Introducción a los Algoritmos - 1er. cuatrimestre 2017

Guía 4: Lógica de Predicados

La lógica de predicados o lógica de primer orden es el sistema lógico estándar que formaliza el sistema deductivo natural. El objetivo general de esta guía es aprender a utilizar fórmulas con cuantificadores universales (∀) y existenciales (∃), tanto para interpretar su significado, como para utilizarlas para realizar demostraciones formales en este sistema lógico.

Semántica de Lógica de Predicados

La lógica de cuantificadores extiende la lógica proposicional incorporando dos operadores de ***cuantificación*** *y el uso de predicados. El cuantificador universal* ∀ *permite expresar que una fórmula se satisface para todo valor posible del universo. Por ejemplo, si tenemos el* predicado $mult3.x$ *(devuelve True si x es múltiplo* de 3 *y False en caso contrario) el predicado "todo x es múltiplo de* 3*" se puede expresar formalemnte como:* $\langle \forall x : : mult3.x \rangle$*. Por otro lado, el cuantificador existencial* ∃*, expresa que la propiedad es satisfecha por al menos un valor posible del universo. Por ejemplo, la expresión* $\langle \exists x : : mult3.x \rangle$ *significa "existe un x que es múltiplo de 3".*

También podemos modelar expresiones más abstractas identificando el universo y los distintos predicados involucrados, que pueden servir para representar conjuntos. Por ejemplo, si suponemos que x es una variable del universo de los hombres, y el predicado mortal.x dice que x es mortal, podemos expresar la sentencia "Todos los hombres son mortales" con la fórmula: $\langle \forall x : : \text{mortal}.x \rangle$

Para restringir o hacer explícito el universo al que nos referimos se utilizan otros predicados que diferenciamos como ***rango****. Por ejemplo, si queremos restringir el universo a aquellos elementos que cumplen con una determinada propiedad $R.x$ lo denotamos de la siguiente manera:*

$$\langle \forall x : R.x : T.x \rangle \qquad\qquad \langle \exists x : R.x : T.x \rangle$$

Suponiendo el significado obvio para el predicado hombre, el ejemplo anterior se formaliza como:

$$\langle \forall x : \text{hombre}.x : \text{mortal}.x \rangle$$

Tanto los corchetes ⟨ y ⟩ como el par de "dos puntos" (:) sirven para delimitar las distintas partes de las expresiones cuantificadas. Por tal motivo, las agrupan como paréntesis y esto debería ayudar a evitar confusiones de asociatividad y precedencia.

Otra aplicación concreta para la cual utilizaremos los cuantificadores en esta asignatura es para expresar propiedades sobre listas. En general, nos interesa referirnos a los elementos de la lista por lo que definiremos el operador $x \in_\ell xs$ *como "x está en la lista xs". Este operador se puede definir recursivamente como:*

$$\begin{array}{l} (\in_\ell) : A \to [A] \to Bool \\ e \in_\ell [\,] \doteq False \\ e \in_\ell (x \triangleright xs) = e = x \lor (e \in_\ell xs) \end{array}$$

Por ejemplo, si queremos decir que "todos los elementos de la lista xs son múltiplos de 3" lo podemos expresar utilizando el cuantificador universal y el predicado que ya definimos:

$$\langle \forall x : x \in_\ell xs : \text{mult3}.x \rangle$$

A los fines de contar con estructuras de datos que nos permitan expresar algunas propiedades intuitivas sobre listas, utilizaremos el tipo de datos Figura. Una Figura es una tupla que contiene información sobre una figura geométrica, en particular: la forma, el color y el tamaño. En `Haskell` *lo definiremos así:*

```haskell
data Color = Rojo | Amarillo | Azul | Verde
                        deriving (Show, Eq)

data Forma = Triangulo | Cuadrado | Rombo | Circulo
                        deriving (Show, Eq)

type Figura = (Forma, Color, Int)
```

1. A cada figura se pueden asociar diferentes predicados que indiquen el color y la forma. Por ejemplo podemos definir el predicado *rojo* que sea verdadera cuando la figura es roja y falso en caso contrario:

   $rojo : Figura \to Bool$
   $rojo.(f, c, t) \doteq c = Rojo$

   Definí los predicados *azul*, *amarillo*, *verde*, *circulo*, *rombo*, *cuadrado* y *triangulo*.

