Simulation Aléatoire

Constanza Corentin

2020

L'ensemble des codes R utilisé se trouve dans l'annexe à la fin de ce document ainsi que dans le fichier zip.

1 L'aiguille de Bouffon

1.1 Exercice 1 :

Question 1 :
On sait que X $U([0, L])$,Θ $U([-\pi/2, \pi/2])$ et que X et Θ sont indépendantes.
De plus,

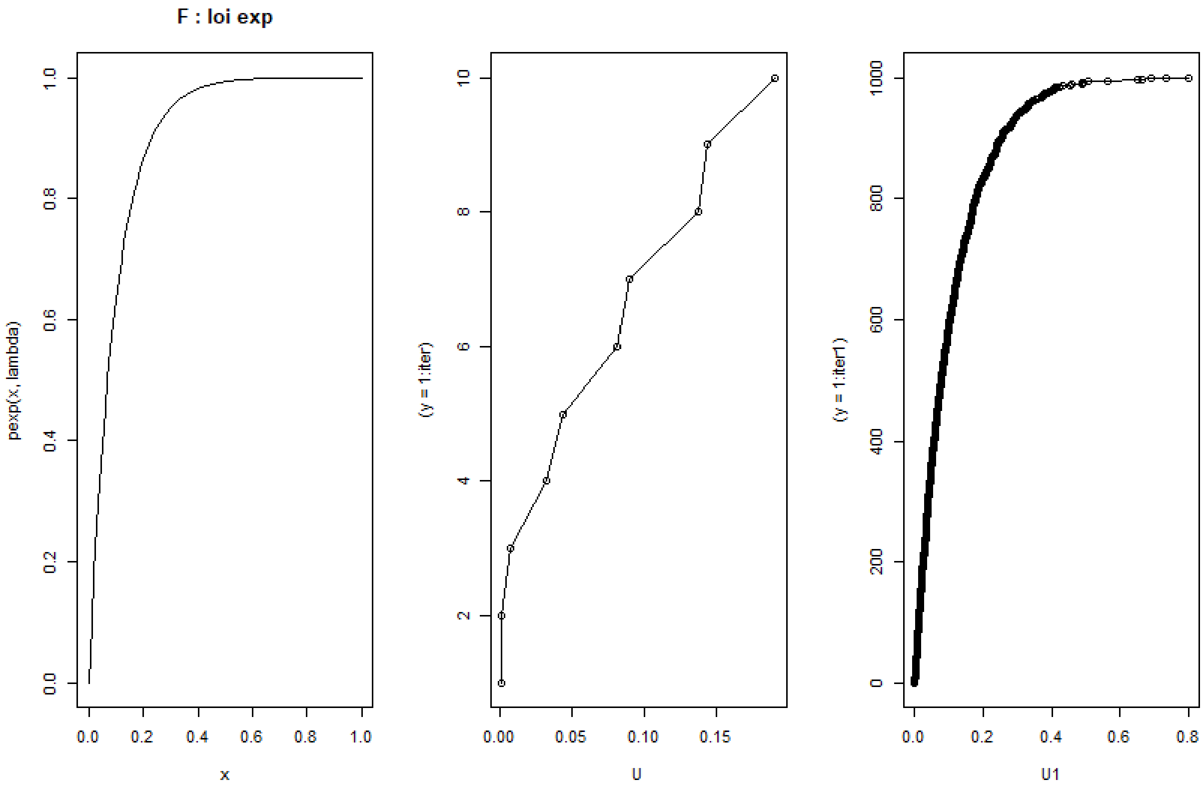
$$\begin{aligned}
P[D = 1] &= P[X \leq \frac{\alpha}{2}cos\Theta] + P[X \geq L - \frac{\alpha}{2}cos\Theta] \\
&= P[X \leq \frac{\alpha}{2}cos\Theta] + 1 - P[X \leq L - \frac{\alpha}{2}cos\Theta] \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{v_1} \frac{1}{L} * \mathbb{1}_{[0,L]} * \frac{1}{\pi} * \mathbb{1}_{[-\pi/2,\pi/2]}\, dxd\theta \;+ 1 - \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{v_2} \frac{1}{L} * \mathbb{1}_{[0,L]} * \frac{1}{\pi} * \mathbb{1}_{[-\pi/2,\pi/2]}\, dxd\theta \\
&= \frac{1}{L\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\frac{\alpha}{2}cos\theta} dxd\theta \;+ 1 - \frac{1}{L\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{L-\frac{\alpha}{2}cos\theta} dxd\theta \\
&= \frac{1}{L\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [x]_0^{\frac{\alpha}{2}cos\theta}\, d\theta \;+ 1 - \frac{1}{L\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [x]_0^{L-\frac{\alpha}{2}cos\theta}\, d\theta \\
&= \frac{1}{L\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha}{2}cos\theta\, d\theta \;+ 1 - \frac{1}{L\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} L - \frac{\alpha}{2}cos\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{L\pi}[\frac{\alpha}{2}sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 1 - \frac{1}{L\pi}([L\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - [\frac{\alpha}{2}sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}) \\
&= \frac{\alpha}{L\pi} + 1 - \frac{1}{L\pi}(L\pi - \alpha) \\
&= \frac{\alpha}{L\pi} + 1 - 1 + \frac{\alpha}{L\pi} \\
&= \frac{2\alpha}{L\pi}
\end{aligned}$$

