FORMULARE IL PROBLEMA

Il profitto è GUADAGNO - COSTO
Quando ci delle combinazioni di materiali (miscela) lo suddivido in quanto materiale ci metto nella combinazione
x1 + x2 sarebbe kg di materiale 1 + kg di materiale 2 per la combinazione x
e quindi il profitto è fatto da guadagno di x - costo di x1 e dal guadagno di x - x2

VARIABILI DI DECISIONE

Tipologia di un oggetto
Numero di oggetti che produco in 1 giorno
Oggetti acquistati
Pezzo di oggetto acquistato

% di oggetto presente -> numero che moltiplico per una variabile

FUNZIONE OBIETTIVO

massimizzare i guadagni / minimizzare le perdite

VINCOLI

Le variabili non sono mai negative (di solito)
Almeno significa >=

PARAMETRI

Sono semplicemente i valori che ci da il problema

RISOLUZIONE GRAFICA

DETERMINARE REGIONE AMMISSIBILE

Per farlo posso mettere x=0, trovando un (0, --)
e poi y=0, trovando un (--, 0)
Poi collego i punti con una retta.

Se sei in difficoltà, come nel caso di $2x_1 - x_2 \leq 0$ puoi risolvere l'equazione -> $x_2 > 2x_1$.
A questo punto posso sostituire 2 valori per formare la retta.

Per capire quale regione prendere (test del punto) : prendo (0,0) e se è vera allora vuol dire che (0,0) è nella regione presa - prendo la parte del piano che include il punto 0,0

TROVARE LA SOLUZIONE

Per disegnare la retta faccio un esempio

5x + y

Questa diventa 5x + y = 0

Che diventa y = -5x

A questo punto sostituisco i punti per x=0, x=1 etc…

SI prendono i coefficienti della funzione obiettivo (in questo caso sono 5 e 1). Il punto che danno è l'inclinazione che ha la retta.

A quel punto posso traslare la retta.

Sostituisco il punto in cui arriva la retta con la funzione obiettivo iniziale, quello è il valore di Z.

Una volta rappresentata la regione ammissibile è necessario rappresentare le *curve di livello* della funzione obiettivo ossia il fascio improprio di rette

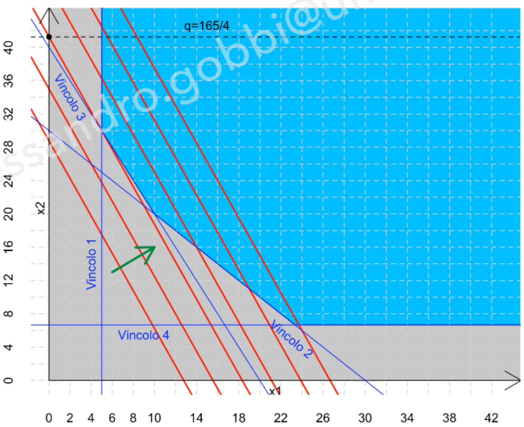
$$45x_1 + 20x_2 = C$$

Trattandosi di un problema di minimizzazione, il nostro obiettivo sarà trovare il punto (x_1, x_2), appartenente alla regione ammissibile, affinché C sia il più piccolo possibile. Per far ciò, occorrerà sfruttare ancora la definizione di gradiente che, nel nostro caso, è pari a $\nabla_{fo} = (45,20)$.

Esso rappresenta la direzione lungo la quale **la funzione obiettivo assume un valore sempre maggiore**.

Esprimendo il fascio nella forma $x_2 = -\frac{9}{4}x_1 + q, q \in \mathbb{R}$ ci accorgiamo di come q, che misura la distanza tra l'origine e l'intersezione con la retta verticale $x_1 = 0$, aumenti nella stessa direzione in cui il valore di C aumenta. In particolare:

- per $q < \frac{165}{4}$, le rette non intersecano la regione ammissibile, individuando quindi soluzioni non accettabili;
- per $q = \frac{165}{4}$ la retta interseca la regione ammissibile in un suo vertice, dato dall'intersezione tra il vincolo (1) e (3), e $C = 825$,
- per $q > \frac{165}{4}$ le rette intersecano in più punti la regione ammissibile in cui sicuramente $C > 825$.



METODO DEL SIMPLESSO

Il vettore nullo è una soluzione del problema? Ovvero sostituisco 0 a tutte le variabili e vedo se rispetta i vincoli.

Se li rispetta procedere normalmente, altrimenti vedere cosa fare sotto.

TRASFORMAZIONE IN FORMA STANDARD

Richiede che tutti vincoli siano della forma:
combinazione lineare ≤ numero positivo

$$\text{Max } x_1 + x_2$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 2$$

Se si guarda questo esempio la soluzione è considerare x3 una variabile di slack, dunque non deve essere negativa ma positiva

FORMA AUMENTATA

Se è ≤ allora sommiamo una variabile, altrimenti sottraiamo.
Le variabili nuove sono ovviamente maggiori di 0.

