0. Содержание

6 января 2018 г. 17:28

правыми частями.

25. Метод Гаусса и обращение матриц.
26. Метод Гаусса и вычисление определителей.
27. Метод Гаусса и разложение матрицы на множители. LU-разложение.
28. Метод Холецкого решения систем линейных алгебраических уравнений.
29. Метод прогонки решения систем линейных алгебраических уравнений.
30. Постановка задачи приближения функций.
31. Интерполяция обобщенными многочленами. Формулировка теоремы о существовании и единственности решения задачи интерполяции.
32. Полиномиальная интерполяция. Многочлен Лагранжа. Погрешность интерполяции.
33. Интерполяция с кратными узлами. Многочлен Эрмита. Погрешность интерполяции.
34. Минимизация погрешности интерполяции. Многочлены Чебышева.
35. Разделенные разности и их свойства. Интерполяция для неравноотстоящих узлов.
36. Конечные разности. Интерполяция для равноотстоящих узлов. Интерполяционный многочлен Ньютона.
37. Проблемы глобальной интерполяции. Понятие о кусочно-полиномиальной интерполяции.
38. Интерполяция сплайнами. Локальный сплайн.
39. Интерполяция сплайнами. Глобальные способы построения кубических сплайнов. Погрешность приближения кубическими сплайнами.
40. Численное интегрирование. Квадратурные формулы. Формула прямоугольников. Погрешность формулы.
41. Численное интегрирование. Квадратурные формулы. Формула трапеций. Погрешность формулы.
42. Численное интегрирование. Квадратурные формулы. Формула Симпсона. Погрешность формулы.
43. Апостериорная оценка погрешности.

I. Общий метод ВМ

4 января 2018 г. 14:29

Лектор: Лисс Александр Рудольфович

Рассмотрим некоторые понятия **функционального анализа**.
Функциональный анализ оперирует с абстрактными величинами.
Метрические пространства - множества объектов абстрактной природы, в которых введена **метрика** (расстояние между элементами).
$X -$ метрическое пространство
$x, y -$ элементы
$\rho(x, y) -$ метрика

1. $\rho(x, y) \geq 0$
   $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\forall x, y, z \in x$
   $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Пример 1
$X -$ пространство функций, непрерывных на $[a, b]$.
$f(x) -$ функция, непрерывная на $[a, b]$
$x = C[a, b]$
Метрика Коши: $\rho\big(x(t), y(t)\big) = \max|x(t) - y(t)|$

Пример 2
Пространство $L_p(a, b) -$ функций, Σ-руемых в степени p.
Метрика Лебека:

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

Окрестности
Пусть $\mathrm{X} -$ метрическое пространство. Есть $\rho(x, y)$
$\forall x \in X$ можно найти $\boldsymbol{\varepsilon} -$ **окрестность** - множество точек y, таких, что
$\rho(x, y) < \varepsilon$
$\{y \in X | \rho(x, y) < \varepsilon\}$

Операторы
Рассмотрим 2 пространства R_1, R_2. Пусть на R_1 задан оператор A:
$\forall x_1 \in R_1 : A(x_1) \in R_2$

Пример 1
$f(x) \in C[a, b] = R_1$
$g(x) \in C[a, b] = R_2$

$g(x) = \int f(x)dx$

$f(x) \to g(x)$

Пример 2

$\int_a^b f(x)dx = F \in R_1$

$f(x) \in C[a,b]$

$A(f(x)) = F -$ **функционал**, ставит в соответствие абстрактному элементу число.

Рассмотрим любую мет. задачу

$y = \Delta(x), x \in X, y \in Y$

$A -$ оператор

$y = \int e^{-x^2}dx$

$e^{-x^2} = C[a,b]$

$y = C[a,b]$

$A -$ оператор $\int \square$

Вместо пространств x, y рассматривают более удобные в вычислительном отношении $\bar{x}, \bar{y}, \bar{A}$

$\rho(y, \bar{y}) < \varepsilon$

$\int_a^b e^{-x^2}dx = y_0$

1 подход

$e^{-x^2} = p(x) -$ многочлен.

Аппроксимация алгебраическими многочленом с точностью ε.

Пространство непрерывных функция заменятся пространством многочленов

2 подход

Вместо интеграла рассмотреть сумму

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

$y^* = A^*(x^*) -$ **приближенное решение** $y = A(x)$.

$x \in R^n -$ Евклидово пространство

$x, y -$ точные значения

x^*, y^* — приближенные
$x \approx x^*, y \approx y^*$.

II. Источники и классификация погрешностей в вычислительных задачах

4 января 2018 г. 15:50

1. $f(x)$ — модель реального явления - приближенное математическое описание - **Погрешность модели**
2. **Погрешность измерения**

Погрешности, вызванные 1 и 2 - **неустранимые**

3. **Погрешность метода**
4. Вычислительная машина обладает конечноразрядной памятью - вычислительная погрешность

$\delta y^* = \delta_н y^* + \delta_м y^* + \delta_в y^*$
Неустранимая погрешность + погрешность метода + вычислительная погрешность
$\delta_м \approx \delta_н/10$
$\delta_в \approx \delta_м/10$

Элементы теории погрешности
a — точное значение
a^* — приближенное
$a - a^*$ — **погрешность** a^*
$|a - a^*| = \Delta(a^*)$ **абсолютная погрешность**
$\left|\frac{a-a^*}{a}\right| = \delta(a^*)$ — **относительная погрешность**

На практике обычно используются верхние границы
$\bar{\Delta}(a^*), \bar{\delta}(a^*)$
$$\bar{\delta}(a^*) = \frac{\Delta(a^*)}{|a|} \approx \frac{\bar{\Delta}(a^*)}{|a^*|}$$

Запись приближенных чисел
$a^* = \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_0 . \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m .$
$\alpha_i, \beta_j \in [0,9]$
Значащие цифры - все цифры, начиная с первой ненулевой.
Значащая цифра **верна**, если величина абсолютной погрешности не превосходит единицы разряда, соответствующей этой цифре
$|a - a^*| \le \Delta(a^*) \Leftrightarrow a = a^* \pm \bar{\Delta}(a^*)$
a^* и $\bar{\Delta}(a^*)$ должны содержать одинаковое количество знаков после запятой

Погрешность в вычислительных операциях
Теорема 1. $\Delta(a^* \pm b^*) \le \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$
Доказательство

$\Delta(a^* \pm b^*) = |(a \pm b) - (a^* \pm b^*)| = |(a - a^*) \pm (b - b^*)|$
$\leq |a - a^*| + |b - b^*| = \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$ ■
Следствие. $\bar{\Delta}(a^* \pm b^*) = \bar{\Delta}(a^*) + \bar{\Delta}(b^*)$

Теорема 2. Если <u>$\mathrm{sign}(a) = \mathrm{sign}(b)$, </u>то $\delta(a^* + b^*) \leq \delta_{max}$, где $\delta_{max} = \max\big(\delta(a^*), \delta(b^*)\big)$
$\delta(a^* - b^*) \leq \nu \cdot \delta_{max}$
$$\nu = \left|\frac{a+b}{a-b}\right|$$
При $a = b \Rightarrow \nu \gg 1$

Следствие
$\bar{\delta}(a^* + b^*) = \bar{\delta}_{max}$
$\bar{\delta}(a^* - b^*) = \nu \cdot \bar{\delta}_{max}$
$$\nu = \left|\frac{a+b}{a-b}\right|$$

Доказательство
$$\delta(a^* + b^*) = \frac{\Delta(a^* + b^*)}{|a+b|} = \frac{\Delta(a^*) + \Delta(b^*)}{|a+b|} = \frac{\delta(a^*)|a| + \delta(b^*)|b|}{|a+b|}$$
$$\leq \frac{\delta_{max}(|a| + |b|)}{|a+b|} \leq \delta_{max}$$
$$\delta(a^* - b^*) = \frac{\Delta(a^* - b^*)}{|a-b|} \leq \frac{\Delta(a^*) + \Delta(b^*)}{|a-b|} = \frac{\delta(a^*)|a| + \delta(b^*)|b|}{|a-b|}$$
$$\leq \frac{\delta_{max}(|a| + |b|)}{|a-b|} \leq \delta_{max} \cdot \left|\frac{a+b}{a-b}\right| \blacksquare$$

Теорема 3. $\delta(a^* * b^*) \leq \delta(a^*) + \delta(b^*) + \delta(a^*) * \delta(b^*)$
Доказательство
$$\delta(a^* * b^*) = \frac{\Delta(a^* * b^*)}{|ab|} = \frac{|ab - a^*b^*|}{|ab|}$$
$$= \frac{|ab - a^*b + a^*b - ab + ab - ab^* + ab^* - a^*b^*|}{|ab|}$$
$$= \frac{|(a - a^*)b + (b - b^*)a - (a - a^*)(b - b^*)|}{|ab|}$$
$$\leq \frac{|a - a^*||b| + |b - b^*||a| - |a - a^*||b - b^*|}{|ab|}$$
$$= \frac{|a - a^*|}{|a|} + \frac{|b - b^*|}{|b|} + \frac{|a - a^*||b - b^*|}{|ab|} = \delta(a^*) + \delta(b^*) + \delta(a^*)\delta(b^*) \blacksquare$$

Теорема 4. $\delta\left(\frac{a^*}{b^*}\right) \leq \frac{\delta(a^*) + \delta(b^*)}{1 - \delta(b^*)}$
Доказательство

$$|b^*| = |b - (b - b^*)| \geq |b| - |b - b^*| = |b|\left(1 - \frac{|b - b^*|}{|b|}\right)$$

$$= |b|\big(1 - \delta(b^*)\big)$$

$$\delta\left(\frac{a^*}{b^*}\right) = \frac{\Delta\left(\frac{a^*}{b^*}\right)}{\left|\frac{a}{b}\right|} = \frac{\left|\frac{a}{b} - \frac{a^*}{b^*}\right|}{\left|\frac{a}{b}\right|} = \frac{|ab^* + ab - ab - a^*b|}{|ab^*|}$$

$$\leq \frac{|ab^* - ab| + |ab - a^*b|}{|ab^*|} \leq \frac{|a||b - b^*| + |b||a - b^*|}{|a||b|\big(1 - \delta(b^*)\big)} = \frac{\delta(b^*) + \delta(a^*)}{1 - \delta(b^*)} \ \blacksquare$$

Теорема 5. Погрешность функции нескольких переменных.

Пусть $y = f(x)$ — задана на $[a, b]$. $x = (x_1 \dots x_n), x \in \mathbb{R}^m; y \in R^1$

$y^* = f^*(x)$ — приближенное значение f

Пусть $[x^*, x]$ — отрезок в пространстве $R^m, x \approx x^*, f(x^*) \approx f^*(x)$

$$y - y^* = f(x^*) - f^*(x) = \sum_{j=1}^{m} f'_{xj}(\bar{x}) * \Delta\big(x_j^*\big)$$

$\bar{x} \in [x^*, x]$

$$\Delta(y^*) = |y - y^*| \leq \sum_{j=1}^{m} f'_{xj}(\bar{x}) * \Delta\big(x_j^*\big) \leq \sum_{j=1}^{m} \max_{[a.b]}\big|f'_{xj}(\bar{x})\big| \cdot \Delta\big(x_j^*\big)$$

Так как $x \approx x^*$ и погрешность невелика, то

$$\Delta(y^*) \approx \sum_{j=1}^{m} f'_{xj}(\bar{x}) * \bar{\Delta}\big(x_j^*\big) \approx \sum_{j=1}^{m} f'_{xj}(x^*) * \bar{\Delta}\big(x_j^*\big)$$

$$\bar{\delta}(y^*) \approx \sum_{j=1}^{m} \frac{\big|f'_{xj}(x^*)\big|\big|x_j\big|}{|f(x)|} \cdot \frac{\bar{\Delta}\big(x_j^*\big)}{\big|x_j\big|} = \sum_{j=1}^{m} \nu_j \cdot \bar{\delta}\big(x_j^*\big)$$

III. Корректность и обусловленность вычислительных задач

18 сентября 2017 г. 13:52

Корректность вычислительных задач

$X -$ пространство исходных данных

$Y -$ пространство результатов

$A: X \Rightarrow Y -$ оператор

Вычислительная задача **корректна**, если выполнены три условия:

1. $\forall x \in X: \exists y \in Y -$ существует решение
2. Решение единственное
3. Решение устойчиво к малым погрешностям исходных данных.
   $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon)$
   $x \in \delta(\varepsilon) -$ δ-окрестность точки $x \in X: y \in \varepsilon$
   Устойчивость - при бесконечном повышении точности данных повышается точность результата

Примеры:

1. Квадратное уравнение
   $x^2 + bx + c = 0$
   $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$
   Исходные данные - $b, c \in \mathbb{R} = X$
   Решения $x_{1,2} \in \mathbb{R} = Y$
   - Решение существует, если $b^2 - 4c > 0$
     Если $b^2 - 4c < 0$, то может быть корректна, если $x_{1,2} \in \mathbb{C}$
   - Решение не единственно. Исправить можно так: $x = (x_1, x_2)$
   - Функция непрерывна - третье условие выполнено
2. Вычисление ранга матрицы
   $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : rang(A) = 1$
   $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} : rang(A) = 2$
   Отсутствует устойчивость- при бесконечно малом изменении результат увеличивается в два раза. Значит, задача некорректна
3. Интегрирование
   $f(x) \in C[a, b]; f^*(x) -$ приближенное решение $f(x)$.
   $$I = \int_a^b f(x)dx\,,$$
   $C[a, b] -$ пространство непрерывных функций на промежутке
   $$I^* = \int_a^b f^*(x)$$
   Погрешность функции: $\Delta(f^*) = \max_{[a,b]}|f(x) - f^*(x)|$

$$\Delta(I^*) = \left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f^*(x)dx\right| = \left|\int_a^b \big(f(x) - f^*(x)\big)dx\right| \le \int_a^b |(f(x) - f^*(x)|dx$$

$$\le \int_a^b \max_{[a,b]}|f(x) - f^*(x)|\, dx = (b-a)\Delta\big(f^*(x)\big)$$

$$\Delta(I^*) \le (b-a)\Delta\big(f^*(x)\big)$$

$$\Delta(I^*) < \varepsilon \to \Delta\big(f^*(x)\big) < \delta$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\Delta f^*(x) < \frac{\varepsilon}{b-a} = \delta$$

- задача корректна

4. Вычисление производной

$f(x) \in C[a,b]; x \in [a,b]$

$f^*(x) -$ приближенная $f(x)$

$f'(x) = u(x)$

$f^{*\prime}(x) = u^*(x)$

Придумаем пример функции $f^*(x)$

$$f^*(x) = f(x) + \alpha \sin\frac{x}{\alpha^2}; \alpha \to 0$$

$$\Delta(f^*) = \max_{[a,b]}|f(x) - f^*(x)| = \max\left|\alpha \sin\frac{x}{\alpha^2}\right| = |\alpha|$$

$$u(x) = f'(x) + \frac{\alpha}{\alpha^2}\cos\frac{x}{\alpha^2} = f(x) + \frac{1}{\alpha}\cos\frac{x}{\alpha^2}$$

$$|u(x) - u^*(x)| = \frac{1}{|\alpha|}\left|\cos\frac{x}{\alpha^2}\right|$$

$$\max_{[a,b]}|u(x) - u^*(x)| = \frac{1}{|\alpha|}$$

$$\Delta(u^*) = \frac{1}{|a|};\ \lim_{\alpha\to 0}\Delta(u^*) = \infty$$

- задача некорректна

Обусловленность вычислительной задачи

Устойчивость - предельное свойство. Погрешности исходных данных могут предполагаться сколь угодно малые. При реальном решении задачи сколь угодно малые погрешности задать невозможно.

