B0911005Y-01: Introduction to Theory of Computation	**2023 Spring**

Homework 5 — April 28

Lecturer: Mingji Xia | *Completed by:* 吉骏雄

第 5.1 次作业：4.24，补充填空题, 5.4，5.11，5.11 中的 0^*1^* 可以替换成具有什么性质的语言？

4.24 设 C 是一个语言。证明 C 是图灵可识别的，当且仅当存在一个可判定语言 D, 使得 $C = \{x \mid \exists y\,(\langle x, y\rangle \in D)\}$。

证明 仅当: 如果 C 是可识别的, 那么一定存在一个 M_C 识别 C, 并且存在图灵可识别语言 D 如下: $\langle x, y\rangle \in D$ (其中考虑 y 对应的二进制编码, 将之视作二进制数处理), 当且仅当 $x \in C$ 并且 M_C 仅用至多 $\langle y\rangle$ 步就能进入停机状态. 显然, M_C 运行 $\langle y\rangle$ 步以上后, 便不可能再接收 x, 直接将其拒绝; 因此构造能够模拟 M_C 运行的图灵机 M_D 来接收 D, 它对于任何输入都是会停机的: 若没有达到 $\langle y\rangle$ 步, 则继续, 若达到, 则停机. 这样构造的 M_D, 对于 M_C 接收的任何一个元素 x, 由于图灵机计算步骤的有限性, 一定存在计算步骤能使 M_C 在输入 x 后的计算在有限步内停机, 因此存在符合定义的 y.

当: 如果存在这样的 D, 可以构造一个 M_D 判定之. 我们构造 M_C 去识别语言 C, 方式是: 对输入 x, 令 M_C 按字符串顺序遍历 $\langle y\rangle$ 的所有可能性, 每次以 $\langle x, y\rangle$ 作为输入, 模拟 M_D 的运行. 若 M_D 接受, 则接受; 若拒绝, 则继续尝试下一个 y. 这样构造的 M_C, 对于任意 $\langle x, y\rangle \in D$ 中的 x, 均能找到 y 使之接收; 但对于其他输入 x, 均不能停机. 这符合图灵可识别的定义, 且 M_C 识别的语言是 C.

两个方向均证毕, 得证. □

填（空）题：（仿照 4.24）语言 C 是补图灵可识别的，当且仅当（空）一个可判定语言 D，使得 $C = \{x \mid \}$。

解 语言 C 是补图灵可识别的，当且仅当存在一个可判定语言 D，使得 $C = \{x \mid \forall y\,(\langle x, y\rangle \in D')\}$ (D' 是 D 的补)。

5.4 如果 $A \leq_m B$ 且 B 是一个正则语言，这是否蕴涵着 A 也是一个正则语言？为什么？

解 不是. 因为映射归约的过程是可计算函数, 可计算函数是图灵可判定的, 未必能够满足正则语言的要求. 其实 A 是可判定语言即可.

举例: 语言 $A = \{x \mid x\text{中 0,1 数量相同}\}$ 是一个可判定语言, 但不是正则语言. $B = \{1\}$ 是一个正则语言. 由于 A 的可判定性, 存在一个函数 $f(x)$, 其值在 $x \in A$ 时为 1, 否则为 0. 因此 $x \in A \iff f(x) \in B$, 满足映射归约.

5.11 证明当且仅当 $A \leq_m 0^*1^*$ 时，A 是可判定的。

证明 当: 0^*1^* 是可判定的, 根据定理 5.16 (如果 $A \leq_m B$ 且 B 是可判定的, 那么 A 也是可判定的), 显然 A 是可判定的。

仅当: 考虑一个图灵可判定的 A，那么对应存在一个可计算函数 f，使任意字符串 x 能够最终进入接受或者拒绝状态, 如果 A 接受 x，$f(x) = 01$, 否则 $f(x) = 10$. 因此 $x \in A \iff f(x) \in B$, 满足映射归约. □

5.11 附加： 5.11 中的 0^*1^* 可以替换成具有什么性质的语言？

证明 所有非平凡的可判定语言均可 (即除去 Σ^* 与 $\varnothing$ 以外的可判定语言). □

第 5.2 次作业：2 道题

1 考虑下面的判定问题:“对于任意给定的图灵机 M，判定 M 是否接受字符串 010?”

(a) 将此判定问题写成为一个语言 L_{010}，使得图灵机 M 接受字符串 010 当且仅当 $\langle M\rangle \in L_{010}$。

(b) 通过构造从 A_{TM} 到 L_{010} 的归约，用反证法证明 L_{010} 是不可判定的。

(c) 使用 Rice 定理证明 L_{010} 是不可判定的

证明 构造语言 $L_{010} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ 是图灵机且} M(010) = 1\}$.

