

# Applicazione di stime spettrali non parametriche su segnali provenienti da radar FMCW

Francesco Pegoraro - Daniele Giacomelli  
Università degli studi di Firenze

## Introduzione

Questo elaborato si pone come obiettivo quello di ricostruire in un dominio tempo-frequenza il segnale proveniente da un radar FMCW (*Frequency-Modulated Continuous-Wave*). Per fare ciò si utilizza inizialmente un segnale *chirp* per valutare la bontà dei metodi non parametrici utilizzati. I metodi implementati sono in linguaggio *Matlab* e prevedono funzioni che calcolano il *periodogramma*, il *periodogramma modificato*, il *periodogramma di Welch-Bartlett* e il *periodogramma di Blackman-Tukey*. I risultati vengono valutati con la stampa a video dei grafici ricostruiti ponendo attenzione alla risoluzione di questi.

## Radar

Il funzionamento di un radar è basato sulla trasmissione di un segnale e sulla misura del ritardo che impiega per ritornare dopo essere stato riflesso da un oggetto (bersaglio), tale ritardo diviso per due e moltiplicato per la velocità della luce dà una stima della distanza dell'oggetto.

Se si usa un impulso non modulato, la risoluzione, cioè la capacità di discriminare due oggetti ad una certa distanza tra loro, è legata alla durata dell'impulso trasmesso. Viceversa, se si utilizzano particolari modulazioni, come ad esempio la modulazione

lineare di frequenza, è possibile, tramite opportune elaborazioni del segnale, ottenere risoluzioni migliori. La risoluzione dipende infatti dalla banda (B) del segnale e non dalla sua durata, ed è pari circa ad  $1/B$ .

Esistono due tipi di radar *continuous-wave*: *unmodulated continuous-wave* e *modulated continuous-wave*.

## Unmodulated continuous-wave

In questo tipo di radar si invia un segnale sinusoidale continuo ad una certa frequenza con l'idea che lo stesso segnale rimbalzando su un oggetto, possa subire degli slittamenti in frequenza dovuti all'effetto Doppler generato dall'oggetto in movimento. Con questo tipo di radar non c'è modo di determinare la distanza dell'oggetto infatti è usato in sport come golf, tennis, baseball e corse automobilistiche.

La variazione in frequenza dovuta al Doppler dipende dalla velocità  $c'$  della luce nell'aria ( $c'$  poichè è leggermente più lenta che nel vuoto) e da  $v$  la velocità dell'oggetto *target*:

$$f_r = f_t \left( \frac{1 + v/c'}{1 - v/c'} \right)$$

Lo shift sarà quindi:

$$f_d = f_r - f_t = 2v \left( \frac{f_t}{c' - v} \right)$$

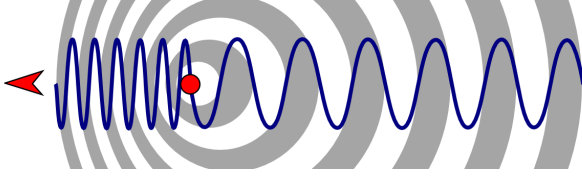


Figura 1: Variazione della lunghezza d'onda causata dal movimento dell'oggetto target

## Modulated continuous-wave

Con questo tipo di radar, anche detto Frequency-modulated continuous-wave radar (FM-CW), è possibile rilevare anche la distanza degli oggetti, migliorando l'affidabilità delle misurazioni ed è indispensabile quando è presente più di un oggetto che riflette il segnale in arrivo dall'antenna del radar. Questo tipo di radar è spesso usato come altimetro per misurare l'altezza esatta durante gli atterraggi aerei, o nei sensori di prossimità.

In questi sistemi il segnale trasmesso è un'onda con frequenza variabile e può seguire vari modelli:

- *Sawtooth wave*, con forma a dente di sega
- *Triangle wave*, con forma triangolare
- *Square wave*, con forma quadrata

In questo progetto è stato usato il modello Triangle, in cui si susseguono segnali "chirp" in salita e discesa. Il termine chirp deriva dall'inglese ed indica un suono corto e acuto, come quello emesso da un insetto o da un uccello.

