Constanza
Corentin

MAM 3A

TP OCS : Matlab

Exo 1 :

I / 1) f = inline('-150*yy+30','yy')

2) On peut voir que nos 3 courbes sont confondue et sont les courbes constante d'equation $y = 1/5$. Notre solution est donc correctement approcher.

3) Cette fois-ci, on remarque que la courbe pour $h = 0.02$ est une mauvaise approximation. Nous avons une erreur de l'ordre de 11×10^5.

4) a) $y_{n+1} = y_n + h(-150\, y_n + 30)$

b) On sait que $y_0 = 1/5 + \mathcal{E} \Rightarrow x_0 = \mathcal{E}$

Donc $y_1 = 1/5 + \mathcal{E} + h(-150(1/5 + \mathcal{E}) + 30)$

$= 1/5 + \mathcal{E} + h(-30 + 150\mathcal{E} + 30)$

$= 1/5 + \mathcal{E} + h\,150\,\mathcal{E}$

$= 1/5 + \mathcal{E}(1 - 150h)$.

$\Rightarrow x_1 = \mathcal{E}(1 - 150h)$

Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est geometrique, on sq sa raison q est de la forme $\frac{x_{n+1}}{x_n} = q \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc $q = \frac{x_1}{x_0} = 1 - 150h$

$\Rightarrow x_n = \mathcal{E} \times (1 - 150h)^n$

$\Rightarrow y_n = 1/5 + \mathcal{E}(1 - 150h)^n$.

c) $N = 1/h$, $h = 0.02$. $\Rightarrow N = 50$

$$y_N = \frac{1}{5} + \varepsilon\left(1 - 150 \cdot 0,02\right)^{50}$$

$$= \frac{1}{5} + \varepsilon\left(1-3\right)^{50}$$

$$\left| y_N - 1/5 \right| = \left| \varepsilon (1-3)^{50} \right| = \left| \varepsilon (-2)^{50} \right| = \varepsilon \underbrace{2^{50}}_{\simeq 1,12 \cdot 10^{15}}$$

L'erreur initial à donc été multiplier par un facteur de $1,12 \cdot 10^{15}$.

d) $\left| y_n - 1/5 \right| = \left| \varepsilon (1 - 150h)^n \right|$ (1)

On veut $\left| y_n - 1/5 \right| \leq \varepsilon$. (*)

D'après (1),

(*) $\Leftrightarrow |1 - 150h| \leq 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq 1 - 150h \leq 1$

$\Leftrightarrow -2 \leq -150h \leq 0$ $\Leftrightarrow 0 \leq h \leq \frac{2}{150} = \frac{1}{75}$

e) Nous allons tester pour $h_1 = 1/75 \simeq 0,013$ et $h_2 = 0,014$

On peut voir que pour h_1 notre solution est correctement approcher alors que ce n'est pas le cas pour h_2.
La condition trouvé à la question d est donc valide.

II/ 1) Ici $A = 150$ et $b = 30$

2) On peut voir que cela converge tres vite vers $1/5$ pour tout les pas h.
(echelle des ordonné : 10^{-10}

3) a) $y_{n+1} = y_n + h(-150\, y_{n+1} + 30)$

$\Leftrightarrow y_{n+1}(1 + 150h) = y_n + 30h$

$$\Leftrightarrow y_{n+1} = \frac{y_n + 30h}{1 + 150h}$$

b) $y_0 = 1/5 + \varepsilon \Rightarrow x_0 = \varepsilon$

$y_1 = \dfrac{1/5 + \varepsilon + 30h}{1 + 150h} \Rightarrow x_1 = \dfrac{1/5 + \varepsilon + 30h - 1/5(1+150h)}{1+150h}$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{\varepsilon}{1+150h}$

Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est geometrique sa raison q vaut

$q = \dfrac{x_1}{x_0} = \dfrac{1}{1+150h} \Rightarrow x_n = \varepsilon \times \left(\dfrac{1}{1+150h}\right)^n$

$\Rightarrow y_n = 1/5 + \varepsilon \times \left(\dfrac{1}{1+150h}\right)^n$

c) Non car pour avoir $\max \left| \left(\dfrac{\varepsilon}{1+150h}\right)^n \right| \leq \varepsilon$ il faut avoir $1+150h > 1$

Ce qui est vrai $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall h$ car $h > 0$ par definition

(Rmq même si $h = 0$ cela serait plus petit que ε car $\varepsilon \in]-1;1[$).