方法一:

我们假设 L_{010} 是可判定的, 那么可以给出一个从 A_{TM} 到 L_{010} 的归约, 进而说明 A_{TM} 的可判定性. 构造能够判定语言 A_{TM} 的图灵机 S 的方法如下:

$S =$ “对于输入 $\langle M, \omega\rangle$, 其中 M 是图灵机, ω 是字符串:

1. 构造一个图灵机 M_ω, 无论给予什么样的输入, 它都能根据输入 $\langle M\rangle$ 来判定图灵机 M 是否接受字符串 ω, 选择自己是否接受输入字符串; 即如果 $M(\omega) = 1$, 则 $M_\omega \equiv 1$; 否则 $M_\omega \equiv 0$.
2. 模拟在输入 $\langle M_\omega\rangle$ 上运行 L_{010}
3. 如果 L_{010} 接受, 则接受; 如果 L_{010} 拒绝, 则拒绝”

这样, A_{TM} 就是可判定的. 这与它实际上不可判定的事实矛盾, 因此假设不成立, L_{010} 是不可判定的.

方法二: 考虑 $\mathcal{P} = \{A \mid A\text{是语言, 且}010 \in A\}$, 则 $L_{010} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ 是图灵机且} L(M) \in \mathcal{P}\}$. 这样根据 Rice 定理, 满足如上性质 $\mathcal{P}$ 的图灵机编码集合 L_{010} 是不可判定的. □

2 令 $ALL_{TM} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ 是图灵机且} L(M) = \Sigma^*\}$.

(a) 通过构造从 A_{TM} 到 ALL_{TM} 的归约，用反证法证明 ALL_{TM} 是不可判定的.

(b) 使用 Rice 定理证明 ALL_{TM} 是不可判定的.

(c) 通过构造从 ALL_{TM} 到 EQ_{TM} 的归约，用反证法证明 EQ_{TM} 是不可判定的. (EQ_{TM} 的定义见教材 P139)

证明

(a) 我们假设 ALL_{TM} 是可判定的, 那么可以给出一个从 A_{TM} 到 ALL_{TM} 的归约, 进而说明 A_{TM} 的可判定性. 构造能够判定语言 A_{TM} 的图灵机 S 的方法如下:

   $S =$ “对于输入 $\langle M, \omega\rangle$, 其中 M 是图灵机, ω 是字符串:

   (a) 构造一个图灵机 M_ω, 无论给予什么样的输入, 它都能根据输入 $\langle M\rangle$ 来判定图灵机 M 是否接受字符串 ω, 选择自己是否接受输入字符串; 即如果 $M(\omega) = 1$, 则 $M_\omega \equiv 1$; 否则 $M_\omega \equiv 0$.

   (b) 模拟在输入 $\langle M_\omega\rangle$ 上运行 ALL_{TM}

(c) 如果 ALL_{TM} 接受, 则接受; 如果 ALL_{TM} 拒绝, 则拒绝”

这样, A_{TM} 就是可判定的. 这与它实际上不可判定的事实矛盾, 因此假设不成立, ALL_{TM} 是不可判定的.

(b) 考虑 $\mathcal{P} = \{A \mid A\text{是语言, 且}L(A) = \Sigma^*\} = \{\Sigma^*\}$, 则 $ALL_{TM} = \{\langle M\rangle \mid M$ 是图灵机且$L(M) \in \mathcal{P}\}$. 这样根据 Rice 定理, 满足如上性质 $\mathcal{P}$ 的图灵机编码集合 ALL_{TM} 是不可判定的.

(c) 我们假设 EQ_{TM} 是可判定的, 那么可以给出一个从 ALL_{TM} 到 EQ_{TM} 的归约, 进而说明 ALL_{TM} 的可判定性. 构造能够判定语言 ALL_{TM} 的图灵机 S 的方法如下:

$S =$ “对于输入 $\langle M\rangle$, 其中 M 是图灵机:

(a) 构造一个图灵机 M_{ALL}, 满足 $L(M_{ALL}) = \Sigma^*$. 由于 Σ^* 是正则语言, 所以这件事情很容易做到.

(b) 模拟在输入 $\langle M, M_{ALL}\rangle$ 上运行 EQ_{TM}

(c) 如果 EQ_{TM} 接受, 则接受; 如果 EQ_{TM} 拒绝, 则拒绝”

这样, ALL_{TM} 就是可判定的. 这与它实际上不可判定的事实矛盾, 因此假设不成立, EQ_{TM} 是不可判定的.

□

第 5.3 次作业：5.1，5.2，5.10，6.11 选做题：5.9

5.1 证明 EQ_{CFG} 是不可判定的。

解　我们假设 EQ_{CFG} 是可判定的, 那么可以给出一个从 ALL_{CFG} 到 EQ_{CFG} 的归约, 进而说明 ALL_{CFG} 的可判定性. 构造能够判定语言 ALL_{CFG} 的图灵机 S 的方法如下:

$S =$ “对于输入 $\langle M\rangle$, 其中 M 是 PDA:

1. 构造一个 PDAM_{ALL}, 满足 $L(M_{ALL}) = \Sigma^*$. 由于 Σ^* 是正则语言, 所以这件事情很容易做到.
2. 模拟在输入 $\langle M, M_{ALL}\rangle$ 上运行 EQ_{CFG}
3. 如果 EQ_{CFG} 接受, 则接受; 如果 EQ_{CFG} 拒绝, 则拒绝”

这样, ALL_{CFG} 就是可判定的. 这与它实际上不可判定的事实矛盾, 因此假设不成立, EQ_{CFG} 是不可判定的.