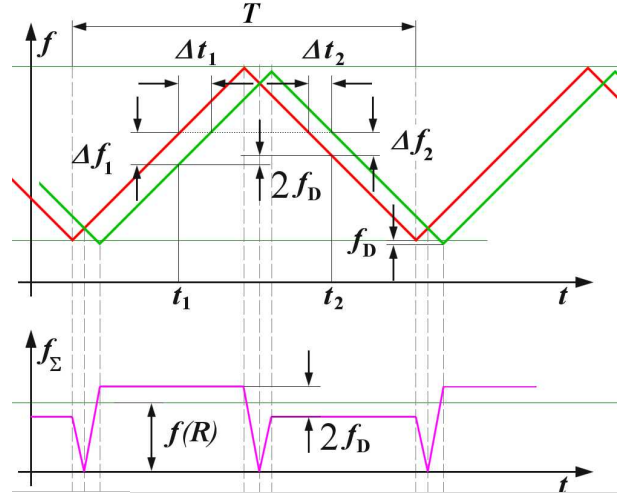


Figura 2: Variazione della lunghezza d'onda causata dal movimento dell'oggetto target

In Figura 5 sono mostrati i chirp triangolari trasmessi e ricevuti. Il chirp consiste di due rampe con pendenza opposta, entrambe di durata  $T/2$ . Il segnale ricevuto è ritardato del tempo che il segnale ha impiegato per raggiungere l'oggetto e tornare all'antenna radar. Inoltre il chirp ricevuto ha subito uno slittamento in frequenza pari a  $f_D$ .

## Segnale sintetico

Il segnale sintetico su cui abbiamo testato i metodi di stima spettrale sono appunto i chirp, un tipo di segnale di fondamentale importanza nell'utilizzo di sistemi radar.

Considerando una rampa con frequenza lineare crescente che parte da una frequenza portante  $f_c$  ed arriva ad  $f_c + B$ , allora la frequenza al tempo  $t$  può essere calcolata come:

$$f(t) = f_c + \frac{Bt}{T}$$

dove  $T$  è la durata della rampa. La fase corrispondente è l'integrale dell'equazione precedente rispetto a  $t$ :

$$\phi(t) = 2\pi(f_c t + \frac{Bt^2}{2T})$$

Quindi il segnale trasmesso può essere espresso come:

$$\mu_t(t) = \cos\left(2\pi(f_c t + \frac{B(t - mT)^2}{2T})\right)$$

Per calcolarne lo spettrogramma, il segnale è stato diviso in finestre di lunghezza  $k$  e su ogni finestra è stato applicato uno dei metodi da noi sviluppati per il calcolo del periodogramma. I periodogrammi impilati lungo l'asse temporale rappresentano lo spettrogramma del segnale.

Di seguito vengono mostrati i plot degli spettrogrammi ottenuti con le diverse tecniche e parametri calcolati su un chirp di durata 4 ms campionato a 1000 Hz che raggiunge il picco massimo di 500 Hz a 2 ms.

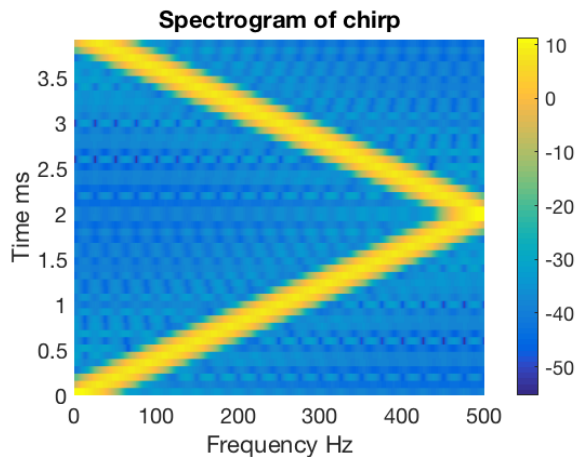


Figura 3: Spettrogramma di un chirp con  $k=80$ , utilizzando il periodogramma welch-bartlett con finestrata di hamming a 40 campioni e overlap 50%

