

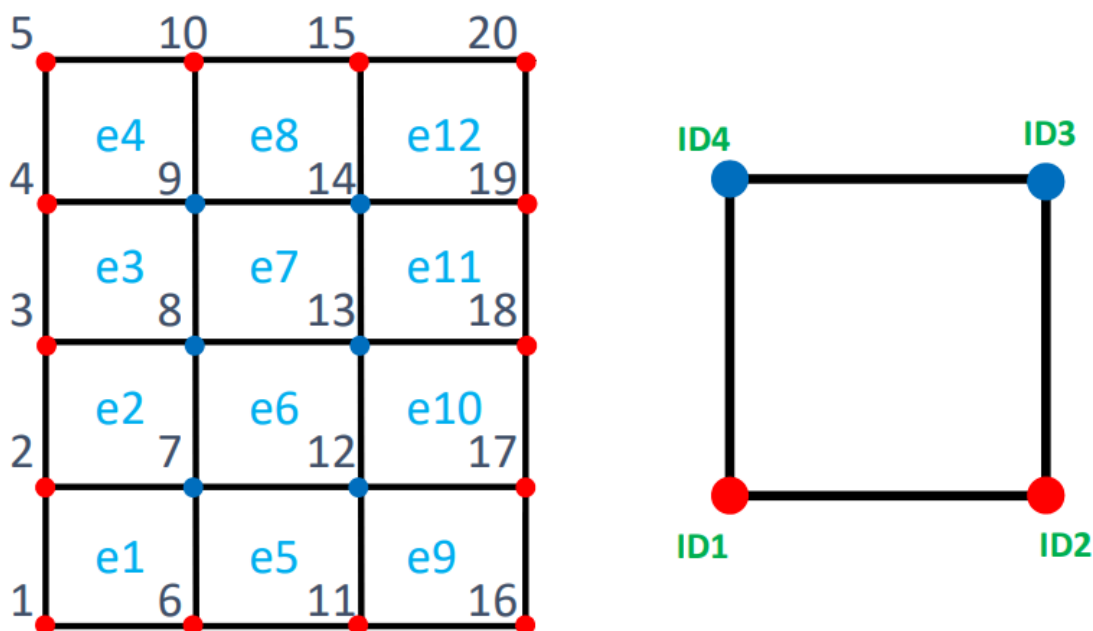
# Sprawozdanie - Program realizujący symulację nieustalonych procesów cieplnych w oparciu o MES

Wiktoria Sędzik, gr.lab 5

## 1. Wstęp teoretyczny.

Metoda elementów skończonych (MES) to metoda rozwiązywania zadań brzegowych spotykanych w fizyce i technice. Polega ona na zmianie dowolnej wielkości ciągłej na jej model dyskretny. Model dyskretny charakteryzuje się ograniczoną liczbą węzłów, które z kolei definiują ograniczoną liczbę elementów skończonych. W praktyce jest to więc podzielenie danego obszaru na mniejsze elementy (podobszary te to wspomniane elementy skończone), dla których łatwiej jest przeprowadzić obliczenia oraz dla których możliwe jest uzyskanie jak najbardziej dokładnego wyniku.

Wykonany program realizuje obliczenia dla zadań cieplnych. Algorytm MES dla zadań tego typu bierze pod uwagę ograniczoną liczbę punktów. Punkty te są wspomnianymi wcześniej węzłami, które tworzą siatkę modelu (siatkę elementów skończonych). Wartościami, które należy wyznaczyć w każdym węźle, są wartości temperatury. Wynika to z charakterystyki wybranego zadania brzegowego. W przypadku prezentowanego programu są to zadania cieplne, lecz dla innych zadań mogą to być wartości innej funkcji. Obszar należy również podzielić na ograniczoną liczbę podobszarów. Elementy skończone o wspólnych węzłach aproksymują kształt obszaru obliczeniowego.



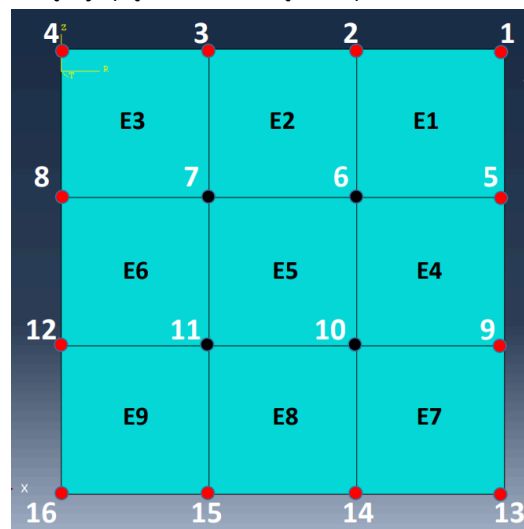
Powyżej przykładowy obszar podzielony na podobszary oznaczone literą "e". Obszar nazywa się siatką modelu, a każdy podobszar to element skończony posiadający ograniczoną liczbę węzłów. Węzły posiadać mogą warunki brzegowe - powyżej oznaczone są one poprzez czerwone punkty, natomiast te niebieskie to węzły bez zadanych warunków brzegowych. Elementy mają ze sobą wspólne węzły.

Algorytm także zakłada interpolację temperatury w każdym elemencie skończonym za pomocą wielomianu, który wyznaczyć można przy użyciu wartości temperatur w węzłach. Pamiętać jednak należy o zachowaniu warunku ciągłości temperatury na granicach elementów i dobraniu wielomianu dla każdego elementu. Ważnym jest także dobranie temperatur węzłowych w ten sposób, by zapewnić najlepsze w stosunku do rzeczywistego przybliżenia pola temperatury. W tym celu korzysta się z równania Fouriera, które jest różniczkowym równaniem przewodzenia ciepła. Liczba równań Fouriera potrzebnych do uzyskania wyniku zależna jest od liczby niewiadomych wartości węzłowych temperatury i musi być jej równa.

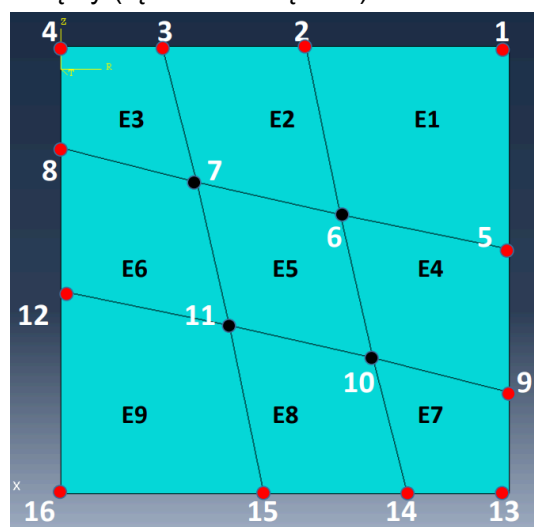
## 2. Opisy rozważanych modeli.

