \xi_n \in A_n) = P(\xi_1 \in A_1) \dots P(\xi_n \in A_n); \forall A \in \mathfrak{B}_1$, т.е.

$\mathcal{P}_\xi(A_1 \times \dots \times A_n) = \mathcal{P}_{\xi_1}(A_1) \times \dots \times \mathcal{P}_{\xi_n}(A_n), \forall A_1 \dots A_n \in \mathfrak{B}_1$

Дискретный случай

Если $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ — дискретный

$A = \left\{\left(a_{1_j}, \dots, a_{n_j}\right)\right\}$ — не более чем счётно. В этом случае $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ **независимы**, если

$P\left(\xi_1 = a_{1_j}, \dots, \xi_n = a_{n_j}\right) = P\left(\xi_1 = a_{1_j}\right) \dots P\left(\xi_n = a_{n_j}\right), \forall j \in N$

Абсолютно непрерывный случай

Если $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ — абсолютно непрерывный

p_ξ — плотность распределения

$$p_{\xi_i}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} p_\xi(t_1, \dots, x, t_{i+1}, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_{i-1} dt_{i+1} \dots dt_n$$

Тогда $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ **независимы**, если

$p_\xi(x_1 \dots x_n) = p_{\xi_1}(x_1) \dots p_{\xi_n}(x_n), \forall (x_1 \dots x_n)$

Условное распределение

Дискретный случай

ξ — дискретный случайный вектор, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$; $A = \left\{\left(a_{1j}, a_{2j}\right)\right\}_{j \in \mathbb{N}}: P(\xi \in A) = 1$

Условное распределение ξ_1 при условии ξ_2 — дискретное распределение с вероятностями

$$\boxed{p_{i|a_{2j}} = P\left(\xi_1 = a_{1i} \middle| \xi_2 = a_{2j}\right) = \frac{P(\xi_1 = a_{1j}, \xi_2 = a_{2j})}{P(\xi_2 = a_{2j})},}$$

где $P(\xi_2 = a_2) = \sum_i P(\xi_1 = a_{1i}, \xi_2 = a_{2j})$

Абсолютно непрерывный случай

ξ — абсолютно непрерывный случайный вектор, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$

Условное распределение ξ_1 при условии ξ_2 - абсолютно непрерывное распределение с плотностью

$$\boxed{p_{\xi_1|\xi_2=y}(x) = \frac{p_\xi(x,y)}{\int_{\mathbb{R}} p_\xi(x,y)dx} = \frac{p_\xi(x,y)}{p_{\xi_2}(y)}}$$

- для "почти всех" x при $y: p_{\xi_2}(y) > 0$

Очевидно, что если ξ_1, ξ_2 — независимы, то условное распределение ξ_1 при условии ξ_2 совпадает с безусловным и не зависит от x

26-Apr-18

Пример 4(а). Дискретное распределение

$\xi_2 \backslash \xi_1$	-1	0	1	Вер. ξ_2
-1	0,1	0,3	0,1	0,5
1	0,2	0,1	0,2	0,5
Вер. ξ_1	0,3	0,4	0,3	1

Распределение ξ_1 при условии ξ_2:

$\xi_1(\xi_2)$	-1	0	1	Σ
$\xi_2 = -1$	0,2	0,6	0,2	1
$\xi_2 = 1$	0,4	0,2	0,4	1

Пример 5(а). Абсолютно непрерывное безусловное распределение

$$p_{\xi_1,\xi_2}(x,y) = \begin{cases} 0, (x \le 0 \vee y \le 0) \\ e^{-x-y}, (x > 0 \wedge y > 0) \end{cases}$$

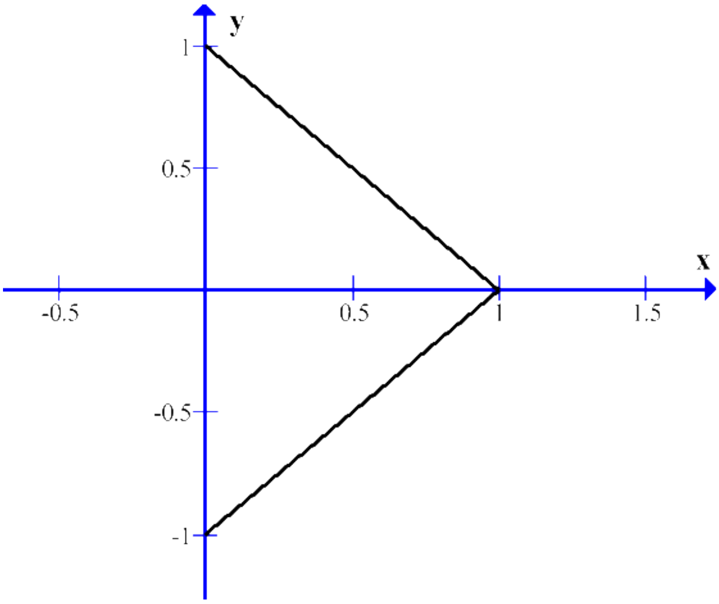
$$p_{\xi_1}(x) = \begin{cases} e^{-x}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}; p_{\xi_2}(y) = \begin{cases} e^{-y}, y \ge 0 \\ 0, y < 0 \end{cases}$$

$p_{\xi_1\xi_2}(x,y) = p_{\xi_1}(x) \cdot p_{\xi_2}(y) \Rightarrow$ величины независимы

$$p_{\xi_1(\xi_2=y)}(x) = \frac{p_{\xi_1}(x) \cdot p_{\xi_2}(y)}{p_{\xi_2}(y)} = p_{\xi_1}(x)$$

Пример 6

$$P_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 1, x + |y| \le 1, x \ge 0 \\ 0, else \end{cases}$$



$$p_{\xi|\eta=y} = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\eta(y)}$$

$$\int_0^{1+y} 1dx = 1+y; \int_0^{1-y} 1dx = 1-y$$

$$p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi n}(x,y)dx = \begin{cases} 0, y \notin [-1{,}1] \\ 1+y, y \in [-1{,}0] \\ 1-y, y \in (0{,}1] \end{cases} = \begin{cases} 0, y \notin [-1{,}1] \\ 1-|y|, y \in [-1{,}1] \end{cases}$$

$y \in [-1{,}1]$:

$$p_{\xi|\eta=y}(x) = \begin{cases} 0, (x > 1-|y|) \vee (x < 0) \\ \dfrac{1}{1-|y|}, x \in [0{,}1-|y|] \end{cases} \sim U(0, 1-|y|)$$

$$p_{\xi|n}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-|\eta|}, x \in [0{,}1-|\eta|] \\ 0, else \end{cases}$$

Формула полной вероятности для абсолютно непрерывного случайного вектора

Пусть ξ — абсолютно непрерывен, $p_{\xi\eta}(x,y)$ — плотность распределения.

$p_{\xi+\eta}(t)$—?

$F_{\xi+\eta}$ — функция распределения $\xi+\eta$.

$$F_{\xi+\eta}(t) = P(\xi+\eta < t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\xi+\eta < t|\eta = u)p_\eta(u)du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P(\xi < t-u|\eta = u)p_\eta(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} F_{(\xi|\eta = u)}(t-u)p_\eta(u)du,$$

где

$$F_{(\xi|\eta = u)} = \int\limits_{-\infty}^{t-u} p_{\xi|(\eta=u)}(v)dv$$

Дифференцированием по t получается **ФПВ для плотности $\eta + \xi$:**

$$\boxed{p_{\xi+\eta}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{(\xi|\eta = u)}(t-u)p_\eta(u)du}$$

Если ξ, η — независимы, то получается **формула свёртки:**

$$\boxed{p_{\xi+\eta}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(t-u)p_\eta(u)du}$$

Пример 5(б)

$$p_{\xi_1,\xi_2}(x,y) = \begin{cases} 0, (x \le 0 \vee y \le 0) \\ e^{-x-y}, (x > 0 \wedge y > 0) \end{cases}$$

$$p_{\xi_1}(x) = p_{\xi_2}(x) = \begin{cases} e^{-x}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

$$p_{\xi_1+\xi_2}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(t-u)\, p_{\xi_2}(u)du = \int\limits_{0}^{t} e^{t-u}e^{-u}du = e^{-t}\int\limits_{0}^{t} du =$$

$$= \begin{cases} te^{-t}, t > 0 \\ 0, t \le 0 \end{cases}$$

13. Числовые характеристики случайных величин

Thursday, April 26, 2018 09:00

Числовые характеристики случайных величин

Пусть $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ — вероятностный эксперимент