2. Definí la función $tam : Figura \to Int$, que dada una figura devuelve su tamaño.

3. Dada una lista de figuras xs expresá las siguientes propiedades utilizando los cuantificadores y los predicados y funciones ya definidas

   a) Todas las figuras de xs son rojas.
   b) Todas las figuras de xs son de tamaño menor a 5.
   c) Todos los triángulos de xs son rojos.
   d) Existe un cuadrado verde en xs.
   e) Todos los círculos de xs son azules y de tamaño menor a 10.
   f) Ningún triángulo de xs es azul.
   g) En xs no hay círculos amarillos ni verdes.
   h) Existe (al menos) un cuadrado de tamaño menor a 5 en xs.
   i) Si hay círculos rojos en xs entonces hay cuadrados rojos.

4. Para cada propiedad del ejercicio 3 da un ejemplo de una lista xs que la cumpla y un ejemplo de una lista xs' que no la cumpla. Por ejemplo, para la propiedad “Todas las figuras de xs son rojas” se puede elegir las siguientes listas:

   $xs = [(Triangulo, Rojo, 5), (Cuadrado, Rojo, 10), (Circulo, Rojo, 2)]$
   $xs' = [(Cuadrado, Azul, 15), (Circulo, Rojo, 1), (Triangulo, Azul, 2)]$

5. Para cada propiedad del ejercicio 3 definí una función recursiva que dada una lista devuelva verdadero si la propiedad se cumple para esa lista y falso en caso contrario. Por ejemplo, para el predicado “Todas las figuras de xs son rojas” de la propiedad $3a$,

   $propA : [Figura] \to Bool$
   $propA.[\,] \doteq True$
   $propA.(x \triangleright xs) \doteq rojo.x \wedge propA.xs$

6. Construí una lista de figuras xs en las que se satisfagan progresivamente cada una de las siguientes sentencias. Formalizá las oraciones con la lógica de predicados.

   a) Alguna figura de xs es de tamaño mayor a 10.
   b) Hay un cuadrado en xs.
   c) En xs hay un cuadrado de tamaño mayor a 10.
   d) De las figuras de xs, un cuadrado azul es más grande que alguno de los círculos.
   e) Algún círculo de xs no es azul.

7. Da un ejemplo de una lista de figuras xs que satisfaga simultáneamente los siguientes predicados.

   a) $\langle \forall x : x \in_\ell xs \wedge (\neg rojo.x \vee triangulo.x) : tam.x > 10 \rangle$
   b) $\langle \exists x : x \in_\ell xs \wedge rojo.x : True \rangle \wedge \langle \exists y : y \in_\ell xs : \neg rojo.y \rangle$
   c) $\langle \forall x : x \in_\ell xs \wedge rojo.x : cuadrado.x \wedge tam.x > 10 \rangle$

8. Formalizá las siguientes sentencias escritas en lenguaje natural, utilizando cuantificadores y predicados arbitrarios para aquellas propiedades elementales. Cuando haya listas involucradas podés utilizar los operadores sobre listas que ya conocés. Por ejemplo, para la sentencia “Hay enteros pares” puede formalizarse con la fórmula:

$$\langle \exists x : entero.x : mod.x.2 = 0 \rangle$$

a) Todo entero es par o impar.

b) La lista xs consiste sólo de 0's y 1's.

c) Si el 1 está en xs, entonces también el 0 está.

d) La lista xs contiene al menos un $true$.

e) Si xs es no vacía, su primer elemento es 0.

f) Todos los elementos de xs son iguales.

g) Todos los elementos de la lista son distintos.

h) La lista xs está ordenada de manera decreciente.

i) Las listas xs e ys tienen los mismos elementos.

j) Todos los elementos de xs tienen al menos un elemento. *Ayuda:* ¿Cuál debe ser el tipo de xs?

9. Una propiedad que nos interesa expresar muchas veces es la *unicidad*, es decir, expresar que una propiedad se cumple una y sólo una vez. Expresá las siguientes propiedades:

   a) Hay sólo un hombre en el mundo que es Papa.

   b) En la lista xs hay sólo un 0.

   c) x aparece sólo una vez en xs.

   d) Hay un único cuadrado azul en xs.