Do wykonania obliczeń w napisanym programie wykorzystano następujących modeli:

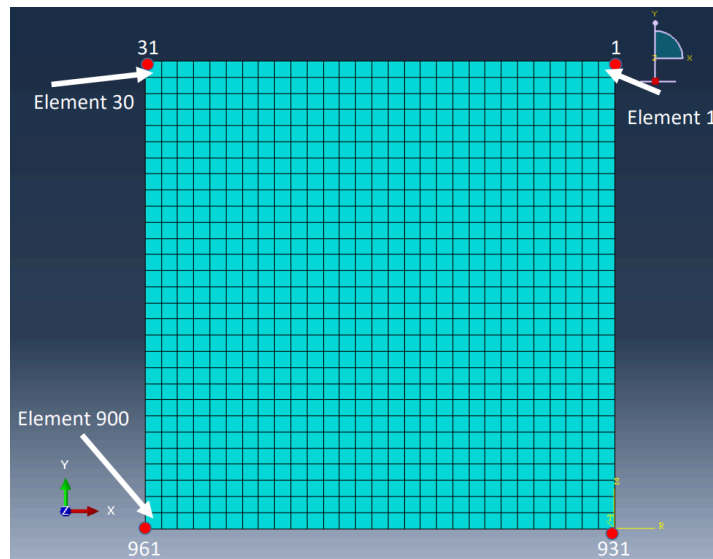
- *Test1\_4\_4* - Siatka kwadratowa o 9 elementach w kształcie kwadratów posiadających po 4 węzły (łącznie 16 węzłów)



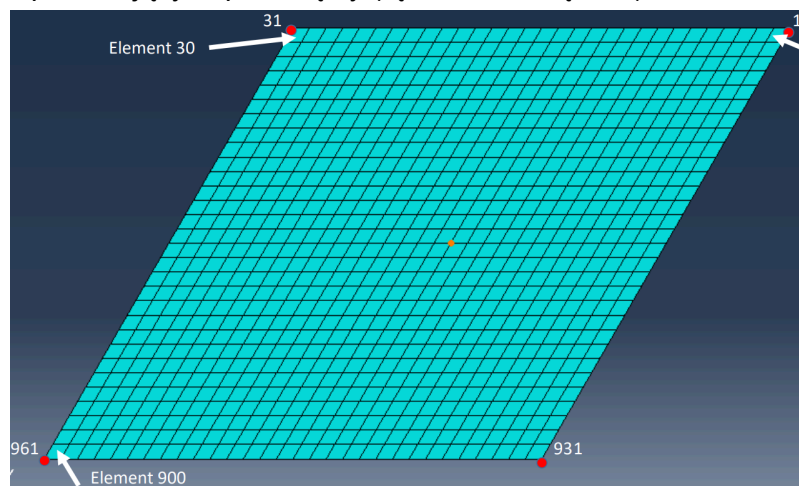
- *Test2\_4\_4\_MixGrid* - Siatka kwadratowa o 9 elementach w kształcie czworoboków posiadających po 4 węzły (łącznie 16 węzłów)



- *Test3\_31\_31\_kwadrat* - Siatka kwadratowa o 900 elementach w kształcie posiadających po 4 węzły (łącznie 961 węzłów)



- *Test4\_31\_31\_trapez* - Siatka w kształcie trapezu o 900 elementach w kształcie trapezów posiadających po 4 węzły (łącznie 961 węzłów)



### 3. Zgrubny opis MES.

Rozwiązanie naszego zagadnienia nieustalanej wymiany ciepła w układzie dwuwymiarowym polega na rozwiązaniu układu równań równań zadanych wzorem:

$$\left( [H] + \frac{[C]}{\Delta \tau} \right) \{t_1\} - \left( \frac{[C]}{\Delta \tau} \right) \{t_0\} + \{P\} = 0,$$

Rozwiązując układ równań dążymy do wyznaczenia  $\{t_1\}$ , czyli wartości temperatur węzłowych po czasie  $\Delta \tau$ . W celu wyliczenia tych temperatur potrzebować będziemy również:

- macierzy  $[H]$  - opisuje ona przechodzenie strumienia ciepła przez poszczególne węzły siatki,
- macierzy  $[C]$  - opisuje ona zdolności węzłów do przechowywania energii cieplnej,

- wektora  $\{t_0\}$  - reprezentuje on temperatury węzłowe w chwili  $\tau = 0$ ,
- wektora  $\{P\}$  - opisuje on wpływ temperatury otoczenia na poszczególne węzły.

Do takiej postaci układu równań możemy dojść wychodząc od wzoru opisującego równanie Fouriera:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x(t) \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y(t) \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z(t) \frac{\partial t}{\partial z} \right) + \left( Q - c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} \right) = 0.$$

W tym równaniu wykorzystujemy anizotropowe współczynniki przewodzenia ciepła oznaczone jako  $k_x(t)$ ,  $k_y(t)$ ,  $k_z(t)$ . Są one zależne od temperatury  $t$ . We wzorze pojawia się również  $Q$ , które wyraża prędkość generowania ciepła.

Równanie finalnie sprowadza się do ostatecznej postaci:

$$[H]\{t\} + [C] \frac{\partial}{\partial \tau} \{t\} + \{P\} = 0,$$

W ogólnym przypadku wartości temperatury w węzłach  $\{t\}$  zależą od czasu. Możemy więc ułożyć poniższą zależność:

$$\{t\} = \{N_0, N_1\} \begin{Bmatrix} \{t_0\} \\ \{t_1\} \end{Bmatrix}.$$

Dalej możemy przedstawić pochodne temperatury względem czasu jako:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{t\}}{\partial \tau} &= \left\{ \frac{\partial N_0}{\partial \tau}, \frac{\partial N_1}{\partial \tau} \right\} \begin{Bmatrix} \{t_0\} \\ \{t_1\} \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\Delta \tau} \{-1, 1\} \begin{Bmatrix} \{t_0\} \\ \{t_1\} \end{Bmatrix} = \frac{\{t_1\} - \{t_0\}}{\Delta \tau}. \end{aligned}$$

Niejawny schemat wyznaczenia temperatury będzie się zatem prezentował następująco:

$$\left( [H] + \frac{[C]}{\Delta \tau} \right) \{t_1\} - \left( \frac{[C]}{\Delta \tau} \right) \{t_0\} + \{P\} = 0.$$

W celu obliczenia poszczególnych wyrażeń program wykonuje kilka ważnych kroków. Pomijając operacje wczytania plików tekstowych z informacjami o danej siatce i zapisania tych informacji do odpowiednich struktur będą to: obliczenie macierzy  $H$ ,  $H_{bc}$ , wektora  $P$  oraz macierzy  $C$ . Wszystkie poniższe wyrażenia obliczane zostają lokalnie dla elementów i później przez agregację "zbudują" globalne wyrażenia (dotyczące całego modelu).