ξ — случайная величина, F_ξ — её распределение, C — класс распределений

$\alpha: C \to \mathbb{R}$ — **числовая характеристика**

$\alpha(F_\xi)$

Среднее значение

ξ	-1	0	1
Вер. ξ	0,01	0,01	0,98

$-1 \cdot \frac{1}{100} + 0 \cdot \frac{1}{100} + 1 \cdot \frac{98}{100} = \frac{97}{100}$ — "центр массы"

Математическое ожидание

$$E\xi = \int_\Omega \xi(\omega) dP(\omega) = \int_\mathbb{R} x d\mathcal{P}_\xi(x) = \boxed{\int_\mathbb{R} x dF_\xi(x)}$$

В дискретном случае:

$$\boxed{E\xi = \sum_i a_i p_i}$$

Где $\{a_i\}_i: P(\xi \in \{a_i\}_i) = 1; p_i = P(\xi = a_i)$

В абсолютно непрерывном случае

$$\boxed{E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x) dx}$$

Где $p_\xi(x)$ — плотность распределения ξ

Дисперсия и СКО(MSE)

$\boxed{D\xi = E(\xi - E\xi)^2}$ — показывает, насколько сильно отклоняется ξ от среднего значения

$\boxed{MSE\xi = \sqrt{D\xi}}$ - **Middle-Square Error**

$$D\xi = \int_\Omega (\xi(\omega) - E\xi)^2 dP(\omega) = \int_\mathbb{R} (x - E\xi)^2 d\mathcal{P}_\xi(x) = \int_\mathbb{R} (x - E\xi)^2 dF_\xi(x)$$

В дискретном случае:

$$\boxed{D\xi = \sum_i (x_i - E\xi)^2 p_i}$$

Где $\Sigma p_i = 1$

В абсолютно непрерывном случае

$$\boxed{D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2 p_\xi(x)dx}$$

Где p_ξ — плотность

Моменты

$\boxed{\alpha_k = E\xi^k}$ — **k-й момент**

$\boxed{\mu_k = E(\xi - E\xi)^k}$ — **k-й центральный момент**

$\boxed{\alpha_g = Eg(\xi)}$ — **g-момент**, где g - измеримая функция.

Моменты и центральный моменты - частные случаи g-момента.

$$\alpha_g = \int_{-\infty}^{\infty} g\big(\xi(\omega)\big)dP(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} yd\mathcal{P}_{g(\xi)}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)d\mathcal{P}_\xi(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_\xi(x)$$

В дискретном случае:

$$\alpha_g \sum_i g(a_i)p_i$$

Где $\Sigma p_i = 1$

В абсолютно непрерывном случае:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)p_\xi(x)dx$$

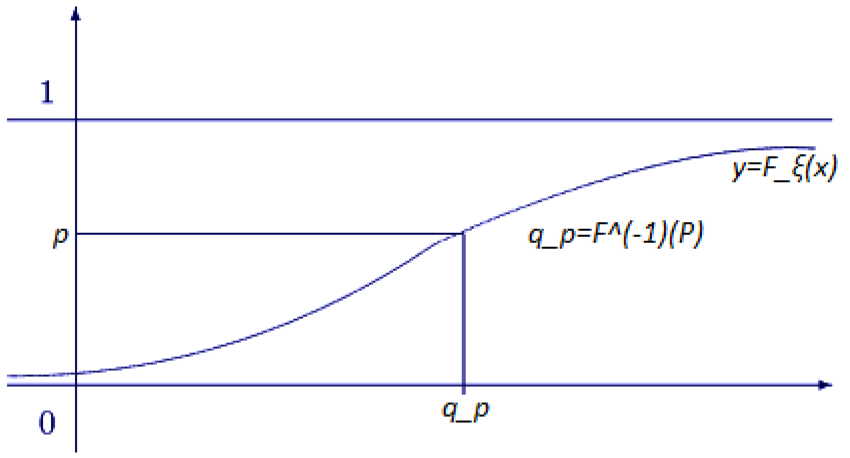
Где p_ξ — плотность

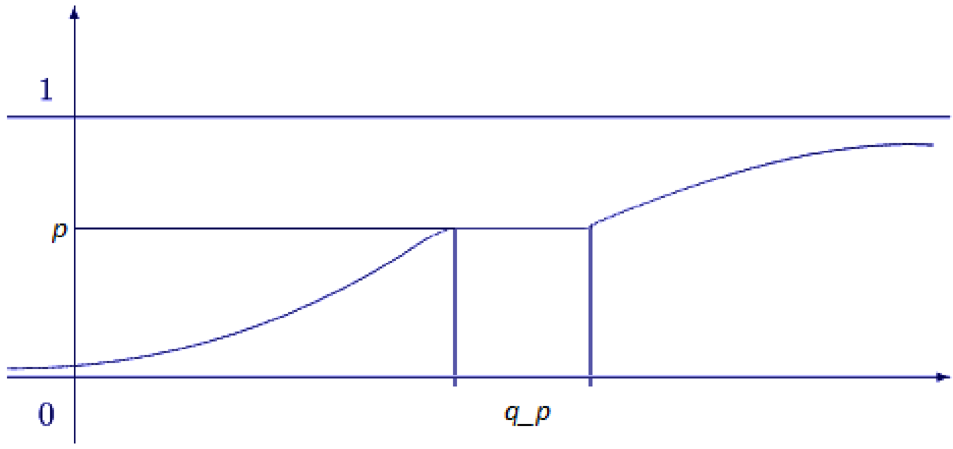
Квантили

q_p — **квантиль порядка $\boldsymbol{p} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$**, если

$$\begin{cases} P\big(\xi < q_p\big) \geq p \\ P\big(\xi \geq q_p\big) \geq 1 - p \end{cases}$$

$q_{\frac{1}{2}}$ — **медиана**, $q_{\frac{1}{4}}, q_{\frac{3}{4}}$ — **квартили**





Свойства математического ожидания

1. $\xi = const\ (\exists a: P(\xi = a) = 1) \Rightarrow E\xi = a$
2. $P(\xi \le \eta) = 1 \Rightarrow E\xi \le E\eta$ - монотонность
3. $E(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha E\xi + \beta E\eta$ - линейность
4. ξ, η — независимые $\Rightarrow E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$

   Доказательство

$$E\xi\eta = \int_{\mathbb{R}^2} xyd\mathcal{P}_{\xi\eta}(x,y) = \left[\begin{array}{c} \sum_i a_i b_j p_{ij}\, ; p_{ij} = P(\xi = a_i, \eta = b_j) \\ \int_{-\infty}^{\infty} xyp_{\xi\eta}(x,y)dxdy \end{array} \right. =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \sum_i a_i p_i \cdot \sum_j b_j\, p_j \\ \int_{-\infty}^{\infty} xp_\xi(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} yp_\eta(y)dy \end{array} \right. \blacksquare$$

Пример величины, не имеющей мат. ожидания

ξ — случайная величина, p_ξ — плотность

$$p_\xi = \begin{cases} 0, x \in (-\infty, 1) \\ \dfrac{1}{x^2}, x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{y\to\infty} \int_1^y \frac{1}{x^2}dx = \lim_{y\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^y = 1$$

- значит, это действительно плотность.

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x)dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{y\to\infty} \ln y\Big|_1^y = \infty$$

Тем не менее, математического ожидания не существует.