Question 2 : Donner une approximation de π par la méthode de Buffon avec R.

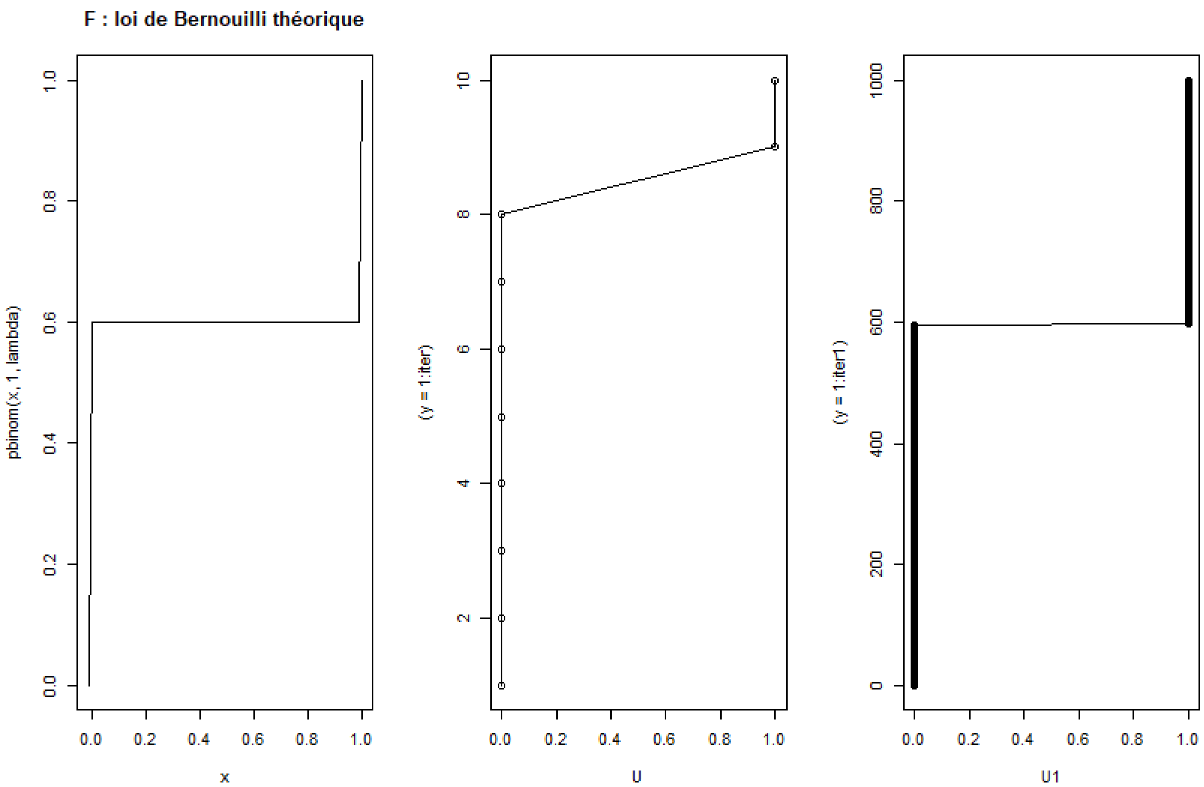
En utilisant la méthode présenté dans l'énnoncé avec $n = 10^7$ lancer on peut obtenir 3.143164 comme approximation de π.