10. ¿Cómo expresarías la propiedad "x ocurre exactamente dos veces en xs"?

Demostraciones de lógica de predicados

En los siguientes ejercicios se deben hacer demostraciones en el Cálculo de Predicados, utilizando los axiomas y teoremas de la lógica proposicional y de cuantificadores.

11. Demostrá justificando cada paso con axiomas del cálculo de cuantificadores los siguientes teoremas básicos. Una vez demostrados podés utilizarlos para los ejercicios siguientes.

    a) *Intercambio entre rango y término* $\exists$*:* $\langle \exists x : R.x : T.x \rangle \equiv \langle \exists x : \; : R.x \wedge T.x \rangle$.

    b) *Regla del Término del* $\exists$*:* $\langle \exists x : \; : T.x \rangle \vee \langle \exists x : \; : U.x \rangle \equiv \langle \exists x : \; : T.x \vee U.x \rangle$.

    c) *Regla del Término del* $\forall$ *(bis):* $\langle \forall x : R.x : T.x \rangle \wedge \langle \forall x : R.x : U.x \rangle \equiv \langle \forall x : R.x : T.x \wedge U.x \rangle$.

    d) *Regla del Término del* $\exists$ *(bis):* $\langle \exists x : R.x : T.x \rangle \vee \langle \exists x : R.x : U.x \rangle \equiv \langle \exists x : R.x : T.x \vee U.x \rangle$.

    e) *Partición de Rango del* $\forall$*:* $\langle \forall x : R.x \vee S.x : T.x \rangle \equiv \langle \forall x : R.x : T.x \rangle \wedge \langle \forall x : S.x : T.x \rangle$.

    f) *Partición de rango para* $\exists$*:* $\langle \exists x : R.x \vee S.x : T.x \rangle \equiv \langle \exists x : R.x : T.x \rangle \vee \langle \exists x : S.x : T.x \rangle$.

    g) *Rango unitario:* $\langle \exists x : x = Y : T.x \rangle \equiv T.Y$, siempre que Y no ocurra cuantificada en T.

    h) *Distributividad de* $\wedge$ *con* $\exists$*:* $X \wedge \langle \exists x : \; : T.x \rangle \equiv \langle \exists x : \; : X \wedge T.x \rangle$, siempre que x no ocurra en X.

12. Demostrá los siguientes teoremas utilizando axiomas y teoremas ya demostrados.

    a) *Rango vacío del* $\forall$*:* $\langle \forall x : \mathit{False} : T.x \rangle \equiv \mathit{True}$.

    b) *Rango vacío del* $\exists$*:* $\langle \exists x : \mathit{False} : T.x \rangle \equiv \mathit{False}$.

    c) *Regla del Término constante del* $\forall$*:* $\langle \forall x : \; : C \rangle \equiv C$.

    d) *Regla del Término constante del* $\exists$*:* $\langle \exists x : \; : C \rangle \equiv C$.

    e) *Instanciación:* $\langle \forall x : \; : T.x \rangle \Rightarrow T.Y$ siempre que Y no ocurra cuantificada en T.

    f) *Testigo:* $T.Y \Rightarrow \langle \exists x : \; : T.x \rangle$ siempre que Y no ocurra cuantificada en T.

13. Demostrá que las siguientes fórmulas son válidas, justificando en cada paso el axioma o teorema del Cálculo de Predicados utilizado.

a) $\langle \forall x : \mathit{circulo}.x : \mathit{amarillo}.x \rangle \equiv \langle \forall x : \neg \mathit{amarillo}.x : \neg \mathit{circulo}.x \rangle$.

b) $\langle \exists x : \mathit{cuadrado}.x : \mathit{amarillo}.x \rangle \Rightarrow \langle \exists x : \ : \mathit{cuadrado}.x \rangle$.

c) $\neg \langle \exists x : \ : \mathit{triangulo}.x \rangle \Rightarrow \langle \forall x : \mathit{triangulo}.x : \mathit{rojo}.x \rangle$.

d) $\langle \exists x : \ : \mathit{cuadrado}.x \rangle \wedge \langle \forall y : \ : \mathit{amarillo}.y \rangle \Rightarrow \langle \exists x : \ : \mathit{cuadrado}.x \wedge \mathit{amarillo}.x \rangle$.