$\Delta(x^*) -$ конечная величина, $\Delta(y^*) -$ погрешность результата. Вопрос - как они связаны?

Под **обусловленностью** задачи понимают чувствительность погрешности результата решения задачи к погрешности исходных данных.

Если удается установить количественную связь вида

$\Delta(y^*) \le \nu_\Delta \cdot \Delta(x^*)$

$\delta(y^*) \le \nu_\delta \cdot \delta(x^*)$,

То $\Delta, \delta -$ **абсолютное и относительное число обусловленности.** Задача **плохо обусловлена,** если $\nu_\Delta, \nu_\delta \gg 1$

Например, если $\delta(x^*) - 0{,}1\%$, а требуемая точность $\delta(y^*) - 0{,}5\%$, а $\nu_\delta = 10$ – задача плохо обусловлена. Если $\delta(x^*) = 0{,}0001\%$, а требуемая точность $\delta(y^*) = 0{,}5\%$, а $\nu_\delta = 100$ – задача хорошо обусловлена

Обусловленность задачи вычисления функции одной переменной

$y = f(x); x \approx x^* \Rightarrow y^* = f(x^*)$

$\Delta(x^*), \delta(x^*)$ – абсолютная и относительная погрешности аргумента,

$\Delta(f^*), \delta(f^*)$ – абсолютная и относительная погрешности результата

$f(x) = f(x^*) + f'(\bar{x})(x - x^*);\ \bar{x} \in [x, x^*]$

$f(x) - f(x^*) = f'(\bar{x})(x - x^*)$

$\Delta(f^*) = \max\limits_{[a,b]}|f(x) - f(x^*)| \le \max\limits_{[a,b]}|f'(\bar{x})|\,\Delta(x^*)$

$x \approx x^* \Rightarrow \Delta(f^*) \le |f'(x)|\Delta(x^*)$

Получается, что абсолютное число обусловленности $\nu_\Delta = |f'(x)|$

Тогда для относительной погрешности:

$$\delta(f^*) = \frac{\Delta(f^*)}{|f(x)|} \le \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\Delta(x^*) = \left|\frac{f'(x)|x|}{f(x)}\right|\delta(x^*)$$

$$\nu_\delta = \frac{|f'(x)||x|}{|f(x)|}$$

Примеры хорошо и плохо обусловленных задач

1. Экспонента

   $f(x) = e^x$

   $$\delta(f^*) = \frac{|e^x| \cdot x}{|e^x|}\delta(x^*) = |x|\delta(x^*)$$

   $\nu = |x|$

   - погрешность растет линейно

   Если взять $|x| \approx 100 \approx 10^2$

   $\nu_\delta \approx 10^2$, то теряется 1-2 значащие цифры

2. $f(x) = \sin x$

   $$\nu_\delta = \left|\frac{\cos x}{\sin x} \cdot x\right| = |x \cot x|$$

   Для того, чтобы обусловить задачу, необходимо задать определенный период.

3. Вычисление определенного интеграла

$f(x) \in C[a,b]$

$$I = \int_a^b f(x)dx\,;\; I^* = \int_a^b f^*(x)dx$$

$$\Delta(I^*) = |I - I^*|; \delta(I^*) = \frac{|I - I^*|}{|I|}$$

$$\Delta(f^*) = \max_{[a,b]}|f(x) - f(x^*)|\,; \delta(f^*) = \max_{[a,b]}\frac{|f(x) - f(x^*)|}{|f(x)|}$$

$$\Delta(I^*) = \left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f^*(x)dx\right| = \left|\int_a^b \big(f(x) - f^*(x)\big)dx\right| \leq \int_a^b |(f(x) - f^*(x)|dx$$

$$\leq \int_a^b \max_{[a,b]}|f(x) - f^*(x)|\,dx = (b-a)\Delta\big(f^*(x)\big) \Rightarrow \boldsymbol{\nu_\Delta = b - a}$$

$$\delta(I^*) = \frac{|I - I^*|}{|I|} = \frac{\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f^*(x)dx\right|}{\left|\int_a^b f(x)dx\right|} \leq \frac{\int_a^b |f(x) - f^*(x)|\,dx}{\left|\int_a^b f(x)dx\right|}$$

$$= \frac{\int_a^b \frac{|f(x) - f^*(x)|}{|f(x)|}|f(x)|\,dx}{\left|\int_a^b f(x)dx\right|} \leq \frac{\int_a^b \delta(f^*)|f(x)|\,dx}{\int_a^b f(x)dx} = \frac{\int_a^b |f(x)|\,dx}{\int_a^b f(x)dx}\delta(f^*)$$

$$\boldsymbol{\nu_\delta = \frac{\int_a^b |f(x)|\,dx}{\int_a^b f(x)dx}}$$

Получается, что если $f(x)$ – знакопостоянаяя, то $\nu_\delta = 1$ и задача хорошо обусловлена. Плохая обусловленность ($\nu_\delta \gg 1$) будет в случае сисльно осцилляции функции.

IV. Решение нелинейных уравнений. Метод бисекции

4 января 2018 г. 16:41

Корректность и обусловленность вычислительных алгоритмов
Вычислительный алгоритм называется **хорошо обусловленным**, если малым погрешностям исходных данных соответствуют малые погрешности вычисления.
$\varepsilon_{\text{м}} = \delta(x^*)$ — относительная погрешность представления чисел в компьютере.
ν_δ — число обусловленности алгоритма, $\nu_\delta * \varepsilon_{\text{м}}$ — относительная погрешность результата
$\overline{\Delta}(y^*) \le \nu_\Delta \overline{\Delta}(x^*)$
$\bar{\delta}(y^*) \le \nu_\delta \bar{\delta}(x^*)$

Решение нелинейных уравнений
$f(x) = 0$
Решение нелинейного уравнения - нахождение корней: $\bar{x}$: $f(\bar{x}) = 0$
Корень $\bar{x}$ — **простой,** если $f'(x) \ne 0$.
Корень $\bar{x}$ — **кратный** (кратности k), если
$f(\bar{x}) = f'(\bar{x}) = \cdots = f^{(k-1)}(\bar{x}) = 0; f^{(k)}(\bar{x}) \ne 0$

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$
Для этого уравнения существуют формулы нахождения корней при $n = 2,3,4$. При $n \ge 5$ — формулы не существуют. Задача нахождения корня решается численно.

Этапы решения

1. Локализация корней.
   Для каждого корня нужно указать такой отрезок, чтобы в него попадал только этот корень.
   $x_i \in [a_i, b_i], i = 1,2,3, \dots$
   Теорема. $f(x) \in C[a,b]; f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists \bar{x} \in [a,b]: f(\bar{x}) = 0$
   Способы локализации:
   a. Графический
   b. Табличный
      $y_i = f(x_i); i = 1,2,3, \dots$
      Выделяются отрезки, где $f(x_{i-1}) \cdot f(x_i) < 0$. Тогда $[x_{i-1}, x_i)$ - отрезок локализации
2. Итерационное уточнение положения корня
   В результате применения определенного итерационного алгоритма получается итерационная последовательность $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$. Если $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = \bar{x}$, то последовательность сходится к значению $\bar{x}$

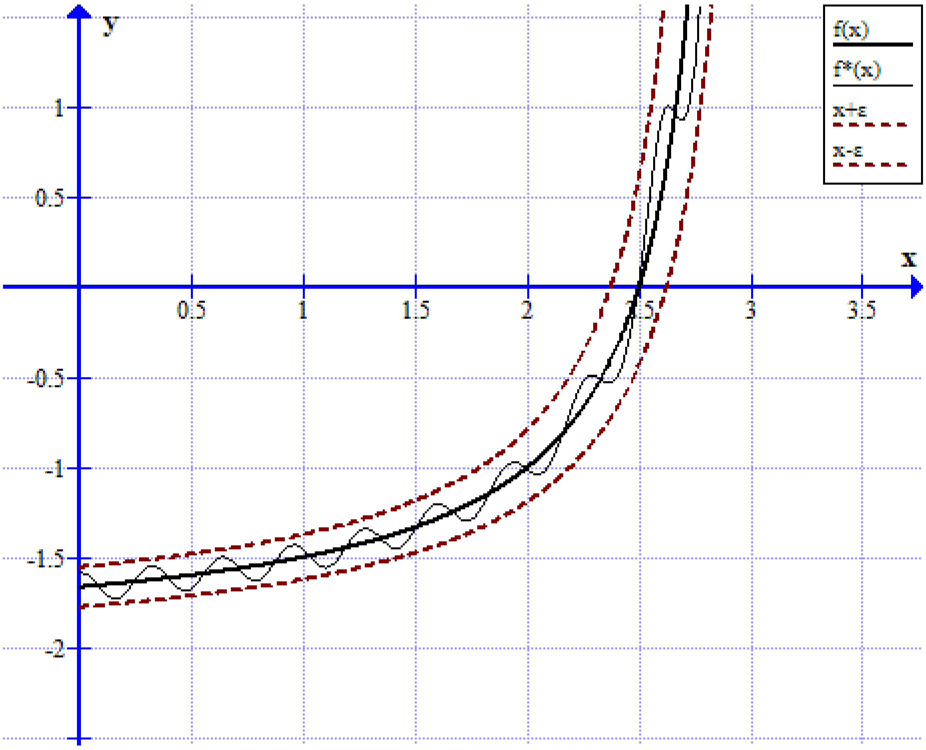
Скорость сходимости итерационного алгоритма
Говорят, что итерационный процесс **сходится со скоростью геометрической прогрессии** в некотором корне, если $\forall x^{(n)}: \left|x^{(n)} - \bar{x}\right| < c_0 q^{(n)}; q < 1$.
q — **знаменатель** геометрической прогрессии, c_0 — константа.

Пусть в некоторой σ — окрестности корня имеют место соотношения
$\left|x^{(n+1)} - \bar{x}\right| < c \cdot \left|x^{(n)} - \bar{x}\right|^p$
$c > 0$ — константа.
p — **порядок сходимости**
$p = 1 \Rightarrow$ **линейная** скорость
$p = 2 \Rightarrow$ **квадратичная** и т.д.
p не обязательно целое.

Теорема. Пусть в некоторой окрестности корня имеют место соотношения $\left|x^{(n+1)} - \bar{x}\right| < c \cdot \left|x^{(n)} - \bar{x}\right|$. Тогда итерационная последовательность $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$:
1. Не выходит за пределы σ — окрестности $\forall x^{(0)} \in (x - \sigma, x + \sigma)$
2. Итерационная последовательность сходится у корня со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q = c$
3. Имеет место соотношение $\left|x^{(n)} - \bar{x}\right| \leq q^n \cdot \left|x^{(0)} - \bar{x}\right|$

Доказательство
База: $n = 0$: $\left|x^{(0)} - \bar{x}\right| \leq q^0 \left|x^{(0)} - \bar{x}\right|$
Переход: пусть верно для $m - 1$
$\left|x^{(m-1)} - \bar{x}\right| \leq q^{m-1}\left(x^{(0)} - \bar{x}\right)$
Для m:
$\left|x^{(m)} - \bar{x}\right| \leq c \cdot \left|x^{(m-1)} - \bar{x}\right| \leq q^m (x^{(0)} - \bar{x})$
Из 3 следуют 1 и 2■

Обусловленность задачи вычисления корня



$f(\bar{x}) = 0$; $\bar{x} -$ простой корень. $f^*(\bar{x}^*) = 0$.
В некоторой окрестности корня $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ верно соотношение $|f(x) - f^*(x)| \le \bar{\Delta}(f^*)$, где $\bar{\Delta}(f^*)$ — верхняя граница погрешности.
$[\bar{x} - \bar{\varepsilon}, \bar{x} + \bar{\varepsilon}]$ — интервал неопределенности

$$\bar{\Delta}(f^*) = \max_{[a,b]}\big(f(x) - f^*(x)\big)$$

Найдем радиус интервала ε.
$f(\bar{x}) = 0 \Rightarrow x \in (\bar{x} - \bar{\varepsilon}, \bar{x} + \bar{\varepsilon}): |f(x)| < \bar{\Delta}$
В окрестности корня верно следующее:
$f(x) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) = f'(\bar{x})(x - \bar{x})$
$|f(x)| < \bar{\Delta} \Rightarrow |f'(\bar{x})(x - \bar{x})| < \bar{\Delta}$

$$\bar{x} - \frac{\bar{\Delta}}{|f'(\bar{x})|} < x < \bar{x} + \frac{\bar{\Delta}}{|f'(\bar{x})|}$$

Получается, что верхняя граница погрешности $\bar{x}$ равна $\bar{\varepsilon} = \frac{\bar{\Delta}}{|f'(\bar{x})|}$, а верхняя граница погрешности$f^*(x)$ равна $\bar{\Delta}$. Тогда число обусловленности:

$$\bar{\varepsilon} = \nu_\Delta \bar{\Delta} \Rightarrow \boldsymbol{\nu_\Delta = \frac{1}{|f'(\bar{x})|}}$$

Пусть $f(\bar{x}) = 0 - m$ —кратный корень, т.е. $f(\bar{x}) = f'(\bar{x}) = \cdots = f^{(m-1)}(x) = 0; f^{(m)}(x) \neq 0$.
Аналогично, есть окрестность $f(x) < \bar{\Delta}$.
Так как первые $m - 1$ производных равны 0, то разложение $f(x)$ в ряд Тейлора около $\bar{x}$ даст

$$f(x) \approx \frac{f^{(m)}(\bar{x})}{m!}(x - \bar{x})^m$$

$$|f(x)| < \bar{\Delta} \Rightarrow \left|\frac{f^{(m)}(\bar{x})}{m!}(x - \bar{x})^m\right| < \bar{\Delta}$$

$$\bar{x} - \left|\frac{m!}{f^{(m)}(\bar{x})}\right|^{\frac{1}{m}} \Delta^{-\frac{1}{m}} < x < \bar{x} + \left|\frac{m!}{f^{(m)}(\bar{x})}\right|^{\frac{1}{m}} \Delta^{-\frac{1}{m}}$$

$$\boldsymbol{\nu_\Delta = \left|\frac{m!}{f^{(m)}(\bar{x})}\right|^{\frac{1}{m}}}$$

Метод бисекции

Если найдет отрезок $[a, b]$, такой что для $f(x) \in C[a, b]$: $f(a) \cdot f(b) < 0$, то по теореме $\exists c \in (a, b)$: $f(c) = 0$.

$\left[a^{(0)}, b^{(0)}\right] = [a, b]$ — начальный промежуток.

ε — заданная точность

Один шаг итерационного процесса выглядит так: есть промежуток $a^{(n)}, b^{(n)}$.

$x^{(n)} = \frac{a^{(n)} + b^{(n)}}{2}$ — промежуточный результат.

Если $f\left(x^{(n)}\right) = 0$ или $\left(b^{(n)} - a^{(n)}\right) < 2\varepsilon$, то алгоритм завершается.

$f\left(a^{(n)}\right) \cdot f\left(x^{(n)}\right) < 0 \Rightarrow \left[a^{(n+1)}, b^{(n+1)}\right] \coloneqq \left[a^{(n)}, x^{(n)}\right]$.

$f\left(x^{(n)}\right) \cdot f\left(b^{(n)}\right) < 0 \Rightarrow \left[a^{(n+1)}, b^{(n+1)}\right] \coloneqq \left[x^{(n)}, b^{n}\right]$.

Оценим скорость сходимости алгоритма. Погрешность на этапе n:

$$\left|x^{(n)} - \bar{x}\right| \le \frac{b - a}{2^{n+1}} = q^{n+1}(b - a) \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

Значит, алгоритм сходится со скоростью геометрической прогрессии.