2 Simulation par la méthode d'inversion

Dans cette partie nous allons utiliseer R afin de générer une loi exponentielle de paramètre λ et une loi de Bernouilli de paramètre p
Simulation de la loi Exponentielle de paramètre $\lambda = 10$ **:**



Simulation de la loi de Bernouilli de paramètre $p = 0.4$:



On constate que plus le nombre d'iterations est grand plus notre approximation est précise. Elle semble assez bonne lorsqu'on la compare à la loi fonction de repartition exact et que l'on à un nombre suffisant d'iterations.

3 Méthode de Box Muller pour la simulation de variables gaussiennes

3.1 Exercice 2 :

Question 1 : On pose :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \phi(U,V) = \begin{pmatrix} \sqrt{2V}cos(2\pi U) \\ \sqrt{2V}sin(2\pi U) \end{pmatrix}$$

Ce qui équivaut à dire que :

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi}arcos(\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}}) \\ \frac{X_1^2+X_2^2}{2} \end{pmatrix} = \phi^{-1}(X_1,X_2)$$

On remarque donc que ϕ est un C^1-difféomorphisme, on peut donc appliqué la proposition 1 avec notre changement de variable, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(x_1,x_2)f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,dx_1dx_2$$

Avec :

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{f_{U,V}(\phi^{-1}(x_1,x_2)}{|det[J_\phi(\phi^{-1}(x_1,x_2))]|}$$

Où,

$$det[J_\phi(\phi^{-1}(x_1,x_2))] = -2\pi$$

Et donc,

$$|det[J_\phi(\phi^{-1}(x_1,x_2))]| = |-2\pi| = 2\pi$$

Derterminons maintenant $f_{U,V}$. On sait aussi que U et V sont independantes, d'où :

$$f_{U,V}(u,v) = f_U(u) * f_V(v) = e^{-v}\mathbb{1}_{[0,1]}(u)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(v)$$

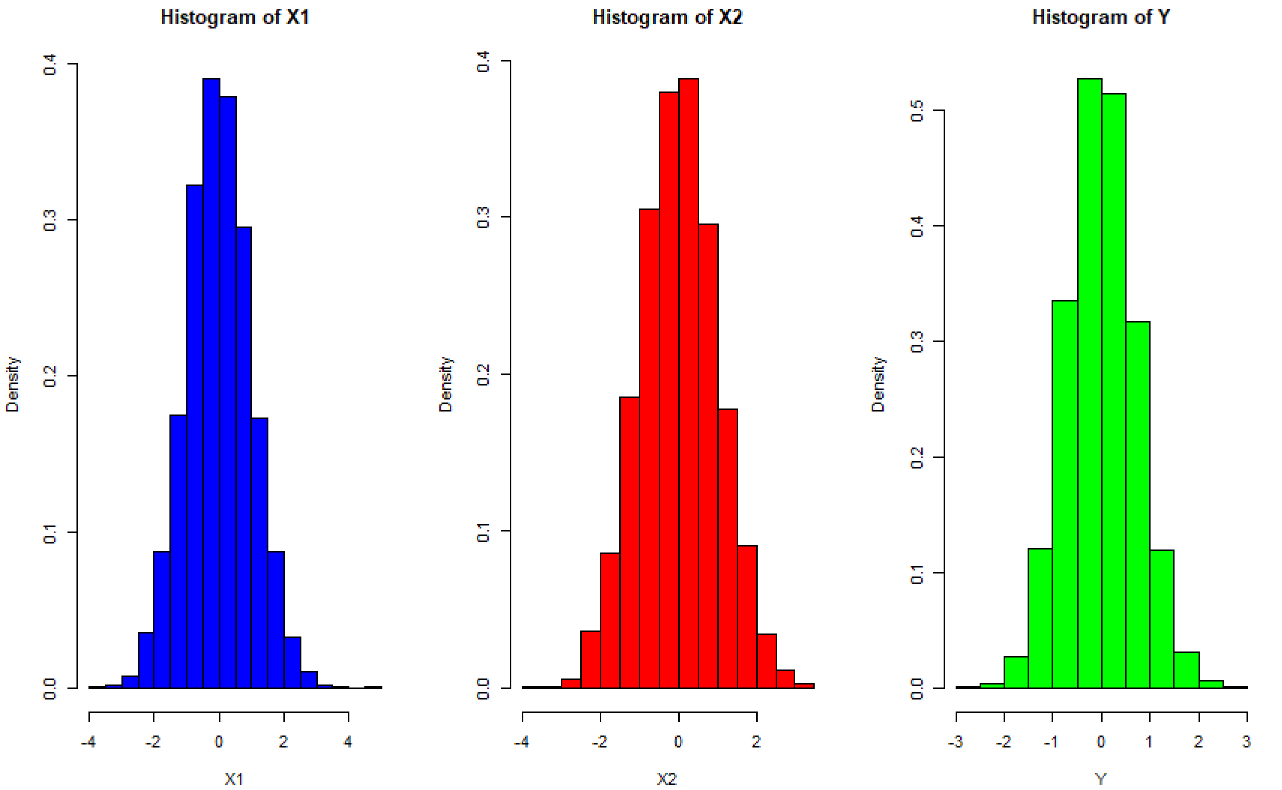
$$\begin{aligned}
f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= \frac{f_{U,V}(\phi^{-1}(x_1,x_2)}{|det[J_\phi(\phi^{-1}(x_1,x_2))]|} \\
&= \frac{1}{2\pi}f_{U,V}(\frac{1}{2\pi}arcos(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}),\frac{x_1^2+x_2^2}{2}) \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}\mathbb{1}_{[0,1]}(\frac{1}{2\pi}arcos(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}})\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(\frac{x_1^2+x_2^2}{2}) \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x_1)\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x_2) \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}
\end{aligned}$$