Se un vincolo è x≤0 allora devo cambiare X in -X. Poi il vincolo verrà cambiato in x≥0.

FORMA EQUIVALENTE - inverto i segni

Max $x1 + x2$
Viene trasformato in:
Max Z
$Z - x1 - x2 = 0$ *dove questa riga diventa un vincolo*

SCELTA COEFFICIENTI

- Le variabili di base sono tutte le variabili di slack
- Scelgo la variabile entrante con il coefficiente più negativo
- Ora devo scegliere chi far uscire, posso scegliere solo le variabili di slack del punto 1
- Termine Noto / Valore di variabile entrante. Attenzione posso dividere solo per valori > 0 (0 escluso).
- Il valore più piccolo vince

LA VAR ENTRANTE DEVE DIVENTARE LA VAR DI SLACK USCENTE

Il trucco è rendere un elemento uguale a 1

TEST DI OTTIMALITÀ

- SE UNA COLONNA È NEGATIVA IL PROBLEMA È ILLIMITATO
- Se ci sono valori negativi nella funzione obiettivo allora devo renderli non negativi

CONTROLLO SOLUZIONI MULTIPLE

Questo controllo lo faccio solo alla fine, quando ho completato il metodo del simplesso.

Se una variabile non di base è uguale a 0 NELLA riga 0 (e non dovrebbe essere così) allora devo fare un ulteriore iterazione del metodo del simplesso per poter rendere quella variabile di base.
È spiegato bene nel pdf del simplesso a 2 fasi.

Tutti sono positivi, quindi abbiamo la nostra soluzione
(0, 3, 2, 0, 3)
Ricordiamo che avevamo negato x2
(0, -3, 2, 0, 3)

Ora però notiamo che x_1, che non è in base, è = 0 quindi vuol dire che abbiamo 2 soluzioni

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Ris
Z	0	0	0	1	0	6
x_2	0	1	0	2/3	-1/3	2
x_3	0	0	1	1/3	1/3	3
x_1	1	0	0	-1/3	2/3	2

(2, 2, 3, 0, 0) => (2, -2, 3, 0, 0)
Quindi abbiamo le nostre 2 soluzioni

(0, -3, 2, 0, 3), (2, -2, 3, 0, 0)
E le soluzioni aumentate sono
$(2, -2, 3, 0, 0)w_1 + (0, -3, 2, 0, 3)w_2$
$w_1, w_2 \geq 0, w_1 + w_2 = 1$

SECONDA SOLUZIONE OTTIMA DEL PRIMALE
Semplicemente prendo una variabile NULLA che È solo nella f. obiettivo
A quel punto faccio un'altra iterazione del metodo del simplesso.

SIMPLESSO CON LA DUALITÀ

In caso non si possa usare il metodo del simplesso per risolvere un PL allora:
- trovare il duale
- se il duale è "ottimo finito" allora il primale è ottimo

- se il duale è "illimitato" allora il primale è IMPOSSIBILE

Riesco a vederlo bene se disegno il duale.

- se il duale è “impossibile” il primale è *IMPOSSIBILE* *oppure* ILLIMITATO

Basta che i suoi vincoli non siano rispettati. Per vedere quale dei 2 è esattamente basta disegnarlo.

METODO A 2 FASI

Devo capire quando una soluzione di base non è ammissibile all’inzio del problema.

Basta vedere se rispetta i vincoli del problema, e quindi se è all’interno del poligono.

- vedere se il vettore 0 rispetta i vincoli, se non lo fa posso cominciare con il simplesso a 2 fasi
- aggiungere var. artificiali dove i vincoli non vengono rispettati
- usare il simplesso classico per annullare le 2 var. artificiali rendendole pari a 0. Usare tante var non di base quanti sono i vincoli
- Una volta annullate posso usare il simplesso classico finché tutte le variabili non sono più negative
- poi posso rimuovere le var. artificiali, sostituire la vecchia f. obiettivo e usare di nuovo il metodo del simplesso

---

DUALITÀ

TRASFORMAZIONE

I vincoli diventano variabili e le variabili diventano vincoli.