V. Метод простой итерации

2 октября 2017 г. 13:58

Метод простой итерации.

Задача $f(x) = 0$ заменяется задачей $x = \varphi(x)$ - **итерационная функция**.

Например $\varphi(x) = x - a \cdot f(x)$

$a = const$

$x = x - a \cdot f(x) \Rightarrow a \cdot f(x) = 0$

$[a, b]$ — отрезок локализации корня.

$x^{(0)} \in [a, b]$ - начальное приближение

$x^{(1)} = \varphi\left(x^{(0)}\right)$

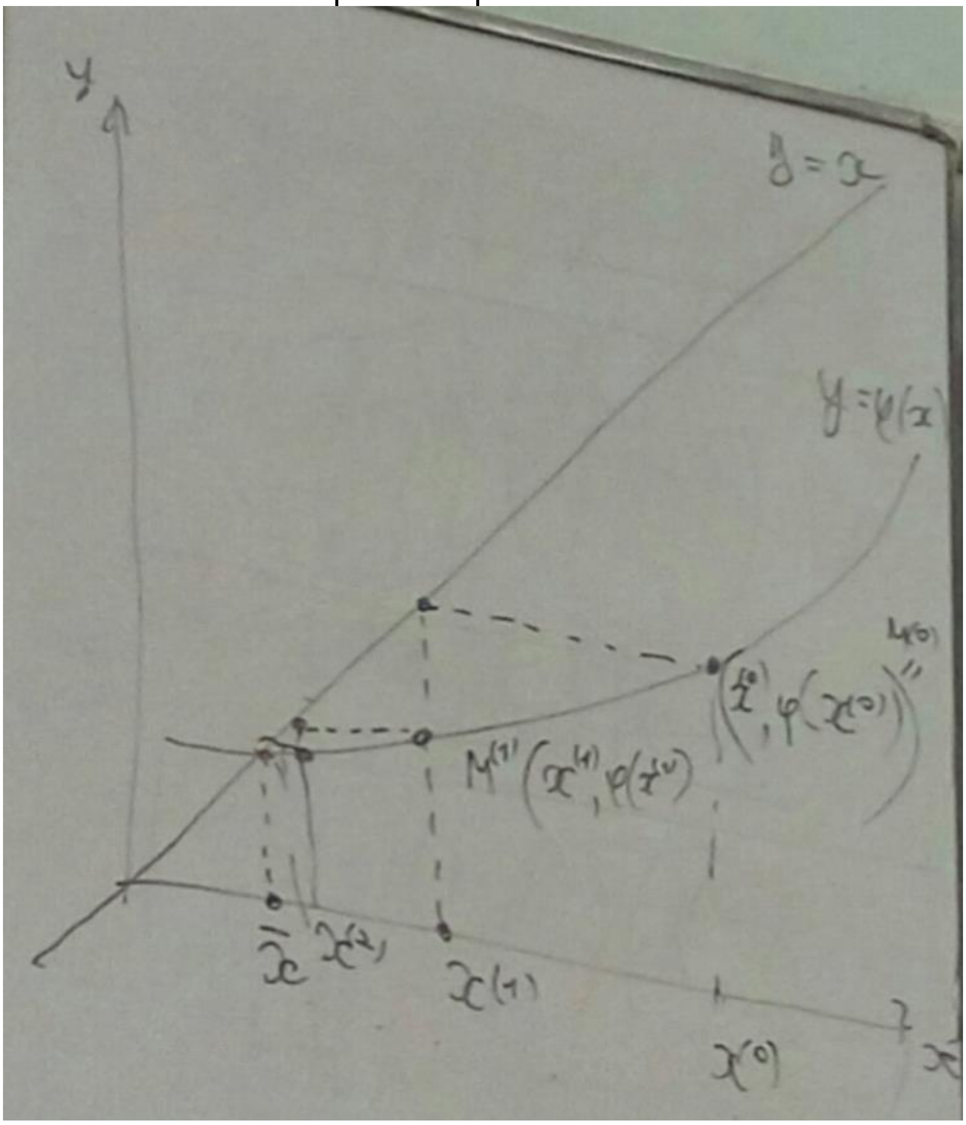
$x^{(2)} = \varphi\left(x^{(1)}\right)$

...

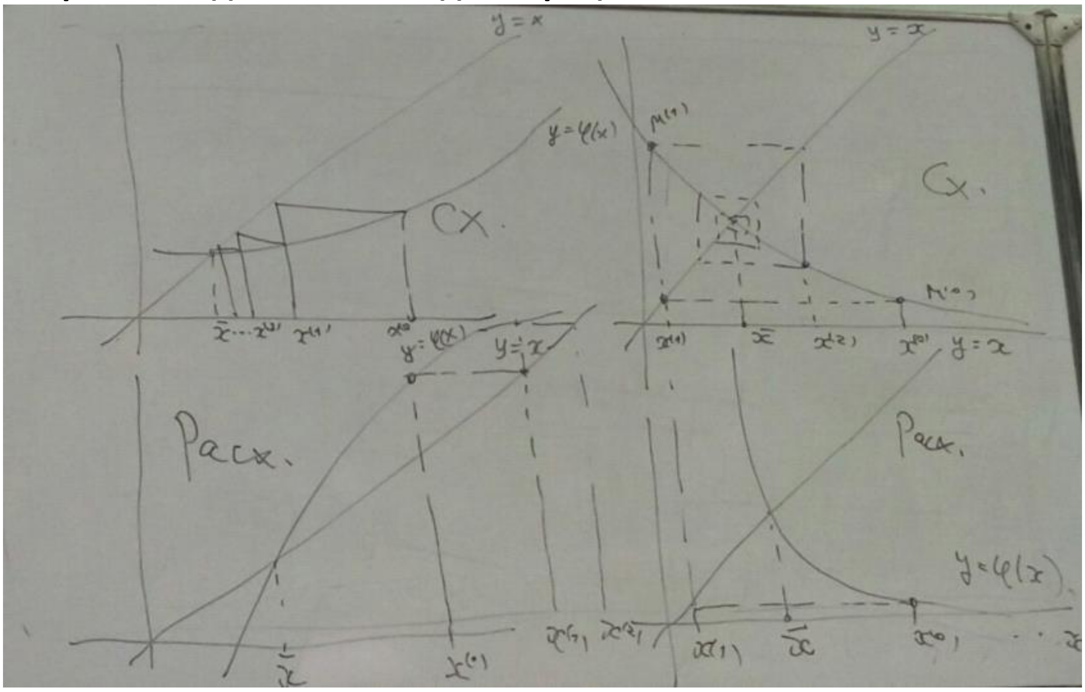
$x^{(n)} = \varphi\left(x^{(n-1)}\right)$

Если $\exists \lim_{n\to\infty} x^{(n)} = \bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \varphi(\bar{x}); f(\bar{x}) = 0$

Условие окончания: $\left|x^{(n)} - \bar{x}\right| < \varepsilon$



Скорость сходимости метода итераций



Графически сходимость итерационного процесса определяется модулем производной функции в $\varphi'(x)$ в локализации.

Теорема I. Пусть в некоторой $\sigma -$ окрестности корня верно $[\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma]$: $|\varphi'(x)| \le q < 1 \Rightarrow \forall x^{(n)} \in [\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma]$

Тогда:

1) Итерационная последовательность не выходит за пределы окрестности $\forall x^{(n)} \in [\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma]$
2) Метод простой итерации сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q.
3) Имеет место соотношение $\left|x^{(n)}-\bar{x}\right| \le q^n \cdot \left|x^{(0)}-\bar{x}\right|$ - **априорная оценка погрешности**

Доказательство

Из 3 следуют 1 и 2.

$x^{(n)}-\bar{x} = \varphi\left(x^{(n-1)}\right)-\varphi(\bar{x}) = \varphi'\left(\xi^{(n-1)}\right)\cdot\left(x^{(n-1)}-\bar{x}\right)$

$\xi^{(n-1)} -$ точка между $x^{(n-1)}, \bar{x}$

$\left|x^{(n)}-\bar{x}\right| = \left|\varphi'\left(\xi^{(n-1)}\right)\right|\cdot\left|x^{(n-1)}-\bar{x}\right| = \alpha^{(n)}\cdot\left|x^{(n-1)}-\bar{x}\right| \le q\left|x^{(n-1)}-\bar{x}\right|$

$\left|\alpha^{(n)}\right| < 1$

$\left|\alpha^{(n)}\right| = \left|\varphi'\left(\xi^{(n-1)}\right)\right| \le q < 1$

По теореме 1 предыдущей лекции из геометрической сходимости следует линейная, и наоборот.

Теорема 2 (Апостериорная оценка погрешности)

В условии теоремы 1 имеет место соотношение

$$\left|x^{(n)}-\bar{x}\right| < \frac{q}{1-q}\left|x^{(n)}-x^{(n-1)}\right|$$

Отсюда следует практический критерий остановки

$$\left|x^{(n)}-x^{(n-1)}\right| \le \frac{1-q}{q}\cdot\varepsilon$$

Доказательство

$x^{(n)} - \bar{x} = \varphi\left(x^{(n-1)}\right) - \varphi(\bar{x}) = \varphi'\left(\xi^{(n-1)}\right)\left(x^{(n-1)} - \bar{x}\right)$

$= \alpha^{(n)}\left(x^{(n-1)} + x^{(n)} - x^{(n)} - \bar{x}\right) = \alpha^{(n)}\left(x^{(n-1)} - x^{(n)}\right) + \alpha^{(n)}\left(x^{(n)} - \bar{x}\right)$

$(1 - \alpha^{n})\left(x^{(n)} - \bar{x}\right) = \alpha^{(n)}\left(x^{(n-1)} - \bar{x}\right)$

$x^{(n)} - \bar{x} = \dfrac{\alpha^{(n)}}{1 - \alpha^{(n)}}\left(x^{(n-1)} - \bar{x}\right)$

$\left|x^{(n)} - \bar{x}\right| = \dfrac{\left|\alpha^{(n)}\right|}{\left|1 - \alpha^{(n)}\right|}\left|x^{(n-1)} - \bar{x}\right|$

$\left|\alpha^{(n)}\right| \le q \Rightarrow \left|1 - \alpha^{(n)}\right| \ge 1 - \left|\alpha^{(n)}\right| \ge 1 - q$

$\left|x^{(n)} - \bar{x}\right| \le \dfrac{q}{1 - q}\left|x^{(n-1)} - \bar{x}\right| \blacksquare$

Оценим q в процессе вычисления

$\left|x^{(n)} - \bar{x}\right| \le \dfrac{\left|\alpha^{(n)}\right|}{\left|1 - \alpha^{(n)}\right|}\left|x^{(n-1)} - \bar{x}\right|$

$\alpha^{(n)} = \varphi'\left(\xi^{(n-1)}\right)$

$\xi^{(n-1)}$ – точка между $x^{(n-1)}, \bar{x}$

Вблизи корня $\varphi'(x) \approx \varphi(\bar{x})$

На $n -$ ном шаге $x^{(n)}, x^{(n-1)}, x^{(n-2)}$.

$x^{(n)} - x^{(n-1)} = \varphi\left(x^{(n-1)}\right) - \varphi\left(x^{(n-2)}\right) = \varphi\left(\xi^{(n-1)}\right)\left(x^{(n-1)} - x^{(n-2)}\right)$

$= \alpha^{(n-1)}\left(x^{(n-1)} - x^{(n-2)}\right)$

Приведение уравнения $\boldsymbol{f(x) = 0}$ к виду, удобному для итерации

Способы итерации различаются друг от друга выбором $\varphi(x)$.

$\varphi(x) = x - \alpha \cdot f(x)$

Задача - выбрать α для обеспечения наибольшей скорости сходимости.

Предположим, что $f'(x) > 0$ на интервале локализации.

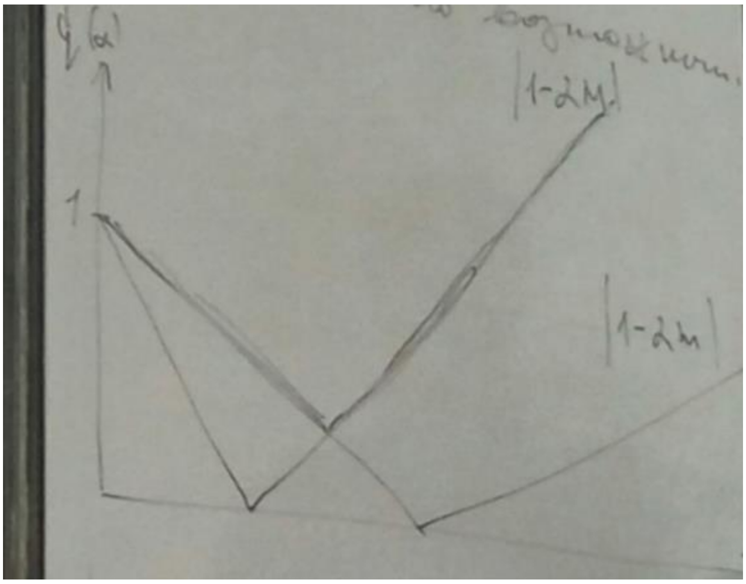
Если $f'(x) < 0$, то берем $-f(x)$.

Тогда $\exists M, m = const: m < f'(x) < M$

Для $\varphi(x) = x - \alpha \cdot f(x)$ имеют место соотношения

$1 - \alpha\mathrm{M} \le |\varphi'(x)| \le 1 - \alpha m$

Берем α так, чтобы q было минимальным.



$$1 - \alpha M = \alpha m - 1 \Rightarrow \alpha_{\text{опт}} = \frac{2}{M + m}$$

$$q_{\text{опт}} = 1 - a_{\text{опт}} m = 1 - \frac{2m}{m + M} = \frac{M - m}{M + m}$$

Обусловленность метода простой итерации

$$f(x) = 0; \nu_\Delta = \frac{1}{f'(\bar{x})}$$

$$f^*(x) = 0 \Rightarrow \overline{\Delta}(\bar{x}^*) \le \nu_\Delta \cdot \overline{\Delta}(\alpha^*)$$

В методе простой итерации задача другая. Пусть $\varphi^*(x)$ — функция с погрешностью

$$\overline{\Delta}(x^*) \le \widetilde{\nu_\Delta} \overline{\Delta}\big(\varphi^*(x)\big)$$

Вместо $x = \varphi(x)$ рассмотрим $F(x) = x - \varphi(x) = 0$

$$\widetilde{\nu_\Delta} = \frac{1}{|F'(\bar{x})|} = \frac{1}{|1 - \varphi'(x)|} < \frac{1}{1 - q}$$

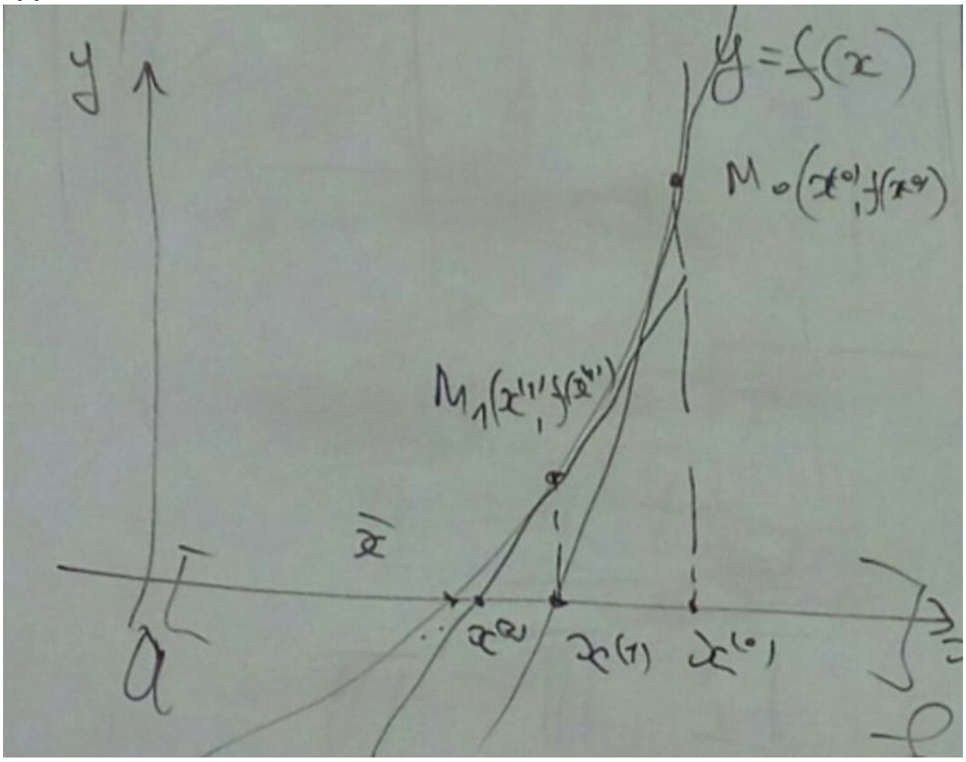
VI. Метод Ньютона, хорд, секущих

9 октября 2017 г. 13:49

Метод Ньютона

Имеет квадратичную скорость сходимости.