Ce qui est bien la formule vu en cours pour un vecteur aléatoire suivant une $\mathcal{N}(0,I_2)$

Question 2 : Illustrer et valider ce résultat avec R.

On crée deux V.A. U et V qui suivent des lois uniforme et exponentielles. On leur applique ensuite la formule vu dans la question 1. On stock ces nouvelles V.A. dans X1 et X2. On affiche ensuite leurs histogrames respectifs pour verifier que $X1$ et $X2$ suivent bien une loi $\mathcal{N}(0,1)$. On peut aussi verifié qu'une combinaison linéaire de $X1$, $X2$ suit bien aussi une loi normal. Pour ça on stock dans une V.A. : $Y = \frac{1}{2}X2 + \frac{1}{2}X2$

Voici les histogrammes obtenues :



On peut voir qu'ils correspondent bien à une loi $\mathcal{N}(0,1)$ pour $X1, X2$ et une $\mathcal{N}(m,\sigma)$ pour Y. Notre implementation est donc valide.

3.2 Exercice 3 :

Question 1 :

On pose :

$$\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = \phi(U,V) = \begin{pmatrix} \frac{U}{U+V} \\ U+V \end{pmatrix}$$

Ce qui équivaut à dire que :

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} YZ \\ Z(1-Z) \end{pmatrix} = \phi^{-1}(Y,Z)$$

On remarque donc que ϕ est un C^1-difféomorphisme, on peut donc appliqué la proposition 1 avec notre changement de variable, on a :

$$\int_{[0,1]} \int_{\mathbb{R}^+} h(y,z) f_{Y,Z}(y,z)\, dydz$$

Avec :

$$f_{Y,Z}(y,z) = \frac{f_{U,V}(\phi^{-1}(y,z)}{|det[J_\phi(\phi^{-1}(y,z))]|}$$

Où,

$$det[J_\phi(\phi^{-1}(y,z))] = \frac{v}{(u+v)^2} + \frac{u}{(u+v)^2} = \frac{1}{u+v}$$

Et donc,

$$|det[J_\phi(\phi^{-1}(y,z))]| = |\frac{1}{z}|$$

Derterminons maintenant $f_{U,V}$. On sait aussi que U et V sont independantes, d'où :

$$f_{U,V}(u,v) = f_U(u) * f_V(v) = \frac{u^{\alpha-1}\theta^\alpha e^{-\theta * u}}{\Gamma(\alpha)} \frac{v^{\beta-1}\theta^\beta e^{-\theta * v}}{\Gamma(\beta)} \mathbb{1}_{]0,1[}(u) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_*^+}(v)$$