Problema primale (MAX)		*Problema duale (MIN)*
Variabile *i*:		Vincolo *i*:
$x_i \geq 0$	$\longleftrightarrow$	i-esimo vincolo $\geq$
$x_i \leq 0$	$\longleftrightarrow$	i-esimo vincolo $\leq$
x_i free	$\longleftrightarrow$	i-esimo vincolo $=$
Vincolo *j*:		Variabile *j*:
j-esimo vincolo $\geq$	$\longleftrightarrow$	$u_j \leq 0$
j-esimo vincolo $\leq$	$\longleftrightarrow$	$u_j \geq 0$
j-esimo vincolo $=$	$\longleftrightarrow$	u_j libera

Problema primale (MIN)		*Problema duale (MAX)*
Variabile *i*:		Vincolo *i*:
$x_i \geq 0$	$\longleftrightarrow$	*i*-esimo vincolo $\leq$
$x_i \leq 0$	$\longleftrightarrow$	*i*-esimo vincolo $\geq$

In caso ci sia = allora il vincolo/variabile diventa LIBERA e viceversa.

$$\begin{array}{lll}
Max & 3x + 5y & \\
& x - y \leq 1 & u_1 \\
& 2x - y \geq 4 & u_2 \\
& -2x + y = 1 & u_3 \\
& x \text{ free}, y \leq 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
Min\ u_1 + 4u_2 + u_3 \\
u_1 + 2u_2 - 2u_3 = 3 \\
-u_1 - u_2 + u_3 \leq 5 \\
u_1 \geq 0, u_2 \leq 0, u_3 \text{ free}
\end{array}$$

P (PRIMALE) → D (DUALE)

$$\begin{array}{rcl}
\min & 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 & \\
5x_1 - 6x_2 + 7x_3 & = & 12 \\
8x_1 + 9x_2 & \geq & 13 \\
-10x_2 + 11x_3 & \leq & 14 \\
& x_1 \geq 0 & \\
& x_2 \leq 0 & \\
& x_3 \in \mathbb{R} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\max & 12y_1 + 13y_2 + 14y_3 & \\
5y_1 + 8y_2 + 0y_3 & \leq & 3 \\
-6y_1 + 9y_2 - 10y_3 & \geq & 2 \\
7y_1 + 0y_2 + 11y_3 & = & -4 \\
& y_1 \in \mathbb{R} & \\
& y_2 \geq 0 & \\
& y_3 \leq 0 &
\end{array}$$

Metto le condizioni di complementarietà

$$\begin{array}{ll} \text{Max } Z = x_1 - 2x_2 & \text{Min } W = y_1 + 6y_2 + 6y_3 \\ x_1 - x_2 \geq 1 & y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 6 & -y_1 - 2y_2 - y_3 \leq -2 \\ 2x_1 - x_2 \leq 6 & y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 & \end{array}$$

Scriviamo quindi le condizioni di complemer

primale e duale:

$$\begin{cases} y_1(x_1 - x_2 - 1) & = 0 \\ y_2(x_1 - 2x_2 - 6) & = 0 \\ y_3(2x_1 - x_2 - 6) & = 0 \\ x_1(y_1 + y_2 + 2y_3 - 1) & = 0 \\ x_2(-y_1 - 2y_2 - y_3 + 2) & = 0 \end{cases}$$

- **Metto la soluzione del primale dentro il sistema**

Analizziamo quindi in primis l'attività dei vincoli del primale, sostituendo la soluzione ottimale (0, -3) nei vincoli:

$$\begin{cases} y_1(x_1 - x_2 - 1) = 0 \\ y_2(x_1 - 2x_2 - 6) = 0 \\ y_3(2x_1 - x_2 - 6) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1(0 - (-3) - 1) = 0 \\ y_2(0 - 2(-3) - 6) = 0 \\ y_3(2 \cdot 0 - (-3) - 6) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1(2) = 0 \\ y_2(0) = 0 \\ y_3(-3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(y_1 + y_2 + 2y_3 - 1) = 0 \\ x_2(-y_1 - 2y_2 - y_3 + 2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0(y_1 + y_2 + 2y_3 - 1) = 0 \\ -3(-y_1 - 2y_2 - y_3 + 2) = 0 \end{cases}$$

- **capire i vincoli**

Guardo DUALE -> se c'è = allora lo metto a prescindere nell'equazione, tra l'altro me ne accorgo perché se non lo faccio non riesco a risolvere il sistema.

Poi sostituisco i valori della soluzione ottima del primale nel duale, ovunque non esce 0 NON va bene.

Faccio un sistema con le variabili del duale (y1, y2, y3) ma le variabili che non vanno bene (y1, y3) le metto semplicemente uguali a 0, il resto le metto come erano scritte nelle condizioni di complementarietà
no

$$\begin{cases} y_1 & = 0 \\ -y_1 - 2y_2 - y_3 + 2 & = 0 \\ y_3 & = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 & = 0 \\ -0 - 2y_2 - 0 + 2 & = 0 \\ y_3 & = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha come soluzione (0,1,0). **Tale soluzione è la soluzione del problema duale.**

Soddisfa tutti i vincoli del duale?
Per vedere se lo fa mi basta sostituire i valori (0,1,0) nel duale

$$\begin{aligned} &\mathrm{Min}\ W = y_1 + 6y_2 + 6y_3 \\ &y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ &-y_1 - 2y_2 - y_3 \leq -2 \\ &y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Essendo che in questo caso li rispetta allora tale soluzione è la **soluzione OTTIMA del problema duale**