03-May-18

Свойства дисперсии

1. $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$
   Доказательство
   $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2)$
   $= E\xi^2 - 2(E\xi)(E\xi) + E\big((E\xi)^2\big) = E\xi^2 - (E\xi)^2$ ■
2. $D\xi \geq 0; D\xi = 0 \Leftrightarrow \exists a: P(\xi = a) = 1$
   Доказательство
   $(\xi - E\xi)^2 \geq 0 \Rightarrow E(\xi - E\xi)^2 \geq E(0) = 0$
   $P(\xi = a) = 1 \Rightarrow E\xi = Ea = a \Rightarrow E(a-a)^2 = 0$
   Для абсолютно непрерывного случая, пусть $A_+ = [a, +\infty); A_- = (-\infty, a)$
   $$0 = E(\xi - E\xi)^2 = \int_{\mathbb{R}} (x-a)^2 p_\xi(x)dx$$
   $$= \int_{A_+} (x-a)^2 p_\xi(x)dx + \int_{A_-} (x-a)^2 p_\xi(x)dx$$
   Пусть $A_{\varepsilon+} = [a+\varepsilon, \infty)$: $(x-a)^2 \geq \varepsilon^2; x \in A_{\varepsilon+}$. Тогда:
   $$\int_{A_{\varepsilon+}} (x-a)^2 p_\xi(x)dx \geq \varepsilon^2 \int_{A_{\varepsilon+}} p_\xi(x)dx$$
   $$\int_{A_{\varepsilon+}} p_\xi(x)dx = P(\xi \in A_{\varepsilon+}) = 0, \forall\varepsilon \Rightarrow P(\xi \geq a+\varepsilon) = 0; \forall\varepsilon$$
   $$P(\xi > a) = \bigcup_{\varepsilon>0} \{\xi > a+\varepsilon\} = 0$$
   Аналогично $P(\xi < a) = 0 \Rightarrow P(\xi = \alpha) = 1$ ■
3. $a = const \Rightarrow D(\alpha\xi) = \alpha^2 D\xi$
   Доказательство
   $E(\alpha\xi - E\alpha\xi)^2 = E(\alpha\xi - \alpha E\xi)^2 = E\big(\alpha(\xi - E\xi)\big)^2 = a^2 E(\xi - E\xi)^2$
   $= \alpha^2 D\xi$ ■
4. $\xi, \eta -$ независимые
   $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$
   $D(\xi - \eta) = D\xi + D\eta$
   $D(\xi+\eta) = E\big((\xi+\eta) - E(\xi+\eta)\big)^2 = E\big((\xi - E\xi) + (\eta - E\eta)\big)^2 =$
   $= E(\xi - E\xi)^2 + 2E\big((\xi - E\xi)(\eta - E\eta)\big) + E(\eta - E\eta)^2 =$
   $= E(\xi - E\xi)^2 + 2E(\xi - E\xi)E(\eta - E\eta) + E(\eta - E\eta)^2$
   $= E(\xi - E\xi)^2 + E(\eta - E\eta)^2$ ■
5. $\beta = const \Rightarrow D(\xi + \beta) = D\xi$

$$D(\xi+\beta)=E\big((\xi+\beta)-E(\xi+\beta)\big)^2=E(\xi+\beta-E\xi-\beta)^2$$
$$=E(\xi-E\xi)^2\blacksquare$$

Пример вычисления

В каждом дворе 3 арки, одна ведет в тупик, другие – в другие такие же дворы.

x- количество посещённых дворов

$$p(k)=\frac{2^k}{3^{k+1}};p=\frac{2}{3}$$

Функция распределения:

$$F(x)=\sum_{k=0}^{x}\frac{2^k}{3^{k+1}}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\cdots\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)}{1-\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)$$
$$=\boxed{\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}}$$

Математическое ожидание:

$$E(x)=\sum_{n=1}^{\infty}np(n)=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{2^n}{3^n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\frac{9}{2}E(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=(*)$$

Чтобы вычислить сумму такого ряда, можно сначала проинтегрировать, а затем продифференцировать результат.

$$\int_0^p\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot p^{n-1}\,dp=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{p^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}p^n=\frac{1}{1-\mathrm{p}}-1$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}p^n\right)'=\left(\frac{1}{1-p}-1\right)'=\left(\frac{1}{1-p}\right)^2$$

$$(*)=9\to\boxed{E(x)=2}$$

Дисперсия считается аналогичным образом:

$$3D(x)=3\sum_{n=1}^{\infty}p(n)\big(n-M(x)\big)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n(n-2)^2$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n(n^2-4n+4)=$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n - 4\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = (*)$$

$$\int_0^p \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot p^{n-1}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \frac{p^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p^n$$

$$\int_0^p \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p^{n-1}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{p^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} p^n = \frac{1}{1-p} - 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 p^n = \left(\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p^n\right)' = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} p^n\right)'' = \frac{4}{9}\left(\frac{1}{(1-p)^2}\right)'$$

$$= \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{(1-p)^3}$$

$$(*) = \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^3} - 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} + 4\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1\right) = 24 - 24 + 8$$

$$\to \boxed{D(x) = 24}$$

14. Числовые характеристики случайных векторов

Thursday, May 3, 2018 08:30

Числовые характеристики случайных векторов

Пусть есть случайный вектор $(\xi_1, \dots, \xi_n)$. $P_{\vec{\xi}}$ — его распределение. $F_{\vec{\xi}}$ — функция распределения. Пусть C — некоторый класс распределений в $\mathbb{R}^n$
$\alpha: C \to \mathbb{R}^n$ — **числовая характеристика** случайного вектора

Математическое ожидание и дисперсия

$E\vec{\xi}$ — вектор

$$\boxed{E\vec{\xi} = \begin{pmatrix} E\xi_1 \\ \vdots \\ E\xi_n \end{pmatrix}}; \boxed{D\vec{\xi} = \begin{pmatrix} D\xi_1 \\ \vdots \\ D\xi_n \end{pmatrix}}$$

Ковариация

$$\boxed{COV(\xi_1, \xi_2) = E(\xi_1 - E\xi_1)(\xi_2 - E\xi_2)}$$

Коэффициент корреляции

$$\boxed{\rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{COV(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{D\xi_1}\sqrt{D\xi_2}}}$$

Для вектора можно определить **матрицу ковариации**

$$\boxed{\Sigma = \|b_{ij}\|_{i=1, j=1}^{n,n}; b_{i,j} = COV(\xi_i, \xi_j)}$$

Аналогично **матрица корреляции**

$$\boxed{R = \|p_{ij}\|_{i=1, j=1}^{n,n}; p_{i,j} = \rho(\xi_i, \xi_j)}$$

Свойства ковариации

1. $COV(\xi, \xi) = D\xi$
   $COV(\xi, \alpha) = 0$
2. $COV(\xi, \eta) = COV(\eta, \xi)$
3. $COV(\alpha\xi + \beta, \eta) = \alpha COV(\xi, \eta)$
   Доказательство
   $COV(\alpha\xi + \beta, \eta) = E\big((\alpha\xi + \beta) - E(\alpha\xi + \beta)\big)(\eta - E\eta)$
   $= E(\alpha\xi + \beta - \alpha E\xi - E\beta)(\eta - E\eta) = E\alpha(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)$
   $= \alpha COV(\xi, \eta)$ ■
4. $|COV(\xi, \eta)| \le \sqrt{D\xi D\eta}$ - **неравенство Коши-Буняковского**
   $|COV(\xi, \eta)| = \sqrt{D\xi D\eta} \to \exists \alpha: \xi = \alpha\eta + \beta$
   Доказательство (далее)
5. η, ξ — независимые, $\Rightarrow COV(\xi, \eta) = 0$

Доказательство

$$E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) \overset{\text{нез}}{\Rightarrow} E(\xi - E\xi) \cdot E(\eta - E\eta) = 0 \blacksquare$$

<u>Свойства коэффициента корреляции</u>

1. $\rho(\xi, \xi) = 1$
2. $\rho(\xi, \eta) = \rho(\eta, \xi)$
3. $\rho(\alpha\xi + \beta, \eta) = \rho(\xi, \eta)$

   Доказательство

   $$\rho(\alpha\xi + \beta, \eta) = \frac{COV(\alpha\xi + \beta, \eta)}{\sqrt{D(\alpha\xi + \beta)}\sqrt{D\eta}} = \frac{\alpha COV(\xi, \eta)}{\sqrt{\alpha^2 D\xi D\eta}} = \frac{COV(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}$$

   $$= \rho(\xi, \eta) \blacksquare$$
4. $\rho(\xi, \eta) = 1 \Leftrightarrow \exists \alpha > 0; \beta \in \mathbb{R}: \xi = \alpha\eta + \beta$

   $\rho(\xi, \eta) = -1 \Leftrightarrow \exists \alpha > 0; \beta \in \mathbb{R}: \xi = -\alpha\eta + \beta$

   Без доказательства
5. η, ξ — независимы $\Rightarrow \rho(\xi, \eta) = 0$

<u>Характеристическое свойства матриц ковариации и корреляции</u>

Для **матрицы ковариации:**

Σ — **неотрицательно определённая** $\Leftrightarrow (*)$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(b_{11}), \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

- **главные миноры**.