En todos los items anteriores, ¿es posible cambiar los predicados *circulo*, *amarillo*, *cuadrado*, etc. por predicados arbitrarios R, T, S, etc. manteniendo la validez de las fórmulas? Dicho de otro modo ¿la validez de las formulas anteriores depende de los predicados específicos *circulo*, *amarillo*, *cuadrado*, etc?

14. Decidí si cada una de las siguientes fórmulas es válida o no. En caso que una fórmula no sea válida, decidí si es satisfactible o no. En todos los casos justificá con una demostración, ejemplo o contraejemplo.

    a) $\langle \forall x : x \in_\ell xs : \mathit{cuadrado}.x \vee \mathit{rojo}.x \rangle \Rightarrow \langle \forall x : x \in_\ell xs : \mathit{cuadrado}.x \rangle \vee \langle \forall x : x \in_\ell xs : \mathit{rojo}.x \rangle$.

    b) $\langle \forall x : x \in_\ell xs : \mathit{cuadrado}.x \vee \mathit{rojo}.x \rangle \Leftarrow \langle \forall x : x \in_\ell xs : \mathit{cuadrado}.x \rangle \vee \langle \forall x : x \in_\ell xs : \mathit{rojo}.x \rangle$.

    c) $\langle \exists x : x \in_\ell xs : \mathit{azul}.x \rangle \wedge \langle \exists x : x \in_\ell xs : \mathit{triangulo}.x \rangle \Rightarrow \langle \exists x : x \in_\ell xs : \mathit{azul}.x \wedge \mathit{triangulo}.x \rangle$.

    d) $\langle \exists x : x \in_\ell xs : \mathit{azul}.x \rangle \wedge \langle \exists x : x \in_\ell xs : \mathit{triangulo}.x \rangle \Leftarrow \langle \exists x : x \in_\ell xs : \mathit{azul}.x \wedge \mathit{triangulo}.x \rangle$.

15. Demostrá las siguientes propiedades

    a) $\langle \forall x : x \in_\ell (k \triangleright ks) : T.x \rangle \equiv T.k \wedge \langle \forall x : x \in_\ell ks : T.x \rangle$

    b) $\langle \exists x : x \in_\ell (k \triangleright ks) : T.x \rangle \equiv T.k \vee \langle \exists x : x \in_\ell ks : T.x \rangle$

    Ayuda: Vas a necesitar la definición del operador $\in_\ell$ que definimos en la introducción de esta guía.

16. Dada la definición de la función *algunCuadrado*:

$$\begin{aligned}&algunCuadrado : [Figura] \to Bool\\ &algunCuadrado.[\,] \doteq False\\ &algunCuadrado.(x \triangleright xs) \doteq cuadrado.x \vee algunCuadrado.xs\end{aligned}$$

    demostrá por inducción la siguiente fórmula

$$algunCuadrado.xs \equiv \langle \exists x : x \in_\ell xs : cuadrado.x \rangle.$$

17. Demostrá por inducción que las funciones definidas en el Ejercicio 5 (*implementaciones*) satisfacen las propiedades del Ejercicio 3 que las *especifican*. (A esta tarea se la denomina *verificación*).

    Por ejemplo, para el ítem 3a hay que probar que

$$propA.xs \equiv \langle \forall x : x \in_\ell xs : rojo.x \rangle.$$

    Donde *propA* se definió como

$$\begin{aligned}&propA : [Figura] \to Bool\\ &propA.[\,] \doteq True\\ &propA.(x \triangleright xs) \doteq rojo.x \wedge propA.xs\end{aligned}$$

18. Dada la definición de la función *soloCeros*:

$$\begin{aligned}&soloCeros : [Num] \to Bool\\ &soloCeros.[\,] \doteq True\\ &soloCeros.(x \triangleright xs) \doteq x = 0 \wedge soloCeros.xs\end{aligned}$$

    demostrá por inducción la siguiente fórmula

$$soloCeros.xs \equiv \langle \forall x : x \in_\ell xs : x = 0 \rangle.$$