模型比较与实现——均值-方差模型和 CAPM

章姝 2019110665

目录

Markowitz 均值方差组合模型（MM） **2**
1. 问题描述 2
2. 模型假设 2
3. 数学模型 2
4. 求解及讨论 3
均值-方差有效前沿 3
5. 拓展-引入无风险资产（MM2） 4
切点投资组合与单基金定理 5

资本资产定价模型（CAPM） **5**
1. 问题描述 5
2. 模型假设 5
3. 资本市场线（CML） 6
4. CAPM 模型 6
5. 证券市场线（SML） 6

模型比较 **7**

实验-代码实现 **7**
数据 7
实验细节 7
遇见的问题和思考 9
※ 待解决的问题：切点组合的求解 10

附录 **12**
（1）MM 推导 12
MM2 13
（2）两个有效前沿的切点 F 的坐标推导 13
（3）CAPM 推导 14

文中图片来均来自**代码实现**部分，代码作为附件提交。

Markowitz 均值方差组合模型（MM）

1. 问题描述

资产，是可以用于交易的投资工具（下文中的**证券**同义）

我们将资产的收益现金流是不确定的，其收益率可以看作一个随机变量。对于一个资产，投资者关注的核心点是以下两个指标：

- 预期收益，可以用收益率的期望 μ 来表示
- 风险，可以用收益率的标准差 σ 来表示

我们希望解决的的问题是，如何平衡这两个核心指标，进行合理的资产组合分配

2. 模型假设

均值-方差模型依据以下几个假设：

1、投资者在考虑每一次投资选择时，依据的是某一持仓时间内的证券收益的概率分布

2、证券组合的风险由**期望收益率的方差/标准差**来估测，且投资者的决定仅依据证券的风险和收益

4、在一定的风险水平上，投资者期望收益最大；相对应的是在一定的收益水平上，投资者希望风险最小

3. 数学模型

- 我们要将财富分配到 n 个不同的资产上，组成投资组合，总收益率记为 $r_p = \sum w_i \cdot r_i = r^T w$，其中：
  - 用 $r = (r_1, r_2, ..., r_n)$ 表示各资产的收益率，其中每个 r_i 是一个随机变量
  - 用 $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ 表示各资产在投资组合中占的比例，有 $\sum w_i = 1$
- 用 Σ 表示 r 的协方差矩阵，$\Sigma_{ij} = Cov(r_i, r_j)$
- 投资者的预期收益率为 r_d，不同投资者的预期不同

由以上符号可以得出，投资组合的期望收益率和方差为：

$$\mathbb{E}r_p = \mathbb{E}(r^T w) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \mathbb{E}r_i$$

$$\sigma_p^2 = Var(r^T w) = \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} = w^T \Sigma w$$

允许卖空，即不必有 $w_i \geq 0$。我们希望投资组合在**达到预期收益率**的同时，使**风险（方差）最小化**，即：

$$
\begin{aligned}
\min_{w} \quad & \frac{1}{2} w^T \Sigma w \\
\text{s.t.} \quad & r^T w = r_d \\
& e^T w = 1
\end{aligned} \tag{MM}
$$

4. 求解及讨论

模型求解的推导由个人独立完成，篇幅所限，推导过程见附录（1）。

求解结果为:

$$w^* = \Sigma^{-1} \cdot (\lambda r + \mu e)$$

在取最优资产配置，即 $w = w^*$ 时，可以算出投资组合的风险为:

$$\sigma_p^2 = \frac{C_{ee} r_d^2 - 2C_{er} \cdot r_d + C_{rr}}{C_{rr} C_{ee} - C_{er}^2} \tag{*}$$

其中 $C_{rr} = r^T \Sigma^{-1} r C_{er} = e^T \Sigma^{-1} r C_{ee} = e^T \Sigma^{-1} e$

可以看出，最优的 σ_p^2 是投资者预期收益率 r_d 的二次函数，最小值点为:

$$r_d^* = \frac{C_{er}}{C_{ee}} \sigma_p^{2*} = \frac{1}{C_{ee}}$$

称该点对应的投资组合为*最小方差组合*

均值-方差有效前沿

式 $*$ 定义了一个关于 r_d 的二次函数，称为为*最小方差集*。最小方差集的上半部分称为有*效前沿*，有效前沿上的所有投资组合称为有*效投资组合*。有效投资组合是给定 r_d 时，风险最小的投资组合