### Obliczanie macierzy $H$

Pierwszym wyrażeniem potrzebnym do rozwiązania układów równań będzie obliczenie macierzy  $H$ . Opisuje ją wzór:

$$[H] = \int_V k(t) \left( \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\}^T \right) dV$$

Koniecznym jest więc obliczenie wartości funkcji kształtu. Dla elementów o kształtach czworobocznych do czynienia będziemy mieć z czterema funkcjami kształtu prezentującymi się wzorami:

$$N_1 = 0.25(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_2 = 0.25(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_3 = 0.25(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N_4 = 0.25(1 - \xi)(1 + \eta)$$

Do obliczeń potrzebne są nam pochodne funkcji kształtu po  $\xi$  i  $\eta$ . Przybierają one postaci:

$$\frac{dN1}{d\xi} = -0.25(1 - \eta)$$

$$\frac{dN2}{d\xi} = 0.25(1 - \eta)$$

$$\frac{dN3}{d\xi} = 0.25(1 + \eta)$$

$$\frac{dN4}{d\xi} = -0.25(1 + \eta)$$

$$\frac{dN1}{d\eta} = -0.25(1 - \xi)$$

$$\frac{dN2}{d\eta} = -0.25(1 + \xi)$$

$$\frac{dN3}{d\eta} = 0.25(1 + \xi)$$

$$\frac{dN4}{d\eta} = 0.25(1 - \xi)$$

Wartości  $\xi$  i  $\eta$  zależą od przyjętego schematu całkowania. Dla poszczególnych schematów wartości prezentują się następująco:

Number of points, $n$	Points, $x_i$	Weights, $w_i$
1	0	2
2	$\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm\sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
	$\pm\sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$
5	0	$\frac{128}{225}$
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$

Interpolacja (proces oszacowania wartości pomiędzy dwoma znanymi punktami danych, tutaj, wartość pomiędzy węzłami) określona jest wzorami:

$$x = \sum_{i=1}^{np} (N_i x_i) = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 = \{N\}^T \{x\}$$

$$y = \sum_{i=1}^{np} (N_i y_i) = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 = \{N\}^T \{y\}$$

Następnym krokiem rozwiązania było obliczenie wartości macierzy jacobiego. Mówią one o tym, jak dany element zostanie przekształcony względem elementu uniwersalnego. Obliczamy je właśnie ze względu na to, że potrzebujemy ze znanego układu  $(\xi, \eta)$  przejść na układ  $(x, y)$ . Macierz jacobiego wygląda ona następująco:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

gdzie poszczególne jej elementy obliczymy całkując:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} x_4$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} x_4 :$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} y_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} y_4$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} y_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} y_4$$

Zmienne  $x$  oraz  $y$  określają położenie węzłów, natomiast  $\xi, \eta$  położenie punktów całkowania.

Mając macierz jacobiego możemy wykorzystać poniższe równanie i przekształcić je tak, aby możliwe było wyznaczenie pochodnych funkcji kształtu po  $x$  i  $y$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Zaznaczone kolorami fragmenty to obliczone pochodne funkcji kształtu po  $\xi$  i  $\eta$

Do wykonania tego konieczne jest również obliczenie wyznacznika macierzy jacobiego (detJ). Mając obliczone już pochodne funkcji kształtu po x i y możemy podstawić pozostałe wartości i przystąpić do wyliczenia macierzy H.

### Obliczanie macierzy Hbc

Macierz Hbc opisuje transport ciepła wnikaącego przez ściany, które są objęte warunkiem brzegowym. Obliczenie jej jest konieczne do obliczenia macierzy H potrzebnych do wyznaczenia rozwiązania układu niestacjonarnego:

$$[H] = \int_V k(t) \left( \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\}^T \right) dV + \int_S \alpha \{N\} \{N\}^T dS$$

Wzór opisujący macierz Hbc wygląda następująco:

$$[H_{BC}] = \int_S \alpha (\{N\} \{N\}^T) dS$$

$\alpha$  - współczynnik wymiany ciepła

### Obliczanie macierzy Hbc

Kolejnym wyrażeniem potrzebnym do wyznaczenia rozwiązania układu niestacjonarnego jest wektor P, który opisany jest wzorem:

$$[P] = \int_S \alpha \{N\} t_{ot} dS$$

$t_{ot}$  - temperatura otoczenia

### Obliczanie macierzy C

Ostatnim wyrażeniem do obliczenia była macierz C

$$[C] = \int_V \rho c_p (\{N\} \{N\}^T) dV$$

$\rho$  - gęstość materiału,  $c_p$  - ciepło właściwe

### Agregacja macierzy H+Hbc, macierzy C oraz wektora P

Agregacja konieczna jest do opisanie procesu wymiany ciepła dla całego modelu. Agregacja będzie polegała na odpowiednim umiejscowieniu lokalnych macierzy w macierzy globalnej z uwzględnieniem umiejscowienia węzłów elementów. W przypadku macierzy H i Hbc przed dokonaniem agregacji należy dodać je do siebie i dopiero ich sumę agregować. Mając wykonane wszystkie powyższe kroki można przystąpić do rozwiązywania układu równań dla układu niestacjonarnego.

#### 4. Zgrubna charakterystyka programu.

Program zdecydowałam się napisać w języku C++. Jest to program wieloplikowy, składający się z pliku main.cpp oraz dwóch innych plików źródłowych oraz odpowiadających im plików nagłówkowych. Plik main.cpp zawiera podstawowe operacje, takie jak wczytanie pliku siatki i zapisanie z niego wartości do odpowiednich struktur oraz wywoływanie funkcji.

Za wyświetlanie odpowiadają pliki Wyświetlanie.cpp oraz Wyświetlanie.h - znajdują się tam funkcje opisane na poniższych zdjęciach:

```
//wyświetlenie wyników
void Wyświetl(GlobalData global_data, Element element, vector<double> punkty);

//wyświetlenie wyników w standardzie Paraview
void Paraview(GlobalData global_data, Element element, int KrokCzasowy);

//wyświetlenie samej symulacji czasowej
void Wyniki(GlobalData global_data, Element element, vector<double> punkty);
```

Pliki Obliczenia.cpp i Obliczenia.h zawierają wszystkie funkcje i struktury wykorzystane do przeprowadzenia obliczeń. Struktury, które użyłam do przechowywania informacji o siatkach wczytanych z pliku to GlobalData i Element.

```
struct GlobalData {
    int SimulationTime;
    int SimulationStepTime;
    int Conductivity;
    int Alfa;
    int Tot;
    int InitialTemp;
    int Density;
    int SpecificHeat;
    int NodesNumber;
    int ElementsNumber;
};

struct Element{
    vector<vector<double>> ID;
    vector<double> x;
    vector<double> y;
    vector<int> BC_xy;
};
```

GlobalData przechowuje ogólne informacje o siatce, czyli kolejno czas symulacji, wartość kroku czasowego symulacji, wartość współczynnika przewodności cieplnej oraz współczynnika wymiany ciepła, temperatury otoczenia, temperaturę startową, wartość gęstości materiału, ciepła właściwego, liczby węzłów oraz ilości elementów.

Struktura Element odpowiada natomiast za przechowywanie informacji o numerach ID węzłów konkretnego elementu. Przechowywane są one w podwójnym wektorze o nazwie ID. Wektory x i y odpowiadają za przechowywanie kolejno współrzędnych x i y wczytanych węzłów, a wektor BC\_xy przechowuje informacje o tym, które węzły posiadają warunki brzegowe.