$(*) \Leftrightarrow$ все главные миноры неотрицательны

$(*) \Leftrightarrow$ <u>собственные числа</u> матрицы неотрицательны

Для **матрицы корреляции:**

R — симметричная и положительно определённая

<u>*Пример 1(а)*</u>

$$\Sigma = \begin{pmatrix} COV(\xi_1, \xi_1) & COV(\xi_1, \xi_2) \\ COV(\xi_2, \xi_1) & COV(\xi_2, \xi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>*Пример 3(а)*</u>

ξ — координата точки в $[0,1]$

$\xi_1 = \xi, \xi_2 = 1 - \xi$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} COV(\xi_1, \xi_1) & COV(\xi_1, \xi_2) \\ COV(\xi_2, \xi_1) & COV(\xi_2, \xi_2) \end{pmatrix} = (*)$$

$$COV(\xi_1, \xi_2) = E(\xi_1 - E\xi_1)(\xi_2 - E\xi_2) = E(\xi_1 - 0{,}5)(\xi_2 - 0{,}5) =$$

$$= E(\xi_1\xi_2 - 0{,}5\xi_1 - 0{,}5\xi_2 + 0{,}25)$$

$$= E(\xi_1\xi_2) - E(0{,}5\xi_1) - E(0{,}5\xi_2) + E(0{,}25) = (**)$$

$= E(\xi_1\xi_2) - E(0{,}5\xi_1) - E(0{,}5\xi_2) + E(0{,}25) = (**)$

$E(\xi) = E(\xi_1) = E(\xi_2) = 0{,}5$

$E(\xi_1\xi_2) = E\big(\xi(1-\xi)\big) = E(\xi - \xi^2) = E(\xi) - E(\xi)^2 = 0{,}25$

$(**) = 0{,}25 - 0{,}25 - 0{,}25 + 0{,}25 = 0$

$(*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Как можно заметить, из отсутствия ковариации не следует независимость

15. Условные математические ожидания

Thursday, May 3, 2018 09:00

Условные математические ожидания

Условные характеристики случайных векторов

Пусть ξ — случайная величина, η — случайный вектор или случайная величина.

$\mathcal{P}_{\xi,\eta} \in C$ — совместное распределение (ξ, η)

$F_{(\xi|\eta = y)}$ — условное распределение ξ при условии $\eta = y$

$\alpha_y(\mathcal{P}_{\xi\eta}) = \alpha\left(F_{(\xi|\eta = y)}\right)$

$\alpha_\eta(\mathcal{P}_{\xi\eta}) = f(\eta) = \alpha_y(\mathcal{P}_{\xi\eta}), \eta = y$

Условные математические ожидания

$$E(\xi|\eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi|\eta=y}(x)$$

$E(\xi|\eta) = E(\xi|\eta = y), \eta = y$ — случайная величина

Свойства

I. $E(\xi|\eta) = f(\eta)$

II. $\forall A \in \mathfrak{B}_d \left(\eta = (\eta_1, \dots, \eta_d)\right): \int E(\xi|\eta)\Delta_{\{\eta\in A\}} dP = \int \xi \Delta_{\{\eta \in A\}} dP$

$$\int f(n)\Delta_{\{\eta\in A\}} dP = \int \xi \Delta_{\{\eta\in A\}} dP \Rightarrow E(\xi|\eta) = f(n)$$

1. При фиксированном η условное математическое ожидание удовлетворяет всем свойствам обычного
2. $E(\xi|\alpha) = E\xi; E(\xi|\xi) = \xi$
3. $E(\xi|\eta_1) = E(E(\xi|\eta_1)|(\eta_1\eta_2)) = E(E(\xi|\eta_1\eta_2)|\eta_1)$
4. $E(\xi\eta_1|\eta_1) = \eta_1 E(\xi|\eta_1), \eta_1$ — случайная величина
5. ξ, η — независимы $\Rightarrow E(\xi|\eta) = E\xi$

16. Некоторые неравенства

Thursday, May 10, 2018 08:00

Некоторые неравенства

Неравенство Гельдера

Пусть $pq > 0; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; ξ, η – случайные величины, причем $E|\xi|^p < \infty, E|\eta|^q < \infty$

Тогда $\boxed{E|\xi\eta| \le (E|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (E|\eta|^q)^{\frac{1}{q}}}$

Доказательство

$y = x^r - 1; r > 1$

$\Rightarrow (x^r - 1) \ge r(x - 1), \forall x \ge 0$

$$x = \frac{a^{\frac{1}{r}}}{b^{\frac{1}{r}}} \Rightarrow \frac{a}{b} - 1 \ge r\left(\frac{a^{\frac{1}{r}}}{b^{\frac{1}{r}}} - 1\right)$$

$$a - b \ge r a^{\frac{1}{r}} b^{1-\frac{1}{r}} - rb$$

$$a^{\frac{1}{r}} b^{1-\frac{1}{r}} \le \frac{a}{r} - \frac{b}{r} + b = \frac{a}{r} + b\left(1 - \frac{1}{r}\right) \overset{r=p}{\Longrightarrow} \boxed{a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \le \frac{a}{p} + \frac{b}{q}}$$

- **неравенство Юнга**

$$a = \frac{|\xi|^p}{E|\xi|^p}; b = \frac{|\eta|^q}{E|\eta|^q}$$

$$\frac{|\xi\eta|}{(E|\xi|^p)^{\frac{1}{p}}(E|\eta|^q)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p} \cdot \frac{|\xi|^p}{E|\xi|^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|\eta|^q}{E|\eta|^q}$$

Используется свойство монотонности математического ожидания:

$$\frac{E|\xi\eta|}{(E|\xi|^p)^{\frac{1}{p}}(E|\eta|^q)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p} \cdot \frac{E|\xi|^p}{E|\xi|^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{E|\eta|^q}{E|\eta|^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\Rightarrow E|\xi\eta| \le (E|\xi|^p)^{\frac{1}{p}}(E|\eta|^q)^{\frac{1}{q}} \blacksquare$$

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

$\boxed{E|\xi\eta| \le (E\xi^2)^{\frac{1}{2}}(E\eta^2)^{\frac{1}{2}}}$

Доказательство - следствие из неравенства Гельдера

Неравенство Минковского

$\boxed{(E|\xi + \eta|^p)^{\frac{1}{p}} \le (E|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} + (E|\eta|^p)^{\frac{1}{p}}}$

Доказательство

$E|\xi+\eta|^p = E(|\xi+\eta|^{p-1}\cdot|\xi+\eta|) \le E(|\xi||\xi+\eta|^{p-1}) + E(|\eta||\xi+\eta|^{p-1})$
$\le (*)$

По неравенству Гельдера:

$$\le (E|\xi|^p)^{\frac{1}{p}}\left(E|\xi+\eta|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + (E|\eta|^p)^{\frac{1}{p}}\left(E|\xi+\eta|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} = (**)$$

$$(p-1)q = (p-1)\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p}} = (p-1)\cdot\frac{1}{\left(\frac{p-1}{p}\right)} = p$$

$$(**) = \left((E|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} + (E|\eta|^p)^{\frac{1}{p}}\right)(E|\xi+\eta|^p)^{\frac{1}{q}}$$

$$(E|\xi+\eta|^p) \le \left((E|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} + (E|\eta|^p)^{\frac{1}{p}}\right)(E|\xi+\eta|^p)^{\frac{1}{q}}$$

$$(E|\xi+\eta|^p)^{1-\frac{1}{q}} = (E|\xi+\eta|^p)^{\frac{1}{p}} \le \left((E|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} + (E|\eta|^p)^{\frac{1}{p}}\right) \blacksquare$$