根据该式可以画出对应的 $\sigma_p - r_d$ 曲线，呈“子弹头”形式

有效前沿的意义：包含了所有最优的收益-风险组合

根据投资者自行设定的预期收益率 r_d，可以在最小方差集上找到唯一对应的一点，即为该收益率下风险最小的投资策略；而在一个固定的风险 σ_p 下，有效前沿上对应的点即为该风险下最大的期望收益率。

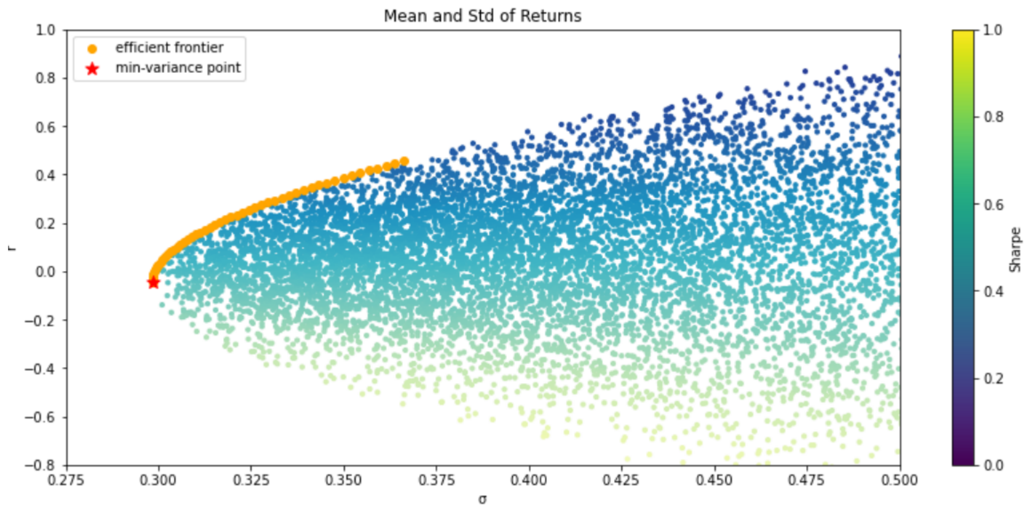

图 1: 有效前沿“子弹头”

5. 拓展-引入无风险资产（MM2）

在该场景下，考虑市场上有收益率为 r_f 的无风险（$\sigma_f = 0$）资产，在投资组合中占比为 w_f，与风险资产的协方差为 0。令权重向量 w 表示投资组合中风险资产的权重，则模型变为：

$$\begin{aligned} \min_{w} \quad & \frac{1}{2} w^T \Sigma w \\ \text{s.t.} \quad & r^T w + r_f w_f = r_d \\ & e^T w + w_f = 1 \end{aligned} \tag{MM2}$$

用和 MM 相同的方法求解，可以得到最优解为：

$$\begin{aligned} w^* &= \lambda^* \Sigma^{-1} (r - r_f \cdot e) \\ w_f^* &= 1 - e w^* \\ \lambda^* &= \frac{r_d - r_f}{C_{rr} - 2 r_f \cdot C_{er} + r_f^2 \cdot C_{ee}} \end{aligned}$$

推出有效前沿的表达式为：

$$\sigma_p^2 = \frac{(r_d - r_f)^2}{C_{rr} - 2 r_f \cdot C_{er} + r_f^2 \cdot C_{ee}} \Rightarrow \quad \sigma_p = \frac{r_d - r_f}{\sqrt{C_{rr} - 2 r_f \cdot C_{er} + r_f^2 \cdot C_{ee}}}$$

可以看出，此时的有效前沿（$\sigma_p - r_d$ 图）是一条从 $(0, r_f)$ 出发的直线

切点投资组合与单基金定理

MM 可以看作 MM2 的一个 $w_f = 0$ 的特例，因此，MM 和 MM2 的有效前沿至少存在一个交点；此外，由于无风险资产的 $\sigma_f = 0$，所以在收益率相等时，MM2 组合的总风险不会超过 MM。因此可以推出，MM2 与 MM 的有效前沿相切于一点 F，即*切点投资组合*