Finalement,

$$
\begin{aligned}
f_{Y,Z}(y,z) &= \frac{f_{U,V}(\phi^{-1}(y,z)}{|det[J_\phi(\phi^{-1}(y,z))]|} \\
&= zf_{U,V}(yz), z(1-y)2) \\
&= z(\frac{(yz)^{\alpha-1}\theta^\alpha e^{-\theta * yz}}{\Gamma(\alpha)})(\frac{(z(1-y))^{\beta-1}\theta^\beta e^{-\theta * z(1-y)}}{\Gamma(\beta)})\mathbb{1}_{]0,1[}(y)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_*^+}(z) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha+\beta}z^{\alpha+\beta-1}y^{\alpha-1}e^{-\theta z}\mathbb{1}_{]0,1[}(y)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_*^+}(z)
\end{aligned}
$$

Déterminons maintenant la loi marginal de Y :

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{Y,Z}(y,z)\,dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\mathbb{1}_{]0,1[}(y)\int_0^\infty \theta^{\alpha+\beta}z^{\alpha+\beta-1}e^{-\theta z}\,dz
\end{aligned}
$$

En effectuant le changement de variable $\theta z = t$ et $\theta dz = dt$, on a :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\mathbb{1}_{]0,1[}(y)\int_0^\infty \theta^{\alpha+\beta}z^{\alpha+\beta-1}e^{-\theta z}\,dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\mathbb{1}_{]0,1[}(y)\int_0^\infty t^{\alpha+\beta}e^{-t}\,dt \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\mathbb{1}_{]0,1[}(y)
\end{aligned}
$$

On reconnait bien une loi bêta de paramètre α et β.

Question 2 :

Nous allons utiliser ici la transformé de Laplace de Z comme vu dans le cours d'introduction à la Statistique. La transformé de Laplace d'une V.A. caractérise sa loi.

$$
\begin{aligned}
E[e^{tZ}] &= E[e^{-t(U+V}] = E[e^{tU}e^{tV}] \\
&= E[e^{tU}]E[e^{tV}] \qquad car\ U\ V\ sont\ independant \\
&= \int_0^\infty \frac{\theta^\alpha u^{\alpha-1}e^{-(\theta+t)u}}{\Gamma(\alpha)}\,du + \int_0^\infty \frac{\theta^\beta v^{\beta-1}e^{-(\theta+t)v}}{\Gamma(\beta)}\,dv \\
&= \frac{\theta^\alpha}{(\theta+t)^\alpha}\int_0^\infty \frac{(\theta+t)^\alpha u^{\alpha-1}e^{-(\theta+t)u}}{\Gamma(\alpha)}\,du + \frac{\theta^\beta}{(\theta+t)^\beta}\int_0^\infty \frac{(\theta+t)^\beta v^{\beta-1}e^{-(\theta+t)v}}{\Gamma(\beta)}\,dv \\
&= \frac{\theta^\alpha}{(\theta+t)^\alpha} + \frac{\theta^\beta}{(\theta+t)^\beta} \qquad car\ on\ à\ des\ integrales\ de\ fonctions\ densité\ (\ donc\ =\ à\ 1) \\
&= \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{(\theta+t)^{\alpha+\beta}} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

On reconnait la transformé de Laplace d'une loi $\Gamma(\alpha+\beta,\theta)$. Donc $Z\ \Gamma(\alpha+\beta,\theta)$.

Question 3 :

$$
\begin{aligned}
f_Y(y)f_Z(z) &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\mathbb{1}_{]0,1[}(y) * \frac{e^{-\theta z}\theta^{\alpha+\beta}z^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha+\beta}z^{\alpha+\beta-1}y^{\alpha-1}e^{-\theta z}\mathbb{1}_{]0,1[}(y)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_*^+}(z) \\
&= f_{Y,Z}(y,z)
\end{aligned}
$$

Y et Z sont donc independantes.