<u>Неравенство Ляпунова</u>

Пусть $r \le s$; $\xi -$ случайная величина. В таком случае

$$\boxed{(E|\xi|^r)^{\frac{1}{r}} \le (E|\xi|^s)^{\frac{1}{s}}}$$

Доказательство

$$\boxed{E\xi\eta \le (E|\xi|^p)^{\frac{1}{p}}\cdot(E|\eta|^q)^{\frac{1}{q}}}$$

Пусть $p = \frac{s}{r}; q = 1 - \frac{s}{r}$

$$E(|\xi|^r\cdot 1) \le \left(E|\xi|^{r\cdot\frac{s}{r}}\right)^{\frac{r}{s}}\cdot\left(E|1|^{1-\frac{s}{r}}\right)^{\frac{1}{1-\frac{s}{r}}}$$

$$E(|\xi|^r) \le (E|\xi|^s)^{\frac{r}{s}}$$

$$E(|\xi|^r)^{\frac{1}{r}} \le (E|\xi|^s)^{\frac{1}{s}} \blacksquare$$

<u>Неравенство Чебышева I</u>

Пусть $\xi: P(\xi \ge 0) = 1$. Тогда для $\forall\varepsilon > 0, \varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \forall x \ge 0: \varphi(x) \ge 0$, причём $\varphi(x)$ неубывает при $x > 0$

$$\boxed{P(\xi \ge \varepsilon) \le \frac{E\varphi(\xi)}{\varphi(\varepsilon)}}$$

Доказательство

$$P(\xi \ge \varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\infty} dF_\xi(x) \le (*)$$

Так как $\varphi(x)$ неубывает, то $\frac{\varphi(x)}{\varphi(\varepsilon)} \ge 1, \forall x > \varepsilon$

$$(*) \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{\varphi(\varepsilon)} dF_\xi(x) = \frac{1}{\varphi(\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi(x)dF_\xi(x) \le \frac{1}{\varphi(\varepsilon)}\int_{0}^{\infty} \varphi(x)dF_\xi(x) = \frac{E\varphi(\xi)}{\varphi(\varepsilon)} \blacksquare$$

Неравенство Чебышева II

$\xi -$ произвольная случайная величина, такая, что $E\xi^2 < \infty$. В этом случае $\forall \varepsilon > 0$

$$\boxed{P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(\xi - E\xi)^2}{\varepsilon^2}}$$

Доказательство

$\eta = |\xi - E\xi|; P(\eta \geq 0) = 1$

$\varphi(x) = x^2$

По неравенству Чебышева I

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(\xi - E\xi)^2}{\varepsilon^2} \blacksquare$$

17. Законы больших чисел

Thursday, May 10, 2018 08:30

Законы больших чисел

Рассматривается последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$

Распределение последовательности - **цилиндрические множества**

$\{\omega: \xi_{1_s} \in A_1, \dots, \xi_{i_s} \in A_s\}, A_i \in \mathfrak{B}_1, s \in \mathbb{N}$

X — совокупность последовательностей вещественных чисел

$\mathcal{F}$ — наименьшая σ-алгебра, содержащая цилиндрические множества - **цилиндрическая алгебра**

$\mathcal{P}_\xi: \mathcal{F} \to [0,1]$ — распределение ξ

$\mathcal{P}_\xi$ задается на цилиндрических множествах

Рассмотрим множества вида

$B_S = \{\omega: \xi_1 \in A_1, \dots, \xi_s \in A_s\}$

$B_{s+1}(A) = \{\omega: \xi_1 \in A_1, \dots, \xi_s \in A_s, \xi_{s+1} \in A\}$

Условие согласования 1

$B_s = B_{s+1}(\mathbb{R})$ — с вероятностью 1

$P(B_s) = P\big(B_{s+1}(R)\big), \forall s$

$KMP_{(1)}\ \mathcal{P}_{\xi_1,\dots,\xi_s}$ — **конечномерное распределение** - совместное распределение $(\xi_1, \dots, \xi_s)$

Условие согласования 2 $\mathcal{P}_{\xi_1,\dots,\xi_{s+1}}(A_1 \times \dots \times A_s \times \mathbb{R}) = \mathcal{P}_{\xi_1,\dots,\xi_s}(A_1 \times \dots A_s), \forall s \in \mathbb{N}$

$\forall A_1, \dots, A_s \in \mathfrak{B}_1$

КМР, удовлетворяющее условиям 1 и 2, задает распределение $\mathcal{P}_{\xi_1,\dots,\xi_s}$

Закон больших чисел

Пусть $\xi_1, \xi_2 \dots$ — последовательность случайных величин.

A. $E\xi_i = 0$ **удовлетворяет ЗБЧ,** если $\forall \varepsilon > 0$

$$\boxed{P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \Leftrightarrow \boxed{P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right| \le \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1}$$

B. $E|\xi_i| < \infty; \mu = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i\right)$

$\xi_1, \xi_2 \dots$ **удовлетворяет ЗБЧ**

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0: P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\xi_i - \mu| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Закон больших чисел в форме Маркова

$\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ — последовательность случайных величин

$$\boxed{E\xi_i = 0, \frac{D(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i)}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Тогда ξ_1, ξ_2 удовлетворяет ЗБЧ

Доказательство

По неравенству Чебышева:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right| > \varepsilon\right) \le \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2} D(\sum_{i=1}^{n} \xi_i)}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \blacksquare$$

<u>Закон больших чисел в форме Чебышева</u>

$\xi_1, \xi_2, \dots$ - последовательность независимых случайных величин (КМР соответствует векторам с независимыми компонентами)

$$\boxed{E\xi_i = 0; D\xi_i \le \sigma^2, \forall i}$$

Тогда $\xi_1, \xi_2, \dots$ удовлетворяет ЗБЧ

Доказательство

$$D\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D\xi_i \le \frac{n\sigma}{n^2} = \frac{\sigma}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Выполняется условие Маркова $\blacksquare$

<u>Закон больших чисел в форме Хинчина</u>

$\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин (КМР соответствует векторам с независимыми компонентами и одномерные распределения совпадают)

$$\boxed{E\xi_1 = 0}$$

Тогда $\xi_1, \xi_2 \dots$ удовлетворяет ЗБЧ

Без доказательства

<u>Закон больших чисел в форме Бернулли</u>

μ_n — число успехов в испытании Бернулли с вероятностью успеха $p, \forall \varepsilon > 0$

$$\boxed{P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Доказательство

Рассмотрим случайную величину $\xi = \frac{m}{n}$, где m — число наступления события А в n независимых опытах, т.е. $m = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, где ξ_i принимает либо 0, либо 1.

$E\xi_i = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$

$D\xi_i = E(\xi_i - E\xi_i)^2 = (0-p)^2 \cdot q + (1-p)^2 \cdot p = p^2 q + q^2 p = pq(p+q)$
$= pq$

Получается, что

$E(m) = E(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = np$

$D(m) = D(\xi_1 + \cdots \xi_n) = npq$

$E(\xi) = E\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n}E(m) = \frac{np}{n} = p$

$D(\xi) = D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n^2}D(m) = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}$

Из неравенства Чебышева II:

$P(|\xi - E\xi| > \varepsilon) \leq \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 0\blacksquare$

18. Виды сходимости

Thursday, May 10, 2018 08:30

Виды сходимости последовательностей случайных величин и распределений

$\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — последовательность чисел

$$\boxed{\lim_{i\to\infty} a_i = e \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N: \forall n \in N\ |a_i - e| < \varepsilon}$$

$\{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — последовательность случайных величин

Сходимость по вероятности:

$$\xi_i \underset{i\to\infty}{\overset{P}{\to}} \xi \Leftrightarrow \boxed{\forall\varepsilon > 0: P(|\xi_i - \xi| > 0) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Сходимость в среднем порядка $\boldsymbol{p}$:

$$\xi_i \underset{i\to\infty}{\overset{L_p}{\to}} \xi \Leftrightarrow \boxed{\lim_{i\to\infty} E|\xi_i - \xi|^p = 0\ (E|\xi_i - \xi| < \infty, \forall i)}$$

Сходимость с вероятностью 1 (почти наверное):

$$\boxed{\xi_i \underset{i\to\infty}{\overset{P=1}{\longrightarrow}} \xi \Leftrightarrow P\left(\omega: \xi_i(\omega) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \xi(\omega)\right) = 1}$$

