

Optimisation d'un réseau de distribution d'eau

Description générale

Vous êtes en charge de l'optimisation du fonctionnement d'un réseau de distribution d'eau dans une région montagneuse. Celle-ci comporte un certain nombre de

- ◇ points d'approvisionnement (c'est-à-dire de sources dont on extrait l'eau),
- ◇ points de consommation (d'où l'eau est envoyée vers les clients finaux),
- ◇ points intermédiaires (sans approvisionnement ni consommation),
- ◇ conduites reliant deux points (d'approvisionnement/de consommation/intermédiaires).

Votre projet comportera trois volets :

- I. Analyse d'un réseau existant et de son coût de fonctionnement
- II. Améliorations du réseau par construction de châteaux d'eau
- III. Conception d'un réseau optimal (topologie et dimensionnement des conduites)

Hypothèses

On n'étudiera que le réseau qu'en régime stationnaire : l'extraction aux points d'approvisionnement, la consommation et la circulation de l'eau dans les conduites seront supposées s'effectuer à débits constants. Sauf mention contraire on rapportera les chiffres à une heure de fonctionnement.

Le débit (mesuré en m^3/h) de l'eau qui s'écoule dans une conduite est donné par l'expression

$$\alpha \theta_c \frac{R_c^2 \Delta h_c}{L_c}$$

où α est une constante de proportionnalité, Δh_c est la différence de hauteur entre les extrémités de la conduite, R_c le rayon de la conduite, L_c sa longueur, et θ_c un paramètre ajustable compris entre 0 et 1 permettant de réguler le débit (implémenté à l'aide d'une valve).

Chaque source peut fournir un certain débit d'eau maximal. Le coût (horaire) d'extraction aux sources est proportionnel au débit ; de même le montant (horaire) facturé en chaque point de consommation est proportionnel au débit.

Le réseau existant des conduites est donné par sa matrice d'incidence : celle-ci comporte une ligne par point, une colonne par conduite, et l'élément situé en position (p, c) vaut -1 si la conduite c part du point p (point haut) et vaut $+1$ si la conduite c arrive au point p (point bas).

Toute hypothèse supplémentaire utilisée doit être mentionnée et commentée dans le rapport.

Données fournies

Coordonnées des points d'approvisionnement et de consommation (y compris hauteurs), matrice d'incidence et rayons des conduites, constante de proportionnalité α , débits maximaux extractibles aux points d'approvisionnement et leurs coûts, valeurs minimales et maximales du débit en chaque point de consommation et prix facturés.

I. Analyse d'un réseau existant

Question I.1 Soit h un vecteur contenant les hauteurs en chaque point, soit f un vecteur contenant les débits circulant dans les conduites, et soit A la matrice d'incidence du réseau.

Que représentent les expressions $A^T h$ et Af ?

Question I.2 Un profil de consommation est un vecteur qui regroupe les débits fournis en chacun des points de consommation. On s'intéresse aux profils de consommation qui sont réalisables par le réseau, c'est-à-dire qu'on peut obtenir en choisissant les positions des valves (c'est-à-dire les paramètres θ) de chaque conduite.

Modélisez l'ensemble de ces profils réalisables à l'aide de contraintes linéaires (utilisez si possible la réponse fournie au point précédent). Démontrez que cet ensemble est un polyèdre (chacun de ses points est donc un profil de consommation). Décrivez une procédure permettant de déterminer si un profil donné est réalisable par le réseau.

Indice : on peut utiliser le théorème suivant : l'image d'un polyèdre par une transformation linéaire est également un polyèdre.

Question I.3 On suppose à présent qu'on dispose, pour chaque point de consommation, d'un débit minimal (en dessous duquel on ne peut pas descendre) et d'un débit maximal (correspondant à la demande maximale). On dispose également du coût d'extraction pour chaque source (proportionnel au débit extrait) ainsi que du prix facturé (proportionnel au débit réellement fourni et consommé) en chaque point de consommation. Le bénéfice réalisé par le gestionnaire de réseau est égal au montant facturé pour les consommations duquel on soustrait le coût de ce qui est extrait aux sources.

Formulez comme un problème d'optimisation linéaire (continu) la maximisation du bénéfice horaire (en déterminant donc au passage les consommations, qui doivent respecter leurs bornes inférieures et supérieures). Donnez les dimensions du problème (nombres de variables et de contraintes) en fonction de la taille des données du problème.

Conseil : il existe plusieurs façons de modéliser ce problème de façon linéaire. Cependant, certaines formulations ne sont pas appropriées pour les questions des parties II et III. Essayez en particulier d'éliminer de la formulation d'éventuelles variables qui ne sont pas indispensables au modèle.

Question I.4 Résolvez numériquement le problème I.3 avec les données fournies.

Indice : un mini-jeu de données est également présent sur Moodle, pour lequel la solution optimale du problème est fournie afin de vous aider à vérifier l'exactitude de votre modèle

II. Améliorations du réseau

Question II.1 Supposez à présent que les points de consommation soient disposés à dépasser leur demande maximale : ils sont prêts à l'augmenter de 25%, mais à condition d'obtenir une réduction de 50% sur le prix (réduction accordée uniquement sur la partie qui dépasse la demande maximale initiale). Modélisez cette nouvelle situation, toujours de façon linéaire (continue).

