TP2 - Problème de Stokes

Analyse numérique II

Polytech MAM4 2022-23

Ce TP a pour but de montrer quelques propriétés de résolution d'un systeme linéaire de type "Elliptique contraint" et plus particulièrement de montrer l'efficacité d'un algorithme de Schur (inéxacte) sur un problème de Stokes (2d et voir 3d).

Les différents tests (benchmarks) seront menés sur un système d'équation provenant de la discrétisation différence finie (schéma de MAC) du problème se Stockes suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \vec{u} + \nabla p = \vec{f} & \text{dans}\, \Omega \\ \text{div}\left(\vec{u}\right) = 0 & \text{dans}\, \Omega \\ \vec{u} = \vec{g} & \text{sur}\, \partial \Omega \,\text{avec} \int_{\partial \Omega} \vec{g} . \vec{n}\, d\sigma = 0 \end{array} \right)$$

Ceci est un TP compétitif, le meilleur temps de résolution aura un bonus !

Pour un document de référence voir :

[1] https://scheid.perso.math.cnrs.fr/Enseignement/polyM2IMOI.pdf

---

1. Assemblage du système 2D

On se donne une grille uniforme sur ¿$0,1$¿¿ avec un pas $h = \frac{1}{n+1}$. Dans un premier temps ne nous soucions pas des conditions de Dirichlet ($\vec{g}$) (voir [1] p104).

On note

- $M_{i,j} = (i h, j h), i, j = 0, .., n+1$ les noeuds de la grille.
- $C_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = \left((i+1/2)h, (j+1/2)h\right), i, j = 0, .., n$ les centres des cellules de la grille.

On cherche

- les composantes de la vitesse aux noeuds de la grille $u^1_{i,j} \simeq u^1(M_{i,j}), u^2_{i,j} \simeq u^2(M_{i,j})$ $i, j = 0, .., n+1$.
- la pression au centre des cellules $p_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \simeq p\left(C_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}\right)$ $i, j = 0, .., n$

Le schéma de MAC donne le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} -\mu\,\Delta_h u^1_{i,j} + \dfrac{1}{2h}\left(p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\right) = f^1_{i,j} & i,j=0,..,n+1 \\ -\mu\,\Delta_h u^2_{i,j} + \dfrac{1}{2h}\left(p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\right) = f^2_{i,j} & i,j=0,..,n+1 \\ \dfrac{1}{2h}\left(u^1_{i,j} + u^1_{i,j+1} - u^1_{i+1,j} - u^1_{i+1,j+1}\right) + \dfrac{1}{2h}\left(u^2_{i,j} + u^2_{i+1,j} - u^2_{i,j+1} - u^2_{i+1,j+1}\right) = 0 & i,j=0,..,n \end{array}\right)$$

avec $-\Delta_h u_{i,j} = \frac{1}{h^2}\left(-u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + 4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1}\right)$ et les valeurs $p_{-\frac{1}{2},..} = p_{..,-\frac{1}{2}} = p_{n+\frac{3}{2},..} = p_{..,n+\frac{3}{2}} = 0$.

Ceci donne un système matriciel de la forme :

$$ \left(\begin{array}{c c c}A_1 & 0 &B_1^T\\0 & A_2 &B_2^T \\B_1& B_2& 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c}u^1\\u^2\\p\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}f_1\\f_2\\0\end{array}\right) $$

avec

- A_1, A_2 matrices de taille $(n+2)^2 \times (n+2)^2$
- B_1; B_2 matrices de taille $(n+1)^2 \times (n+2)^2$

2. Conditions aux limites

Pour l'instant nous n'avons pas pris en compte les conditions aux limites autrement dit il n'est pas tenu compte des éléments faisant parti de la frontière.

Supposons que l'on ai numéroté les sommets de tel sorte que le système s'écrive

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V \\ V_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b_D \end{pmatrix}$$

avec V_D les valeurs de V sur la frontière donc connus ! Ce ne sont pas des inconnues on peut écrire formellement $V_D = g$

Atrement dit on doit résoudre le système :

$$A_{11} V = b - A_{12} g$$

Une autre solution est de travailler par pénalisation, on garde le premiès système et on ajoute 2 termes :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}+\frac{1}{\varepsilon} Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ V_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b_D+\frac{1}{\varepsilon} g \end{pmatrix}$$

En prenant $\varepsilon <¿1$ on fixe numériquement la valeur de V_D car on a de manière équivallente

$$\left\{ \begin{matrix} A_{11}V+A_{12}V_D=b \\ (Id+\varepsilon A_{22})V_D=g+\varepsilon(A_{21}V+b_D) \end{matrix} \right)$$

Et donc $V_D=g+o(\varepsilon)$, le choix de ε va dépendre du rayon spectral de A_{11}.

En prenant $\varepsilon=\rho(A_{11})^{-1}\times 10^{-20}$ donne $\rho(Id+\varepsilon A_{22})\leq 1+10^{-20}$...

---

3. Problème de la Cavité entrainée (voir [1] p112) :

Dans cet exemple, on impose une vitesse nulle partout sur le bord du carré $¿0,1¿¿$ sauf sur le bord supérieur $y=1$ où la vitesse est horizontale.

Plus précisément, on choisit

- $u=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sur les bords $x=0$; $x=1$ et $y=0$.
- $u=\begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix}$ sur le bord $y=1$.
- Avec une force de gravité verticale $f=\begin{pmatrix} 0 \\ -30 \end{pmatrix}$
- La viscosité $\mu=10^{-2}$

4. Travail Demandé :

Partie I - 2D

1. Ecrire des fonctions pour assembler le système (1) par bloc. Faire une seule matrice (globale) (problème de la cavité entrainé), afficher la solution ($\vec{u}$ et p). On utilisera l'opérateur \ pour résoudre le système.
2. Tracer en fonction de h le temps de résolution avec l'utilisation de \.
3. Ecrire l'algorithme du gradient conjugué appliquer au complément de Schur lié à la pression. On pourra utiliser différentes approches (sous blocs, préconditionneurs SSOR, ILU...). Implémenter une fonction *inexacte_Schur* avec les paramètres nécessaires (itérations interne ou réduction du résidu). Tracer en fonction de h les temps de résolution suivant les différentes stratégies.

4. Comparer les vitesses de résolution. L'objectif est à taille de problème fixée (assez grand) d'obtenir le meilleur temps de résolution suivant différentes stratégies (Matrice globale, matrice par bloc et complément de Shur...).
5. Conclure.

Partie 2 - 3D

1. Etendre à un calcul 3d de l'assemblage du système et du problème de la cavité entrainé.
2. Appliquer l'algorithme du complément de schur inexacte (gradient conjugué appliquer au complément de Schur lié à la pression).
3. Tracer en fonction de h les temps de résolutions obtenus (\ , schur inexacte).
4. Conclure