1. **Метод касательных**



   1. Выбирает начальное приближение $M(x_0, f(x_0))$
   2. В точке проводится касательная
      $y = f(x^{(n)}) + f'(x^{(n)})(x - x^{(n)})$
   3. Точка пересечения касательной и оси абсцисс - точка $x^{(n+1)}$.
      $x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}$
   4. На шаг 2

2. **Метод линеаризации**

   $y = f(x^{(n)}) + f'(x^{(n)})(x - x^{(n)}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x^{(n)})^2$

   Где $\xi -$ точка между $x, x^{(n)}$

   $f(x^{(n)}) + f'(x^{(n)})(x - x^{(n)}) = 0$

Теорема 1. Об априорной оценке погрешности

Пусть $\bar{x} -$ простой корень. Пусть $f(x)$ дважды дифференциируема. Тогда существует такая малая $\sigma -$ окрестность корня $\bar{x}$, для которой при любом начальном x_0 итерационная последовательность не выходит за пределы окрестности и имеет место соотношение

$|x^{(n)} - \bar{x}| \leq c|x^{(n-1)} - \bar{x}|^2, c = \frac{1}{\sigma}$

Доказательство: рассмотрим два соотношения

1) $0 = f\left(x^{(n)}\right) + f'\left(x^{(n)}\right)\left(x^{(n+1)} - x^{(n)}\right)$

2) $y = f\left(x^{(n)}\right) + f'\left(x^{(n)}\right)\left(x - x^{(n)}\right) + \frac{f''(\xi)}{2}\left(x - x^{(n)}\right)^2; \xi \in \left(x, x^{(n)}\right)$

Так как корень простой, то найдется такой отрезок длиной δ_0, что:
$\bar{x} -$ простой $\Rightarrow f'(\bar{x}) \neq 0: x \in [a, b]$
$\exists f'(x), \exists f''(x) \Rightarrow \exists \alpha, \beta > 0: 0 < \alpha \leq |f'(x)|; |f''(x)| \leq \beta$
Возьмем $\sigma = \min\left\{\delta_0, \frac{2\alpha}{\beta}\right\}$
В соотношение 1) возьмем $x = \bar{x}$

1) $0 = f\left(x^{(n)}\right) + f'\left(x^{(n)}\right)\left(\bar{x} - x^{(n)}\right) + \frac{f''(\xi)}{2}\left(\bar{x} - x^{(n)}\right)^2$

Из 2) вычтем 1)

$$0 = f'(x^{(n)}\left(\bar{x} - x^{(n+1)}\right) + \frac{f''(\xi)}{2}\left(\bar{x} - x^{(n)}\right)^2$$

$$f\left(x^{(n)}\right)\left(x^{(n+1)} - \bar{x}\right) = \frac{f''(\xi)}{2}\left(x^{(n)} - \bar{x}\right)^2$$

$$\left|f'\left(x^{(n)}\right)\right| \cdot \left|x^{(n+1)} - \bar{x}\right| = \frac{|f''(\xi)|}{2}\left|x^{(n)} - \bar{x}\right|^2$$

$$\alpha\left|x^{(n+1)} - \bar{x}\right| \leq \frac{\beta}{2}\left|x^{(n)} - \bar{x}\right|^2$$

$$\left|x^{(n+1)} - \bar{x}\right| \leq \frac{\beta}{2\alpha}\left|x^{(n)} - \bar{x}\right|^2 \blacksquare$$

Теорема 2. Об апостериорной оценке погрешности

В условии теоремы 1 при начальном приближении x_0: $\left|x^{(n)} - \bar{x}\right| < \frac{\sigma}{2}$
имеет место соотношение:
$\left|x^{(n)} - \bar{x}\right| \leq \left|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right|$
Можно задать $\varepsilon > 0$, и условие окончания будет $\left|x^{(n)} - x^{(n+1)}\right| < \varepsilon$
Доказательство:
В силу теоремы 1 итерационная последовательность не выходит за пределы окрестности, в которой находится начальное приближение:
$\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{2};\ \bar{x} + \frac{\sigma}{2}\right) \Rightarrow |x^{n-1} - \bar{x}| \leq \frac{\sigma}{2}$
В силу теоремы 1

$$\left|x^{(n)} - \bar{x}\right| \leq \sigma^{-1}\left|x^{(n-1)} - \bar{x}\right|^2$$

$$2\left|\mathrm{x}^{(\mathrm{n})} - \bar{x}\right| \leq \frac{2}{\sigma}\left|x^{(n-1)} - \bar{x}\right|^2 \leq \frac{2}{\sigma}\left|x^{(n-1)} - \bar{x}\right| * \frac{\sigma}{2}$$

$$= \left|x^{(n-1)} + x^{(n)} - x^{(n)} - \bar{x}\right| \leq \left|x^{(n-1)} - x^{(n)}\right| + \left|x^{(n)} - \bar{x}\right| \Rightarrow$$

$$\left|x^{(n)} - \bar{x}\right| \leq \left|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right| \blacksquare$$

Недостатки метода Ньютона

1. Необходимость вычисления на каждом шаге производной $f'\left(x^{(n)}\right)$
2. Метод обладает только локальной сходимостью

Теорема 3 (Без доказательства).
В условии теоремы 1 пусть $f'(x), f''(x)$ знакопостоянны на отрезке локализации корня. Тогда итерационный процесс метода Ньютона сходится монотонно с той стороны отрезка локализации, где выполняеся соотношение $f(x) \cdot f''(x) > 0$
В методичке ошибка - $f'(x)$.

Модификации метода Ньютона

1. **Упрощенный метод Ньютона**. Не вычисляет производную заново, а проводит прямую, параллельную первой касательной.
   $$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f\left(x^{(n)}\right)}{f'(x^{(0)})}$$
   Получается фактически метод простой итерации. Отличается от последнего тем, что вместо $\frac{M+m}{2}$ берется $f'(x_0)$. Сходимость линейная.
2. **Метод хорд.** Основан на замене $f'\left(x^{(n)}\right)$ численной производной:
   $$\frac{f\left(x^{(n)}\right) - f(c)}{x^{(n)} - c}$$
   Где $c -$ фиксированная точка на оси обсцисс.
   $$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f\left(x^{(n)}\right)}{\left(\frac{f(x^{(n)}) - f(c)}{x^{(n)} - c}\right)}$$
3. **Метод секущих**
   Начальное приближение - две точки $x^{(0)}, x^{(1)}$. По этим двум точках проводится секущая. Точка пересечения с осью абсцисс - $x^{(2)}$. Следующая секующая проводится через $x^{(1)}, x^{(2)}$.
   $$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{\left(x^{(n)} - x^{(n-1)}\right)}{f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)})} \cdot f\left(x^{(n)}\right)$$
   Метод обладает порядком сходимости $1{,}68$, но не требует вычисления производной, поэтому две итерации метода секущих примерно равны одной итерациям метода Ньютона.
   Однако метод очень чувствителен к выбору начальных приближений $x^{(0)}, x^{(1)}$.

VII. Решение СЛАУ

16 октября 2017 г. 13:55

Вычислительные методы линейной алгебры

Основные задачи

- Решение систем линейных алгебраических уравнений
- Вычисление определителей
- Вычисление обратных матриц
- Нахождение собственных значений, собственных векторов

Решение систем линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mm}x_m = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$Ax = b$

Если $\det(A) \neq 0$, то существует единственное решение системы $Ax = b$, т.е. задача корректна

Пусть x^* - приближенное решение системы, а x — точное решение (неизвестное).

$e = x - x^*$ — **погрешность решения**

$r = b - Ax^*$ — **невязка решения**

$$r = b - Ax^* = Ax - Ax^* = A(x - x^*) = Ae \to \begin{matrix} r = Ae \\ e = A^{-1}r \end{matrix}$$

Норма вектора

Рассмотрим векторное пространство R^m. Пусть $x \in R^m$.

Нормой вектора x называется вещественное число, которое обозначается $\|x\|$ и определяется следующими свойствами:

1. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3. $\forall x, y \in R^m$: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Существуют разные способы задания нормы. Например:

Единичная норма:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Евклидова норма:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_n|$$
$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Абсолютные и относительные погрешности вектора
x — точное значение, x^* — приближенное
$e = x - x^*$
Абсолютная погрешность:
$\Delta(x^*) = \|e\| = \|x - x^*\|$
Относительная погрешность:
$$\delta(x^*) = \frac{\Delta(x^*)}{\|x\|}$$

Норма матрицы
$Ax = b; x, b \in R^m; A \in R^{m \times m}$
Нормой матрицы A, подчиненной норме вектора, называется вещественное число, которое обозначается $\|A\|$:
$$\|A\| = \max_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$
- Максимальный коэффициент растяжение вектора x под действием матрицы A.

Теорема. Норма матрицы A обладает следующими свойствами
1. $\|A\| \ge 0\ \forall A \in R^{m \times m}$, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\|\alpha A\| = \alpha \|\mathrm{A}\|$
3. $\forall A, B \in R^{m \times m}$: $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$
4. $\forall A, B \in R^{m \times m}$: $\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$
5. $\forall A \in R^{m \times m}$: $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$

$\|x_1\|$; подчиненная норма матрицы
$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| : \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$
- максимальная сумма строки
$$\|A\|_\infty = \max_{1 < i < m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| : \|x\|_\infty = \max_{1 < i < n} |x_i|$$
- максимальная сумма столбца

$$\|A\|_2 \sim \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m} |a_{ij}|^2}$$

Обусловленность задачи решения СЛАУ

$Ax = b$

Пусть вектор b задан с погрешностью: b^*.

$\Delta(b^*) = \|b - b^*\|$

$$\delta(b^*) = \frac{\|b - b^*\|}{\|b\|}$$

Пусть x^* —точное решение системы уравнений $Ax^* = b^*$

Тогда $\Delta(x^*) = \|x - x^*\| = \|A^{-1}b - A^{-1}b^*\| = \|A^{-1}(b - b^*)\| \leq$
$\leq \|A^{-1}\| \cdot \|b - b^*\| = \nu_\Delta \cdot \Delta(b^*)$;

$\nu_\Delta = \|A^{-1}\|; \Delta(b^*) = \|b - b^*\|$

$$\delta(x^*) = \frac{\Delta(x^*)}{\|x^*\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|b\|}{\|x\|} \cdot \frac{\Delta(b^*)}{\|b\|} = \nu_\delta(x) \cdot \delta(b^*)$$

$\nu_\delta(x)$ — **естественное число обусловленности.**

$$\nu_\delta(x) = \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|b\|}{\|x\|}$$

$$\max_{x \neq 0} \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|b\|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|Ax\|}{\|x\|} = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| = Cond(A)$$

— **Стандартное число обусловленности**

$\delta(x^*) \leq Cond(A) \cdot \delta(b^*)$

Свойства числа обусловленности $\boldsymbol{Cond(A)}$

1. $Cond(E) = 1$
2. $\forall A: Cond(A) \geq 1$
3. $\alpha \in \mathbb{R}: Cond(\alpha A) = Cond(A)$

Типы используемых матриц

$Ax = b$

1. Диагональная матрица
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$
2. Нижняя (верхняя) треугольная матрица
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
3. Симметричная положительно определенная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} x_i x_j) \geq 0$$

Или $\left(A x_i x_j\right) \geq 0$

4. Ленточные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & & \dots & 0 & 0 & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \dots & 0 & 0 & \\ 0 & a_{32} & a_{33} & & \dots & 0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & & & a_{m-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m,n-1} & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

VIII. Метод Гаусса

23 октября 2017 г. 13:55

Метод Гаусса для решения СЛАУ

A - матрица общего вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mm}x_m = b_m \end{cases}$$

$Ax = b$

Найти x при заданных A, b.

Схема единственного деления

Предполагается, что $a_{11} \neq 0$

Прямой ход:

1. Вычислим коэффициенты 1-го шага

   $\mu_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}; i \in [2, m]$

   Из уравнений $[2, m]$ вычтем уравнение 1, умноженное на $\mu_i, i \in [2, m]$

   Получим:

   $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2m}^{(1)}x_m = b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{3m}^{(1)}x_m = b_3^{(1)} \\ \ldots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{mm}^{(1)}x_m = b_m^{(1)} \end{cases}$$

   $$\begin{cases} a_{ik}^{(1)} = a_{ik} - \mu_{ik} \\ b_i^{(1)} = b_i - \mu_{i1}b_i \end{cases}$$

   $Ax = b \Leftrightarrow A^{(1)}x = b^{(1)}$

   В матричном виде:

   $$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -\mu_{21} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -\mu_{31} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\mu_{m1} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   $A^{(1)} = M_1 A$

   $b^{(1)} = M_1 b$

2. Предположим, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$

   Рассмотрим множители 2-го шага

   $\mu_{i2} = \dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}; i \in [3, m]$

Рассмотрим матрицу

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\mu_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -\mu_{m2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = M_2 A^{(1)} = M_2 M_1 A$$

$$b^{(2)} = M_2 b^{(1)} = M_2 M_1 b$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2m}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3m}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{m3}^{(2)} & \dots. & a_{4m}^{(2)} \end{pmatrix}$$

…

m. В конечном итоге придем к верхней треугольной матрице $A^{(m-1)}$

$$A^{(m-1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1(m-1)} & a_{1m} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2(m-1)}^{(1)} & a_{2m}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3(m-1)}^{(2)} & a_{3m}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{mm}^{(m-1)} \end{pmatrix}$$

$$A^{(m-1)} = M_{m-1} M_{m-2} \dots M_2 M_1 A$$

$$A = M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{m-1}^{-1} A^{m-1} = LU$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \mu_{31} & \mu_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{m1} & \mu_{m2} & \mu_{m3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, фактически вместо уравнения $Ax = b$ рассматривается $LUx = b$

2. **Обратный ход**

Исходная система уравнений свелась к виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2m}^{(1)}x_m = b_2^{(1)} \\ \dots \\ a_{mm}^{(m-1)}x_m = b_m^{(m-1)} \end{cases}$$

Отсюда находится

$$x_m = \frac{b_m^{(m-1)}}{a_{mm}^{(m-1)}}$$

$$x_{m-1} = \frac{b_{m-1}^{(m-2)} - a_{(m-1)m}^{(m-2)} x_m}{a_{(m-1)(m-1)}}$$

…

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m}{a_{11}}$$

Получается вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$

Сложность алгоритма

Для приведения $A \to A^{(m-1)}$ требуется порядка $\frac{2m^3}{3}$ операций сложения/умножения. Например, $m = 100 \Rightarrow$ около 700000, что не составляет труда для современных систем. Однако для более крупных систем ($m = 500000000$) метод Гаусса неприменим.
Переход $b \to b^{(m-1)} \sim m^2$ операций. Обратный ход также требует около m^2 операций. Значит, $\sum \sim \frac{2}{3}m^3$

Оговорки вида $a_{ii} \neq 0$ в предыдущем методе вызваны невозможностью деления на 0. Но это ограничение не основное, которое сдерживает применение метода Гаусса. Более существенное ограничение - умножение элементов матрицы на величины μ. Если $a_{ik} \ll 1$, то $\mu_{ik} \gg 1$, и имеет место неконтролируемый рост элементов матрицы, приводящий к вычислительным ошибкам и плохой обусловленности задачи. Это приводит к необходимости рассмотрения альтернативных методов.