5.2 证明 EQ_{CFG} 是补图灵可识别的。

解　**补注：此问证明有点问题**

EQ_{CFG} 的补集是图灵可识别的. 根据定义, $\overline{EQ_{CFG}} = \{\langle M_1, M_2\rangle \mid M_1, M_2$ 均为 CFG 且$L(M_1) \neq L(M_2)\}$. 只需要构造能够判定 $\overline{EQ_{CFG}}$ 的图灵机 S 如下:

$S =$“对于输入 $\langle M_1, M_2\rangle$, 其中 M_1, M_2 均为 CFG:

1. 按照标准字符串顺序遍历所有字符串, 依次作为输入; 记某一次取到的字符串为 ω.
2. 分别模拟在输入 $\langle M_1, \omega\rangle$, $\langle M_2, \omega\rangle$ 上运行 A_{CFG}.

3. 如果 A_{CFG} 均接受或均拒绝, 则重复步骤 1, 继续考虑下一个字符串; 如果 A_{CFG} 对其中一个接受, 另一个拒绝, 则拒绝输入 $\langle M_1, M_2\rangle$"

由于 A_{CFG} 是可判定的, 所以 S 是可识别的 (因为对于所有 $x \in \overline{EQ_{CFG}}$, 一定会找到一个字符串能让 S 停机; 但是对任何 $x \notin \overline{EQ_{CFG}}$, S 都不能停机, 因为它会一直接受下去).

5.10 证明当且仅当 $A \leq_m A_{TM}$ 时，A 是图灵可识别的。

证明 当: (定理 5.22 的证明即如此) 存在可计算函数 f, 使得 $\forall\omega \in \Sigma^* \, (\omega \in A \Leftrightarrow f(\omega) \in A_{TM})$. 根据定义构造出图灵机 S:

$S =$"对于输入 ω 为字符串:

1. 模拟某可判定图灵机, 根据输入 ω 得到输出 $f(\omega)$.
2. 模拟在输入 $f(\omega)$ 上运行 A_{TM}.
3. 如果 A_{TM} 接受, 则接受; 如果 A_{TM} 拒绝, 则拒绝; 如果 A_{TM} 不停机, 会一直计算下去.

"

已知 A_{TM} 是图灵可识别的, 因此 $\forall x \in A$, 其和可计算函数 f 的计算一定会停机, 因此一定能停机并接受. 不过也有可能不停机. 总之 A 是图灵可识别的.

仅当: 由于 A 是图灵可识别的, 存在一个图灵机 N 能够识别语言 A. 再构造一个图灵机 S 如下:

$S =$"对于输入 ω 为字符串:

1. 模拟某可判定图灵机, 根据输入 ω 得到输出 $\langle T, \omega\rangle$.
2. 模拟在输入 $\langle T, \omega\rangle$ 上运行 A_{TM}.
3. 如果 A_{TM} 接受, 则接受; 如果 A_{TM} 拒绝, 则拒绝; 如果 A_{TM} 不停机, 会一直计算下去.

"

这样 S 接受字符串 ω, 当且仅当 $\omega \in A$. 故可计算函数 $f(\omega) = \langle T, \omega\rangle$ 能调用 A_{TM}, 证明 $A \leq_m A_{TM}$.

□

6.11 证明 $\overline{EQ}_{TM}$ 可由一个带 A_{TM} 的谕示的图灵机识别。

证明 **补注：此问证明有点问题**

构造图灵机 S 如下：

$S =$"对于输入 $\langle M_1, M_2\rangle$, 其中 M_1, M_2 均为图灵机:

1. 按照标准字符串顺序 (如若在 Σ^* 上即 $0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \ldots$) 遍历所有字符串, 依次作为输入; 记某一次取到的字符串为 ω.
2. 向 A_{TM} 询问两个谕示: 分别以 $\langle M_1, \omega\rangle$ 和 $\langle M_2, \omega\rangle$ 为输入, A_{TM} 会返回何值, 即 M_1, M_2 分别是否接受字符串 ω.
3. 如果 A_{TM} 均接受或均拒绝, 即 M_1, M_2 均接受 ω, 则重复步骤 1, 继续考虑下一个字符串; 如果 A_{TM} 对其中一个接受, 另一个拒绝, 则拒绝输入 $\langle M_1, M_2\rangle$"

”

由于 “某个字符串是否在 A_{TM} 中” 这件事是谕示给出的, 所以 S 是可识别的 (因为对于所有 $x \in \overline{EQ}_{TM}$, 一定会找到一个字符串能让 S 停机; 但是对任何 $x \notin \overline{EQ_{CFG}}$, S 都不能停机, 因为它会一直接受下去). $\square$