B0911005Y-01: Introduction to Theory of Computation	**2023 Spring**

Homework 3 — March 31

Lecturer: Mingji Xia — *Completed by:* 吉骏雄

第 3.1 次作业: 3.1(d), 3.2(d). 勘误: 图 3-4, q_5 **状态上的** $x \to R$ **改为** $x \to L$

3.1 此练习与图灵机 M_2 有关, 例 3.4 给出了它的描述及状态图. 在下列每个输入串上, 给出 M_2 所进入的格局序列. 例 3.4 中 M_2 如下:

描述图灵机 M_2, 它判定的语言是所有由 0 组成、长度为 2 的方幂的字符串, 即 $A = \{0^{2^n} \mid n \geq 0\}$.

下面给出 $M_2 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$ 的形式化描述:

- $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\}$
- $\Sigma = \{0\}$
- $\Gamma = \{0, x, \sqcup\}$
- 状态转移如图 3.1

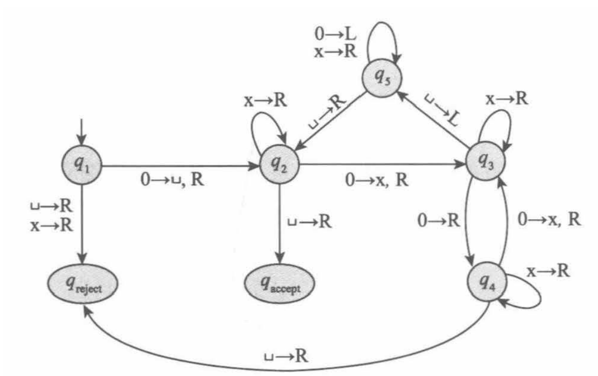

图 3.1. 例 3.4 图灵机 M_2 的状态图 (q_5 上状态有误)

(d) 000000 (注: 一共 6 个 0)

$q_1 000000$, $\sqcup q_2 00000$, $\sqcup x q_3 0000$, $\sqcup x 0 q_4 000$, $\sqcup x 0 x q_3 00$, $\sqcup x 0 x 0 q_4 0$, $\sqcup x 0 x 0 x q_3$,
$\sqcup x 0 x 0 q_5 x$, $\sqcup x 0 x q_5 0 x$, $\sqcup x 0 q_5 x 0 x$, $\sqcup x q_5 0 x 0 x$, $\sqcup q_5 x 0 x 0 x$, $q_5 \sqcup x 0 x 0 x$, $\sqcup q_2 x 0 x 0 x$
$\sqcup x q_2 0 x 0 x$, $\sqcup x x q_3 x 0 x$, $\sqcup x x x q_3 0 x$, $\sqcup x x x 0 q_4 x$, $\sqcup x x x 0 x q_4$, $\sqcup x x x 0 x q_{\text{reject}}$

3.2 此练习与图灵机 M_1 有关, 例 3.5 给出了它的描述及状态图. 在下列每个输入串上, 给出 M_1 所进入的格局序列. 例 3.5 中 M_1 如下:

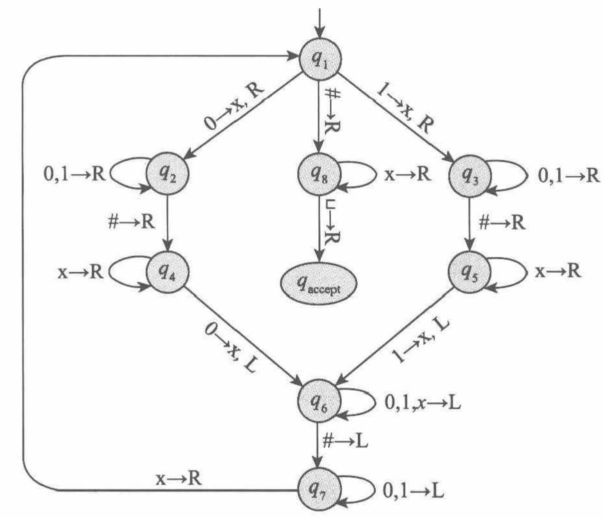

图 3.2. 例 3.5 图灵机 M_1 的状态图

$M_1 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$, 它判定的语言是 $B = \{w\#w \mid w \in \{0,1\}^*\}$ 状态转移如图 3.2

(d) 10#11

$$q_1 10\#11,\ xq_3 0\#11,\ x0q_3\#11,\ x0\#q_5 11,\ x0q_6\#x1,\ xq_7 0\#x1,$$
$$q_7 x0\#x1,\ xq_1 0\#x1,\ xxq_2\#x1,\ xx\#q_4 x1,\ xx\#xq_4 1,\ xx\#xq_{\text{reject}} 1$$

第 3.2 次作业：3.9. 补充题 (见题目). 选做题：3.22

3.9 设 A 是仅含一个串 s 的语言, 其中：

$$s = \begin{cases} 0 & \text{如果火星上没有任何生命} \\ 1 & \text{如果火星上发现生命} \end{cases}$$

A 是可判定的吗？为什么？在本题中, 假设 “火星上是否有生命” 这一问题的答案只有 “有” 或 “没有” 两种.