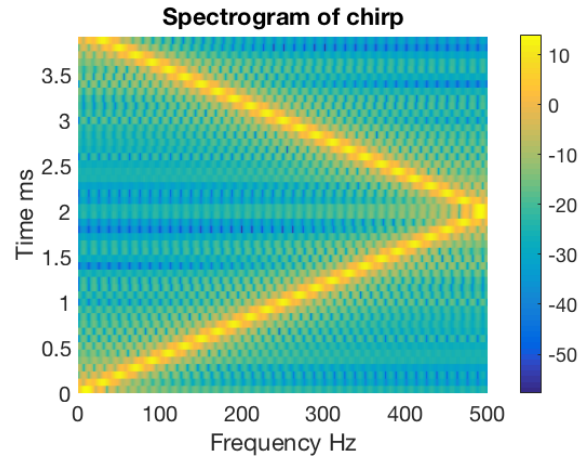


Figura 4: Spettrogramma di un chirp con  $k=80$ , utilizzando il periodogramma classico

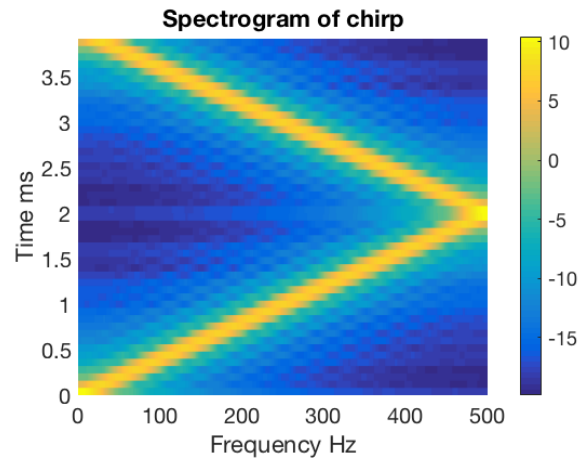


Figura 5: Spettrogramma di un chirp con  $k=80$ , utilizzando il periodogramma blackman-tuckey con finestrata di bartlett a 25 campioni

## Segnale reale

Il sensore radar FMCW è installato sulla carreggiata Est dell'Autostrada A11 nei pressi del casello di Firenze Nord ad un'altezza di 6–6.5m e punta la corsia di marcia

sul traffico in avvicinamento. I parametri principali, utili per lo scopo sono:

- Frequenza di campionamento  $F_s = 45455 \text{ Hz}$
- Tempo di rampa  $T_{sw} = 13 \mu\text{s}$
- Numero campioni per rampa  $N_s = 580$

Valutando il segnale del radar a 3dB, sul *piano verticale*, esso ha un angolo di apertura di  $30.2^\circ$  mentre sul *piano orizzontale*, ha un'apertura di  $13.2^\circ$ , questo permette di arrivare a una distanza di circa 43 m rimanendo nel fascio di apertura 10 m (senza distorsione). Calcolando lo spettrogramma, è possibile rilevare oggetti riflettenti fissi (tracce verticali in distanza costanti nel tempo), per es. il portale e gli alberi presenti all'esterno della carreggiata e oggetti riflettenti in movimento radiale (tracce oblique e variabili nel tempo), cioè i veicoli che percorrono l'autostrada.

Il segnale preso in considerazione è già stato diviso in *rampe up* e *rampe down*, inoltre non è puramente un *chirp* bensì è il segnale passato attraverso un mixer e un filtro passa basso (si prende il segnale trasmesso, quello ricevuto, se ne fa il prodotto e si prendono le componenti a bassa frequenza). Prendendo singolarmente le rampe si applicano le stesse stime spettrali non parametriche a cui era stato sottoposto il segnale sintetico:

- periodogramma e periodogramma modificato
- periodogramma di Welch-Bartlett
- periodogramma di Blackman-Tuckey

Questi metodi sono utili per la costruzione dello spettrogramma che permette di visualizzare gli oggetti fissi e mobili rilevati dal radar, l'obiettivo è quindi quello di utilizzare il metodo che permette di evidenziare nella maniera migliore questi elementi.

Gli spettrogrammi che seguono rappresentano gli spettrogrammi delle rampe up calcolate con i vari metodi.