DA DUALE A PRIMALE - COMPLEMENTARY SLACKNESS

2. Si ponga $\alpha = 1$. Sapendo che la soluzione ottima per D è quella con $y_1 = 0$, $y_2 = 7$ e $y_3 = 0$, è possibile ricavare la soluzione ottima di base di P che risulta:

   (a) $(x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6)^T = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 0)^T$

   (b) $(x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6)^T = (0 \quad 2 \quad 0 \quad 6 \quad 0 \quad 0)^T$

   (c) $(x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6)^T = (0 \quad 3 \quad 0 \quad 9 \quad 0 \quad 0)^T$

   (d) nessuna delle precedenti

Quando ti danno la soluzione ottima del duale devi fare così: Sostituire la y nelle equazioni che iniziano con il coefficiente del PRIMALE, tipo queste:

$(0,7,0)$

$\cancel{x_1(-x_1 + x_2 + 13x_3)}$

$x_1(-y_1 + 2y_2 + y_3 - 16) = 0 + 14 - 16 = -2$

$x_2(y_1 + 2y_2 - y_3 - 14) = 0 + 14 - 14 = 0$

$x_3(13y_1 - 4y_2 - y_3 - 40) = 0 - 28 - 40 = -68$

Le variabili dove esce NON 0 sono quelle che metto a sistema con $X_i = 0$. Metto a sistema anche i vincoli del PRIMALE

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2 \\ x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_2 = 2 \\ x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad (0 \; 1 \; 0)$$

Ti troverai i valori di x1, x2, x3, etc…
Che per esempio chiameremo (0, 1, 0)

Non è finita qua, ora devi prendere il PRIMALE e aggiungere delle variabili di slack
Sostituisci i valori che hai trovato (0, 1, 0) nel primale e troverai i valori delle variabili di slack.
La soluzione finale potrebbe essere per esempio (0, 1, 0, 3, 0, 0)
(se ovviamente hai solo 3 variabili di slack)

ESERCIZIO TEORICO - non ho ancora capito come si risolve

Risposta corretta -> C

3. Studiando le strutture di P e D, stabilire quale delle seguenti affermazioni è vera (giustificare la propria scelta sul foglio).
   (a) Se $\alpha = 0$, P e D hanno ottimo finito $= 0$; se $\alpha = -1$, P risulta impossibile.
   (b) Se $\alpha = 0$, P e D hanno ottimo finito > 0; se $\alpha = -1$, P risulta illimitato.
   (c) Se $\alpha = 0$, P e D hanno ottimo finito $= 0$; se $\alpha = -1$, P risulta illimitato.
   (d) Se $\alpha = 0$, P e D hanno ottimo finito > 0; se $\alpha = -1$, P risulta impossibile.

Quando c'è il vettore 0 allora bisogna controllare se è presente nell'area ammissibile, dato che lo è allora scrivo D=0.
Infatti se sostituisco (0, 1, 0) esce Z=0.

Quando c'è il vettore -1 allora devo vedere se il DUALE rispetta sta roba, il duale esce impossibile. Infatti quando ho
X+Y - Z < H
allora con Z<0 il vincolo è IMPOSSIBILE.

Dunque il PRIMALE è ILLIMITATO oppure IMPOSSIBILE
Noi scegliamo ILLIMITATO perché prima abbiamo trovato una soluzione (0, 1, 0).

$$\begin{aligned} \min\ & 16x_1 + 40x_3 \\ & -x_1 + x_2 + 13x_3 \geq -2 \\ & 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \geq 2 \\ & x_1 - x_2 - x_3 \leq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

la sol. ottimale é sicuramente >0 perché l'origine non é sol. amm. a causa del vincolo 1 e 2, non é negativa perché le var. hanno vincolo di non negatività.
Dato che l'ottimo é uguale per duale e primale ció vale per entrambi.

$$\begin{aligned} \min\ & 16x_1 - 14x_2 + 40x_3 \\ & -x_1 + x_2 + 13x_3 \geq -2 \\ & 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \geq 2 \\ & x_1 - x_2 - x_3 \leq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \max\ & -2y_1 + 2y_2 - y_3 \\ & -y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 16 \\ & y_1 + 2y_2 - y_3 \leq -14 \\ & 13y_1 - 4y_2 - y_3 \leq 40 \\ & y_1, y_2 \geq 0,\ y_3 \leq 0 \end{aligned}$$

← questo vincolo é impossibile da rispettare dato che sommo variabili positive e sottraggo una var negativa -> avró sempre un risultato positivo quindi mai ≤ -14

Data la relazione tra primale e duale se un problema non ha soluzione, l'altro é illimitato, dunque P é illimitato.