4 Méthode de Monte-Carlo

4.1 Exercice 4 :

On cherche à approcher π par la méthode de Monte-Carlo. Pour sela il nous suffit de générer aléatoirement des points (x, y) sur $]O, 1[x]0, 1[$. Nous utiliserons donc deux lois uniformes sur $[0, 1]$. On Trace ensuite le cercle de centre (0,) et de rayon 1. On fait ensuite le rapport entre les points à l'interrieur du cercle et ceux à l'exterieur, pour un nombre de points n suffisament grand, ce rapport doit être égale à $\frac{\pi}{4}$. Nous avons donc une estimations de pi !

En lançant la simulation pour $n = 10000$, on peut obtenir 3.142332 comme approximation de π

5 Simulation par la méthode du rejet

5.1 Exercice 5 :

Question 1 :

On cherche à montrer que

$$P(U < \tfrac{1}{T}) = \tfrac{1}{c}$$

On pose $T = \frac{c.g(x)}{f(x)}$, on a donc

$$\begin{aligned} P(U < \frac{1}{T}) &= P(U < \frac{f(x)}{c.g(x)}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{c.g(x)} * g(x)\, dx \\ &= \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx \\ &= \frac{1}{c} \end{aligned}$$

Car f est la densité de X, $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$

Question 2 :

On cherche à montrer que, pour $B \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$P(X \in B|U < \tfrac{1}{T}) = \textstyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$$

Or, on sait que :

$$P(X \in B|U < \tfrac{1}{T}) = \frac{P(U<\frac{1}{T} \bigcap X \in B)}{P(U<\frac{1}{T})}$$

De plus, comme X et U sont independant :

$$\frac{P(U<\frac{1}{T} \bigcap X \in B)}{P(U<\frac{1}{T})} = \frac{P(U<\frac{1}{T}) * (X \in B)}{P(U<\frac{1}{T})} = P(X \in B)$$

D'où finalement :

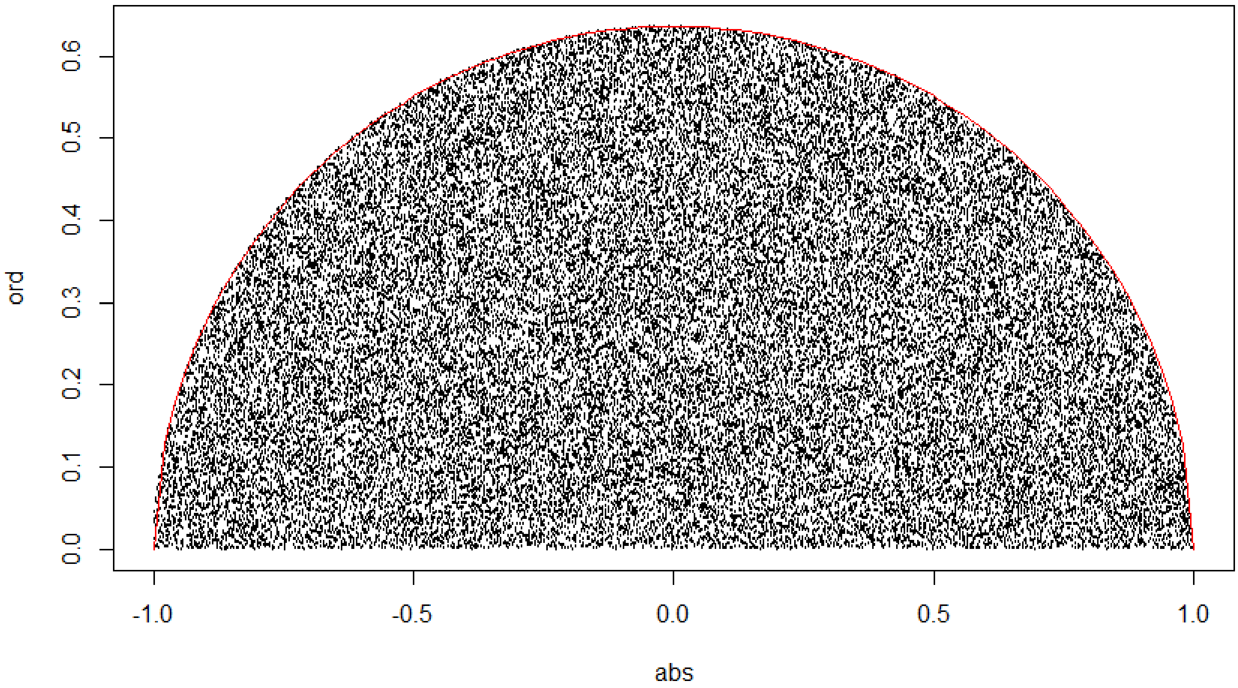
$$P(X \in B|U < \tfrac{1}{T}) = P(X \in B) = \textstyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$$