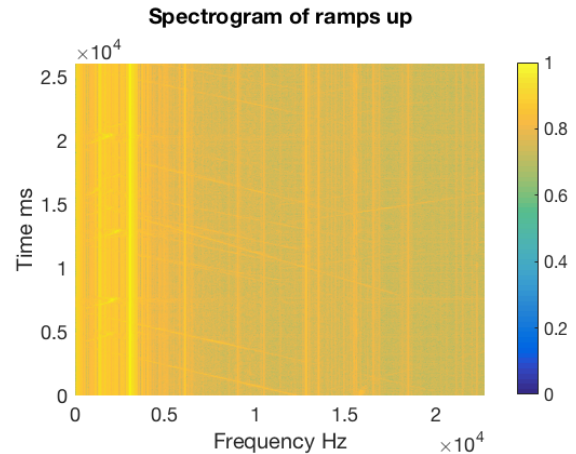


Figura 6: Periodogramma calcolato usando finestra unitaria

Come si evince dalla figura 6, usando il semplice periodogramma, non si riesce a evidenziare l'informazione ricercata. Questo può essere ricondotto al fatto che questa tecnica è affetta dal fenomeno *spectral-leakage*, in cui compaiono frequenze inaspettate rappresentate da quelli che vengono detti *lobi secondari*. Vedremo altre tecniche che cercano di risolvere questo ed altri problemi della stima.

## Metodi utilizzati

Vengono presentati i metodi di *stime spettrali non parametriche* utilizzati in questo elaborato. Questi metodi vanno a stimare la *densità spettrale di potenza* che risulta utile per la rappresentazione in frequenza di un segnale aleatorio

## Periodogramma

Partendo dall'autocorrelazione:

$$r_{xx} = \mathbb{E} [x [n + k] x^* [n]]$$

se si suppone il sistema stazionario e ergodico si può assumere il processo nullo fuori dalla finestra considerata, quindi si considera un'approssimazione dell'autocorrelazione:

$$\begin{aligned} \hat{r}_{xx}[k] &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [x [n + k] x^* [n]] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} [x [n + k] x^* [n]] \end{aligned}$$

quindi si ha che:

$$\begin{aligned} \hat{P}_{PER}(\omega) &= \mathcal{F} \{ \hat{r}_{xx}[k] \} \\ &= \sum_{k=-N+1}^{N-1} \hat{r}_{xx}[k] e^{-j\omega k} \\ &= \frac{1}{N} |X_N(\omega)|^2 \end{aligned}$$

poiché,

$$\hat{r}_{xx}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_N [n + k] x_N^* [n]$$

dove si ha che:

$$x_N[n] = \begin{cases} x[n] w_R[n] & n \in [0, N-1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$w_R[n] = \begin{cases} 1 & n \in [0, N-1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa stima risulta essere *asintoticamente non polarizzata* però non è consistente poichè la varianza si comporta come la quantità da stimare al quadrato:

$$\text{var}(\hat{P}_{PER}(\omega)) \approx (P_X(\omega))^2$$

Con *periodogramma modificato* si intende sostanzialmente un periodogramma che anzichè usare la finestra rettangolare utilizza una qualunque altra funzione di finestra (es. Hamming, Han, Kaiser ecc.) e infatti è anch'esso asintoticamente non polarizzato, a patto che venga scalato per un fattore  $U$  così che la finestra abbia energia unitaria. Tuttavia anche questo rimane non consistente.

## Metodo di Welch-Bartlett

È un metodo ideato inizialmente da Bartlett per poi essere rivisto e modificato da Welch, consiste nel fare una media dei periodogrammi calcolati su varie osservazioni della finestra, il segnale viene diviso in  $K$  finestre lunghe  $L$  e in ognuna viene calcolato il periodogramma. *Bartlett* utilizza *finestre rettangolari disgiunte*:

$$\hat{P}_{PER}^{(i)}(\omega) = \frac{1}{L} \left| \sum_{n=0}^{L-1} x_i[n] e^{-j\omega n} \right|^2$$

Quindi il periodogramma di Bartlett è dato da:

$$\hat{P}_B(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} \hat{P}_{PER}^{(i)}(\omega)$$