Эквивалентное определение

$$\boxed{\xi_i \underset{i\to\infty}{\overset{P=1}{\longrightarrow}} \xi \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0: \lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{m\geq n}|\xi_m - \xi| > \varepsilon\right) = 0}$$

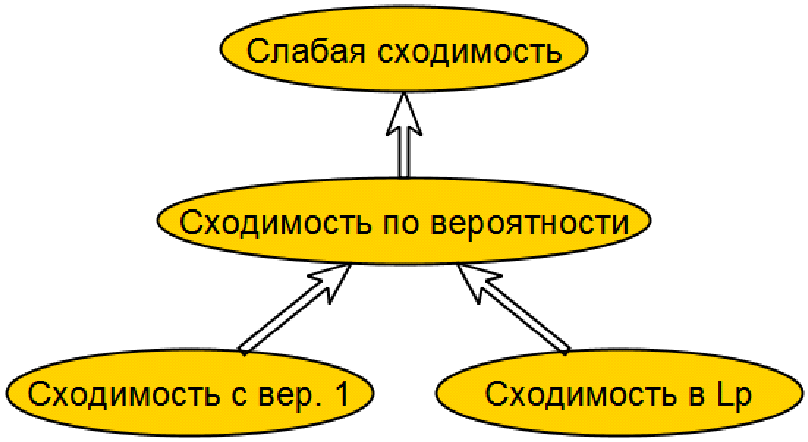
Слабая сходимость (сходимость по распределению)

$\left\{\mathcal{P}_{\xi_i}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ — последовательность распределений

$\boxed{\xi_i \overset{w}{\Rightarrow} \xi \Leftrightarrow \quad F_{\xi_i}(x) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} F_\xi(x), \forall x}$, где x — точка непрерывности F_ξ

Не подразумевается, что ξ_1, ξ_2 … определена в рамках одного вероятностного эксперимента. Если $\xi_1, \xi_2, \dots$ - определена в рамках одного вероятностного эксперимента, то слабая сходимость - вид сходимости случайных величин

Связь различных видов сходимости


Слабая сходимость
Сходимость по вероятности
Сходимость с вер. 1
Сходимость в Lp

19. Характеристическая функция

Thursday, May 17, 2018 08:00

Характеристическая функция

Пусть ξ — случайная величина, $\mathcal{P}_\xi$ - распределение.

Характеристическая функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\boxed{f(t) = Ee^{it\xi}} = E\cos t\xi + i\sin t\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx}\, dF_\xi(x) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \boxed{\sum\limits_j e_j^{ita} p_j};\ p_j = P(\xi = a_j), \sum\limits_j p_j = 1 \\ \boxed{\int_{\mathbb{R}} e^{itx} p_\xi(x) dx} \end{array}\right.$$

Пример. *Нормальное распределение*

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2-2itx}{2}} dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2-2itx-t^2}{2}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} dx =$$

$$= \begin{bmatrix} y = x - it \\ dx = dy \end{bmatrix} = e^{-\frac{t^2}{2}} \int\limits_{-\infty-it}^{\infty-it} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{y^2}{2}} dy = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Основные свойства

1. Характеристическая функция корректно определена для любого распределения
2. $|f(t)| \le 1, \forall t; f(0) = 1$

   Доказательство

   $$|f(t)| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}| dF_\xi(x) = 1$$

   $$f(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot dF_\xi(x) = 1$$
3. $f(t)$ — непрерывна, равномерно непрерывна

   $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall t_1, t_2: |t_1 - t_2| \le \delta \Rightarrow |f(t_1) - f(t_2)| \le \varepsilon$

   Доказательство

$$|f(t+h)-f(t)| = \left|\int_R (e^{i(t+h)x} - e^{itx})dF_\xi(x)\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \left|e^{itx}\right| \cdot \left|e^{ihx} - 1\right| dF_\xi(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left|e^{ihx} - 1\right| dF_\xi(x) \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \blacksquare$$

4. $\eta = \alpha\xi + \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

   $f_\eta(t) = e^{it\beta} f_\xi(at)$

   Доказательство

   $f_\eta(t) = Ee^{i(\alpha\xi+\beta)t} = e^{it\beta}Ee^{i(\alpha\xi)t} = e^{it\beta}f_\xi(at)\blacksquare$

5. $E|\xi|^k < \infty$

   f_ξ дифференцируема k раз, $f^{(s)}(0) = i^s E\xi^s, s = 1, \dots, k$

   Доказательство

$$f'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx}\right)\Big|_t' dF_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ixe^{itx} dF_\xi(x) = i\int_{-\infty}^{\infty} xe^{itx} dF_\xi(x)\Bigg|_{t=0}$$

$$= iE\xi$$

   И так далее ■

5'. $E|\xi|^k < \infty$

$$f(t) = 1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{(it)^j}{j!} E\xi^j + O\left(|t|^k\right)$$

   Доказательство

   Ряд Маклорена:

$$f(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} t^j + O(|t|^k)$$

$$f^{(j)}(0) = i^j E\xi^j$$

$$f(t) = 1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{i^j t^j}{j!} E\xi^j + O\left(|t|^k\right)\blacksquare$$

6. Существует взаимно однозначное соответствие $\mathcal{P}_\xi \leftrightarrow f_\xi$

6'. Формула обращения

$$F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\left(e^{-itx_2} - e^{-itx_1}\right)}{-it} f(t)dt$$

   Если ξ — абсолютно непрерывна, то применимо обратное преобразование Фурье:

$$p_\xi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t)dt$$

7. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность случайных величин

(распределений)

ξ — случайная величина

$$\lim_{n\to\infty} f_{\xi}(t) \to f(t), \forall t \Leftrightarrow \xi_n \overset{w}{\Rightarrow} \xi \left(\Leftrightarrow F_{\xi_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} F_{\xi}(x)\right)$$

8. f_{ξ} — характеристическая функция некоторого распределения $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f_{\xi}$ — неотрицательно определенная функция
$$\sum_{i,j=1}^{n} f\left(t_i - t_j\right)\lambda_i \overline{\lambda_j} \geq 0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$$
9. Эрмитовость
$f_{\xi}(t) = \overline{f_{\xi}(-t)}$
Доказательство: $e^{itx} = \overline{e^{-itx}}$ ■
10. $f_{\xi}(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \xi$ — симметрична, т.е. $F_{\xi}(t) = 1 - F_{\xi}(-t); p_{\xi}(t) = p_{\xi}(-t)$
11. $f_{\xi}(t)$ — характеристическая функция $\Rightarrow \left|f_{\xi}(t)\right|^2$ — тоже характеристическая функция
12. $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины, $\eta = \xi_1 + \cdots + \xi_n$
$$f_{\eta}(t) = \prod_{i=1}^{n} f_{\xi_i}(t)$$
Доказательство
$$f_{\eta}(t) = Ee^{i(\xi_1 + \cdots + \xi_n)t} = E\left(e^{it\xi_1} \dots e^{it\xi_n}\right) \overset{\text{нез}}{\Longrightarrow} \prod_{j=1}^{n} Ee^{it\xi_j} \ ■$$

20. Центральная предельная теорема Леви

Thursday, May 17, 2018 09:00

<u>Центральная предельная теорема Леви</u>

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин.