[Ricerca Operativa Esercizi risolti sulle condizioni di complementariet`a primale-duale]()

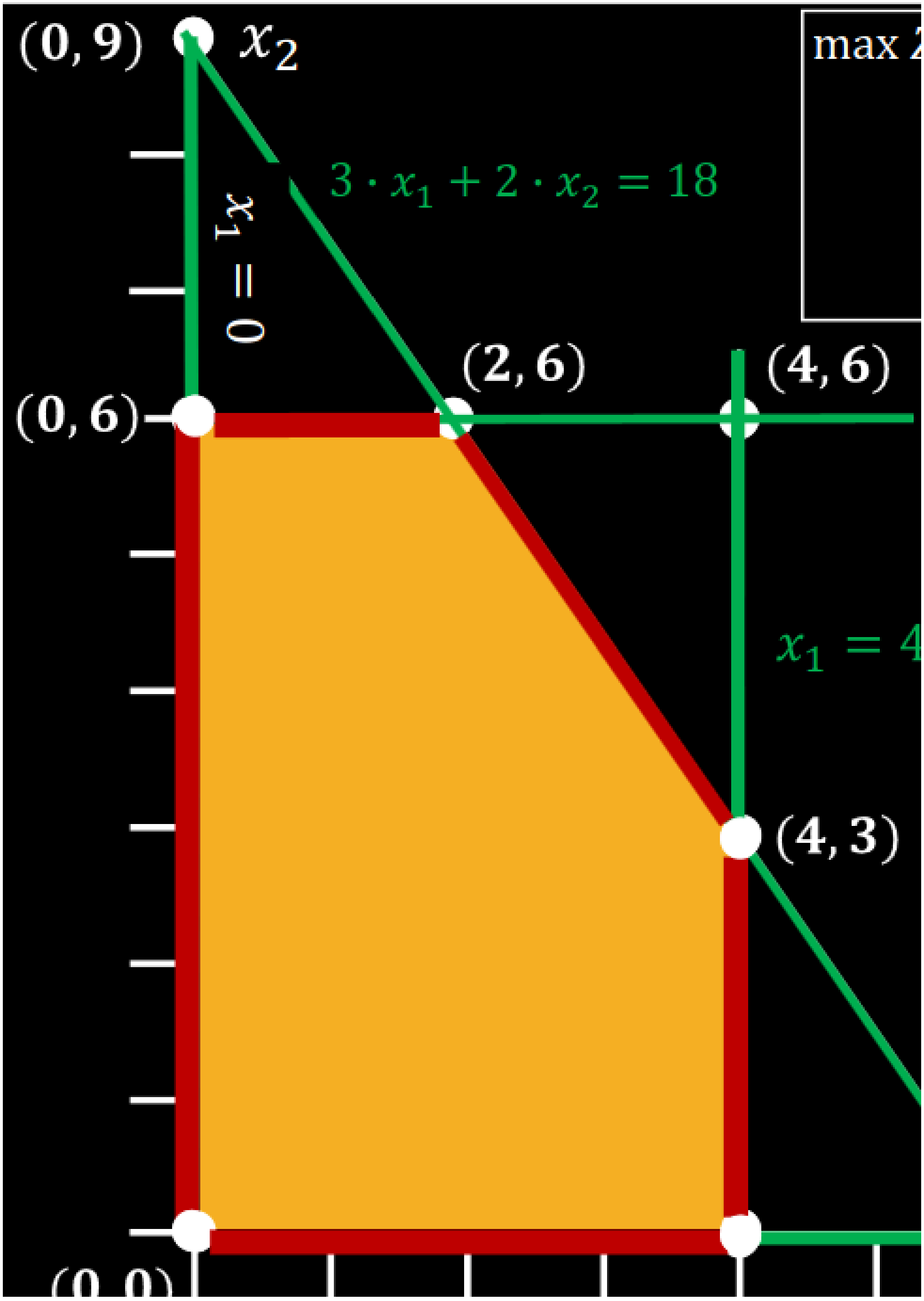
TEORIA

PROPORZIONALITÀ
Il contributo di ogni variabile decisionale, al valore della f. obiettivo, è proporzionale rispetto al valore della variabile stessa.
ADDITIVITÀ
Ogni funzione è la somma dei contributi delle variabili decisionali.
CONTINUITÀ
Qualunque valore delle variabili decisionali in R è accettabile. Spesso però le var. non posso assumere valori NON interi e dunque si parla di PL a numeri interi.
CERTEZZA
Il valore assegnato ad ogni parametro è NOTO e COSTANTE.