*Welch* utilizza invece finestre differenti da quella rettangolare (utilizza quindi dei periodogrammi modificati), con la possibilità di una sovrapposizione delle finestre stesse, senza però sovrapporre eccessivamente poichè altrimenti i periodogrammi ottenuti non sarebbero più incorrelati (questo effetto è ridotto utilizzando finestre non rettangolari).

$$\hat{P}_W(\omega) = \frac{1}{K} \left| \sum_{i=0}^{K-1} \frac{1}{LU} x_i[n] w_i[n] e^{-j\omega n} \right|^2$$

Bisogna porre particolare attenzione al trade-off che si viene a creare, infatti per una variabile aleatoria, in generale, la media su  $K$  osservazioni va a ridurre di un fattore  $K$  la varianza. Quindi in questo caso deve essere trovato un giusto compromesso fra una  $K$  elevata che permette di avere uno stimatore più affidabile e una  $L$  che essendo piccola che comporta una più bassa risoluzione in frequenza.

## Metodo di Blackman-Tuckey

La stima dell'autocorrelazione potrebbe essere non affidabile poichè le stime per i valori più grandi di  $k$  (specialmente quelli prossimi a  $N-1$ ), si basano sull'osservazione di pochi campioni e pertanto risultano poco precise. Questo metodo prevede di dare un peso minore ai coefficienti della funzione di autocorrelazione che risultano a varianza maggiore, si va dunque a introdurre una finestra di ampiezza  $2M$  che assegna un peso minore ai campioni dell'autocorrelazione che si trovano agli estremi:

$$\hat{P}_{BT}(\omega) = \sum_{k=-M}^M \hat{r}_{xx}[k] w[k] e^{-j\omega k}$$

con la necessità che  $W(\omega) \geq 0$ . Anche in questo caso è presente il trade-off "risoluzione in frequenza/accuratezza" quindi si deve cercare un buon valore di  $M$ . La varianza è pesata per un fattore dipendente dalla finestra:

$$var(\hat{P}_{BT}(\omega)) \approx (P_X(\omega))^2 \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^M w^2[k]$$

## Risultati ottenuti

Gli spettrogrammi riportati sono il frutto dell'applicazione delle stime spettrali non parametriche applicate alle prime 1000 *rampe up* del segnale reale proveniente dal radar.

Le performance di questi stimatori possono essere valutati in termini di spectral-leakage, risoluzione, bias e varianza. In particolare vediamo:

- *Spectral-leakage*: La causa principale di questo fenomeno è che il segnale su cui viene applicata la stima del periodogramma è finito. Non potendo agire sulla lunghezza del segnale, si possono usare tecniche che utilizzano finestre di tipo diverso e che riducono l'apporto dei lobi secondari.
- *Risoluzione*: Questa si riferisce all'abilità di distinguere le varie componenti spettrali del segnale analizzato. In pratica se vengono osservate due sinusoidi relativamente vicine in frequenza, è necessario che la differenza tra le due pulsazioni sia maggiore della larghezza dei lobi principali.

## Periodogramma Modificato

Nel *periodogramma modificato* si effettua una finestrazione del segnale per cercare di smussare i bordi del segnale. Questo ha l'effetto di ridurre le altezze dei lobi secondari. D'altra parte comporta anche l'allargamento del lobo principale e quindi si ottiene una riduzione della risoluzione.

Gli spettrogrammi sono stati ottenuti con la stima del periodogramma modificato utilizzando 3 diverse tipologie di finestre: *Blackman* fig.7 (più stringente rispetto a Ham-

ming poichè pone a zero gli elementi agli estremi della finestra, avendo un lobo principale più largo ma lobi secondari più contenuti), *Kaiser* fig.9 con  $\beta = 0.5$  (si riporta anche la trasformata della finestra fig. 10) e *Hamming* fig.8, che permette di evidenziare in maniera più nitida gli elementi rilevati dal radar.