可以推出 F 在有效前沿上的坐标，推导见附录（2）

切点的意义：如果投资组合对应的点在 F 之上，即 $r_p > r_F$，即表示无风险资产的权重为负数。在实际中，这意味着投资者借入了无风险资产

由于有效前沿是一条直线，而无风险资产和 F 分别是该直线上的两个点，由线性方程的性质可以得到**单基金定理**：存在一个风险资产的组合 F，使得任意一个有效组合都可以表示为 F 和无风险资产的线性组合

这个结论是 CAPM 的起点。

资本资产定价模型（CAPM）

1. 问题描述

MM 为投资者解决了如何选择投资组合的问题。现在需要解决的另一个问题是，资产的售卖者如何为各种资产确定合理的价格，因此产生了 CAPM（Capital Asset Pricing Model）

市场组合 M，是一个资产组合，包含了市场上所有的风险证券，且满足：每种证券的占比即为该证券市值占总市值的比例

2. 模型假设

CAPM 以 MM 为基础，但假设更加严格。CAPM 的附加假设条件随意百度就可以搜到，不在这里占据篇幅。

CAPM 的假设表明：

- 市场上只有一条有效边界
- 投资者按照 MM 进行多样化的投资，并将从有效边界上选择投资组合
- 资本市场是完全有效的市场，没有任何因素会阻碍投资

3. 资本市场线（CML）

在假设条件下，由于每个投资者都遵循参数相同的 MM 进行投资。根据单基金定理，所有人都会选择相同的风险投资组合 F，不同投资者之间的区别只体现在 F 和无风险资产的投资比例上。当市场达到均衡时，市场组合 M 即为单基金定理中的 F

CML 是穿过无风险资产点和 M 的一条直线，数学表达为：

$$r = r_f + \frac{r_M - r_f}{\sigma_M} \cdot \sigma$$

市场中的所有有效组合都在这条直线上，其斜率称为风险价格，表示当资产的标准差增加一个单位时，收益率的增加量

根据 MM2，我们知道 CML 就是市场的有效前沿！

- CML 体现了有效投资组合的期望收益率和风险的关系
- 只有最优投资组合都在 CML 上，其他都在 CML 下方

4. CAPM 模型

CAPM 希望求出单个资产 i 的期望收益率 r_i 和风险的关系

用资产的 **beta 值**来作为风险指数，表示资产相对于整个市场的波动情况：

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

CAPM 的模型依赖于 MM 模型的讨论——MM 与 MM2 相切于有效资产组合点。CAPM 给出，在给定有效市场组合 M 时，资产 i 满足：

$$r_i - r_f = \beta_i \cdot (r_M - r_f)$$

推导见附录（3）

要求出资产的理论定价，只需用现在的价格和将来的价格表示预期收益率，求解方程即可。

CAPM 的含义：资产的超额收益率（$r_i - r_f$）与市场组合的超额收益率（$r_M - r_f$）有线性关系，且与 σ_{iM} 成正比

5. 证券市场线（SML）

SML 由 CAPM 导出，即：

$$r_i = r_f + \frac{r_M - r_f}{\sigma_M^2} \cdot \sigma_{iM}$$

- SML 体现了单个资产的期望收益率和其与 M 的协方差的关系
- 所有资产及其组合都在 SML 上

模型比较

- MM：如何通过建立投资组合而降低风险，即告诉投资者该如何选择投资策略
- CAPM：当投资者都采用 MM 进行投资且市场达到均衡的条件下，资产的定价应该是怎样的

MM 提出了分散效应，证明了分散投资的合理性；首次用数学方法对风险和收益进行精确描述，为现代投资组合理论奠定了基础。但 MM 计算复杂，当资产数量很多时，模型计算需要很大的算力（有矩阵求逆！）；如果要重新配置资产组合，重算的成本也很高。同时，模型还要求对每个资产的预期收益率、标准差和不同资产之间的相关系数进行较精确的估计，在实践中较难实现。