Схема частичного выбора

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mm}x_m = b_m \end{cases}$$

В схеме частичного элемента первый элемент $a_{i1} = \max\{|a_{11}|, \dots, |a_{m1}|\}$
i-я строчка и первая меняются местами, в результате чего на первой позиции оказывается наибольший по модулю (и ненулевой) элемент. При этом $\forall i$: $|\mu_{i1}| \leq 1$, и на каждом шаге элементы пересчитанной матрицы возрастают по абсолютной величине менее чем в два раза.
Следовательно, за $m - 1$ шаг максимальный коэффициент роста - $\varphi(m) = 2^{m-1}$

Однако, и метод частичного выбора не является полным решением проблемы, т.к. если m – велико, то $2^{m-1} \gg 1$, и задача всё равно может быть плохо обусловленной.

Схема полного выбора

В этой схеме находится наибольший по модулю элемент из всей матрицы - a_{ij}, после чего переставляются $1 -$ я и $i -$ я строки. Исключение неизвестных происходит, начиная с x_j. У этой схемы $\varphi(m) < m$, и задача хорошо обусловлена, но для этого требуется большее количество операций - примерно m^3.

IX. Применение метода Гаусса. Метод Холецкого, прогонки

30 октября 2017 г. 12:55

1. **Решение СЛАУ с несколькими правыми частями**
   $Ax = b_1$
   $Ax = b_2$
   ...
   $Ax = b_{(p)}$
   После непосредственного применения метода Гаусса к каждой из p систем требует $\frac{2}{3}m^3 \cdot p + 2m^2 \cdot p$ операций. Чтобы увеличить эффективность, можно
   a. Привести A к виду $A^{m-1} = U$ - верхнему треугольному виду один раз. Трудоемкость такой операции $\frac{2}{3}m^3$.
   b. Пересчитать вектор $p\ - m^2 p$ операций
   c. Выполнить обратный ход - $p \cdot m^2$

   Общая трудоемкость в таком случае много меньше: $\frac{2}{3}m^3 + 2pm^2$
2. **Вычисление обратной матрицы $\boldsymbol{A^{-1}}$**
   Пусть поиска из $x = A^{-1}b$ неэффективен.
   При вычислении выражений вида $w = A^{-1}BC^{-1} \cdot v$, где $A, B, C -$ матрицы, а $w, v -$ векторы — вычислять обратные матрицы не требуется, а можно действовать следующим образом.
   Стоит записать эквивалентное уравнение $C^{-1}v = y \to Cy = v$ и найти y методом Гаусса. Затем $B \cdot y = z$ и $A^{-1} \cdot z = w$. $Aw = z -$ решается также методом Гаусса.

   Рассмотрим случаи, когда A^{-1} все же требуется. Будем исходить из того, что $A \cdot A^{-1} = E$. Пусть $A^{-1} = V \Rightarrow AV = E$. Требуется найти элементы матрицы B.
   Вместо уравнения $AV = E$ рассмотрим совокупность эквивалентных уравнений:
   $$\begin{cases} Av_1 = e_1 \\ Av_2 = e_2 \\ \quad\ldots \\ Av_n = e_n \end{cases}$$
   Где $v_1 \ldots v_n -$ столбцы V, $e_1 \ldots e_n -$ строки E
   Задача свелась к решению СЛАУ с несколькими правыми частями. С помощью метода Гаусса получаем столбцы обратной матрицы.
   Трудоемкость будет $\frac{2}{3}m^3 + m^2 \cdot m + m^2 \cdot m = \frac{8}{3}m^3$
   Учитывая специальную структуру векторов $e_1 \ldots e_n$, количество операций может быть сокращено до $2m^3$.
3. **Вычисление определителей**

$A -$ невырожденная матрица. Требуется вычислить $\det A$. Если $m = 15$, то применяя правило Крамера для вычисления определителя на ПК потребуется 10^{15} лет.

Методом Гаусса $\det A$ может быть вычислен на таком же ПК за $2{,}2 \cdot 10^{-3}$ с. Для этого A нужно привести к верхнему треугольному виду $A^{(m-1)}$, тогда $\det A^{(m-1)} = \sum_{i=1}^{m} a_{mm}^{(m-1)}$. На это требуется $\frac{2}{3} m^3$ операций.

В схеме частичного выбора $\det A = (-1)^s a_{11} a_{22}^{(1)} \dots a_{mm}^{(m-1)}$, $s -$ число перестановок

4. **Разложение матрицы на множители**

   В результате прямого хода метода Гаусса получается матрица

$$A^{(m-1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1(m-1)} & a_{1m} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2(m-1)}^{(1)} & a_{2m}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3(m-1)}^{(2)} & a_{3m}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{mm}^{(m-1)} \end{pmatrix}$$

Эту матрицу можно выразить через исходную:

$$A^{(m-1)} = M_{m-1} M_{m-2} \dots M_2 M_1 A$$

$$A = M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{m-1}^{-1} A^{(m-1)} = LU$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \mu_{31} & \mu_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{m1} & \mu_{m2} & \mu_{m3} & \dots & 1 \end{pmatrix}; U = A^{(m-1)}$$

Метод Гаусса работает с матрицей A общего вида. На неё не накладывается никаких ограничений - плотности, несимметричности, ленточности - за исключением невырожденности.

Метод Холецкого (метод квадратного корня)

Предполагается, что матрица $A -$ симметричная и положительно определенная. "Положительно определенная" значит, что

$$\forall x: (Ax, x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_i x_j \geq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Математиками доказано, что такая матрица может быть представлена в виде $A = LU = L \cdot L^T$, где $L -$ нижняя треугольная матрица.

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{m1} & l_{m2} & l_{m3} & \dots & l_{mm} \end{pmatrix}$$

$L \cdot L^T = A.$

$$\begin{cases} l_{11}^2 = a_{11} \\ l_{11} \cdot l_{i1} = a_{i1}; i \in [2, m] \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_{21}^2 + l_{22}^2 = a_{22} \\ l_{i1} \cdot l_{21} + l_{i2} \cdot l_{22} = a_{i2}; i \in [3, m] \end{cases}$$

…

$$\begin{cases} l_{k1}^2 + l_{k2}^2 + \cdots + l_{kk}^2 = a_{kk} \\ l_{k1} l_{i1} + l_{k2} l_{i2} + \cdots + l_{km} l_{im} = a_{im}, i \in [k, m] \end{cases}$$

…

$$l_{m1}^2 + l_{m2}^2 + \cdots + l_{mk}^2 = a_{mm}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} l_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{l_{11}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} \\ l_{i2} = \dfrac{a_{i2} - l_{21} l_{2i}}{l_{22}} \end{cases}$$

…

$$\begin{cases} l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - l_{k1}^2 - \cdots - l_{k\,k-1}^2} \\ l_{ik} = \dfrac{(a_{ik} - l_{k1} l_{i1} - \cdots - a_{i\,k-1} l_{i\,k-1})}{l_{kk}} \end{cases}$$

Задача $Ax = b$ превращается в $L \cdot L^T \cdot x = b$, её решение требует $2m^2$ операций, т.к. $L^{-1} = L^T$

Метод Холецкого примерно в 2 раза менее трудоемкий, чем метод Гаусса.

Метод прогонки

$Ax = b$, где $A -$ трехдиагональная матрица.

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & \\ 0 & a_3 & b_3 & & & \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ & 0 & & \cdots & b_{(m-1)(m-1)} & c_{m-1} \\ & & & & a_m & b_m \end{pmatrix}$$

Система уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} b_1x_1 + c_1x_2 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\ \dots \\ a_kx_{k-1} + b_kx_k + c_kx_{k+1} \ = d_k \\ \dots \\ a_mx_{m-1} + b_mx_m = d_m \end{cases}$$

Работает следующим образом:

1-й шаг:

$x_1 = \dfrac{d_1 - c_1x_2}{b_1} = \alpha_1x_2 + \beta_1$

$\alpha_1 = -\dfrac{c_1}{b_1}; \beta_1 = \dfrac{d_1}{b_1}$

$\alpha, \beta -$ прогоночные элементы

2-й шаг:

$a_2(\alpha_1x_2 + \beta_1) + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2$

$(a_2 \cdot \alpha_1 + b_2)x_2 + c_2x_3 = d_2 - a_2\beta_2$

$x_2 = \alpha_2x_3 + \beta_2$

$\alpha_2 = -\dfrac{c_2}{\gamma_2}; \beta_2 = \dfrac{d_2 - a_2\beta_1}{\gamma_2}; \gamma_2 = a_2\alpha_1 + b_2$

...

k-й шаг:

$\alpha_k = -\dfrac{c_k}{\gamma_k}$

$\beta_k = \dfrac{d_k - a_k\beta_{k-1}}{\gamma_k}$

$\gamma_k = b_k + a_k\alpha_{k-1}$

...

m-й шаг:

На последнем шаге получается решение

$a_m(a_{m-1}x_m + \beta_{m-1}) + b_mx_m = d_m$

Отсюда

$x_m = \dfrac{d_m - a_m\beta_{m-1}}{a_m\alpha_{m-1} + b_m}$

После этого обратным ходом находятся все x, т.е. x_m подставляется в $m -$ 1-е уравнение и т.д. до самого начала

Трудоемкость метода прогонки порядка $8m$ операций.

$l_{11}^2 = a_{11}$

X. Интерполяция в общем виде

6 ноября 2017 г.   13:47

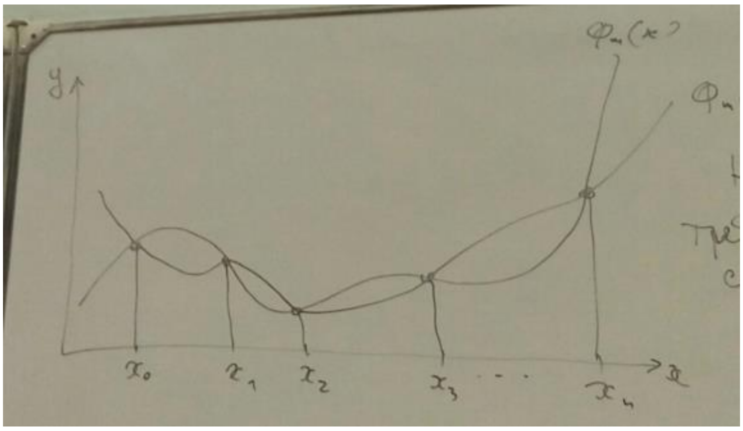
Постановка задачи:

1. Задача вычисления $f(x)$ в заранее неизвестной точке x. Вычисление $f(x)$ — трудоемкая задача. Задача - вычислить $f(x)$ с минимальными затратами.
2. Кроме того, функция $f(x)$ может не всегда быть задана аналитически во всех точках, например, $y_i = f(x_i), i \in \mathbb{N}$.

В этих случаях используют методы приближения функций, т.е. находят функцию $g(x) \approx f(x)$, которая будет удобна в вычислительном отношении, например - алгебраический многочлен $P_n(x)$.

При решении этой задачи необходимо ответить на вопросы:

1. Какая информация имеется о функции $f(x)$
   a. Функция может быть задана в дискретных точках $y_i = f(x_i), i \in \mathbb{N}, x_i$ — попарно различные точки
   b. Характер поведения $f(x)$ — гладкая, периодическая, непрерывная и т.д.
2. Как выбрать вид приближающей функции:
   $\Phi_m(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_m\varphi_m(x)$,
   Где $\varphi_{0\dots m}$ - **базисные функции**, а $a_{1\dots m}$ — **коэффициенты обобщенного многочлена**
   a. Если функция гладкая и непрерывная
      $\varphi_k(x) = x^k, k \in \mathbb{N}$
      $\Phi_m(x) = P_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$
   b. Если функция периодическая, то можно взять тригонометрический базис
      $$\Phi_m(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(\alpha_k \cos 2\pi kx + \beta_k \sin 2\pi\, kx) = \sum_{k=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} a_n e^{-2\pi ikx}$$
3. Какой критерий близости приближающей функции
   a. Если функция задана в конечной области точек, то нужно использовать **критерий интерполяции**, т.е. требовать совпадения обобщенного многочлена с приближаемой функцией в этих точках
      $\Phi_m(x_i) = y_i, i \in \mathbb{N}$



Интерполяция - построение функции, проходящей через все точки. Проблема в том, что таких функций очень много, поэтому требуются дополнительные соображения

b. Минимизация среднего квадрата отклонения

$$\min_{x} \int_a^b [f(x_i) - \Phi_m(x_i)]^2 \, dx$$

c. Наибольшее равномерное приближение

$$\min_{g} \max_{x} |f(x) - g(x)|$$

Интерполяция обобщенными многочленами

$y_i = f(x_i), i \in [0, n]$ — исходная информация

$\Phi_m(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_m\varphi_m(x)$

- интерполяционный многочлен, если $\Phi_m(x_i) = y_i, i \in [0, n]$

Если базис задан, то построить интерполяционный обобщенный многочлен - значит найти коэффициенты $a_{0\ldots m}$.

$$\begin{cases} \varphi_0(x_0)a_0 + \varphi_1(x_0)a_1 + \cdots + \varphi_m(x_0)a_m = y_0 \\ \varphi_0(x_1)a_0 + \varphi_1(x_1)a_1 + \cdots + \varphi_m(x_1)a_m = y_0 \\ \ldots \\ \varphi_0(x_n)a_0 + \varphi_1(x_n)a_1 + \cdots + \varphi_m(x_n)a_m = y_n \end{cases}$$

$Pa = y;$

$$P = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \cdots & \varphi_m(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \cdots & \varphi_m(x_n) \end{pmatrix}$$

$a = (a_0, a_1, \ldots, a_m)^T; y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)^T$

Рассмотрим векторы значений функции $\varphi_i(x)$ в точках $x_{0\ldots n}$:

$\varphi_0 = \left(\varphi_0(x_0), \varphi_0(x_1), \ldots, \varphi_0(x_n)\right)^T$

$\varphi_1 = \left(\varphi_1(x_0), \varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_1(x_n)\right)^T$

...

$\varphi_m = \left(\varphi_m(x_0), \varphi_m(x_1), \ldots, \varphi_m(x_n)\right)^T$

$\varphi_0(x), \ldots, \varphi_m(x)$ называются **линейно зависимыми** на множестве различных точек, если один из векторов системы $\varphi_0, \ldots, \varphi_m$

$$\exists\varphi_k = \sum_{j=0, j\neq k}^{m} \alpha_i\varphi_i$$

Если это не так, то система функций называется **линейно независимой** на множестве точек $x_0, \dots, x_m$.