5.2 Exercice 6 :

Soit X une V.A. réelle ayant pour densité la fonction suivante :

$$X \in \mathbb{R}, f(x) = \tfrac{2}{\pi}\sqrt{1 - x^2} * \mathbb{1}_{[-1,1]}$$

Voici le graphique que nous obtenons après la simulation :



On peut voir que nos points sont bien répartie sous la demi-élipse qui est f, notre implementation est donc correct.

6 Annexes : Codes

6.1 Buffon

```
buffon <- function(n, a, L) {

#génération des VA, teta pour langle, X pour la distance à la jointure la plus proche
  teta <- runif(n, -(pi/2), pi/2)
  x <- runif(n, 0, 0.5*L)

#simulation
  lancer <- x<=(0.5 * a * cos(teta))

  return (2*a/(L*mean(lancer)))
}

test = buffon(10000000, 1, 4)
test
```

6.2 Inversion

```
#simulation par la mthds d'inversion
#1)loi exponentielle

iter=10
iter1=1000
lambda=10
```

```
Finv<-function(u,lambda)
{
  return(-(1/lambda)*log(1-u))
}
U=c(Finv(runif(iter,0,1),lambda))
U=sort(U)
U1=c(Finv(runif(iter1,0,1),lambda))
U1=sort(U1)
par(mfrow=c(1,3))
curve ( pexp ( x , lambda ) , 0 , 1 , main='F : loi exp' )
plot(x=U,(y=1:iter),type="o")
plot(x=U1,(y=1:iter1),type="o")

#2)loi de Bernouilli
iter=10
iter1=1000
lambda=0.4

F2inv<-function(u,p)
{
  x=rep(0,length(u))
  for(i in 1:length(u))
  {
    if (u[i]<1-p)
    {
      x[i]=0
    }
    else
    {
      x[i]=1
    }
  }
  return (x)
}


U=c(F2inv(runif(iter,0,1),lambda))
U=sort(U)
U1=c(F2inv(runif(iter1,0,1),lambda))
U1=sort(U1)

par(mfrow=c(1,3))
curve ( pbinom(x,1, lambda ) , -0.01 , 1 , main='F : loi de Bernouilli théorique' )
plot(x=U,(y=1:iter),type="o")
plot(x=U1,(y=1:iter1),type="o")
```

6.3 Box Muller

```
par(mfrow=c(1,1))
n = 10^4

V = rexp(n, 1)
U = runif(n, 0, 1)

X1 = sqrt(2*V)*cos(2*pi*U)
X2 = sqrt(2*V)*sin(2*pi*U)


par(mfrow=c(1,3))

hist(X1, col = "blue",freq = FALSE)
```

```
hist(X2, col = "red",freq = FALSE)

Y=(X1+X2)/2

hist(Y, col = "green", freq = FALSE)
```

6.4 Monte-Carlo

```
aprx <- function(n){
  cpt = 0

  for (i in 1:n){
    x=runif(1,0,1)
    y=runif(1,0,1)

    if( (x^2 + y^2) <= 1){
      cpt = cpt + 1
    }
  }

  aprx = cpt / n*4
  ecart = pi/aprx
  return (aprx)

}
aprx(1000000)
```

6.5 Rejet

```
N <- 100000

abs <- rep(0, N)
ord <- rep(0, N)

U <- runif(N, -1, 1)
V <- runif(N, 0, 1)

x<-U

y <- (2/pi) *sqrt(1-x^2)

for(i in 1:N){
  if(V[i]<y[i]){
    abs[i]<-x[i]
    ord[i]<-V[i]
  }
}

plot(abs, ord,cex=0.2)
curve((2/pi)*sqrt(1-x^2),from = -1, to =1,add=TRUE,col="red")
```