解 是可判定的. 因为 A 只有两种可能: $\{0\}$ 或者 $\{1\}$. 这两个都是有限的语言, 因而都是图灵可判定的, 很容易能给出两个图灵机的构造, 分别识别这两种语言, 如图 3.3. 虽然我们并不知道到底哪一个能识别 A, 但是一定有一个可以.

补充题: 对于字母表 $\{0,1\}$ 上的语言 $\{\omega \mid \omega$ 所包含的0 的个数是1 的个数的两倍$\}$:

1. 给出识别它的下推自动机的状态图
2. 以高层次描述给出判定它的图灵机
3. 基于 2, 画出判定它的图灵机的状态图

解

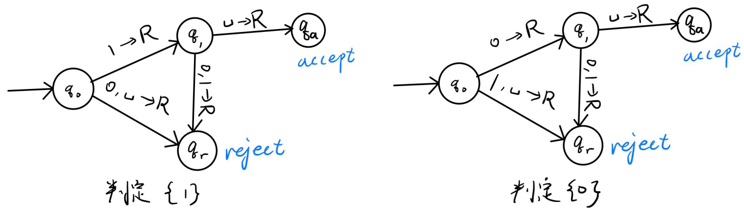

图 **3.3.** 3.9

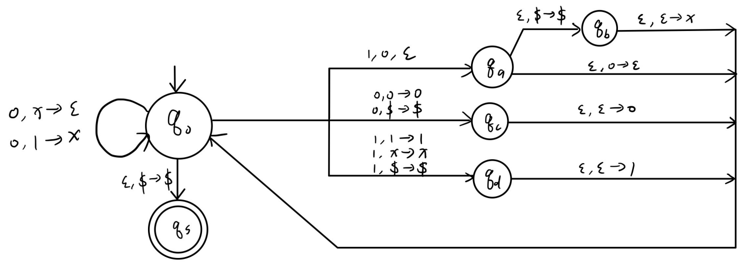

图 **3.4.** 3. 补充题 1

1. 如图 3.4.
2. 从字符串的左侧向右读. 每当读到一个 0 时, 消去这个 0, 并且向右走, 消去最近的一个 0 和一个 1 再返回; 每当读到一个 1 时, 消去这个 1, 并且向右走, 消去最近的两个 0 再返回; 读到 x, 直接将之改为空, 再向右走. 读到最右侧的空字符时, 必须没有待消除的字符 (需要成对消除的都已经消除了), 否则拒绝. 消除字符的方法为将之改为 x.
3. 如图 3.5.

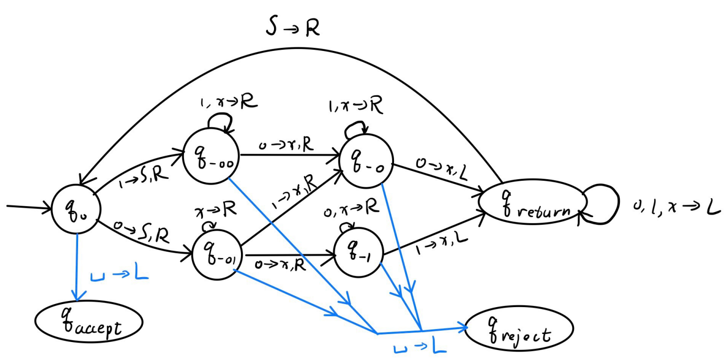

图 **3.5.** 3. 补充题 2

选做题：3.22 设 k-PDA 表示有 k 个栈的下推自动机. 因此, 0-PDA 就是一个 NFA, 1-PDA 就是通常的 PDA. 已经知道 1-PDA 比 0-PDA 更强（识别更大的语言类）.

1. 证明 2-PDA 比 1-PDA 更强.
2. 证明 3-PDA 不比 2-PDA 更强.

（提示：用两个栈来模拟一个图灵机带.）

证明

1. 尝试用两个栈模拟一个图灵机带. 两个栈是相对的, 栈顶均存储对应图灵机读写头在纸带上的位置, 栈 (除了栈底标志 \$ 外的) 最底部的一个字符为输入字符串两端的两个字符, 分别按顺序向中间压入所有字符串字符. 如果读写头的位置向右超出原本字符串的区域, 初次更改时表示右侧子串的栈会变空, 此时向左侧不断压栈即可, 这样能 "延伸字符串长度". (因为是选做题懒得写太仔细, 于是) 举个例子, 如图 3.6, 为一个对应的例子.