Утверждение. Система степенных функций $1, x, x^2, \dots, x^m$ линейно независима на множестве попарно различных точек $x_0, x_1, \dots, x_m$, если $m \leq n$

Доказательство

Допустим обратное: система $1, x, \dots, x^m$ линейно зависима на $x_0, \dots, x_m$, т.е.

$$x_j^k = \sum_{\substack{l=0 \\ l\neq k}}^{m} \alpha_l x_j^l, j \in [0, n]$$

Следовательно, верно, что

$$\sum_{l=0}^{m} \alpha_l x_j^l = 0, j \in [0, n].$$

Получили, что многочлен степени m имеет $m + 1$ корень, что противоречит основной теореме алгебры - многочлен степени m не может иметь больше m корней. Следовательно, допущение неверно и система функций линейно независима при $m \leq n$ ■

$$P = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \cdots & \varphi_m(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \cdots & \varphi_m(x_n) \end{pmatrix}$$

$Pa = y$.

Рассмотрим комплексно сопряженную матрицу P^*

$$P^* = \begin{pmatrix} \overline{\varphi_0(x_0)} & \cdots & \overline{\varphi_0(x_n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\varphi_m(x_0)} & \cdots & \overline{\varphi_m(x_m)} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим матрицу Грама:

$$\Gamma = P^* \cdot P = \begin{pmatrix} (\overline{\varphi_0}, \varphi_0) & \cdots & (\overline{\varphi_0}, \varphi_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\overline{\varphi_m}, \varphi_0 & \cdots & (\overline{\varphi_m}, \varphi_m) \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{jn} = \left(\overline{\varphi_n}, \varphi_j\right) = \sum_{i=0}^{n} \overline{\varphi_n}(x_i)\varphi_j(x_i)$$

Из алгебры известно, что система функций линейно независима в различных точках тогда и только тогда, когда $m \leq n$ и $\det\Gamma \neq 0$.

$Pa = y, P[n \times m]$, если $m < n$, то решение существует не всегда, а если $m > n$, то решение не единственное, поэтому при решении задач берут всегда $m = n$. Тогда

$\det\Gamma = \det P \cdot \det P^* = |\det P|^2 \Rightarrow \det\Gamma \neq 0 \Leftrightarrow \det \mathrm{P} \neq 0,$

т.е. система $Pa = y$ имеет единственное решение, когда $\det P \neq 0$, $\det \Gamma = 0$ или система функций линейно независима на множестве точек $x_0, x_1, \dots, x_n$. Так как система степенных функций $1, x, \dots, x^{\boldsymbol{n}}$ линейно независима на $x_1, \dots, x_{\boldsymbol{n}}$, то существует единственный интерполяционный алгебраический многочлен $P_n(x)$, что $P_n(x_i) = y_i, i = 0,1, \dots, n$.

Определение. Система функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ называется **ортогональной** на множестве попарно различных точек $x_0, x_1, \dots, x_n$, если

$$(\varphi_k, \varphi_j) = \begin{cases} \neq 0, k = j \\ = 0, k \neq j \end{cases}$$

У ортогональной системы функций матрица Грама диагональна:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & (\varphi_m, \varphi_m) \end{pmatrix} \Rightarrow \det \Gamma \neq 0$$

Значит, система ортогональных функций линейно независима на множестве попарно различных точек

Утверждение. Система функций $\varphi_k(x) = e^{2\pi ikx}, k \in [0, N-1]$ ортгональна на множестве $x_l = \frac{l}{N}, l \in [0, N-1]$

Доказательство

$$(\varphi_k, \varphi_j) = \sum_{l=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2\pi ikl}{N}} \cdot e^{-\frac{2\pi ijl}{N}}\right) = \sum_{l=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i(k-j)l}{N}} = N$$

$$k = j \Rightarrow (\varphi_k, \varphi_j) = N \neq 0$$

Обозначим $\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$

$$(\varphi_k, \varphi_j) = \sum_{l=0}^{N-1} \omega^{(k-j)l} = \frac{1 - \omega^{(k-j)N}}{1 - \omega} = 0$$

$$\omega^{(k-j)N} = e^{2\pi i(k-j)} = 1$$

$$k \neq j \Rightarrow (\varphi_k, \varphi_j) = 0 \blacksquare$$

Если система функций ортогональна, то

$$Pa = y \to P^*Pa = P^*y; \Gamma a = b$$

$$a_j = \frac{(y, \varphi_i)}{\gamma_{jj}} = \frac{(y, \varphi_j)}{(\varphi_j, \varphi_j)}; b = (y, \varphi_j); j = 0,1, \dots, m$$

XI. Полиномиальная, кратными узлами интерполяция.

13 ноября 2017 г. 13:50

При интерполяции гладких функций лучше использовать алгебраический базис $1, x, x^2, \ldots$, а для периодических - тригонометрический $e^{2\pi ikx}, k = 0,1, \ldots$

Если система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$, то решение задачи интерполяции будет выглядеть следующим образом:
$Pa = y$
$P^* -$ сопряженная матрица P.
$P^*Pa = P^*y$
$\Gamma -$ матрица Грама, $b = P^*y$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & (\varphi_m, \varphi_m) \end{pmatrix}$$

Тогда система примет вид $\Gamma a = b$. Элементы ввектора b можно определить как $b_j = \left(\varphi_j, y\right)$. Тогда решение задачи интерполяции в общем виде:

$$a_j = \frac{(y, \varphi_j)}{(\varphi_j, \varphi_j)}; j = 0,1, \ldots, m$$

Интерполяция алгебраическими многочленами (полиномиальная)
$f(x), x \in [a, b]$
$x_0, x_1, \ldots, x_n$
$y_0, y_1, \ldots, y_n$
$y_i = f(x_i)$
Задача - построить интерполяционный многочлен степени N.

$Pa = y$

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_1^n = y_1 \\ \ldots \\ a_0 + a_1x_n + \cdots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$$

$\det P$- определитель Вандермонда, поэтому он отличен от нуля. Решение этой системы напрямую затруднено из-за плохой обусловленности задачи. Однако, мы установили, что система функций $1, x, x^2, \ldots, x^n$ линейно независима в попарно различных точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Из этого следует, что существует единственное решение системы $Pa = y$ - многочлен $P_n(x)$, но существуют различные формы записи этого многочлена.

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

$f(x), x \in [a, b]$

$x_0, x_1, \dots, x_n$ - узлы интерполяции

$y_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$

$$L_n = \sum_{j=0}^{n} y_j \cdot l_{nj}(x)$$

$$l_{nj}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)}$$

$$l_{nj}(x_i) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

$L_n(x_i) = y_i, i = 0,1, \dots, n$

Следовательно, это интерполяционный многочлен степени n.

Погрешность интерполяции алгебраическими многочленами

$f(x), x \in [a, b]$

$x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$

$y_0, y_1, \dots, y_n; y_i = f(x_i)$

$f(x) -$ дифференцируема по крайней мере $n + 1$ раз

$P_n(x) -$ интерполяционный алгебраический многочлен степени n, т.е. $P_n(x_i) = y_i, i = 0,1, \dots, n$. Но пусть $x \neq x_i; x \in [a, b]$. Тогда $P_n(x) - f(x) -$ **погрешность интерполяции**

Теорема. Погрешность интерполяции алгебраического многочлена равна:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\chi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x); \chi \in [a, b]$$

$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ - многочлен степени $n + 1$.

Следствие

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|$$

$$M_{n+1} = \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

Если ошибка интерполяции - $\Delta(\rho_n) = \max_{[a,b]} |f(x) - P_n(x)|$. Тогда

Верхняя граница погрешности:

$$\overline{\Delta}(p_n) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} |\omega_{n+1}(x)|$$

Интерполяция с кратными узлами

$f(x), x \in [a, b]$

$x_0, x_1, \dots, x_n -$ узлы интерполяции

Если в узлах $x_0, x_1, \dots, x_m$ заданы
$y_0, y_1, \dots, y_m,$
$y'_0, y'_1, \dots, y'_m,$
$y''_0, y''_1, \dots, y''_m,$
…
$y_0^{(k_n-1)}, y_1^{(k_n-1)}, \dots, y_n^{(k_n-1)},$
то такие узлы называются **кратными**
$k_0, \dots, k_m -$ кратности узлов $x_0, \dots, x_m$
Обозначим $n = k_0 + k_1 + \dots + k_m - 1$. Тогда существует единственный интерполяционный многочлен $P_n(x)$ степени n

Пример 1
x_0, x_1
y_0, y_1
$y'_0, y_1{}'$
$k_0 = 2, k_1 = 2$
$n = 2 + 2 - 1 = 3$
$\exists P_3(x)$ - интерполяционный многочлен с кратными узлами

$$P_3(x) = y_0 \cdot \frac{(x_1 - x)^2 \cdot (2(x - x_0) + h)}{h^3} + y'_0 \cdot \frac{(x_1 - x)^2 \cdot (x - x_0)}{h^2} +$$
$$+ y_1 \cdot \frac{(x - x_0)^2 (2(x_1 - x) + h)}{h^3} + y'_1 \cdot \frac{(x - x_0)^2 (x - x_1)}{h^2}$$

- Многочлен Эрмита. Погрешность интерполяции многочленом Эрмита:

$$\max_{[x_0, x_1]} |f(x) - P_n(x)| \le \frac{M_4}{384} \cdot h^4$$

Пример 2
x_0
$y = f(x_0)$
$y_0 = f'(x_0)$
$y''_0 = f''(x_0)$
…
$y_0^{(k)} = f^{(k+1)}(x_0)$
Многочлен, строимый по одной точке, будет называться экстраполяционным.
$m = 0; k_0 = n + 1$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{m} y_0^{(k)} \frac{(x - x_0)^k}{k!}$$

- отрезок ряда Тейлора

Минимизации погрешности полиномиальной интерполяции

$$\overline{\Delta} P_n(x) \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} |\omega_{n+1}(x)|$$
$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

Предположим, что мы можем заранее вычислить значение функции $f(x)$ в n заданных точках, а дальше вычислим приближенное значение $f(x)$ с помощью интерполяционных формул. В таком случае возникает вопрос выбора точек.

Многочлены Чебышёва
$T_n(x)$ - многочлен Чебышёва степени n
$T_0(x) = 1$
$T_1(x) = x$
$T_2(x) = 2x^2 - 1$
$T_3(x) = 4x^3 - 3x$
$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$
…
$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$

Свойства многочленов Чебышёва

1. Многочлены Чебышёва четных степеней состоят только из четных степеней x, а многочлены нечетных степеней состоят только из нечетных степеней x.
2. $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \cdots$
   - коэффициент при старшей степени равен 2^{n-1}
3. Если $x \in [-1,1]$, то многочлен Чебышёва степени n может быть представлен в виде
   $T_n(x) = \cos(n \operatorname{acos}(x))$
   Доказательство
   Обозначим правую часть $C_n(x)$ и проверим, что $C_n(x)$ удовлетворяет такому же соотношению, как и многочлен Чебышёва или $T_n(x) + T_{n-2}(x) = 2xT_{n-1}(x)$
   $C_n(x) + C_{n-2}(x) = \cos(n \operatorname{acos}(x)) + \cos\big((n-2)\operatorname{acos}(x)\big)$
   $= 2\cos\big((n-1)\operatorname{acos}(x)\big)\cos(\operatorname{acos}(x)) = 2xC_{n-1}$ ■
4. Найдем корни многочлена $T_n(x), x \in [-1,1]$
   $\cos(n \operatorname{acos} x) = 0$
   $n \operatorname{acos} x = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$
   $\operatorname{acos} x = \frac{2k+1}{2n}\pi$
   $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right); k \in [0, n-1]$
5. Точки экстремумов функции $T_n(x)$
   $x_m = \cos\left(\frac{m}{n}\pi\right), m \in [0, n]$
6. Рассмотрим многочлен степени $P_n(x)$. Величина $\max_{[a,b]}|P_n(x)|$ называется **уклонением от 0**. Рассмотрим нормированный многочлен Чебышёва $\overline{T_n}(x)$:
   $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \cdots$

$\overline{T_n}(x) = 2^{1-n}T_n(x) = x^n + \cdots$

Утверждение. Многочлен $\overline{T_n}(x)$ является наименее уклоняющимся от 0 среди всех степени n с коэффициентом при старшей степени x_n равным 1.

Т.е. если взять многочлен $P_n(x) = x^n + \cdots$, то

$\max\limits_{[a,b]} |\overline{T_n}(x)| < \max\limits_{[a,b]} |P_n(x)|$

Доказательство

Пусть $\exists P_n(x)$: $\max_{[a,b]} |\overline{T_n}(x)| \geq \max_{[a,b]} |P_n(x)| \Rightarrow \max_{[a,b]} |\overline{T_n}(x)| - \max_{[a,b]} |P_n(x)| \geq 0$

Разность многочленов - многочлен степени $n-1$. Но получившийся многочлен степени $(n-1)$ имеет n корней, что противоречит основной теореме алгебры ■.

Решение задачи минимизации погрешностей

Пусть $[a,b] = [-1,1]$.

$$\overline{\Delta}(p_n) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{[-1,1]} |\omega_{n+1}(x)|$$

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = x^{n+1} + \cdots$$

- многочлен степени $n+1$ с коэффициентом при x^{n+1}, равным 1. В силу свойства 6, для того, чтобы минимизировать $\max_{[a,b]} |\omega_{n+1}(x)|$, нужно в качестве узлов интерполяции $x_0, \dots, x_n$ выбрать корни многочлена Чебышёва степени $n+1$:

$$x = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi, k = 0,1, \dots, n$$

В этом случае величина $\overline{\Delta}(p_n) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} 2^{1-n}$ - минимум погрешности интерполяции с использованием корней многочленов Чебышёва для промежутка $[-1,1]$. Перейдем к общему случаю - промежутку $[a,b]$

$x \in [a,b]$

$$x = \frac{a-b}{2} + \frac{b-a}{2}t, t \in [-1,1]$$

Тогда

$$t_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), k = 0,1, \dots, n$$

$$x_k = \frac{a-b}{2} + \frac{b-a}{2}t_k$$

$$\omega_{n+1} = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} (t - t_0) \dots (t - t_n)$$

$$\overline{\Delta}(p_n) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} 2^{1-n} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}$$

XII. И. ф-ла Ньютона для неравноотстоящих узлов

20 ноября 2017 г.   13:53

Интерполяционная формула Ньютона для неравноотстоящих узлов

Рассмотрим интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L_n = \sum_{j=0}^{n} y_j \cdot l_{nj}(x)$$

$$l_{nj}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\dots(x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\dots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\dots(x_j - x_n)}$$

Допустим, нужно добавить 1 узел к многочлену. В этом случае нужно будет пересчитывать весь многочлен. Чтобы в этой ситуации облегчить задачу, используют интерполяционные многочлены Ньютона для равноотстоящих и неравноотстоящих узлов.