Funkcja schemat\_calkowania() odpowiada za obliczenia dla odpowiedniego schematu całkowania na podstawie wartości wybranej na klawiaturze (którą przyjmuje funkcja):

```
void schemat_calkowania(vector<double> wybrane_wagi, vector<double> wybrane_punkty){
    for (int i = 0; i < wybrane_wagi.size(); ++i) {
        wagi.push_back(wybrane_wagi[i]);
        punkty.push_back(wybrane_punkty[i]);
    }
}
```



Funkcja BCs() oblicza ilość węzłów posiadających warunek brzegowy na podstawie ilości ogólnej węzłów:

```
int BCs(int N){
    int BCs; int pom;
    pom = N - (sqrt(x: N)*2) - ((sqrt(x: N)-2)*2);
    BCs = N-pom;
    return BCs;
}
```

Pozostałe funkcje zajmują się obliczaniem poszczególnych wyrażeń niezbędnych do rozwiązania układu równań dla rozwiązania niestacjonarnego.

```
//funkcja dzięki której uzyskujemy wartosci calek dN/dksi dla punktow całkowania
void calkuj_ksi(vector<double> waga, vector<double> punkt);

//funkcja dzięki której uzyskujemy wartosci calek dN/deta dla punktow całkowania
void calkuj_eta(vector<double> waga, vector<double> punkt);

//funkcja wykonuje obliczenia macierzy jakobiego
void macierz_jakobiego(Element wektory, GlobalData gd);

//funkcja wykonuje obliczenia macierzy H dla elementow
void macierz_H (Element wektory, GlobalData gd);

//funkcja wykonuje obliczenia macierzy Hbc dla elementow
void macierz_Hbc-wektor_P(Element wektory, GlobalData gd);

//funkcja wykonuje operacje agregacji dla macierzy H+Hbc, C oraz wektora P
void agregacja(Element wektory, GlobalData gd);

//funkcja wykonuje obliczenia macierzy C dla elementow
void macierz_C(vector<double> waga, vector<double> punkt, GlobalData gd);

//funkcja rozwiązania układu niestacjonarnego
void rozwiązanie_niestacjonarne(GlobalData data);
```

Poszczególne wyniki obliczeń zapisywane były do wektorów.

```
//wektory przechowujące wyniki
extern vector<int> BC; //wektor przechowujący numery wezlow posiadajacych BC
extern vector<vector<double>> wyniki_ksi; //wyniki całkowania dN/dksi
extern vector<vector<double>> wyniki_eta; //wyniki całkowania dN/dksi
extern vector<vector<double>> jakobiany; //macierze jakobiego
extern vector<vector<vector<double>>> ObliczeniaElementow; //jakobiany elementow (jakobian to 1 wektor
extern vector<vector<double>> wyznacznikiJ; //wyznaczniki macierzy jakobiego
extern vector<vector<double>> odwrotnieWJ; //odwrotnosci wyznacznikow macierzy jakobiego
extern vector<vector<double>> wdndxpc; //wartosci dN/dx dla pc
extern vector<vector<double>> wdndypc; //wartosci dN/dy dla pc
extern vector<vector<vector<double>>> zbiorwdndx; //wartosci dN/dx dla elementow
extern vector<vector<vector<double>>> zbiorwdndy; //wartosci dN/dy dla elementow
extern vector<vector<double>> skladH; //macierze H
extern vector<vector<vector<double>>> macierzeHelementow; //zbior macierzy H
extern vector<vector<vector<double>>> macierzeHBC; //macierze Hbc elementow
extern vector<vector<double>> wektoryP; //wektory P elementow
extern vector<vector<vector<double>>> finalH; //H+Hbc dla kazdego elementu
extern vector<vector<double>> macierzHagregowana; //macierz H+Hbc zagregowana
extern vector<double> wektorPagregowany; //zagregowany wektor P
extern vector<vector<double>> wyniki_N; //wyniki obliczen funkcji ksztaltu
extern vector<vector<double>> wyniki_C; //macierze C elementow
extern vector<vector<vector<double>>> wyniki_C9ELEM; //zbior macierzy C
extern vector<vector<double>> macierzCagregowana; //zagregowana macierz C
extern vector<vector<double>> zbiorTemperatur; //zbior wektorow t1 dla wszystkich krokow czasowych
extern vector<vector<double>> zbiorMinMax; //max i min dla danego kroku czasowego
```

## 5. Wyniki obliczeń oprogramowania.

Wyniki dla pliku Test1\_4\_4 kolejno dla dwupunktowego, trójpunktowego i czteropunktowego schematu całkowania:

T = 0 MIN=100, MAX=100	T = 0 MIN=100, MAX=100	T = 0 MIN=100, MAX=100
T = 50 MIN=110.038, MAX=365.815	T = 50 MIN=110.038, MAX=365.815	T = 50 MIN=110.038, MAX=365.815
T = 100 MIN=168.837, MAX=502.592	T = 100 MIN=168.837, MAX=502.592	T = 100 MIN=168.837, MAX=502.592
T = 150 MIN=242.801, MAX=587.373	T = 150 MIN=242.801, MAX=587.373	T = 150 MIN=242.801, MAX=587.373
T = 200 MIN=318.615, MAX=649.387	T = 200 MIN=318.615, MAX=649.387	T = 200 MIN=318.615, MAX=649.387
T = 250 MIN=391.256, MAX=700.068	T = 250 MIN=391.256, MAX=700.068	T = 250 MIN=391.256, MAX=700.068
T = 300 MIN=459.037, MAX=744.063	T = 300 MIN=459.037, MAX=744.063	T = 300 MIN=459.037, MAX=744.063
T = 350 MIN=521.586, MAX=783.383	T = 350 MIN=521.586, MAX=783.383	T = 350 MIN=521.586, MAX=783.383
T = 400 MIN=579.034, MAX=818.992	T = 400 MIN=579.034, MAX=818.992	T = 400 MIN=579.034, MAX=818.992
T = 450 MIN=631.689, MAX=851.431	T = 450 MIN=631.689, MAX=851.431	T = 450 MIN=631.689, MAX=851.431
T = 500 MIN=679.908, MAX=881.058	T = 500 MIN=679.908, MAX=881.058	T = 500 MIN=679.908, MAX=881.058

Wyniki dla pliku Test2\_4\_4\_MixGrid kolejno dla dwupunktowego, trójpunktowego i czteropunktowego schematu całkowania:

T = 0 MIN=100, MAX=100	T = 0 MIN=100, MAX=100	T = 0 MIN=100, MAX=100
T = 50 MIN=95.1518, MAX=374.686	T = 50 MIN=95.1591, MAX=374.668	T = 50 MIN=95.1591, MAX=374.668
T = 100 MIN=147.644, MAX=505.968	T = 100 MIN=147.656, MAX=505.954	T = 100 MIN=147.656, MAX=505.954
T = 150 MIN=220.164, MAX=586.998	T = 150 MIN=220.178, MAX=586.989	T = 150 MIN=220.178, MAX=586.989
T = 200 MIN=296.736, MAX=647.286	T = 200 MIN=296.751, MAX=647.28	T = 200 MIN=296.751, MAX=647.28
T = 250 MIN=370.968, MAX=697.334	T = 250 MIN=370.983, MAX=697.33	T = 250 MIN=370.983, MAX=697.33
T = 300 MIN=440.56, MAX=741.219	T = 300 MIN=440.574, MAX=741.216	T = 300 MIN=440.574, MAX=741.216
T = 350 MIN=504.891, MAX=781.21	T = 350 MIN=504.904, MAX=781.241	T = 350 MIN=504.904, MAX=781.241
T = 400 MIN=564.002, MAX=817.392	T = 400 MIN=564.014, MAX=817.42	T = 400 MIN=564.014, MAX=817.421
T = 450 MIN=618.174, MAX=850.237	T = 450 MIN=618.185, MAX=850.264	T = 450 MIN=618.185, MAX=850.264
T = 500 MIN=667.766, MAX=880.168	T = 500 MIN=667.776, MAX=880.192	T = 500 MIN=667.776, MAX=880.192