CAPM 模型是建立在 MM 之上的，在 CAPM 中，资产的预期收益率和风险的关系被表示成线性关系，大大简化了运算过程。CAPM 的有点就在于简单明确，而且不需要考虑可分散的非系统风险，有更强的实用性。它的局限性在于其严苛的假设条件，比如完全竞争的市场、不受限制的无风险借贷，这在现实中是难以实现的。另外，β 值的估计也是难点之一。

实验-代码实现

使用 python 语言和真实股票数据，对 MM 模型进行了实现。

数据

实验使用了五支股票在近一年内的真实数据，数据来源为 Yahoo Finance

五支股票分别来自不同行业（电商，工业，新能源，医疗，科技），让风险分散效应更显著

实验细节

1. 文件说明：

   压缩包中有两个代码文件，分别为 `optim_sol.ipynb` 和 `analytic_sol.ipynb`

- `optim_sol.ipynb`：调用 python 的优化包 `scipy.optimize` 对 MM 模型进行求解
- `analytic_sol.ipynb`：直接用 MM 的解析解计算

2. 实现细节

两个代码使用相同的五支股票数据，进行了以下实验步骤：

- **构造可行集**：随机生成权重向量 w，取样 20000 次，用散点图画出所有 w 下资产组合的 r 和 σ，并用资产组合的夏普比率大小进行着色
- **计算有效前沿**，分别用调用求解器和直接使用解析解的方式，分别得到结果如下：