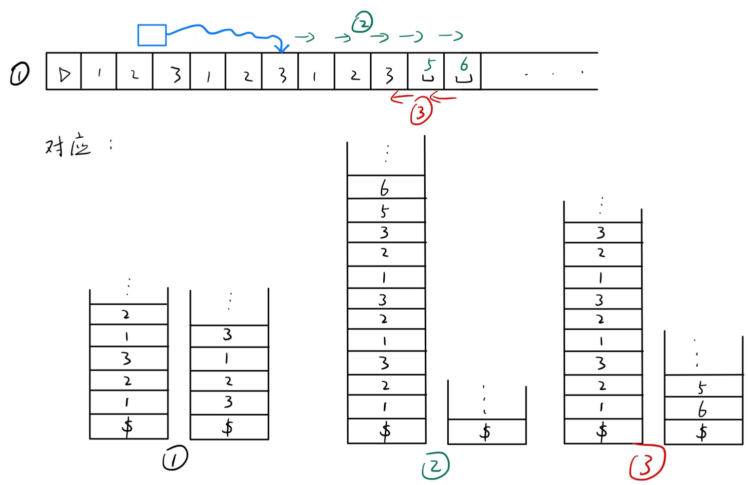

图 3.6. 3.22

这样完全可以把纸带和两个栈等效起来.

2. 一个很有意思的构造: 普通图灵机既然与两个栈等效, 那我们考虑与普通图灵机等效的另一类: 双无限带图灵机. 这类图灵机如果左半部分只用作一个栈 (很简单就可以做到这件事), 并且右半部分当作通用图灵机使用的话, 新产生的机器和 3-PDA 等效 (因为等效于三个栈), 表示能力不会比 2-PDA 更弱; 而其表示能力不会强过双无限带图灵机 (与普通图灵机等效, 进而与 2-PDA 等效), 因此不会比 2-PDA 更强.

□

第 3.3 次作业：3.15(b), 3.13

3.15 证明图灵可识别语言类在下列运算下封闭：

(b) 连接

证明 对两个图灵可识别语言 A, B, 分别构造对应的普通图灵机 M_A, M_B 能识别这两个语言. 构造一个有三带且可分别读写的图灵机. 规定三个纸带的功能如下:

1. 存放输入字符串, 并且只读不写.
2. 可以存放从输入字符串中取出的一个子串, 并选择用普通图灵机 M_A, M_B 之一对之操作至多 n 次 (n 为任意给定的正整数), 判断其是否已达到接受状态.
3. 记录两个数据: 分割输入字符串为两个子串的位置; 将其操作的次数上限 n.

对这个新图灵机的作用描述: 对于正整数 $n = 1, 2, 3, \ldots$, 依次增大 n, 并进行如下操作:

将输入字符串拆分成两个子串 (其连接为输入的字符串), 遍历每一种可能性, 分别对前串和后串模拟使用 M_A, M_B 进行至多 n 步的判定.

如果两个字符串都获得模拟接受的结构, 那么接受输入字符串; 否则, 让 n 增大 1, 循环进行这个操作.

□

3.13 证明：一个语言是可判定的, 当且仅当有枚举器以标准字符串顺序枚举这个语言.

证明 "$\Longrightarrow$": 忽略输入. 对所有字符串按字典序排序, 依次投入枚举器中; 枚举器检查这个字符串是否在语言中 (由于这是个可判定的语言, 一定能进入停机状态, 不会无限运转而不停机), 如果进入接受格局, 则输出之, 否则不输出. 不断按顺序检查字符串, 枚举器会按字符串顺序给出任意一个语言中的字符串作为输出.

"$\Longleftarrow$": 若 L 是有限语言, 显然存在一个判定器 M 识别 L: 其可用状态记录 L 中的所有元素, 并将输入与记录的元素一一比对, 从而判定 L. 判定器显然会在有限步内停机.

若 L 是无穷语言, 判定器 M 按如下方式运行 $M =$ " 对于输入 ω:

1. 运行 E, 每当 E 输出一个串, 将其与 ω 比较
2. 如果 ω 与该输出串相同, 则接受, 如果 ω 按字符串顺序排在该输出串之前, 则拒绝, 否则返回 1.

". 由 L 是无穷语言知, 其包含串 ω' 且 ω' 按字符串顺序排在 ω 之后. 枚举器 E 将在有限步内枚举到 ω'. 由于 E 按照字符串顺序枚举, 因此枚举到 ω' 时便知 $\omega \notin L$.

综上, M 识别语言 L, 并在任意输入上都停机. □