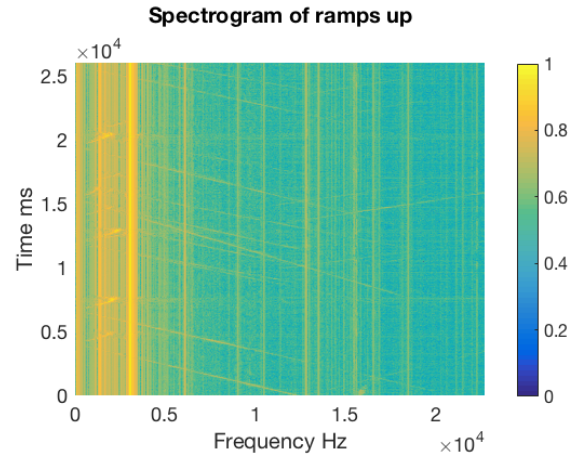


Figura 9: Period. modificato fin. Kaiser

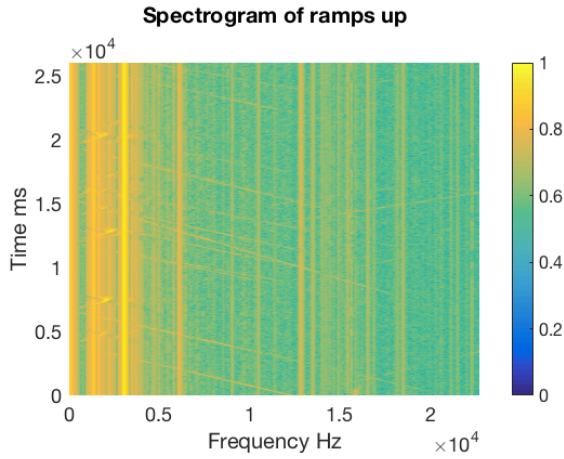


Figura 7: Period. modificato fin. Blackman

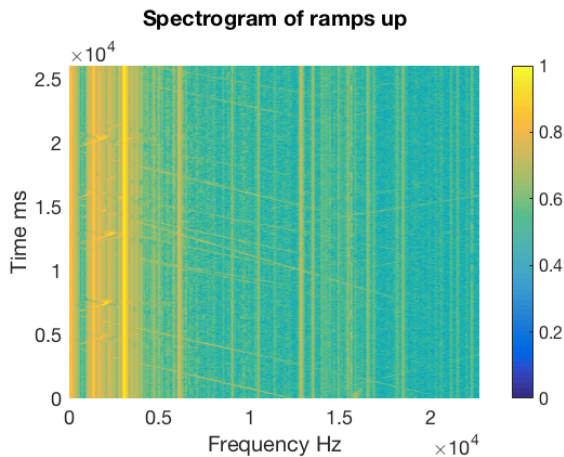


Figura 8: Period. modificato fin. Hamming

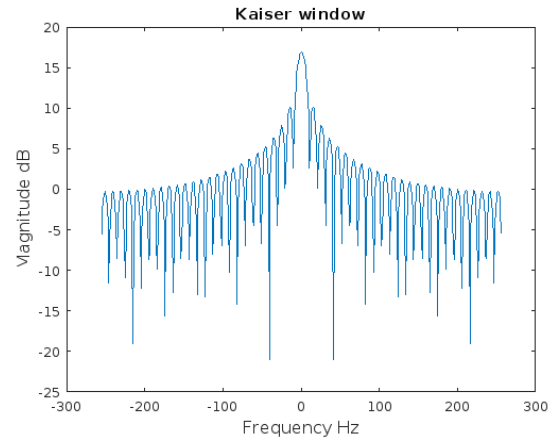


Figura 10: Trasformata finestra di Kaiser

## Metodo di Welch-Bartlett

Come visto in precedenza questo metodo consiste nel dividere il segnale in segmenti (possibilmente sovrapposti), calcolare il periodogramma per ognuno di essi e infine farne la media.

Vengono presentati i risultati ottenuti applicando il periodogramma di Welch usando le finestre (lunghe 256) di *Blackman* figg.11, 12 e *Hamming* figg.13, 14 con una sovrapposizione del 50% e del 30%. Si nota che la sovrapposizione del 30% va a sporcare



un po' lo spettrogramma, soprattutto con la finestra di Blackman fig.12. Mentre con la sovrapposizione del 50% si ottiene un risultato pressoché identico con entrambe le finestre, evidenziando le strutture rilevate dai radar.