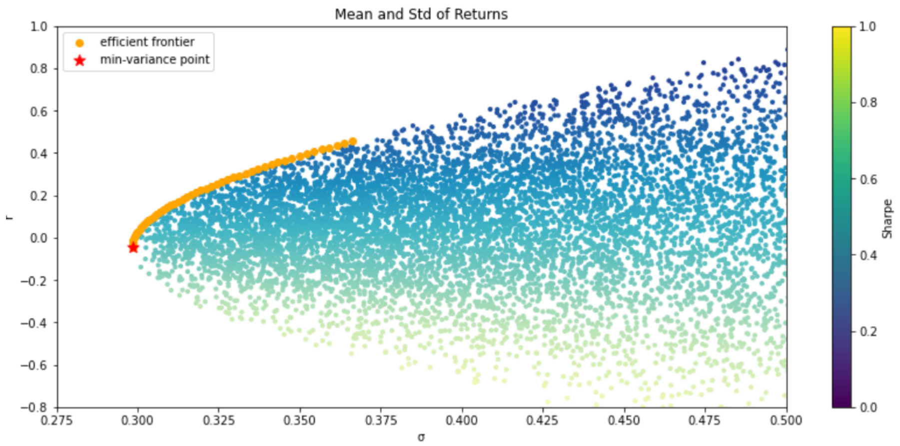

图 2: 有效前沿-求解器

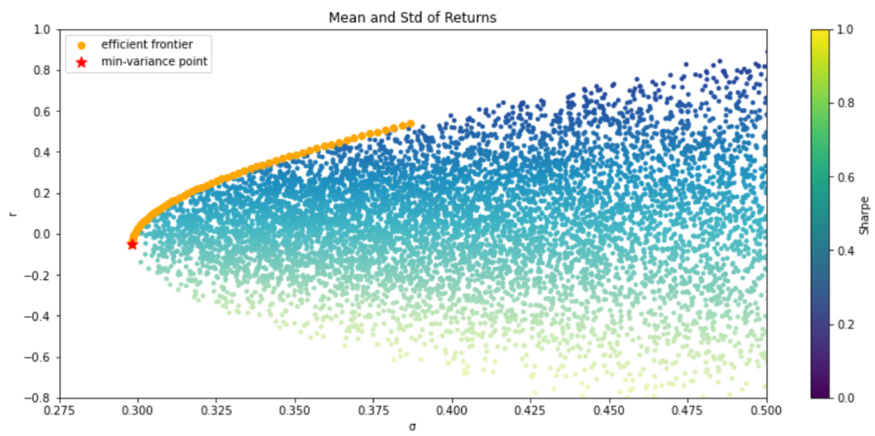

图 3: 有效前沿-解析解

可以看出二者效果相同。

- **引入无风险资产**，设 $r_f = 0.04$，计算切点组合 F 和 M2 的有效前沿

  最后得到的结果见图 4

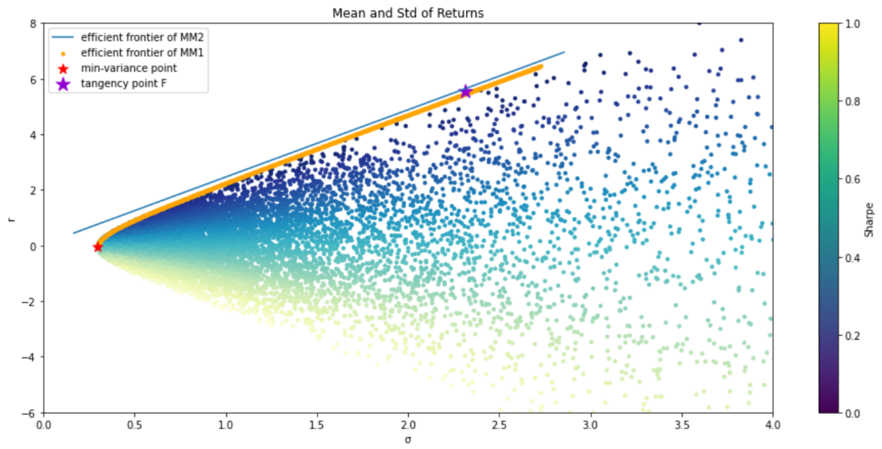

图 4: 有效前沿-MM2

遇见的问题和思考

1. 数据集

   起初寻找数据比较随意，从一个熟悉的企业（百度）开始找，然后在 Yahoo Finance 的侧边栏再随便点一个，最后找的五个数据分别是百度、京东、阿里巴巴、拼多多、腾讯

   这样的数据集下，画出的有效前沿和几个特殊点都不尽人意，后来更换成来自不同领域的另外五支股票，得到了想要的结果，思考后认为：这个五支股票来自相似的领域，有比较强的相关性，会影响投资组合的风险分散能力

2. 权重向量 w 的初始化

   一开始使用 `w = np.random.random(n)` 初始化，效果是这样：

图 5: random 初始化

后来改成 `w = np.random.normal(0, 1, n)` 初始化，得到理想的“子弹头”效果如图 6 所示：

图 6: normal 初始化

原因：`random(n)` 只会产生正数，这相当于给模型加入了【不能卖空（$w \geq 0$)】的额外约束，会缩小可行集！

※ 待解决的问题：切点组合的求解

在引入无风险资产后求解切点组合 F，分别使用了求解器优化（最大化夏普比率）和直接代入解析解的方法，但发现两种方法求出的结果不同，且直接代入解析解求出的切点跑到了可行集的下方。并没有成功发现错误出在哪里。