SIMPLESSO

TIE BREAKING
Situazioni dove la variabile non collabora:
- se entrambe le variabili hanno lo stesso coefficiente (-3x e -3y) allora ne scelgo una a caso
- se una variabile di base ha valore nullo è detta variabile degenere, tendenzialmente indica che il PL ha più soluzioni.
- un PL è illimitato se nessuna var. di base si classifica come uscente (ovvero colonne negative o uguali a 0)

PROPRIETÀ E DEFINIZIONI
Le equazioni di frontiera definiscono la regione ammissibile, sono quelle rosse.



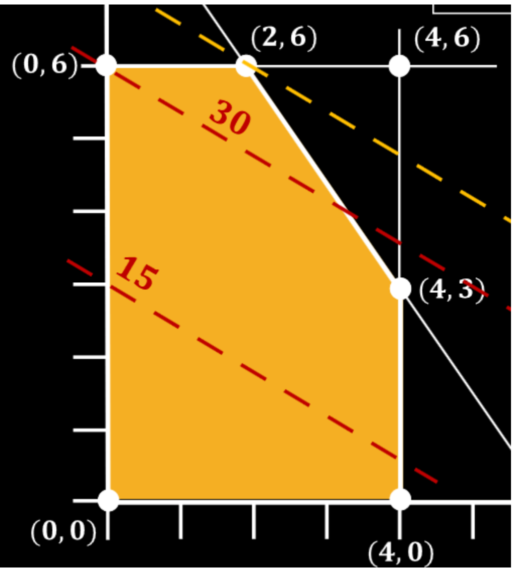
(0, 9)
x_2
max Z
$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 18$
$x_1 = 0$
(2, 6)
(4, 6)
(0, 6)
$x_1 = 4$
(4, 3)

PROPRIETA' 1:

(a) se esiste solo una soluzione ottimale, allora questa è un vertice ammissibile.

(b) se esistono soluzioni ottime multiple (e la regione ammissibile è limitata), allora almeno due di queste soluzioni sono vertici ammissibili tra loro adiacenti.

- La soluzione ottimale (2, 6) è un vertice ammissibile.
- In ogni problema che ammetta una sola soluzione ottimale, è sempre possibile far aumentare il valore della funzione obiettivo fino a che non si raggiunga un vertice (la soluzione ottimale) della regione ammissibile.



Tutte le soluzioni ottimali sono ottenibili come media pesata dei vertici ammissibili ottimali.

PROPRIETA' 2:

Esiste un numero finito di vertici ammissibili.

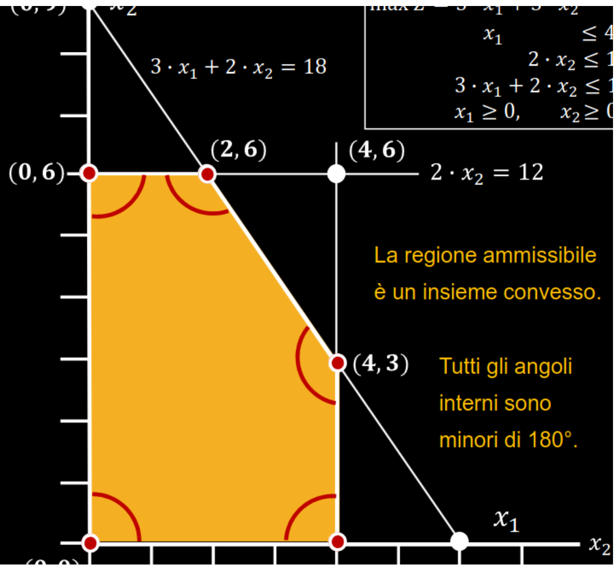
PROPRIETA' 3:

Se un vertice ammissibile non ammette vertici ammissibili a lui adiacenti che coincidono con soluzioni con valore migliore della funzione obiettivo Z, allora non esistono soluzioni ottimali migliori di quella che coincide con il vertice ammissibile in esame.

Pertanto, un tal vertice, in base alla **PROPRIETÀ 1**, è garantito coincidere con una soluzione ottimale, La motivazione base per la quale la **PROPRIETÀ 3** è sempre valida in un problema di PL è che la regione ammissibile è sempre un **INSIEME CONVESSO**.

- Un **insieme** viene detto **CONVESSO** se è una collezione di punti tali che, per ogni coppia di punti appartenenti alla collezione, l'intero segmento che collega la coppia di punti, appartiene anch'esso alla collezione.

Nel caso di un problema di PL con due variabili decisionali, la **PROPRIETÀ DI CONVESSITÀ** significa che l'angolo interno alla regione ammissibile misurato in ogni vertice ammissibile è minore di 180°.