$x_0, \dots, x_n$

$f(x_0), \dots, f(x_n)$

$x \in [a, b]$

Введем новое понятие - разделенная разность

Разделенная разность первого порядка:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_0, x_1)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f(x_1, x_2)$$

…

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = f(x_{n-1}, x_n)$$

Разделенная разность второго порядка:

$$\frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = f(x_0, x_1, x_2)$$

…

Разделенная разность $k -$ го порядка

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) = \frac{f(x_{1+i}, x_{2+i}, \dots, x_{i+k}) - f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}$$

Построим таблицу разделенных разностей:

$$\begin{array}{llll}
x_0 & f(x_0) & & \\
 & & f(x_1, x_0) & \\
x_1 & f(x_1) & & \\
 & & f(x_2, x_1) & \\
x_2 & f(x_2) & & \\
\vdots & & & \dots \\
 & & & \dots \quad f(x_0, \dots, x_n) \\
x_{n-2} & f(x_{n-2}) & & \\
 & & f(x_{n-1}, x_{n-2}) & \\
x_{n-1} & f(x_{n-1}) & & \\
 & & f(x_n, x_{n-1}) & \\
x_n & f(x_n) & &
\end{array}$$

Утверждение. Разделенная разность $k -$го порядка может быть представлена в виде

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) = \frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{i+k})} + \frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2}) \dots (x_{i+1} - x_{i+k})} + \cdots + \frac{f(x_{i+k})}{(x_{i+k} - x_i) \dots (x_{i+k} - x_{i+k-1})}$$

План доказательства

Доказывается методом математической индукции.

Базис: $k = 1$.

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i} - \frac{f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Базис есть.

Пусть верно для $k = l - 1$. Докажем для $k = l$

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+l}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+l}) - f(x_i, \dots, x_{i+l-1})}{x_i - x_{i+l}}$$

Подставив выражения для $k = l - 1$, получим, что первая и последняя составляющаяя встретятся по одному разу, а остальные - по 2.

После группировки по два и элементарных алгебраических операций получим требуемое соотношение ■

Вывод формулы Ньютона для неравноотстоящих узлов

Представим многочлен Лагранжа в виде

$$L_n(x) = L_0(x) + [L_1(x) - L_0(x)] + [L_2(x) - L_1(x)] + \cdots + [L_n(x) - L_{n-1}(x)]$$

Рассмотрим разность $L_k(x) - L_{k-1}(x)$ − многочлен степени k. Имеет k корней $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$. Значит, он может быть представлен в виде

$$L_k(x) - L_{k-1}(x) = A_k \cdot (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})$$

Найдем неизвестную A_k. Для этого подставим в выражение $x = x_k$

$$L_k(x_k) - L_{k-1}(x_k) = A_k(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})$$

$$A_k = \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})} - \frac{L_{k-1}(x)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})}$$

При подстановке многочлена Лагранжа получается, что

$$A_k = f(x_0, x_1, \dots, x_k)$$

И интерполяционный многочлен Ньютона:

$$L_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \cdots$$
$$\dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

XIII. И. ф-ла Ньютона для равноотстоящих узлов

27 ноября 2017 г. 13:22

Интерполяционная формула Ньютона для равноотстоящих узлов

Пусть узлы $x_0, x_1, \dots, x_n$ – равноотстоящие, т.е. $x_n = x_0 + nh, k \in \mathbb{Z}$

Определим понятие конечных разностей:

$f(x_0), f(x_0 + h), f(x_0 + 2h), \dots, f(x_0 + nh) = f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$

Конечной разностью первого порядка называются такие величины:

$f_1 - f_0 = f^1_{\frac{1}{2}}$

$f_2 - f_1 = f^1_{\frac{3}{2}}$

…

$f_n - f_{n-1} = f^1_{n-\frac{1}{2}}$

Конечные разности второго порядка:

$f^1_{\frac{3}{2}} - f^1_{\frac{1}{2}} = f^2_1$

$f^1_{\frac{5}{2}} - f^1_{\frac{3}{2}} = f^2_2$

…

$f^1_{n-\frac{1}{2}} - f^1_{n-\frac{3}{2}} = f^2_{n-1}$

$$
\begin{array}{ccccc}
f_0 & f^1_{\frac{1}{2}} & & & \\
f_1 & & f^2_1 & & \\
f_2 & f^1_{\frac{3}{2}} & f^2_2 & f^3_{\frac{3}{2}} & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots f^n_{\frac{n}{2}} \\
f_{n-2} & f^1_{n-\frac{3}{2}} & f^2_{n-2} & f^3_{n-\frac{3}{2}} & \\
f_{n-1} & & f^2_{n-1} & & \\
f_n & f^1_{n-\frac{1}{2}} & & &
\end{array}
$$

Связь конечных разностей и разделенных разностей

Для первого порядка:

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f^1_{\frac{1}{2}}}{h}$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f^1_{\frac{3}{2}}}{h}$$

…

$$f(x_{n-1}, x_n) = \frac{f^1_{n-\frac{1}{2}}}{h}$$

Для второго порядка:

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f^1_{\frac{3}{2}}}{h} - \frac{f^1_{\frac{1}{2}}}{h}}{2h} = \frac{f^2_1}{2h^2}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f^2_2}{2h^2}$$

В общем виде:

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) = \frac{f^k_{i+\frac{k}{2}}}{k!\,h^k}$$

Заменим разделенные разности в формуле конечными:

$$L_n(x) = f_0 + (x - x_0)\frac{f^1_{\frac{1}{2}}}{h} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)f^2_1}{2h^2} + \cdots$$

$$\dots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})\frac{f^n_{\frac{n}{2}}}{n!\,h^n}$$

Сделаем замену:

$$\frac{x - x_0}{h} = t$$

$$\frac{x - x_1}{h} = t - 1$$

$$\dots$$

$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = t - (n - 1)$$

Тогда получится **интерполяционная формула Ньютона для интерполирования вперед**:

$$L_n(x_0 + th) = f_0 = tf^1_{\frac{1}{2}} + t(t-1)\frac{f^2_1}{2} + \cdots + t(t-1)\dots\big(t - (n-1)\big)\frac{f^n_{\frac{n}{2}}}{n!}$$

Интерполяционная формула Ньютона для равноотстоящих узлов для интерполирования назад

Пусть узлы такие: $x_0, x_0 - h, x_0 - 2h, x_0 - nh$

Тогда конечные разности:

$$\begin{array}{ccc}
x_0 - nh & & \\
x_0 - (n-1)h & f^1_{-n+\frac{1}{2}} & \\
x_0 - (n-2)h & & \\
\dots & f^1_{-n+\frac{3}{2}} & \ddots \\
x_0 - 2h & \dots & \vdots \\
x_0 - h & f^1_{-\frac{3}{2}} & \\
x_0 & & \\
x_0 + h & f^1_{-\frac{3}{2}} & \\
\dots & &
\end{array}$$

Интерполяционная формула будет выглядеть следующим образом:

$$L_n(x) = f_0 + tf^1_{-\frac{1}{2}} + \frac{t(t-1)}{2!} f^2_{-1} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!} f^n_{-\frac{n}{2}}$$

Проблемы глобальной интерполяции

Формула Лагранжа и Ньютона строят единый для всего промежутка $[a, b]$ интерполяционный многочлен $L_n(x)$.

$\overline{\Delta}(L_n(x) = \max\limits_{[a,b]} |f(x) - L_n(x)| = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max\limits_{[a,b]} |\omega_n(x)|$

$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$

Теоретически, с помощью алгебраического многочлена степени n при $n \to \infty$ можно сделать погрешность приближения сколь угодно малой (теорема Вейерштрасса). В случае интерполяционного многочлена для этого нужно определить стратегию выбора узлов интерполяции

$x_0^{(0)}$

$x_0^{(1)}, x_1^{(1)}$

...

$x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} \in [a, b]$

Пример: равноотстоящие узлы, корни многочлена Чебышёва и т.д.

Нужно сделать так, чтобы $\mathrm{n} \to \infty$: $\max_{[a,b]} |f(x) - L_n(x)| \to 0$. Однако, это не всегда возможно: если $f(x) \in C[a, b]$, т.е. непрерывна на $[a, b]$, то существует теорема, которая утверждает, что какова бы не была стратегия выбора узлов, всегда найдется такая непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$, $\max_{[a,b]} |f(x) - \omega(x)| \to \infty$

Если же $f(x) \in C_1[a, b]$, т.е. фунция гладкая на $[a, b]$, то такая стратегия существует - корни многочленов Чебышёва

Чувствительность интерполяционного многочлена к погрешностям исходных данных

$x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$

$y_0, y_1, \dots, y_n \ - f(x_n) = y_n$

$y_0^*, y_1^*, \dots, y_n^*$ — значения с погрешностями

Пусть $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ - погрешности $y_0^*, y_1^*, \dots, y_n^*$, т.е. $\varepsilon_i = y_i - y_i^*$.

Тогда точное значение:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j l_{n_j}(x)$$

$$l_{nj}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)}$$

Приближенное значение:

$$L_n^*(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j^* l_{n_j}(x)$$

$$\Delta(L_n^*) = |L_n(x) - L_n^*(x)| \le \left| \sum_{j=0}^{n} \left| y_j - y_j^* \right| l_{n_j}(x) \right| \le \sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j \left| l_{n_j}(x) \right| \le \Lambda_n \overline{\Delta}(y^*)$$

$$\Lambda_n = \max_{[a,b]} \sum_{j=0}^{n} \left| l_{n_j}(x) \right|$$

Величина Λ_n играет роль числа обусловленности. При многочленах Чебышёва $\Lambda_n \approx \frac{2}{\pi} \ln(n+1) + 1$

При равноотстоящих узлах

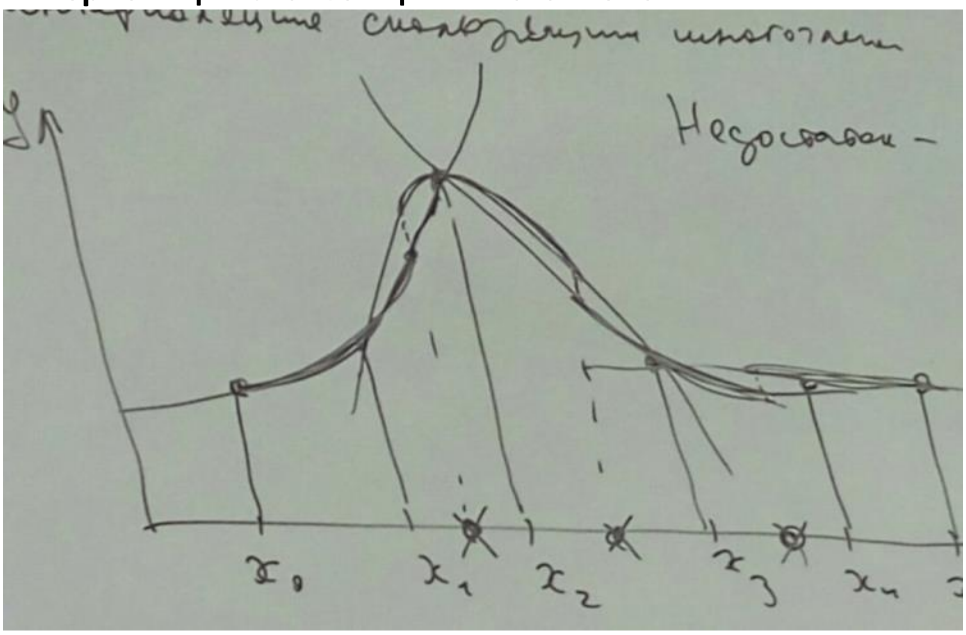
$$\Lambda_n = \frac{2^{n-1}}{(2n-1)\sqrt{n}}$$

Поэтому, интерполяция, единым для всего промежутка $[a.b]$ многочленам применяется редко.

Альтернативные способы интерполяции

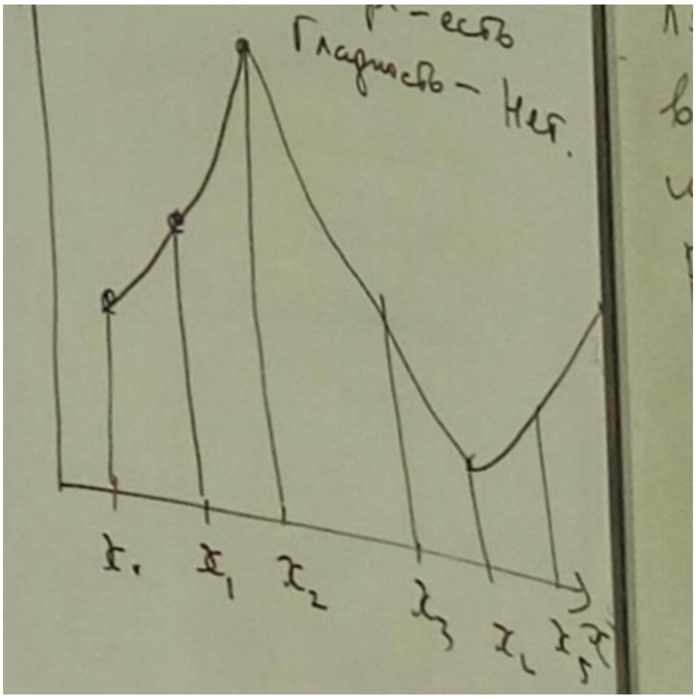
1. Интерполяция скользящим многочленом
2. Кусочно-постоянная интерполяция
3. Интерполяция сплайнами

Интерполяция скользящим многочленом



Недостаток - отсутствие непрерывности

Кусочно-постоянная интерполяция



Недостаток - отсутствие гладкости, т.е. разрывы в производной

XIV. И. сплайнами. Тригонометрическая И.

4 декабря 2017 г. 13:48

$L(x)\ x \in [a, b]$
$x_0, x_1, \dots, x_n$
$P_n(x_i) = f(x_i) -$ **глобальный** интерполяционный многочлен.

Проблемы глобальной интерполяции:
1. Даже для непрерывной функции не всегда существует стратегия выбора узлов, которая позволяет построить $P_n(x) \colon \overline{\Delta}\big(P_{n\to\infty}(x)\big) \to 0$
2. Для гладких функций такая стратегия существует - узлы Чебышёва, но при этом возникает вычислительная погрешность, которая ведет к плохой обусловленности решения.

Альтернативные способы:
1. Интерполяция скользящим многочленом невысокой степени
2. Кусочно-полиномиальная интерполяции

Эти способы подходят для интерполяции простых многочленов, но обладают недостатками:
1. В первой стратегии интерполяционный многочлен не является непрерывной функцией
2. Второй способ не является гладким (т.е. производная имеет разрывы)

Интерполяция сплайнами (Spline)
Изобретен в 1946 году.

Рассмотрим промежуток $[a, b]$
$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
Сплайном степени m, заданном на $[a, b]$, называется функция $P_m(x)$, такая, что:
1) $P_m(x), P_m'(x), \dots, P_m^{(p-1)}(x) -$ непрерывны на $[a, b]$.
2) На каждом частном промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ $P_m(x) = P_{m,i}(x)$ - многочлен степени m. Величина $m - p$ называется **дефектом сплайна**

Рассмотрим $f(x) -$ функцию, непрерывно дифференцируемую по крайней мере m раз на промежутке $[a, b]$. В точках $a = x_0 < x_1 < x_n = b$: $f(x) = y_i, i = 0,1, \dots, n$.
Сплайн $P_m(x)$ называется **интерполяционным**, если в точках $P(x_i) = y_i, i = 0,1, \dots, n$.

Физическое описание:
$S^{(4)}(x) = 0 -$ уравнение упругого равновесия. Сплайн можно представить как металлическую линейку, закрепленную за некоторе точки.