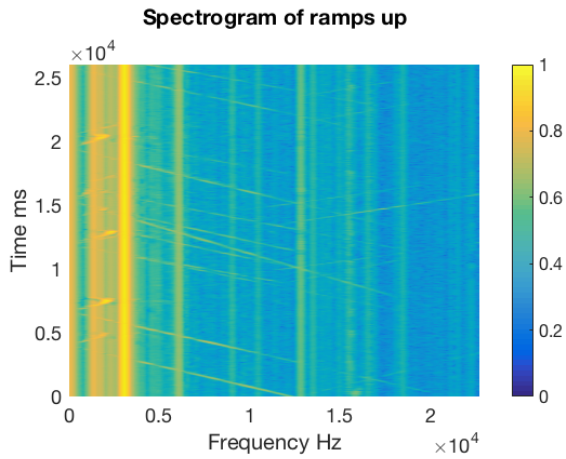


Figura 11: Period. Welch fin. Blackman overlap 50%

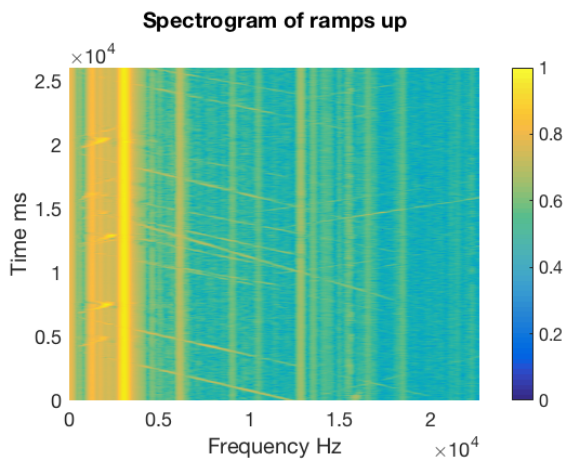


Figura 12: Period. Welch fin. Blackman overlap 30%

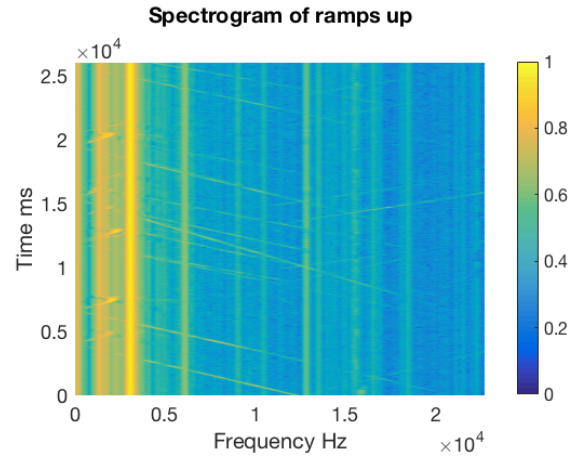


Figura 13: Period. Welch fin. Hamming overlap 50%

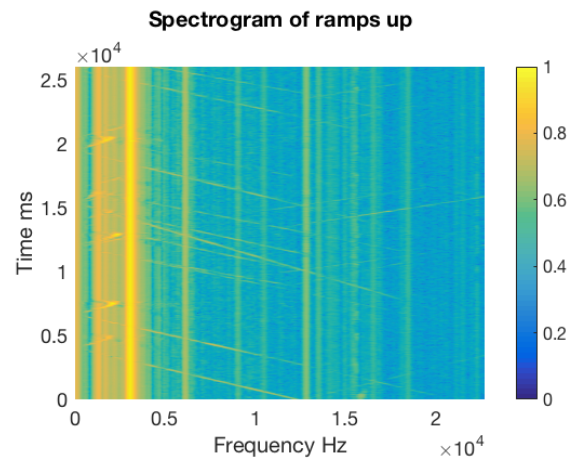


Figura 14: Period. Welch fin. Hamming overlap 30%

## Metodo di Blackman-Tuckey

Questo metodo prevede di dare un peso minore ai coefficienti della funzione di autocorrelazione introducendo una finestra di ampiezza  $2M$  che assegna un peso minore ai campioni dell'autocorrelazione che si trovano agli estremi.