Question II.2 Est-il possible de modéliser de façon linéaire et continue une situation similaire au point II.1 mais où le dépassement de la demande maximale initiale conduirait à une *augmentation* du prix de 50% sur le débit supplémentaire ?

- Question II.3 Déterminez numériquement si l’option décrite au point II.1 est rentable avec les données fournies. On utilisera ce modèle pour les questions suivantes.
- Question II.4 Supposez qu’il soit possible d’augmenter la hauteur de certains points d’approvisionnement ou point intermédiaires à l’aide de châteaux d’eau. Un château d’eau augmente la hauteur d’un point d’approvisionnement ou d’un point intermédiaire. Son coût de construction est proportionnel à sa hauteur (bornée par une valeur maximale). Expliquez comment on peut déterminer, sans effectuer de calcul supplémentaire, quels sont les points d’approvisionnement pour lesquels il pourrait a priori être rentable d’installer un château d’eau, en considérant que la construction doit être amortie après dix ans au maximum.
- Question II.5 A l’aide de calculs supplémentaires cette fois, mais toujours en gardant une formulation linéaire et continue, déterminez numériquement le bénéfice maximal qu’on peut obtenir en consacrant un budget donné à ces constructions.

III. Conception d’un réseau optimal

- Question III.1 Il n’est pas très réaliste de supposer qu’on peut construire un château d’eau de n’importe quelle hauteur. Supposez à présent qu’on ne peut construire que des châteaux d’eau de la hauteur maximale. Formulez comme un problème d’optimisation linéaire (mais pas nécessairement continu) le problème de la maximisation du bénéfice (incluant les coûts de construction) sur un horizon de dix ans.
- Question III.2 Résolvez le modèle du point III.1 numériquement à l’aide d’un algorithme de type branch-and-bound, que vous exécuterez *manuellement* (représenter graphiquement l’arbre dans votre rapport).
- Question III.3 Supposez à présent que vous puissiez repartir de zéro et choisir la position des conduites et leur rayons (sans considérer de château d’eau). Vous pouvez donc a priori construire une conduite entre n’importe quelle paire de points. Le coût de construction d’une conduite sera proportionnel à son volume. Formulez le problème de la conception d’un réseau optimal (c’est-à-dire maximisant le bénéfice, toujours sur le même horizon).
- Question III.4 Résolvez numériquement le problème de la question précédente. Commentez le nombre de conduites par rapport à ce qui était a priori possible de construire ; était-ce prévisible ?
- Question III.5 *Bonus.* Supposez que les rayons des conduites ne peuvent être choisis arbitrairement mais doivent appartenir à une liste pré-définie : modélisez et résolvez le problème de la conception d’un réseau optimal correspondant.

IV. Remarques finales

En plus de répondre aux questions posées (en justifiant) et de calculer ce qui est demandé, votre rapport doit commenter votre démarche et vos résultats. On peut par exemple

- ◇ représenter les solutions obtenues à l’aide de tables ou de graphiques, calculer des indicateurs statistiques, commenter la structure et tenter de l’expliquer intuitivement ;
- ◇ comparer la solution d’un modèle plus sophistiqué à celle du modèle de base, tenter d’expliquer les différences ;
- ◇ expliquer pourquoi vous avez procédé d’une façon plutôt qu’une autre (ou pourquoi vous avez posé certaines hypothèses) ;
- ◇ ou inclure toute autre observation (ou commentaire) que vous jugez pertinente.

Consignes

1. Le projet se réalise par groupe de trois étudiants.
2. Les données mentionnés dans l'énoncé seront fournies sur le site MOODLE
3. Les groupes peuvent échanger leurs réflexions, partager leurs idées et comparer leurs résultats. Ils ne peuvent pas copier les solutions obtenues ou les programmes informatiques. L'utilisation de toute information ou aide extérieure doit obligatoirement être mentionnée dans le rapport, en citant la source.
4. Vous pouvez poser vos questions sur le projet par email ou de vive voix (après prise de rendez-vous) à Emilie Renard (emilie.renard@uclouvain.be, bâtiment Euler, IC-TEAM/INMA). Plusieurs permanences seront également organisées durant le quadrimestre (voir Moodle).
5. Un rapport décrivant le travail effectué et répondant aux questions de l'énoncé est à fournir au plus tard le **vendredi 17 mai 2019**, via Moodle, accompagné de l'ensemble des codes utilisés. L'utilisation d'un notebook est souhaitée, au minimum pour la génération de l'ensemble des résultats numériques (qui doivent être reproductibles en évaluant le notebook), et éventuellement également pour le rapport complet (dans ce cas on pourra faire en sorte que les codes soient cachés par défaut).
6. Le rapport ne dépassera en aucun cas **20 pages** (annexes comprises ; pour un notebook le nombre de pages correspond à l'impression en PDF).

Changelog

- ◇ 2/4/2019 (v1.0) : publication de la version initiale de l'énoncé (trois volets)
- ◇ 29/4/2019 (v2.0) : clarification du texte à de nombreux endroits (y compris les consignes) ; ajout de plusieurs indices et conseils ; ajout d'un mini-jeu de données pour validation du modèle initial ; ajout de remarques finales (commenter la démarche) ; consigne de rapporter les résultats par heure (au lieu de par année) ; précision sur le coût de construction des conduites (proportionnel au volume)