Далее сплайн будем обозначать буквой S.
$S(x_i) = y_i; i = 0,1,\dots,n.$
Величина производной $S'(x_i) = s_i$ называется **наклоном сплайна** в точке $x_i; i = 0,1,\dots,n$.
Будем строить кубический сплайн $S_3(x)$

$$S_3(x) = P_{3,i}(x) = \frac{(x-x_i)^2(2(x-x_{i-1})+h_i)}{h_i^3} y_{i-1}$$
$$= \frac{(x-x_{i-1})^2(2(x_i-x)+h_i)}{h_i^3} y_i + \frac{(x-x_i)^2(x-x_{i-1})}{h_i^2} s_{i-1}$$
$$+ \frac{(x-x_{i-1})^2(x-x_i)}{h_i^2} s_i$$

Корректность данного утверждения проверяется подстановкой. Сплайн определяется неизвестными величинами - наклоном сплайна.
Рассмотрим два подхода к вычислению сплайна:

1. Локальный сплайн
Определяется тем, как ведет себя функция на $[x_{i-1}, x_i]$ безотносительно к соседям. Если в точках x_{i-1}, x_i: $f'(x_{i-1}) = s_{i-1}; f'(x_i) = s_i$, то в качестве параметров наклона выберем f' и получим локальный сплайн.
Параметры сплайна: $m = 3, p = 1$. Следовательно, дефект равен 2.

Погрешность интерполяции локальным сплайном:

$$\max |f(x) - S_3(x_o) \le \frac{M_4}{384} * h_i^4$$

- Четвертый порядок точности

Обоснование непрерывности сплайна:
$P_{3,i}(x_i) = y_i, P_{3,i+1}(x_i) = y_i$
$P'_{3,i}(x_i) = y_i, P_{3,i+1}(x_i) = y_i$

2. Глобальные способы построения сплайна
Нужно приравнять эти производные в точках стыка

$$S''_{3,i}(x_i) = S''_{3,i+1}(x_i)$$
$$S''_{3,i}(x_i) = \frac{2s_{i-1}}{h_i} + \frac{4s_i}{h_i} - 6\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i^2}$$
$$S''_{3,i+1}(x_i) = -\frac{4s_i}{h_{i+1}} - \frac{2s_{i+1}}{h_{i+1}} + 6\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}^2}$$

Приравняем правые части:

$$h_i^{-1}s_{i-1} + 2\left(h_i^{-1} + h_{i+1}^{-1}\right)s_i + h_{i+1}^{-1}S_{i+1} =$$
$$= 3\left[h_i^2(y_i - y_{i-1}) + h_{i+1}^{-2}(y_{i+1} - y_i)\right]; i = 1,2,\dots,n-1$$

Получается, что число уравнений $n-1$, а неизвестных n. Существуют несколько способов дополнить систему уравнений:

a) **Фундаментальный кубический сплайн**
Если известно $f'(a), f'(b)$, то $s_0 = f'(a), s_n = f'(b)$. Система решается однозначно способом прогонки. В результате получим набор $s_0, s_1, \dots, s_n$ - набор наклонов сплайна. Дефект этого сплайна равен $3 - 2 = 1$.

b) Если известны вторые производные функции на концах $f''(a), f''(b)$, то
$S_3''(a) = P_{3,1}''(x_1) = f''(a)$
$S''(b) = P_{3,n}''(x_n) = f''(b)$
Система также решается методом прогонки.

c) **Естественный кубический сплайн**
Если неизвестна ни первая, ни вторая производная, то принудительно назначаем значения $f''(a) = 0; f''(b) = 0$.

Погрешности способов:
Для a,b: $\max_{[a,b]} |f(x) - S_3(x)| \le C \cdot M_4 \cdot h^4$
Для c: $\max_{[a,b]} |f(x) - S_3(x)| \le C \cdot M_4 \cdot {h^2}_{max}$

Понятие о тригонометрической интерполяции
Рассматриваем приближение $f(x)$ с помощью обобщенных многочленов
$P_n(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x)$
$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n -$ базисные функции.
Рассмотрим в качестве $\varphi_k(x) = \exp(2\pi ikx)$
Будем считать, что $f(x) -$ периодическая с периодом длины 1.
Замечание: переход от $[0,1]$ к $[a, b]$ делается соответствующей заменой переменной, как в случаях алгебраических многочленов.
Доказали, что система функций $\exp(2\pi ikx)$ ортогональна на множестве точек $x_l = \frac{l}{N}; l = 0,1, N - 1$. Следовательно, существет единственное решение задачи интерполяции.

$$a_k = \frac{(y, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)}$$

Последняя формула записывается так:

$$(\varphi_k, \varphi_j) = \begin{cases} N, k = j \\ 0, k \neq j \end{cases}$$

Прямое дискретное преобразование Фурье:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{n-1} y_j \exp(2\pi ikj)$$

Обратное дискретное преобразование Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{n-1} a_l \exp(-2\pi il\, x)$$

Для реализации каждого преобразование требуется N^2 арифметических операций. Но в 1956 году был получен алгоритм быстрого преобразования Фурье, которые требует $\frac{N}{2} \cdot \log_2 N$ операций. При $N = 1024$ выигрыш составляет примерно 50 раз по сравнению с обычным дискретным преобразованием.

XV. Численное интегрирование

11 декабря 2017 г. 13:28

Задана некоторая функция на $[a, b]$. Задача - вычислить определенный интеграл. Если существует первообразная этой функции $F(x)$, то этот интеграл - разность значений первообразной на концах отрезка.

Часто первообразная не существует, и интегралы вычисляются численно.

$f(x) \approx g(x)$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b g(x)\,dx$$

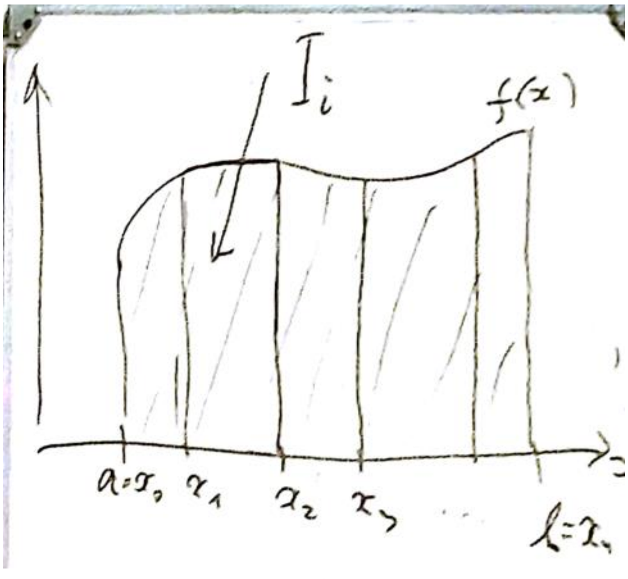
Пример $g(x) = P_n(x)$

Подход, основанный на построении квадратурных формул

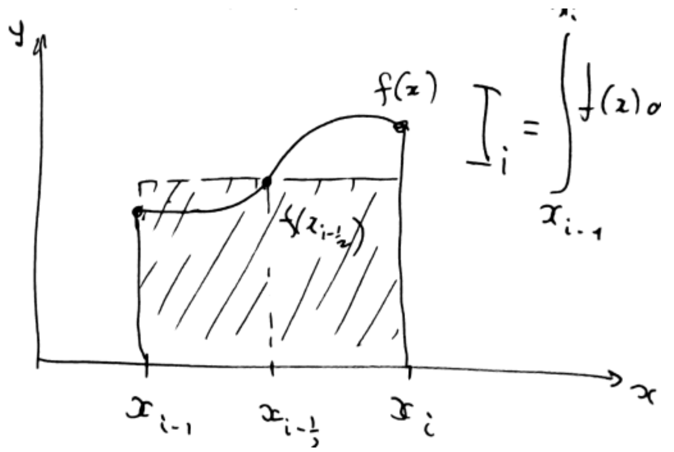
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} I_i$$

$$I_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} P_n(x)dx$$

Для небольших отрезков можно брать интерполяционные многочлены невысокой степени



1. **Квадратурная формула прямоугольников**



Элементарная квадратурная формула:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx h \cdot f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)$$

Общая формула:

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i = h \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Это интерполяционный многочлен нулевой степени

Погрешность формулы прямоугольников

$$\mathrm{I} = \int_a^b f(x)dx$$

$I_{\text{пр}}^h$ — интеграл, вычисляемый формулой прямоугольников

$\left[I - I_{\text{пр}}^h\right]$ — погрешность квадратурной формулы прямоугольников.

Рассмотрим сначала элементарные отрезки $[x_{i-1}, x_i]$.

$I = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$ — элементарный интеграл

$\left[I_i - h \cdot f_{i-\frac{1}{2}}\right]$ — погрешность элементарной квадратурной формулы.

$$\Delta_i = \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - h \cdot f_{i-\frac{1}{2}} \right| = \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(x) - f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) \right) dx \right| \leq$$

$$\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[f(x) - f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) \right] dx =$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) + f'\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)\left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right) + \frac{f''(\xi)}{2}\left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right)^2 \right] dx \leq$$

$$\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| f'\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)\left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right) \right| dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{|f''(\xi)|}{2}\left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right)^2 dx$$

Первая часть равна нулю

$$\Delta(I_i) = |D(x)| \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{f''(\xi)}{2}\left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right)^2 dx$$

Пусть $|f''(x)| \leq M_2 = \max_{[a,b]}|f''(x)|$;

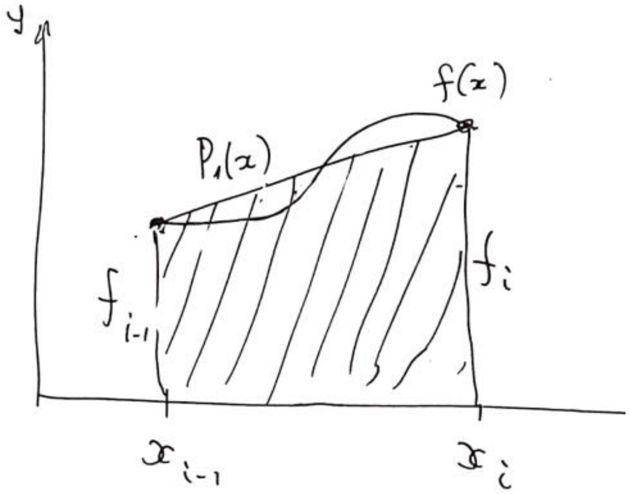
$$\Delta(I_i) = \frac{M_2}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right) dx \leq \frac{M_2}{24} h^3$$

Составная погрешность:

$$\left(\Delta I_{\text{пр}}^h\right) \leq \frac{M_2(b-a)}{24} h^2$$

Вывод: квадратурная формула прямоугольника имеет 2-й порядок точности относительно h.

2. **Квадратурная формула трапеций**



$f(x) \approx P_1(x)$ — интерполяционный многочлен с узлами интерполяции x_{i-1}, x_i

$$I_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} P_1(x)dx = h \cdot \frac{f_{i-1} + f_i}{2}$$

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i = h\left(\frac{f_0 + f_n}{2} + \sum_{i=1}^{n} f_i\right)$$

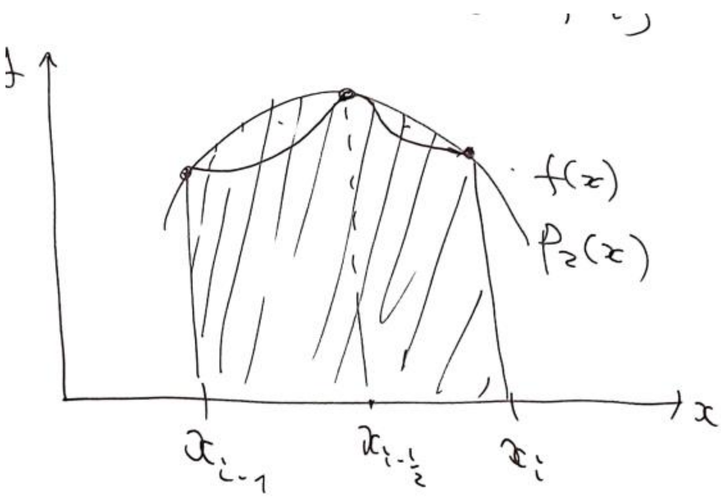
Погрешность формулы трапеций (без доказательства)

$$\Delta\left(I_{\text{тр}}^h\right) \leq \frac{M_2(b-a)}{12} h^2$$

Формула трапеций имеет тот же порядок точности, что и предыдущая.

3. **Квадратурная формула Симпсона**

$f(x) \approx P_2(x)$



Существует единственный интерполяционный многочлен $P_2(x)$, проходящий через точки $(x_{i-1}, f_{i-1}), \left(x_{i-\frac{1}{2}}, f_{i-\frac{1}{2}}\right), (x_i, f_i)$

$$P_2(x) = f_{i-\frac{1}{2}} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h}\left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right) + \frac{f_i - 2f_{i-\frac{1}{2}} + f_{i-1}}{\frac{h^2}{2}}\left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$I_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} P_2(x) = h \cdot f_{i-\frac{1}{2}} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{f_i - f_{i-1}}{h}\left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right)dx +$$

$$+ \frac{f_i - 2f_{i-\frac{1}{2}} + f_{i-1}}{\frac{h^2}{2}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right)^2 dx =$$

$$= h \cdot f_{i-\frac{1}{2}} + \frac{f_i - 2f_{i-\frac{1}{2}} + f_{i-1}}{\frac{h^2}{2}} \cdot \frac{1}{3}\left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right)^3 \Bigg|_{x_{i-1}}^{x_i} =$$

$$= h \cdot f_{i-\frac{1}{2}} + \frac{f_i - 2f_{i-\frac{1}{2}} + f_{i-1}}{\frac{h^2}{2}} \cdot \left[\frac{h^3}{24} + \frac{h^3}{24}\right] =$$

$$= h \cdot f_{i-\frac{1}{2}} + \frac{h}{6}\left(f_i + 2f_{i-\frac{1}{2}} + f_{i-1}\right) = \frac{h}{6}\left(f_{i-1} + 4f_{i-\frac{1}{2}} + f_i\right)$$

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i = \frac{h}{6}\left[(f_0 + f_n) + 2\sum_{i=1}^{n} f_i + 4\sum_{i=1}^{n} f_{i-\frac{1}{2}}\right]$$

Погрешность формулы Симпсона (без доказательства)

Предполагается, что функция $f(x)$ четырежды непрерывно дифференцируема и $M_4 = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|$

$$\Delta\left(I_{\text{тр}}^h\right) = \frac{M_4(b-a)}{2880} h^4$$

Формула имеет 4-й порядок точности относительно h.

Апостериорные оценки погрешности (полученные в процессе вычислений)

Полученные формулы - априорные оценки погрешности. Более удобны в

использовании апостериорные оценки, получаемые при вычислении.
Все они имеют вид:
$I_{I}^{h}{}_{\substack{\text{пр}\\ \text{тр}\\ \text{с}}} = \mathrm{C} \cdot h^{k}$
Для прямоугольников и трапеций - $k = 2$; для Симпсона - $k = 4$

Пусть взят шаг интегрирования h. Тогда $I - I^{h} \approx C \cdot h^{k}$
Уменьшим шаг до $\frac{h}{2}$. Тогда $I - I^{\frac{h}{2}} \approx \frac{1}{2^{k}} C \cdot h^{k}$
Вычтем две предыдущие формулы
$$I^{\frac{h}{2}} - I^{h} = \left(1 - \frac{1}{2^{k}}\right) C \cdot h^{k} = \left(1 - \frac{1}{2^{k}}\right)\left(I - I^{h}\right)$$
$$\left(I - I^{h}\right) = \frac{2^{k}}{2^{k} - 1}\left(I^{\frac{h}{2}} - I^{h}\right)$$
Для формулы трапеций и прямоугольников $k = 2$, для формулы Симпсона - $k = 4$.