Una **SOLUZIONE DI BASE** gode delle seguenti proprietà:

1) una variabile può essere o una **VARIABILE DI BASE** o una **VARIABILE NON DI BASE**.
2) il numero delle variabili di base eguaglia il numero dei vincoli funzionali (equazioni). Pertanto, il numero delle variabili non di base eguaglia il numero totale delle variabili meno il numero dei vincoli funzionali.
3) le variabili non di base vengono poste a zero.
4) i valori delle variabili di base sono ottenuti come risoluzione simultanea del sistema di equazioni lineari (vincoli funzionali in forma aumentata). (L'insieme delle variabili di base viene spesso riferito con il termine di **BASE**.)
5) se le variabili di base soddisfano i vincoli di non negatività, la **SOLUZIONE DI BASE** è una **SOLUZIONE AMMISSIBILE DI BASE**.

Queste proprietà si estendono a var. di base

CONCETTI CHIAVE

CONCETTO CHIAVE 1

Per ogni PL che ammetta almeno 1 soluzione ottimale, trovarne una equivale al vertice ammissibile che restituisce il valore migliore della f. obiettivo.
Usare solo punti al confine dell'area ammissibile torna utile in quanto rende i punti da ispezionare un numero limitato.

CONCETTO CHIAVE 2

Metodo del simplesso è un algoritmo ITERATIVO che:

- inizializzazione -> sceglie un vertice/soluzione
- test di ottimalità
    - SI, termina, soluzione ottimale

    - NO, ricomincia

CONCETTO CHIAVE 3
Se ci sono troppe variabili decisionali da rendere difficile la risoluzione grafica allora si può scegliere l'origine (0,0) per evitare di ricorrere a procedure algebriche per determinare la soluzione iniziale.
Ovviamente (0,0) deve essere ammissibile.

CONCETTO CHIAVE 4
Ad ogni iterazione ci si sposta verso un vertice adiacente, con valore della funzione migliore. Nessun'altra opzione viene considerata.

CONCETTO CHIAVE 5
Il metodo del simplesso non calcola mai il valore della f. obiettivo dei vertici adiacenti. Invece valuta i tassi di miglioramento spostandosi lungo la direzione degli spigoli che conducono ai nuovi vertici.

CONCETTO CHIAVE 6
L'ispezione di uno spigolo consente di identificare VELOCEMENTE il tasso di miglioramento, un tasso positivo significa che è una soluzione migliore della precedente, e viceversa.
Il test di ottimalità controlla infatti se il tasso è positivo oppure no. Se non lo è la soluzione non è ottimale.

DUALITÀ

Se P ha un insieme di soluzioni allora
- D ha comunque una sola soluzione ottimale
- il valore ottimo in D e P sarà comunque identico

TH. Dualità Forte
Se esiste una soluzione ottimale ammissibile x* per P, allora deve esistere una soluzione ottimale ammissibile y* per D, con lo STESSO valore ottimo:cx* = y*b

TH. Dualità Debole
Se esiste una soluzione ottimale ammissibile x per P, allora deve esistere una soluzione ottimale ammissibile y per D, con lo STESSO valore ottimo: cx <= yb

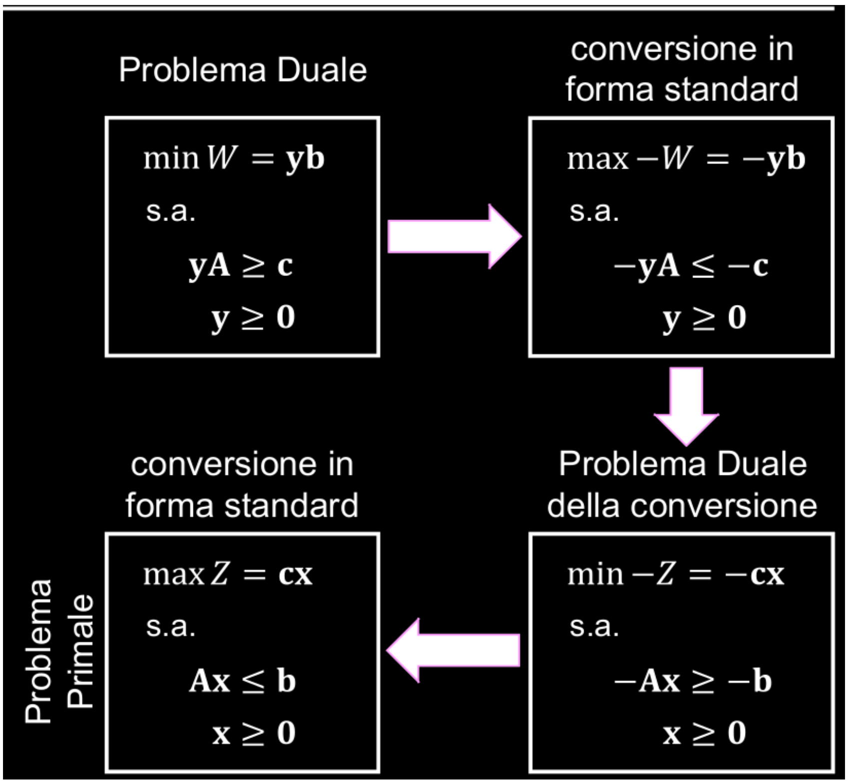
Se D non è ammissibile significa che sicuramente non è ottimale. Ma questo non intacca l'ammissibilità/ottimalità del problema primale