Wyniki dla pliku Test3\_31\_31\_kwadrat kolejno dla dwupunktowego, trójpunktowego i czteropunktowego schematu całkowania:

T = 0 MIN=100, MAX=100	T = 0 MIN=100, MAX=100	T = 0 MIN=100, MAX=100
T = 1 MIN=100, MAX=149.557	T = 1 MIN=100, MAX=149.557	T = 1 MIN=100, MAX=149.557
T = 2 MIN=100, MAX=177.445	T = 2 MIN=100, MAX=177.445	T = 2 MIN=100, MAX=177.445
T = 3 MIN=100, MAX=197.267	T = 3 MIN=100, MAX=197.267	T = 3 MIN=100, MAX=197.267
T = 4 MIN=100, MAX=213.153	T = 4 MIN=100, MAX=213.153	T = 4 MIN=100, MAX=213.153
T = 5 MIN=100, MAX=226.683	T = 5 MIN=100, MAX=226.683	T = 5 MIN=100, MAX=226.683
T = 6 MIN=100, MAX=238.607	T = 6 MIN=100, MAX=238.607	T = 6 MIN=100, MAX=238.607
T = 7 MIN=100, MAX=249.347	T = 7 MIN=100, MAX=249.347	T = 7 MIN=100, MAX=249.347
T = 8 MIN=100, MAX=259.165	T = 8 MIN=100, MAX=259.165	T = 8 MIN=100, MAX=259.165
T = 9 MIN=100, MAX=268.241	T = 9 MIN=100, MAX=268.241	T = 9 MIN=100, MAX=268.241
T = 10 MIN=100, MAX=276.701	T = 10 MIN=100, MAX=276.701	T = 10 MIN=100, MAX=276.701
T = 11 MIN=100.001, MAX=284.641	T = 11 MIN=100.001, MAX=284.641	T = 11 MIN=100.001, MAX=284.641
T = 12 MIN=100.002, MAX=292.134	T = 12 MIN=100.002, MAX=292.134	T = 12 MIN=100.002, MAX=292.134
T = 13 MIN=100.003, MAX=299.237	T = 13 MIN=100.003, MAX=299.237	T = 13 MIN=100.003, MAX=299.237
T = 14 MIN=100.005, MAX=305.997	T = 14 MIN=100.005, MAX=305.997	T = 14 MIN=100.005, MAX=305.997
T = 15 MIN=100.009, MAX=312.451	T = 15 MIN=100.009, MAX=312.451	T = 15 MIN=100.009, MAX=312.451
T = 16 MIN=100.014, MAX=318.631	T = 16 MIN=100.014, MAX=318.631	T = 16 MIN=100.014, MAX=318.631
T = 17 MIN=100.021, MAX=324.564	T = 17 MIN=100.021, MAX=324.564	T = 17 MIN=100.021, MAX=324.564
T = 18 MIN=100.032, MAX=330.271	T = 18 MIN=100.032, MAX=330.271	T = 18 MIN=100.032, MAX=330.271
T = 19 MIN=100.046, MAX=335.772	T = 19 MIN=100.046, MAX=335.772	T = 19 MIN=100.046, MAX=335.772
T = 20 MIN=100.064, MAX=341.085	T = 20 MIN=100.064, MAX=341.085	T = 20 MIN=100.064, MAX=341.085

Wyniki dla pliku Test4\_31\_31\_trapez kolejno dla dwupunktowego, trójpunktowego i czteropunktowego schematu całkowania:

T = 0  
MIN=100, MAX=100

T = 1  
MIN=100, MAX=166.936

T = 2  
MIN=100, MAX=207.233

T = 3  
MIN=100, MAX=236.287

T = 4  
MIN=100, MAX=259.465

T = 5  
MIN=100, MAX=279.031

T = 6  
MIN=100, MAX=296.121

T = 7  
MIN=100.001, MAX=311.385

T = 8  
MIN=100.001, MAX=325.235

T = 9  
MIN=100.003, MAX=337.951

T = 10  
MIN=100.005, MAX=349.731

T = 11  
MIN=100.01, MAX=360.723

T = 12  
MIN=100.018, MAX=371.04

T = 13  
MIN=100.03, MAX=380.771

T = 14  
MIN=100.047, MAX=389.987

T = 15  
MIN=100.072, MAX=398.747

T = 16  
MIN=100.105, MAX=407.099

T = 17  
MIN=100.149, MAX=415.083

T = 18  
MIN=100.205, MAX=422.734

T = 19  
MIN=100.276, MAX=430.081

T = 20  
MIN=100.364, MAX=437.15

T = 0  
MIN=100, MAX=100

T = 1  
MIN=100, MAX=166.936

T = 2  
MIN=100, MAX=207.233

T = 3  
MIN=100, MAX=236.287

T = 4  
MIN=100, MAX=259.465

T = 5  
MIN=100, MAX=279.031

T = 6  
MIN=100, MAX=296.121

T = 7  
MIN=100.001, MAX=311.385

T = 8  
MIN=100.001, MAX=325.235

T = 9  
MIN=100.003, MAX=337.951

T = 10  
MIN=100.005, MAX=349.731

T = 11  
MIN=100.01, MAX=360.723

T = 12  
MIN=100.018, MAX=371.04

T = 13  
MIN=100.03, MAX=380.771

T = 14  
MIN=100.047, MAX=389.987

T = 15  
MIN=100.072, MAX=398.747

T = 16  
MIN=100.105, MAX=407.099

T = 17  
MIN=100.149, MAX=415.083

T = 18  
MIN=100.205, MAX=422.734

T = 19  
MIN=100.276, MAX=430.081

T = 20  
MIN=100.364, MAX=437.15

T = 0  
MIN=100, MAX=100

T = 1  
MIN=100, MAX=166.936

T = 2  
MIN=100, MAX=207.233

T = 3  
MIN=100, MAX=236.287

T = 4  
MIN=100, MAX=259.465

T = 5  
MIN=100, MAX=279.031

T = 6  
MIN=100, MAX=296.121

T = 7  
MIN=100.001, MAX=311.385

T = 8  
MIN=100.001, MAX=325.235

T = 9  
MIN=100.003, MAX=337.951

T = 10  
MIN=100.005, MAX=349.731

T = 11  
MIN=100.01, MAX=360.723

T = 12  
MIN=100.018, MAX=371.04

T = 13  
MIN=100.03, MAX=380.771

T = 14  
MIN=100.047, MAX=389.987

T = 15  
MIN=100.072, MAX=398.747

T = 16  
MIN=100.105, MAX=407.099

T = 17  
MIN=100.149, MAX=415.083

T = 18  
MIN=100.205, MAX=422.734

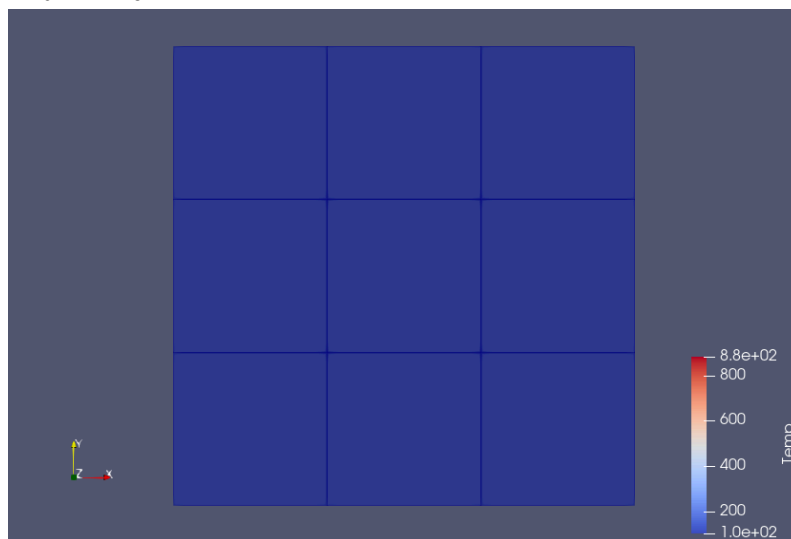
T = 19  
MIN=100.276, MAX=430.081

T = 20  
MIN=100.364, MAX=437.15

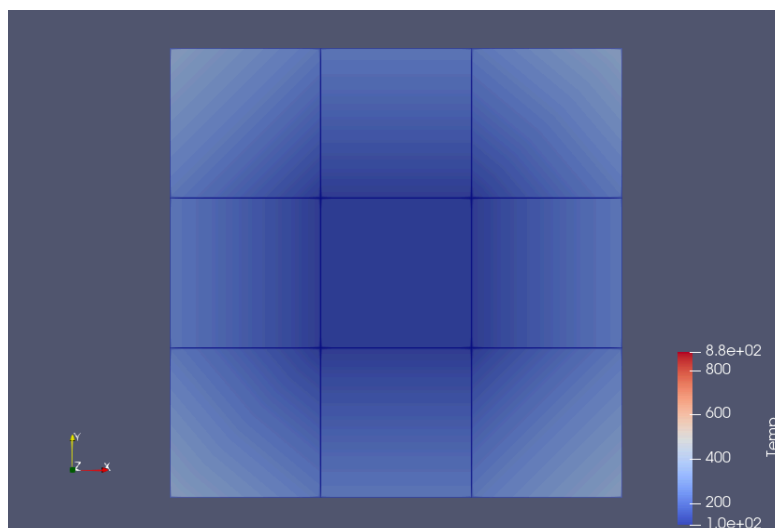
Wyniki symulacji przedstawione w sposób graficzny za pomocą oprogramowania ParaView:

### Test1\_4\_4

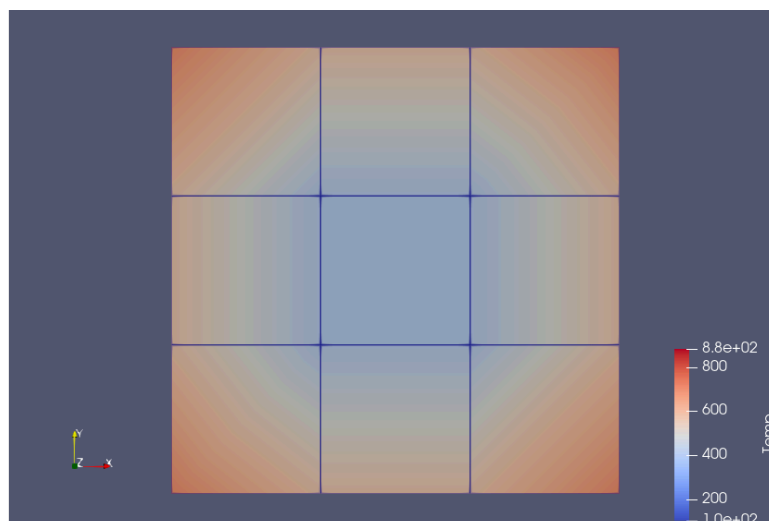
krok 0 (Początek symulacji)



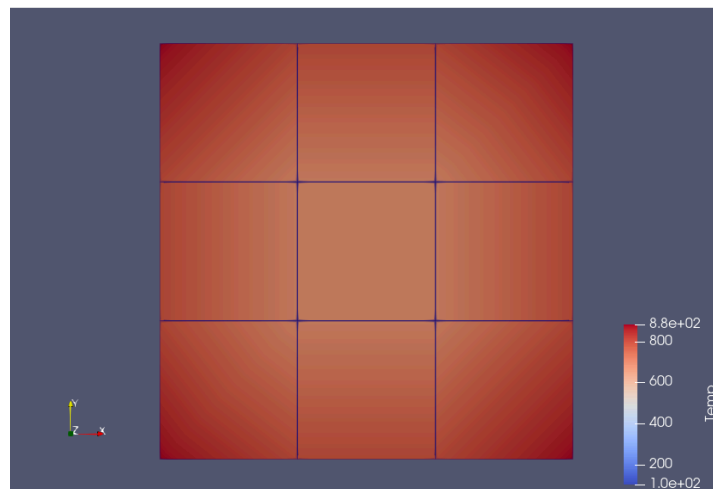
krok 1



krok 5

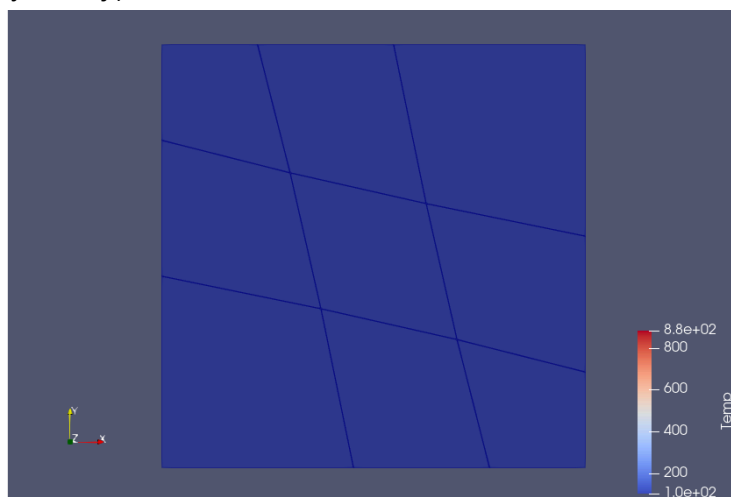


krok 10(koniec symulacji)