Le finestre utilizzate, di lunghezza 256, sono *Parzen* fig.16 e *Bartlett* fig.17. La finestra di *Parzen* è data dall'equazione:



$$w[n] = \begin{cases} 1 - 6 \left( \frac{|n|}{N/2} \right)^2 + 6 \left( \frac{|n|}{N/2} \right)^3 & 0 \leq |n| \leq \frac{N-1}{4} \\ 2 \left( 1 - \frac{|n|}{N/2} \right)^3 & \frac{N-1}{4} < |n| \leq \frac{N-1}{2} \end{cases}$$

Si nota che con Parzen si ha una minor risoluzione anche se risaltano di più gli oggetti rilevati dal radar, questo può essere riconducibile alla struttura in frequenza della finestra (fig.15).

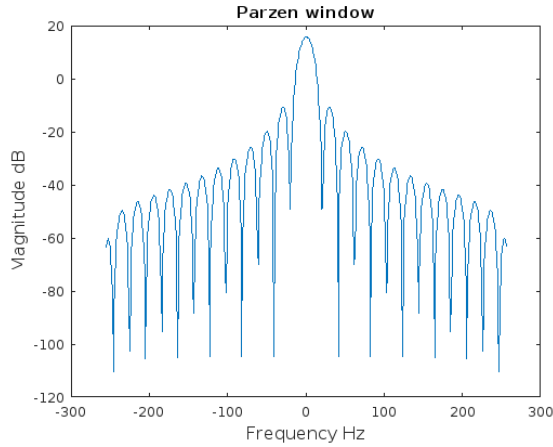


Figura 15: Trasformata della finestra di Parzen

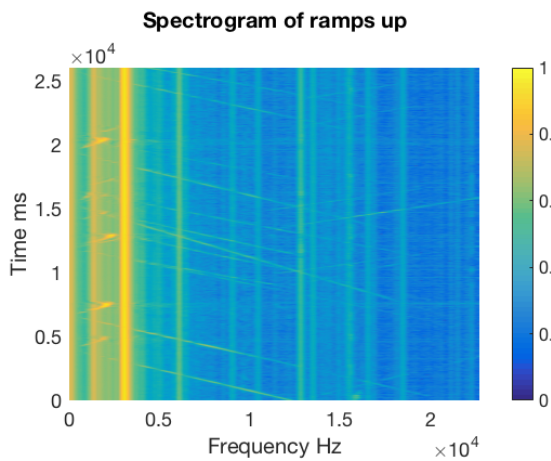


Figura 16: Period. Blackman-Tuckey fin. Parzen

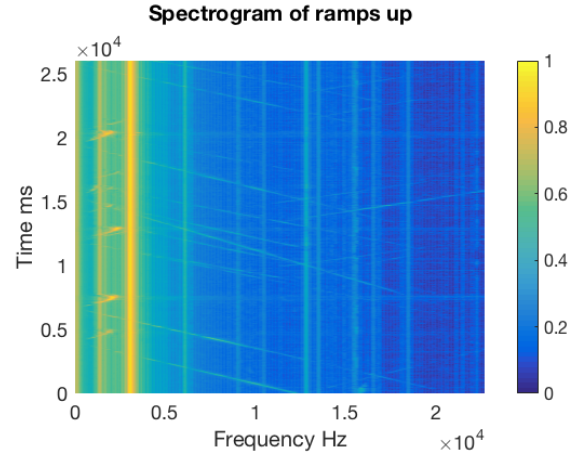


Figura 17: Period. Blackman-Tuckey fin. Bartlett

## Conclusioni

La valutazione dei metodi di *stima spettrale non parametrici* applicati a un segnale è stata effettuata utilizzando, inizialmente, un segnale sintetico (chirp) che è stato utile per capire il funzionamento dei metodi e calibrare alcuni parametri in vista dell'applicazione ai dati reali. Non è stata possibile una ricostruzione della rampa come nel caso del chirp poichè il segnale reale è dato da una combinazione del segnale inviato e ricevuto dal radar e successivamente filtrato con un filtro passa-basso. La valutazione sulla bontà dei metodi è quindi stata fatta valutando lo spettrogramma delle prime 1000 *rampe up* del radar, cercando i metodi che rappresentassero in maniera più nitida possibile gli oggetti fissi e variabili rilevati nel tempo.