(Le soluzioni complementari sono quelle del duale)
PROPRIETÀ DELLE SOLUZIONE COMPLEMENTARI
Ad ogni iterazione del simplesso ci sono (vertice ammissibile x, soluzione complementare y) dove cx=yb.
Dove se x non è ottimale per P, allora y non è ammissibile per D.

PROPRIETÀ DELLE SOLUZIONE OTTIMALI COMPLEMENTARI
All'iterazione finale ci sono (soluzione ottimale x, soluzione ottimale complementare y) dove cx*=y*b.
E y* sono i prezzi ombra

Inoltre Dualità forte, debole, soluzione complementari sono valide anche per il duale

PROPRIETÀ DI SIMMETRIA
Tutte le relazione tra P e D sono simmetriche. Il problema duale del problema duale è il problema primale.
Sono valide anche da Duale a Primale.



TEOREMA DI DUALITÀ

- soluzioni ammissibili e f. obiettivo limitata ALLORA vale anche per l'altro problema. Quindi dualità forte, debole sono applicabili.
- soluzione ammissibile e f. obiettivo Illimitata ALLORA l'altro problema non ha soluzioni ammissibili
- se non hai soluzioni ammissibili ALLORA o illimitato o impossibile

PROPRIETÀ DI COMPLEMENTARY SLACKNESS
È una relazione simmetrica tra soluzioni di base del P e soluzioni di base complementari del D, dove esse sono reciprocamente complementari.

SUPER OTTIMALE -> ammissibile per il duale

Il **prezzo ombra** si riferisce alla variazione del valore ottimale della f. obiettivo quando si modifica di una unità il valore di una risorsa disponibile (cioè il lato destro di un vincolo).

Definizione

Il prezzo ombra rappresenta il **valore marginale di una risorsa**: quanto il valore della soluzione ottimale migliorerebbe (o peggiorerebbe) se si aggiungesse o si riducesse di una unità la risorsa associata a un vincolo. (*vincolo, non variabile)*

Inoltre il vincolo DEVE essere attivo, altrimenti non serve neanche verificare il prezzo ombra.

Esempio

- Hai 100 unità di legno.
- Hai 200 ore di lavoro.

1. **Soluzione ottimale**: La soluzione ottimale calcolata produce 10 sedie e 5 tavoli, con un profitto di 1000 euro.
2. **Prezzo ombra**:
    - Se aggiungi 1 unità di legno (101 unità invece di 100), il prezzo ombra ti dice di quanto aumenterà il profitto ottimale, ad esempio di 10 euro.

- Questo significa che, al margine, **un'unità aggiuntiva di legno vale 10 euro per l'azienda** nel contesto della soluzione ottimale.

Se una risorsa ha un prezzo ombra pari a zero, significa che aumentarla non migliorerebbe il profitto (o il valore della funzione obiettivo), perché la risorsa non è vincolante nella soluzione.

(a) Quali sono le proprietà di una soluzione di base ?

(b) Enunciare i teoremi di dualità debole e dualità forte

(c) Cosa implica una soluzione del problema di I fase diversa da zero per un problema di Programmazione Lineare?

Solution

(a) Consideriamo un problema lineare $\min c^T x$, $Ax = b, x \geq 0$ dove A è una matrice di m file (restrizioni) e n colonne (variabili).

- Una soluzione x è di base se può essere scritta come $x = (x_B, x_N)$ dove B e la matrice $(n \times n)$ delle colonne associate alle variabili in x_B, $x_B = B^{-1}b$ e $x_N = 0$.
- Una soluzione è di base se è un punto estremo.
- Una soluzione è di base se è la intersezione di n restrizioni linearmente indipendenti.

(b) Siano $\min(\max)\ c^T x$, $x \in \mathcal{P}$ e $\max(\min)\ b^T y$, $y \in \mathcal{P}_D$ un problema lineare (P) e il suo duale (D) rispettivamente.

Teorema di dualità debole: Per tutti punti ammissibili $(x \in \mathcal{P})$ e $(y \in \mathcal{P}_D)$, $c^T x \geq b^T y$.

Teorema di dualità forte: Il problema primale ha una soluzione se e solamente se il suo problema duale ha una soluzione. In più $c^T x = b^T y$ (val(P)=val(D)).

(c) Se il problema di fase I non ha un valore uguale a zero implica che il problema originale non ha una soluzione ammissibile.