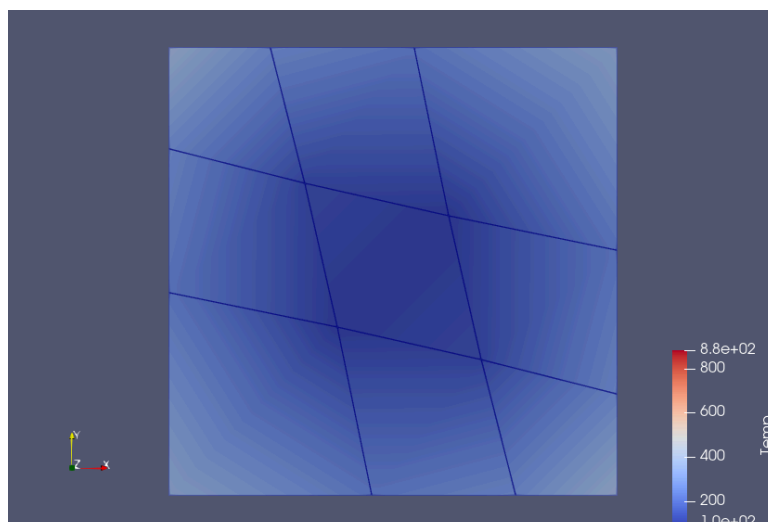


### Test2\_4\_4\_MixGrid

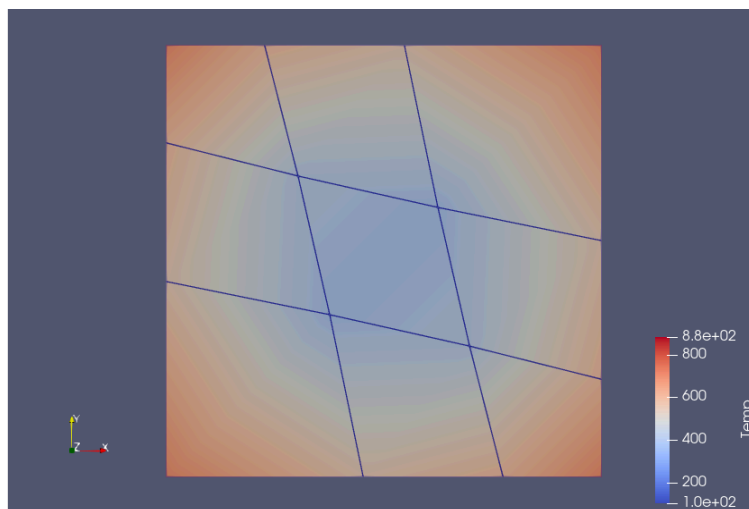
krok 0 (początek symulacji)



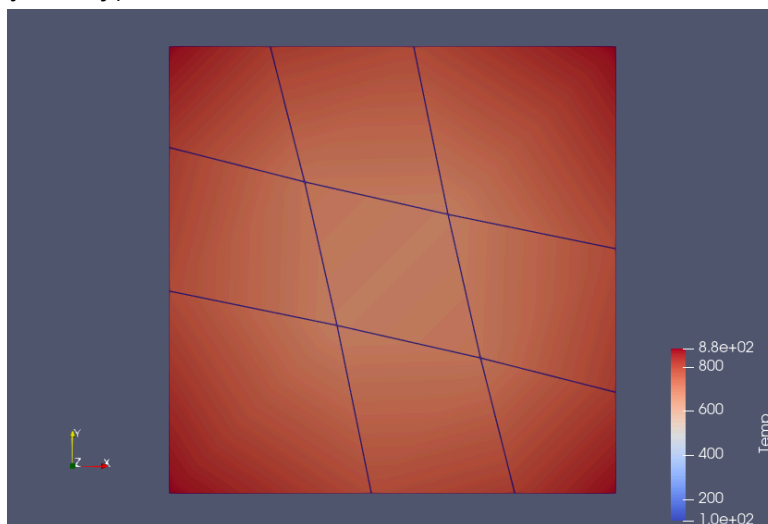
krok1



krok5

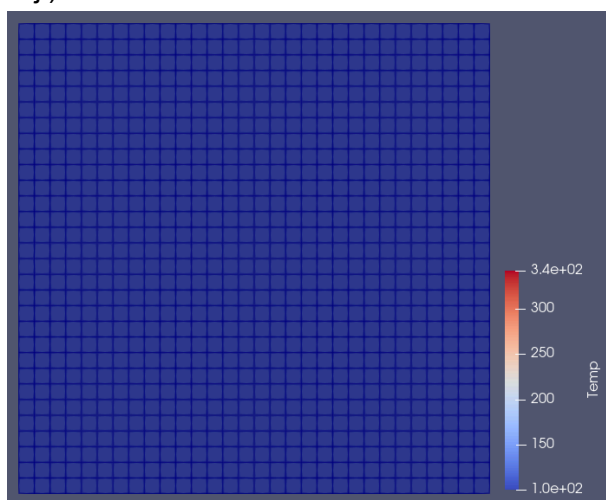


krok10 (Koniec symulacji)

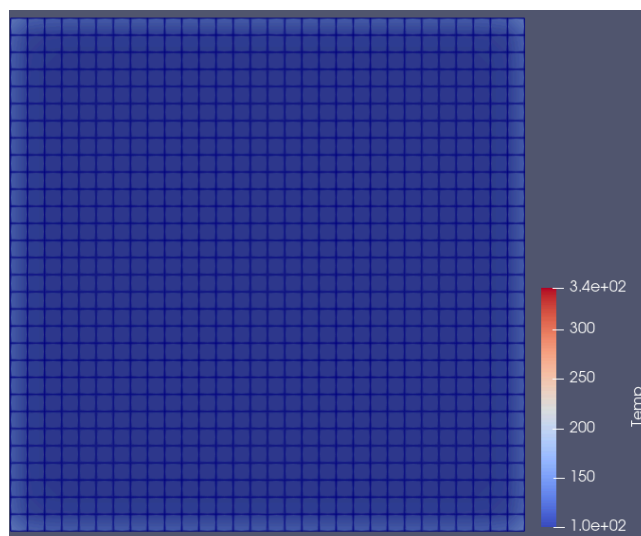


### Test3\_31\_31\_kwadrat

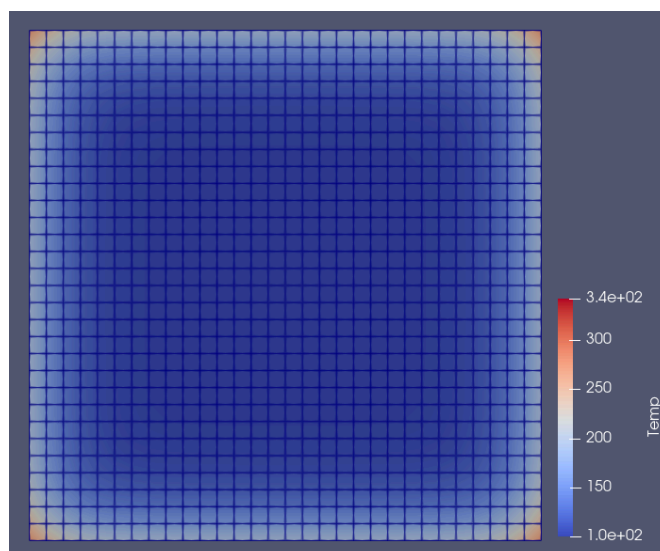
krok0 (Początek symulacji)