Центральная предельная теорема

$\exists a, \sigma^2$ $(\sigma > 0)$:

$$\boxed{\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i - na}{\sqrt{n}\sigma} \overset{w}{\Rightarrow} \mathcal{N}(0,1)}$$

Центральная предельная теорема Леви

$\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, $\mathrm{E}\xi^2 < \infty$. Тогда

$$\boxed{z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i - na}{\sqrt{n}\sigma} \overset{w}{\Rightarrow} \mathcal{N}(0,1) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}$$

Аналогично:

$$\boxed{P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i - na}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x)}, \forall x \in \mathbb{R},$$

где $a = E\xi_1, \sigma^2 = D\xi_1$

Доказательство

$\eta_i = \xi_i - E\xi_1$

$E\eta_i = 0; D\eta_i = D\xi_1 = \sigma^2$

$$z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} \eta_i}{\sqrt{n}\sigma}$$

По свойству 5 характеристической функции:

$$f'_{\eta_j}(t)\Big|_{t=0} = \frac{E\eta_j}{i} = 0$$

$$f''_{\eta_j}(t)\Big|_{t=0} = \frac{E\eta_j^2}{i^2} = -E\eta_j^2 = -\sigma^2$$

$$f_{\eta_j}(t) = 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2} + o(t^2)$$

$$f_{z_n} = \prod_{j=1}^{n} f_{n_{\left(\frac{j}{\sqrt{n}\sigma}\right)}}(t) = \prod_{j=1}^{n} f_{\eta_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) = f_{\eta_1}^{n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) = e^{n\log f_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)} =$$

$$= e^{n\log\left(1-\frac{t^2}{2n\sigma^2}\cdot\sigma^2+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{n\log\left(1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{n\cdot\left(-\frac{t^2}{2n}\right)+o(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$\Rightarrow z_n \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$ ■

Теорема Муавра-Лапласа как частный случай теоремы Леви

Событие A может произойти в n независимых испытаний с вероятностью p. Пусть k — число успехов.
Тогда

$$\boxed{\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathcal{N}(0{,}1)}$$

И имеет место сходимость:

$$\boxed{P\left(x<\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}<y\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\Phi(y)-\Phi(x)=\int_x^y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}$$

Доказательство
k — сумма независимых одинаково распределённых случайных величин
$k=\xi_1+\dots+\xi_n$, причём
$E\xi_i=0\cdot q+1\cdot p=p$
$D\xi_i=E(\xi_i-E\xi_i)^2=(0-p)^2\cdot q+(1-p)^2\cdot p=p^2q+q^2p=pq(p+q)$
$=pq$
По центральной предельной теореме Леви с $n=k$ и $\sigma^2=pq$

$$z_n=\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathcal{N}(0{,}1)$$

$$P\left(x<\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}<y\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}P\left(\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}<y\right)-P\left(\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}<x\right)$$
$$=\Phi(y)-\Phi(x)\blacksquare$$

Доказательство закона больших чисел в форме Хинчина

Пусть $\xi=a$ с вероятностью 1 $\Rightarrow f_\xi(t)=e^{ita}$
$\xi_1,\xi_2,\dots$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин. $E|\xi|<\infty$
$E\xi_1=a\big(=E\xi_j,\forall j\big)$
$\xi_n\overset{w}{\Rightarrow}a\Leftrightarrow f_{s_n}(t)\to e^{ita}\ (*)$
Пусть $a=0$. Это не умаляет общности

$$s_n=\frac{\sum_{i=1}^n\xi_i}{n};f_{s_n}=\prod_{j=1}^n f_{\frac{\xi_j}{n}}(t)=\prod_{j=1}^n f_{\xi_j}\left(\frac{t}{n}\right)=f_{\xi_1}^n\left(\frac{t}{n}\right)$$

Таким образом,

$$f_{\xi_1}(u)=1+\frac{uE\xi_1}{i}+o(u)=1+o(u)$$
$$\log f_{\xi_1}(u)=o(u)$$
$$f_{s_n}(t)=e^{n\log f_{\xi_1}\left(\frac{t}{n}\right)}=e^{n\log\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=e^{n\cdot o\left(\frac{1}{n}\right)}$$
$$e^{n\cdot o\left(\frac{1}{n}\right)}\xrightarrow[n\to\infty]{}1=e^{ita}\Big|_{a=0}$$

По $(*)$ $\xi_n\overset{w}{\Rightarrow}a$ ■

21. Цепи Маркова

Thursday, May 24, 2018 08:00

Последовательность независимых случайных величин. Цепи Маркова

$(\Omega, \mathcal{T}, P)$ — вероятностный эксперимент

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — последовательность случайных величин

Цепь Маркова - последовательность дискретных случайных величин с не более чем счетным множеством значений E и удовлетворяющая **марковскму свойству**

$P(\xi_k \in A | \xi_1 = a_1, \dots, \xi_{k-1} = a_{k-1}) = P(\xi_k \in A | \xi_{k-1} = a_{k-1})$

$\forall a_1, \dots, a_{k-1} \in E; \forall A \in \mathfrak{B}_1; k \in \{2,3, \dots\}$

Т.е. значение в момент k зависит только значения в момент $k-1$.

Если $\xi_1, \dots, \xi_\eta$ — независимые величины, то они удовлевлетворяют марковскому свойству.

Конечномерное распределение

$$P(\xi_k = a_k, \xi_{k-1} = a_{k-1}, \dots, \xi_1 = a_1) = P(\xi_k = a_k | \xi_{k-1} = a_{k-1} \dots \xi_1 = a_1) \cdot$$
$$\cdot P(\xi_{k-1} = a_{k-1} | \xi_{k-2} = a_{k-2} \dots . \xi_1 = a_1) \cdot \dots \cdot P(\xi_2 = a_2 | \xi_1 = a_1) P(\xi_1 = a_1) =$$
$$= P(\xi_k = a_k | \xi_{k-1} = a_{k-1}) \cdot \dots \cdot P(\xi_2 = a_2 | \xi_1 = a_1) P(\xi_1 = a_1)$$

$\boxed{q_i = P(\xi_i = a_i)}$, $\boxed{E = \{a_i\}_{\{i \in T\}}}$, где T — не более чем счётное множество

$\boxed{p_{ij}(k) = P\left(\xi_{k+1} = a_j \middle| \xi_k = a_i\right)}$ — вероятность перехода из a_i в a_j на $k-$м шаге

$\begin{cases} q_i, i \in T \\ p_{ij}(k), i, j \in T, k \in \mathbb{N} \end{cases}$ — полностью задают распределение цепи Маркова

$\boxed{Q = \{q_i\}}$ — **начальное распределение цепи Маркова**

$\boxed{P(k) = \left\| p_{ij}(k) \right\|_{i,j \in T}}$ - **матрица вероятностей перехода**

$\boxed{P(k): \begin{cases} p_{ij}(k) \geq 0 \\ \sum_j p_{ij}(k) = 1, \forall i \in T, \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}}$ — **стохастическая матрица**

Для любого начального распределения $\forall Q: \sum_{i \in T} q_i = 1$, последовательности стохастических матриц $P(k), k \in \mathbb{N}$ $\exists \xi_1, \xi_2, \dots$ — цепь Маркова с множеством состояний T, для которой Q — начальное распределение, а $P(k)$ - матрица перехода.

Цепь Маркова называется **однородной**, если $\forall k: P(k) = P$, т.е. матрица вероятностей перехода на каждом шаге одна и та же. Обозначим для однородной цепи:

$\boxed{p_{ij}^{(k)} = P(\xi_{k+s} = j | \xi_s = i)}$ - вероятность перехода из i в j за k шагов

Уравнения Маркова

$$p_{ij}^{(k+s)} = \sum_{l \in T} p_{il}^{(k)} p_{lj}^{(s)}$$

В частности,

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{l \in T} p_{il} p_{lj}$$

Пусть $P^{(2)} = \left\| p_{ij}^{(2)} \right\|_{i,j \in \mathcal{T}}$. Получается, что $P^{(2)} = P^2 = P \cdot P$.