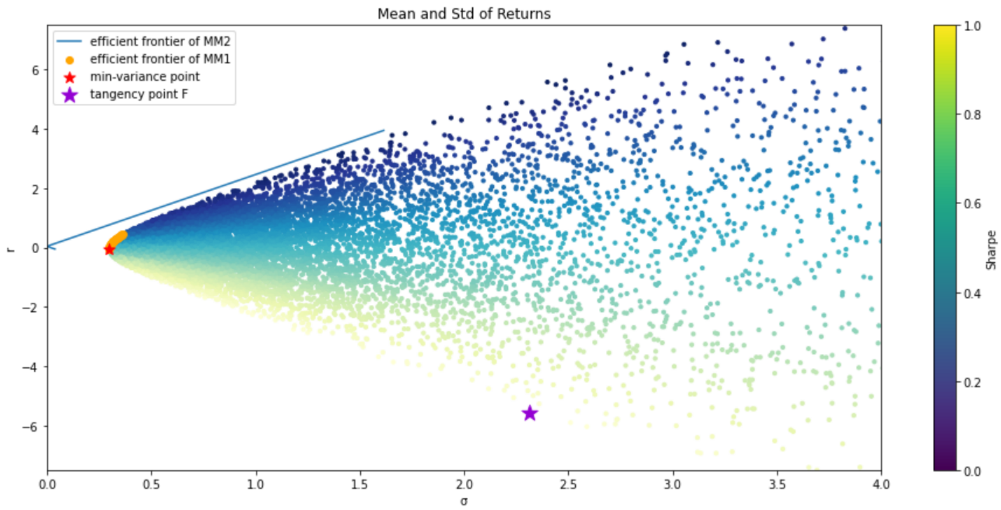

图 7: 求解器切点

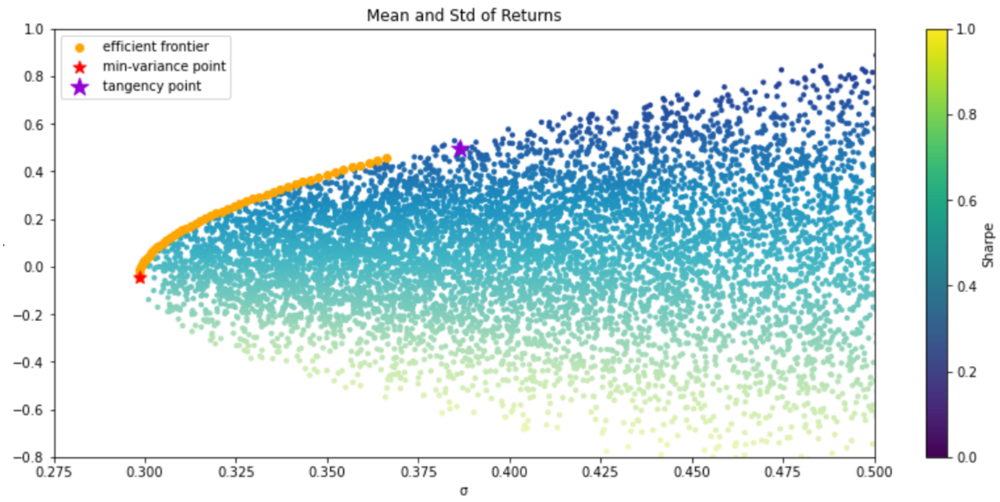
Mean and Std of Returns
efficient frontier
min-variance point
tangency point
σ
Sharpe

图 8: 解析解切点

附录

（1）MM 推导

该模型是一个有约束的二次优化问题。由于协方差矩阵 Σ 是一个半正定矩阵，所以该问题是一个凸问题，可以用 KKT 条件进行求解。

引入拉格朗日乘子 λ 和 μ，写出拉格朗日函数为：

$$L(w,\lambda,\mu)=\frac{1}{2}w^T\Sigma w-\lambda\cdot(r^Tw-r_d)-\mu\cdot(e^Tw-1)$$

可以写出最优性条件：

$$\begin{aligned}
&\nabla_w L=\Sigma\cdot w-\lambda r-\mu e=0 && (1)\\
&r^Tw=r_d && (2)\\
&e^Tw=1 && (3)
\end{aligned}$$

共 n+2 个未知数，有 n+2 个方程，可以求解。

由 (1)：

$$w^*=\Sigma^{-1}\cdot(\lambda r-\mu e)=\Sigma^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r & e\end{pmatrix}$$

带入 (2)(3) 可得：

$$r^T\cdot\Sigma^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r & e\end{pmatrix}=r_de^T\cdot\Sigma^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r & e\end{pmatrix}=1$$

化简可得最优解：

$$\begin{gathered}
w^*=\Sigma^{-1}\cdot(\lambda r+\mu e)\\
\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}C_{rr} & C_{er}\\ C_{er} & C_{ee}\end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}r_d\\ 1\end{pmatrix}
\end{gathered}$$

可以推得有效前沿的表达式：

$$
\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= w^{*T}\Sigma w^* \\
&= (\lambda r + \mu e)^T (\Sigma^{-1})^T \cdot \Sigma \cdot \Sigma^{-1}(\lambda r + \mu e) \\
&= \begin{pmatrix} \lambda & \mu \end{pmatrix} \begin{bmatrix} C_{rr} & C_{er} \\ C_{er} & C_{ee} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r_d & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} C_{rr} & C_{er} \\ C_{er} & C_{ee} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r_d \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{C_{ee} r_d^2 - 2C_{er} \cdot r_d + C_{rr}}{C_{rr}C_{ee} - C_{er}^2}
\end{aligned} \tag{*}
$$

MM2

$$
\begin{aligned}
\min_{w} \quad & \frac{1}{2} w^T \Sigma w \\
\text{s.t.} \quad & r^T w + r_f w_f = r_d \\
& e^T w + w_f = 1
\end{aligned} \tag{MM2}
$$