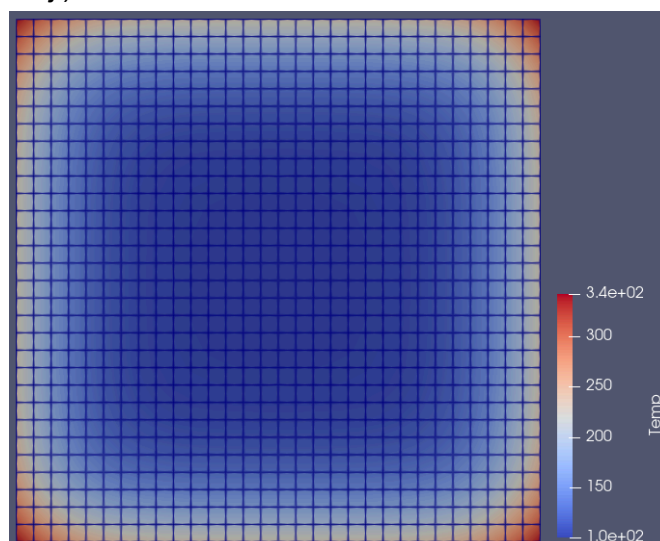
krok1



krok10



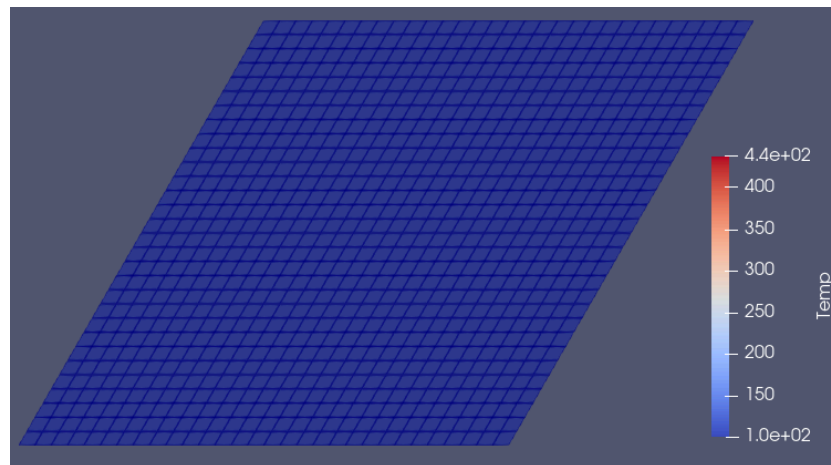
krok20 (Koniec symulacji)



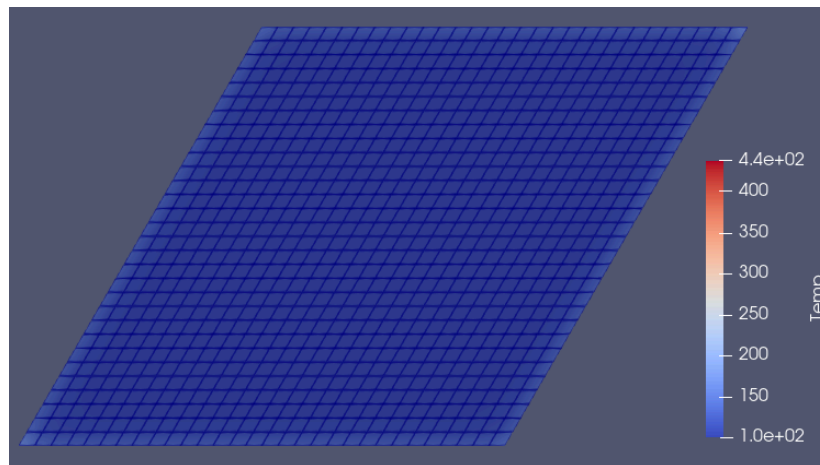


## Test4\_31\_31\_trapez

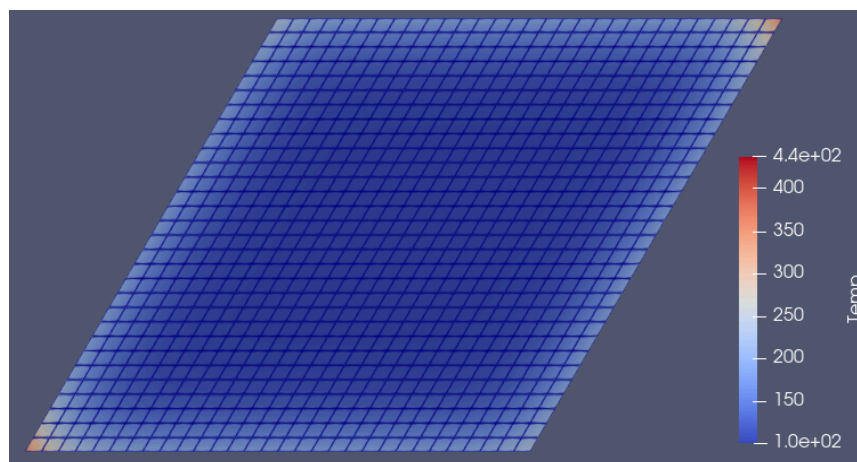
krok0 (Początek symulacji)



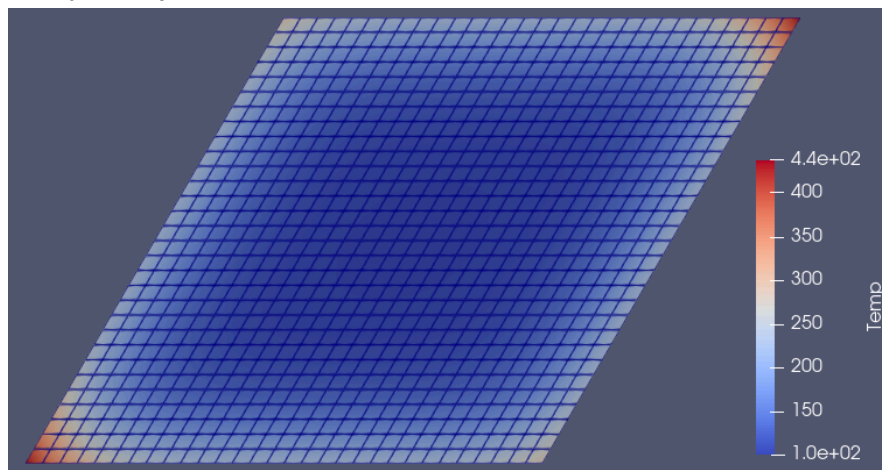
krok1



krok10



krok20 (Koniec symulacji)



## 6. Wnioski.

Możliwość przeprowadzenia obliczeń metodą elementów skończonych pozwoliła mi na skuteczne i dokładne rozwiązanie zadanie cieplnego. Potwierdzają to wyniki temperatur w symulacji czasowej uzyskane za pomocą oprogramowania, które są zgodne z wynikami podanymi przez prowadzącego. Program stworzony przeze mnie jest uniwersalny do rozwiązywania zadań cieplnych i stosunkowo szybki, dający dokładne wyniki. Więcej czasu na obliczenia potrzebne jest do wygenerowania wyników dla większych siatek jak np Test3\_31\_31\_kwadrat oraz Test4\_31\_31\_trapez, lecz wynika to z mnogości obliczeń do wykonania. Czasy te są i tak stosunkowo krótkie.

Ponadto program i otrzymywane wyniki pozwoliły mi na obserwację użytych wyrażeń. Jakobiany mówią nam o tym jak wygląda przekształcenie współrzędnych z lokalnego układu odniesienia do globalnego. Macierze H dają informacje o tym, jak zmieniają się funkcje kształtu w obszarze elementu skończonego. Wartości W wektorze P za to opisują ilość ciepła przepływającego przez powierzchnię w jednostce czasu i jednostce powierzchni, natomiast z wartości macierzy C można dowiedzieć się o przewodnictwie cieplnym rozważanego elementu.