Аналогично $P^{(k)} = P^k$

Распределение ξ_k

$q_i^{(k)} = P(\xi_k = i)$

$Q^{(k)}$ – распределение $\xi_k = \{q_i\}_{i \in T}$ – вектор-столбец

Пример 1. Случайное блуждание

$\xi_1, \xi_2, \dots$ – последовательность испытаний Бернулли

$P(\xi_1 = 1) = p$

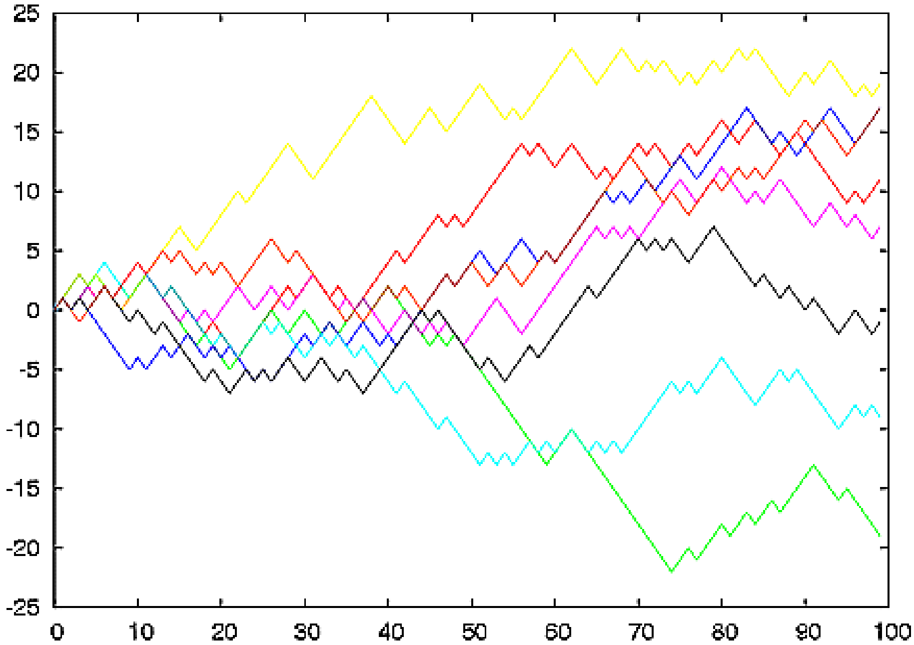
$\eta_i = 2\xi_i - 1$

$P(\eta_i = 1) = p = 1 - P(\eta = -1)$

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} \eta_i$$

$s_1, s_2, \dots$ – марковская последовательность, $E = \mathbb{Z}$

Такой процесс называется **случайным блужданием**



$$P(s_{k+1} = i | s_k = j_k, \dots, s_1 = j_1) = P(\eta_{k+1} + s_k = i | s_k = j_k, \dots, s_1 = j_1) =$$

$$= P(\eta_{k+1} = i - j_k | s_k = j_k, \dots, s_1 = j_1) \overset{\text{нез}}{\Longrightarrow} P(\eta_{k+1} = i - j_k) = \begin{cases} p, i = j_{k+1} \\ 1 - p, i = j_{k-1} \\ 0, else \end{cases}$$

$$P=\begin{pmatrix} \ddots & & \vdots & & 0 \\ & 0 & p & 0 & \\ \cdots & 1-p & 0 & p & \cdots \\ & 0 & 1-p & 0 & \\ 0 & & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

Классификация состояний однородной цепи Маркова. Стационарное распределение

Состояние j **достижимо** из i $(i \to j)$, если $\exists k: p_{ij}^{(k)} > 0$

Состояния i, j **сообщаются**, если $(i \to j) \wedge (j \to i)$

Состояние i **неосуществимо**, если $\exists j: i \to j$, но $j \nrightarrow i$

E допускает разложение $E = E_0 \cup E_1 \cup \cdots$

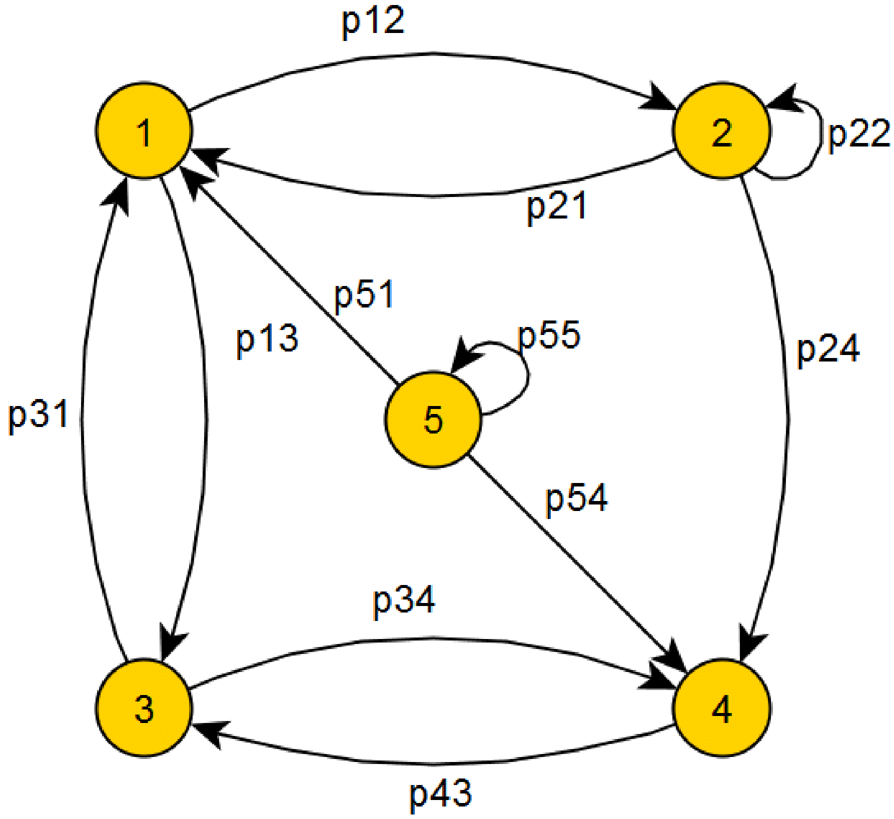
E_0 — все неосуществимые состояния

E_S — замкнутых класс сообщающихся состояний

$\forall i, j \in E_S, k \notin E_S: i \leftrightarrow j, i \nrightarrow k, j \nrightarrow k$

$E_r \cap E_l = \emptyset, r \neq l$

Пример. Конечная цепь



$$P=\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 & p_{24} & 0 \\ p_{31} & 0 & 0 & p_{34} & 0 \\ 0 & 0 & p_{43} & 0 & 0 \\ p_{51} & 0 & 0 & p_{54} & p_{55} \end{pmatrix}$$

$E_1 = \{1,2,3,4\}$

$E_0 = \{5\}$

Цепь **неприводима**, если все состояния сообщаются.
$E_i, i = 1, \dots$ - неприводимые цепи. Далее считается, что цепи Маркова неприводимы.

Период состояния $i = \gcd\left(k: p_{ii}^{(k)} > 0\right)$
Пусть $f_{ij}^{(k)} = P(\xi_{s+k} = i | \xi_{s+k-1} \neq i, \xi_{s+1} \neq i, \xi_s \neq i) -$ вероятность первого возвращения в состояние i на $k -$ м шаге. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \leq 1$$

Состояние **возвратное**, если $\sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} = 1$
Состояние **эргодическое**, если $\mu_i = \sum_{k=1}^{\infty} k f_{ii}^{(k)} < \infty -$ время возвращения конечно.
Состояние **возвратное нулевое,** если $\sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} = 1$, но $\mu_i = \infty$

Утверждение. В неприводимой однородной цепи Маркова все состояния однотипны, т.е:
- Состояние $i -$ возвратное $\Leftrightarrow \forall$ состояние возвратное
- Состояние i имеет период $T \Leftrightarrow \forall$ состояние имеет период T
- Состояние $i -$ эргодическое $\Leftrightarrow \forall$ состояние эргодическое

Другими словами, возвратность, периодичность и эргодичность - свойства класса состояний

Утверждение. В конечной цепи Маркова любое существенное состояние - эргодическое.

<u>Критерий возвратности</u>

I. Состояние $i -$ невозвратное $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} < \infty$
II. Состояние $i -$ возвратное нулевое, если $\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} = \infty, p_{ii}^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$
III. Во всех остальных случаях состояние - эргодическое

<u>Эргодическая теорема</u>

В неприводимой цепи Маркова с эргодическими состояниями (**эргодической цепи Маркова**):
$\exists \lim_{k\to\infty} p_{ij}^{(k)} -$ не зависит от i
p_j находится из системы уравнений

$$\begin{cases} p_j = \sum\limits_{s\in T} p_s \cdot p_{sj} \\ \sum\limits_{j} p_j = 1 \end{cases}$$

Обратное тоже верно: если $\exists p_j > 0$ - решение системы, то цепь Маркова - эргодическая. Более того, $p_j = \frac{1}{\mu_j}$

Набор $\{p_j\}_{j \in T}$ — **финальная вероятность** или **стационарное распределение цепи Маркова**

Если $Q = \{p_j\}_{j \in T}$ — распределения ξ_i совпадают.