拉格朗日函数为:

$$
L(w, \lambda, \mu) = \frac{1}{2} w^T \Sigma w - \lambda \cdot (r^T w + r_f w_f - r_d) - \mu \cdot (e^T w + w_f - 1)
$$

最优性条件:

$$
\begin{aligned}
&\nabla_w L = \Sigma \cdot w - \lambda r - \mu e = 0 \\
&\nabla_{w_f} L = -\lambda r_f - \mu = 0 \\
&r^T w + r_f w_f = r_d \\
&e^T w + w_f = 1
\end{aligned}
$$

同理化简即可得最优解。

(2) 两个有效前沿的切点 F 的坐标推导

加入无风险资产后，模型最优解为:

$$
\begin{aligned}
w^* &= \lambda^* \Sigma^{-1}(r - r_f \cdot e) \\
w_f^* &= 1 - e^T w^* \\
\lambda^* &= \frac{r_d - r_f}{C_{rr} - 2r_f \cdot C_{er} + r_f^2 \cdot C_{ee}}
\end{aligned}
$$

由于切点也在原始的有效前沿上，所以切点处有 $w_f = 0$，即 $e^T w^* = 1$

因此：

$$
\begin{aligned}
& e^T w^* = \lambda^* e^T \Sigma^{-1}(r - r_f \cdot e) = 1 \\
\Rightarrow \quad & \lambda^* = \frac{1}{C_{er} - r_f \cdot C_{ee}} \\
\Rightarrow \quad & w^* = \frac{\Sigma^{-1}(r - r_f \cdot e)}{C_{er} - r_f \cdot C_{ee}}
\end{aligned}
$$

可以推得切点为：

$$
r_F = r^T w^* = \frac{C_{rr} - r_f \cdot C_{er}}{C_{er} - r_f \cdot C_{ee}} \sigma_F^2 = \frac{C_{rr} - 2r_f \cdot C_{er} + r_f^2 \cdot C_{ee}}{(C_{er} - r_f \cdot C_{ee})^2}
$$

(3) CAPM 推导

令资产 i 和市场组合 M 构成一个投资组合，占比分别为 α 和 $1-\alpha$，考虑该组合的收益和风险：

$$
r_\alpha = \alpha \cdot r_i + (1-\alpha) \cdot r_M \sigma_\alpha^2 = \alpha^2 \sigma_i^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_M^2 + \alpha(1-\alpha)\sigma_{iM}
$$

（注意该组合可以看为两个风险资产的组合，它的有效前沿是原始 MM 模型的“子弹头”形式）

当 α 变化时，可以形成一条该组合的 $r-\sigma$ 曲线。该曲线和资本市场线相切于市场点 M（道理同 MM 和 MM2）

把 r_α 和 σ_α^2 的表达式看作关于 α 的极坐标方程，求导得：

$$
\begin{aligned}
& \frac{\mathrm{d}r_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = r_i - r_M \\
& \frac{\mathrm{d}\sigma_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\alpha\sigma_i^2 - (1-\alpha)\sigma_M^2 + (1-2\alpha)\sigma_{iM}}{\sigma_\alpha} \\
\Rightarrow \quad & \frac{\mathrm{d}r_\alpha}{\mathrm{d}\sigma_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha(r_i - r_M)}{\alpha\sigma_i^2 - (1-\alpha)\sigma_M^2 + (1-2\alpha)\sigma_{iM}}
\end{aligned}
$$

在市场点 M，有 $\alpha = 0$，可以得到 M 处的斜率：

$$\frac{\mathrm{d}r_\alpha}{\mathrm{d}\sigma_\alpha}|_{\alpha=0} = \frac{\sigma_\alpha(r_i - r_M)}{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}$$

由于两线相切，所以斜率相等，即：

$$\frac{\sigma_\alpha(r_i - r_M)}{\sigma_{iM} - \sigma_M^2} = \frac{r_M - r_f}{\sigma_M}$$
$$\Rightarrow \; r_i = r_f + \frac{r_M - r_f}{\sigma_M^2}\sigma_{iM} = r_f + \beta_i(r_M - r_f)$$